Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, Бета-функция ансамбля Брюа–Титса и деформация пространства l^2 на множестве p -адических решеток, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 12, 31–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm786>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 12:48:00

УДК 519.46

Ю. А. Неретин

Бета-функция ансамбля Брюа–Титса и деформация пространства l^2 на множестве p -адических решеток

Для пространства Lat_n всех решеток в p -адическом n -мерном линейном пространстве получен аналог матричной бета-функции; эта бета-функция допускает вырождение в дзета-функцию Тамагавы. Вводится аналог ядер Березина для Lat_n . Для этих ядер получены условия положительной определенности и явная формула Планшереля.

Библиография: 18 названий.

Известно, что аффинные ансамбли Брюа–Титса (см., например, [1], [2]) являются правильными p -адическими аналогами римановых некомпактных симметрических пространств. Эта аналогия существует на уровне геометрии, гармонического анализа и специальных функций. Мы продолжаем эту параллель.

Во-первых, мы получаем аналог матричной бета-функции (см. [3], [4]) для пространств

$$\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)/\text{GL}_n(\mathbb{Z}_p), \quad (0.1)$$

см. теорему 2.1, эта бета-функция также обобщает дзета-функцию Тамагавы (следствие 2.12, теорема 2.13).

Во-вторых, мы определяем аналог ядер Березина (см. [5]) для однородных пространств (0.1). Мы получаем условия положительной определенности этих ядер (теорема 2.2) и формулу Планшереля (теоремы 2.3, 2.4).

По-видимому, не существует естественного p -адического аналога эрмитовых областей Картана и голоморфных дискретных серий. Однако ядра Березина на римановых симметрических пространствах допускают имитацию на уровне ансамблей. Более точно, наши объекты являются пространствами решеток, т.е. множествами вершин ансамблей. Эти ядра Березина (см. формулу (2.5)) имеют смысл для ансамблей, связанных с любыми p -адическими классическими группами; в настоящей статье мы рассматриваем только серию групп GL_n . В этом случае формула Планшереля, условия положительной определенности и предельное поведение похожи на вещественный случай настолько, насколько это возможно. По аналогии с вещественным случаем кажется правдоподобным, что для симплектических и ортогональных групп теория должна быть богаче. Естественно ожидать появления более сложных спектров (как в [5]) и операторов ограничения на некоторую идеальную границу (как в [6]), разделяющих эти спектры; оба эти явления действительно возникают в случае деревьев Брюа–Титса, см. [7].

Работа выполнена при поддержке NWO (грант № 047-008-009).

Для деревьев Брюа–Титса наши ядра были известны ранее (см. [8], [9]), в этом случае (он не обсуждается в статье) параллель между плоскостью Лобачевского и деревом может быть продолжена на группу диффеоморфизмов окружности, см. [7].

В §1 содержатся предварительные сведения, результаты сформулированы в §2, доказательства изложены в §§3–6.

§1. Предварительные сведения

1.1. Обозначения. Обозначим через $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$ поле p -адических чисел, а через $\mathbb{O}$ – кольцо целых p -адических чисел. Символом $|\cdot|$ обозначим норму на $\mathbb{K}$. Если $z, z^{-1} \in \mathbb{O}$, то $|z| = 1$. Напомним, что $|p| = p^{-1}$ и $|zu| = |z||u|$.

Через $\mathbb{F}_p$ обозначим поле из p элементов, $\mathbb{F}_p \simeq \mathbb{O}/p\mathbb{O}$.

Через $\mathbb{K}^n$ обозначим n -мерное линейное пространство над $\mathbb{K}$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – стандартный базис в $\mathbb{K}^n$. Через $\mathbb{K}^l$ мы обозначим подпространство в $\mathbb{K}^n$, порожденное $e_1, \dots, e_l$.

Пусть $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ – группа обратимых $(n \times n)$ -матриц над $\mathbb{K}$. Через $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$ мы обозначим группу матриц $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ таких, что все матричные элементы g и g^{-1} целые. Группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$ является максимальной компактной подгруппой в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Через Lat_n обозначим пространство всех решеток (определение см. в п. 1.2) в $\mathbb{K}^n$. Через $l^2(\mathrm{Lat}_n)$ обозначим гильбертово пространство комплекснозначных функций f на Lat_n , удовлетворяющих условию $\sum_R |f(R)|^2 < \infty$; это пространство снабжено скалярным произведением

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{R \in \mathrm{Lat}_n} f_1(R) \overline{f_2(R)}.$$

1.2. Пространство решеток. Решеткой в $\mathbb{K}^n$ называется компактный открытый $\mathbb{O}$ -подмодуль. Напомним, что любая решетка R представима в виде

$$R = \mathbb{O}f_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{O}f_n, \quad (1.1)$$

где $f_1, \dots, f_n$ – некоторый базис в $\mathbb{K}^n$, см. [10; §II.2]. Через $\mathbb{O}^n$ обозначим решетку $\mathbb{O}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{O}e_n$.

Группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ действует транзитивно на Lat_n . Стабилизатор решетки $\mathbb{O}^n$ есть $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$. Таким образом,

$$\mathrm{Lat}_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}).$$

Орбиты компактной группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$ на Lat_n конечны. Каждая орбита содержит единственный представитель вида

$$p^{k_1}\mathbb{O}e_1 \oplus \dots \oplus p^{k_n}\mathbb{O}e_n, \quad k_1 \geq \dots \geq k_n, \quad (1.2)$$

см. [10; §II.2, теорема 2].

Другими словами, пространство $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}) \backslash \mathrm{Lat}_n$ всех $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$ -орбит на Lat_n находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\mathfrak{P}_n^+$, элементы которого суть наборы целых чисел

$$\mathbf{k}: \quad k_1 \geq \dots \geq k_n. \quad (1.3)$$

Через $\mathcal{O}[\mathbf{k}]$ обозначим орбиту, содержащую решетку (1.2).

Множество $\mathfrak{P}_n^+ = \mathrm{GL}_n(\mathbb{O}) \setminus \mathrm{Lat}_n$ совпадает с пространством двойных классов смежности $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}) \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$.

Для $s \in \mathbb{Z}$ обозначим через m_s число k_j таких, что $k_j = s$. Число точек орбиты $\mathcal{O}[\mathbf{k}]$ равно

$$\nu(\mathbf{k}) = \frac{p^{\sum(n-2j+1)k_j} \prod_{1 \leq l \leq n} (1 - p^{-l})}{\prod_s \prod_{1 \leq l \leq m_s} (1 - p^{-l})}, \quad (1.4)$$

см. [11; V, (2.9)].

1.3. Объем. Существует единственная с точностью до скалярного множителя мера (*объем*) на $\mathbb{K}^n$, инвариантная относительно сдвигов. Мы нормализуем объем в $\mathbb{K}^n$ условием

$$\mathrm{vol}(\mathbb{O}^n) = 1.$$

Очевидно,

$$\mathrm{vol}\left(\bigoplus_{j=1}^n p^{k_j} \mathbb{O} e_j\right) = p^{-\sum k_j}.$$

Мы также нормализуем объем в произвольном линейном подпространстве $V \subset \mathbb{K}^n$ условием

$$\mathrm{vol}_V(\mathbb{O}^n \cap V) = 1.$$

1.4. Сферические функции на $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Обозначим через B_n группу всех верхнетреугольных матриц над $\mathbb{K}$ размера $n \times n$, группа B_n является стабилизатором флага

$$0 = \mathbb{K}^0 \subset \mathbb{K}^1 \subset \dots \subset \mathbb{K}^{n-1} \subset \mathbb{K}^n.$$

Обозначим через Fl_n пространство всех флагов

$$\mathcal{V}: \quad 0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{K}^n, \quad \dim V_j = j,$$

на $\mathbb{K}^n$; пространство Fl_n является однородным пространством $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/B_n$. Это пространство также однородно относительно компактной подгруппы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$; поэтому существует единственная с точностью до скалярного множителя $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$ -инвариантная мера $d\mathcal{V}$ на Fl_n . Мы предполагаем, что мера всего Fl_n равна единице.

Для элемента V_j флага $\mathcal{V}$ рассмотрим естественную меру vol_{V_j} на V_j и естественную меру vol_{gV_j} на gV_j . Рассмотрим также образ $g \cdot \mathrm{vol}_{V_j}$ меры vol_{V_j} под действием отображения g . Таким образом, мы получаем две меры на gV_j , обозначим через $a_j(g; \mathcal{V})$ их отношение, т.е.

$$g \cdot \mathrm{vol}_{V_j}(Q) = a_j(g; \mathcal{V}) \mathrm{vol}_{gV_j}(Q)$$

для любого подмножества $Q \subset gV_j$.

Очевидно, эти числа (мультипликаторы) удовлетворяют тождеству

$$a_j(g_1 g_2; \mathcal{V}) = a_j(g_1; g_2 \mathcal{V}) a_j(g_2; \mathcal{V}). \quad (1.5)$$

Производная Радо́на–Нико́дима $d(g\mathcal{V})/d\mathcal{V}$ преобразования $\mathcal{V} \mapsto g\mathcal{V}$ равна

$$\frac{d(g\mathcal{V})}{d\mathcal{V}} = \prod_{j=1}^n \left(\frac{a_j(g; \mathcal{V})}{a_{j-1}(g; \mathcal{V})} \right)^{-(n+1)+2j}. \quad (1.6)$$

Фиксируем комплексные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Рассмотрим представление T_λ группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ в пространстве $L^2(\mathrm{Fl}_n)$, определенное формулой

$$\begin{aligned} T_\lambda(g)f(\mathcal{V}) &= f(g\mathcal{V}) \cdot \prod_{j=1}^{n-1} a_j(g; \mathcal{V})^{-1-\lambda_j+\lambda_{j+1}} \cdot a_n(g; \mathcal{V})^{(n-1)/2-\lambda_n} \\ &= f(g\mathcal{V}) \cdot \prod_{j=1}^n \left(\frac{a_j(g; \mathcal{V})}{a_{j-1}(g; \mathcal{V})} \right)^{-(n+1)/2+j-\lambda_j} \end{aligned} \quad (1.7)$$

(мы предполагаем $a_0 = 1$). Ввиду (1.5) T_λ является представлением. Если $\lambda_j = is_j$ чисто мнимые, то T_λ унитарно в L^2 (это следует из (1.6)).

Представления T_λ называются представлениями *невыврожденной основной серии*. Для мнимых $\lambda_j = is_j$ наши представления называются представлениями *невыврожденной основной унитарной серии*.

Рассмотрим перестановку $\sigma \in S_n$ множества $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Для чисто мнимых $\lambda_j = is_j$ выполнено

$$T_{\sigma\lambda} \simeq T_\lambda,$$

то же самое верно для точек $\lambda \in \mathbb{C}^n$ общего положения.

Через $\mathbf{1}$ мы обозначим функцию $f(\mathcal{V}) = 1$ на Fl_n . *Сферическая функция* $\varphi_\lambda(g)$ определяется как следующий матричный элемент представления T_λ :

$$\varphi_\lambda(g) := \langle T_\lambda(g)\mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle_{L^2} = \int_{\mathrm{Fl}_n} \prod_{j=1}^n \left(\frac{a_j(g; \mathcal{V})}{a_{j-1}(g; \mathcal{V})} \right)^{-(n+1)/2+j-\lambda_j} d\mathcal{V}, \quad (1.8)$$

где $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Сферические функции являются $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$ -биинвариантными в следующем смысле:

$$\varphi_\lambda(g) = \varphi_\lambda(h_1gh_2), \quad g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad h_1, h_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{O}). \quad (1.9)$$

Действительно,

$$\varphi_\lambda(h_1gh_2) = \langle T_\lambda(h_1gh_2)\mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle = \langle T_\lambda(g)T_\lambda(h_2)\mathbf{1}, T_\lambda^*(h_1)\mathbf{1} \rangle = \langle T_\lambda(g)\mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle.$$

Эти функции симметричны относительно перестановок параметров λ_j :

$$\varphi_{\sigma\lambda}(g) = \varphi_\lambda(g), \quad \sigma \in S_n.$$

Также для любого вектора

$$v = \frac{2\pi i}{\ln p}(l_1, \dots, l_n), \quad l_j \in \mathbb{Z}, \quad (1.10)$$

выполнено

$$\varphi_{\lambda+v}(g) = \varphi_{\lambda}(g).$$

Действительно, множители a_j в (1.8) удовлетворяют $\log_p a_j \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, сферические функции φ_{λ} параметризуются фактором

$$\mathbb{C}^n / \left[S_n \ltimes \frac{2\pi i}{\ln p} \mathbb{Z}^n \right]$$

пространства $\mathbb{C}^n$ по группе, порожденной перестановками координат и сдвигами на векторы (1.10).

Сферические функции φ_{λ} были определены как функции на $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. В силу бинвариантности (1.9) мы можем рассматривать их как функции на $\mathrm{Lat}_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$ или как функции на двойных классах смежности $\mathfrak{P}_n^+ = \mathrm{GL}_n(\mathbb{O}) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$.

1.5. Сферические функции как функции на $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$. Явное выражение сферических функций как функций на $\mathfrak{P}_n^+$ было получено в [12], см. также [11; V, (3.4)]:

$$\varphi_{\lambda}(k_1, \dots, k_n) = A \cdot p^{\sum((n+1)/2-j)k_j} \sum_{\sigma \in S_n} p^{-\sum_j k_j \lambda_{\sigma(j)}} \prod_{m < l} \frac{p^{-\lambda_{\sigma(m)}} - p^{-1-\lambda_{\sigma(l)}}}{p^{-\lambda_{\sigma(m)}} - p^{-\lambda_{\sigma(l)}}}, \quad (1.11)$$

где суммирование берется по всем перестановкам σ множества $\{1, 2, \dots, n\}$, а постоянная A есть

$$A = \frac{(1 - p^{-1})^n}{\prod_{j=1}^n (1 - p^{-j})}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Таким образом, выражение $\varphi_{\lambda}(\mathbf{k})$ при фиксированном $\mathbf{k}$ является симметрической функцией Холла–Литтлвуда (см. [11; часть III]) от переменных $z_j = p^{\lambda_j}$.

1.6. Сферические функции как функции на Lat_n . Сферические функции φ_{λ} на Lat_n имеют следующее интегральное представление:

$$\varphi_{\lambda}(R) = \int_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})} \prod_{j=1}^{n-1} \mathrm{vol}((hR) \cap \mathbb{K}^j)^{1+\lambda_j-\lambda_{j+1}} \cdot \mathrm{vol}(hR)^{-(n-1)/2+\lambda_n} dh, \quad (1.12)$$

где dh – мера Хаара на $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$; мы полагаем, что мера всей группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$ равна единице. Это следует из (1.9): так как пространство Fl_n является $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$ -однородным, мы можем заменить интегрирование по Fl_n на интегрирование по $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$.

Далее, мы заменяем интегрирование по $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$ в (1.12) на усреднение по $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$ -орбитам

$$\varphi_{\lambda}(R) = \frac{1}{\nu(\mathbf{k})} \sum_{R \in \mathcal{O}[\mathbf{k}]} \prod_{j=1}^{n-1} \mathrm{vol}(R \cap \mathbb{K}^j)^{1+\lambda_j-\lambda_{j+1}} \cdot \mathrm{vol}(R)^{-(n-1)/2+\lambda_n}, \quad (1.13)$$

где $\nu(\mathbf{k})$ задано формулой (1.4).

1.7. Сферические функции как инвариантные ядра на Lat_n . Пусть $L(R, S)$ – функция на $\text{Lat}_n \times \text{Lat}_n$, инвариантная относительно действия $\text{GL}_n(\mathbb{K})$, т. е.

$$L(gR, gS) = L(R, S), \quad R, S \in \text{Lat}_n, \quad g \in \text{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Тогда

$$\ell(S) := L(\mathbb{O}^n, S)$$

является $\text{GL}_n(\mathbb{O})$ -инвариантной функцией на Lat_n . Обратно, по $\text{GL}_n(\mathbb{O})$ -инвариантной функции ℓ на Lat_n мы можем восстановить соответствующее $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ -инвариантное ядро $L(R, S)$.

Применим это замечание к сферическим функциям и определим *сферическое ядро* $\Phi_\lambda(R, T)$ на $\text{Lat}_n \times \text{Lat}_n$ по формуле

$$\Phi_\lambda(g\mathbb{O}^n, h\mathbb{O}^n) := \varphi_\lambda(g^{-1}h\mathbb{O}^n).$$

1.8. Сферическое преобразование. Рассмотрим $\text{GL}_n(\mathbb{O})$ -инвариантную функцию f на Lat_n . Ее *сферическое преобразование* – это функция $\widehat{f}$ от переменных λ_j , определенная формулой

$$\widehat{f}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{R \in \text{Lat}_n} \varphi_{-\lambda_1, \dots, -\lambda_n}(R) f(R). \quad (1.14)$$

Если рассматривать f как функцию на $\mathfrak{P}_n^+$, то

$$\widehat{f}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathfrak{P}_n^+} \nu(\mathbf{k}) \varphi_{-\lambda_1, \dots, -\lambda_n}(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}).$$

Ввиду того что $f(R)$ в (1.14) постоянна на $\text{GL}_n(\mathbb{O})$ -орбитах, формула (1.13) позволяет преобразовать (1.14) к виду

$$\widehat{f}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{R \in \text{Lat}_n} f(R) \left[\prod_{j=1}^{n-1} \text{vol}(R \cap \mathbb{K}^j)^{1+\lambda_j-\lambda_{j+1}} \cdot \text{vol}(R)^{-(n-1)/2+\lambda_n} \right]. \quad (1.15)$$

1.9. Теорема Планшереля. *Формула обращения* Макдональда для сферического преобразования (см. [12]) имеет вид

$$f(R) = \int_{0 \leq s_j \leq 2\pi / \ln p} \widehat{f}(is_1, \dots, is_n) \varphi_{is_1, \dots, is_n}(R) d\mu(s), \quad (1.16)$$

где *мера Планшереля* $d\mu(s)$ равна

$$d\mu(s) = C \cdot \prod_{k < l} \left| \frac{p^{is_k} - p^{is_l}}{p^{is_k} - p^{-1+is_l}} \right|^2 ds_1 \cdots ds_n, \quad (1.17)$$

а постоянная C задается формулой

$$C = \frac{\ln^n p}{(2\pi)^n n!} \prod_{j=1}^n \frac{1 - p^{-j}}{1 - p^{-1}}. \quad (1.18)$$

Выполняется также *формула Планшереля*

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathfrak{P}_n^+} |f(\mathbf{k})|^2 \nu(\mathbf{k}) = \int_{0 \leq s_j \leq 2\pi / \ln p} |\widehat{f}(is)|^2 d\mu(s).$$

1.10. Явное спектральное разложение для $l^2(\text{Lat}_n)$. Обозначим через Ξ_n симплекс

$$0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq \frac{2\pi}{\ln p}. \quad (1.19)$$

Снабдим этот симплекс мерой Планшереля $n! d\mu(s)$, где $d\mu(s)$ задана формулой (1.17). Введем на пространстве $\Xi_n \times \text{Fl}_n$ произведение мер $d\mu(s) \times d\mathcal{V}$.

Группа $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ действует в пространстве $L^2(\Xi_n \times \text{Fl}_n)$ унитарными операторами

$$\rho(g)\Psi(s, \mathcal{V}) = \Psi(s, g\mathcal{V}) \cdot \prod_{j=1}^n \left(\frac{a_j(g; \mathcal{V})}{a_{j-1}(g; \mathcal{V})} \right)^{-(n+1)/2+j-is_j}. \quad (1.20)$$

Эта формула определяет однократный прямой интеграл унитарных представлений основной невырожденной серии.

Для функции $f(R)$ на Lat_n определим функцию $Jf(s, \mathcal{V})$, заданную формулой

$$Jf(s, \mathcal{V}) = \sum_{R \in \text{Lat}_n} f(R) \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \text{vol}(R \cap \mathbb{K}^j)^{1-is_j+is_{j+1}} \cdot \text{vol}(R)^{-(n-1)/2-is_n}. \quad (1.21)$$

Легко убедиться, что оператор J сплетает представление $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ в $l^2(\text{Lat}_n)$ и представление ρ . Кроме того, оператор J является унитарным оператором

$$l^2(\text{Lat}_n) \rightarrow L^2(\Xi_n \times \text{Fl}_n, d\mu(s) \times d\mathcal{V})$$

(это переформулировка формулы Планшереля для сферического преобразования).

§ 2. Результаты

2.1. Бета-функция. Рассмотрим флаг

$$0 = \mathbb{K}^0 \subset \mathbb{K}^1 \subset \dots \subset \mathbb{K}^{n-1} \subset \mathbb{K}^n. \quad (2.1)$$

Рассмотрим решетки $\mathbb{O}^j = \mathbb{K}^j \cap \mathbb{O}^n$. Таким образом, мы получаем флаг $\mathbb{O}$ -модулей

$$0 = \mathbb{O}^0 \subset \mathbb{O}^1 \subset \dots \subset \mathbb{O}^{n-1} \subset \mathbb{O}^n.$$

Фиксируем комплексные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ такие, что

$$\text{Re } \beta_j + j - 1 < 0, \quad \text{Re } \alpha_j + \text{Re } \beta_j - n + j > 0. \quad (2.2)$$

Положим $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}$.

ТЕОРЕМА 2.1.

$$\sum_{R \in \text{Lat}_n} \prod_{j=1}^n \left\{ \text{vol}(R \cap \mathbb{K}^j)^{\beta_j - \beta_{j+1}} \text{vol}(R \cap \mathbb{O}^j)^{\alpha_j - \alpha_{j+1}} \right\} \quad (2.3)$$

$$= \prod_{j=1}^n \frac{1 - p^{-(\alpha_j - n + j)}}{(1 - p^{\beta_j + j - 1})(1 - p^{-(\alpha_j + \beta_j - n + j)})}. \quad (2.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Ряд сходится при выполнении условия (2.2).

2.2. Деформация l_2 . Фиксируем $\alpha \in \mathbb{R}$. Пусть R, S пробегают Lat_n . Рассмотрим ядро

$$K_\alpha(R, S) = \frac{\text{vol}(R \cap S)^\alpha}{\text{vol}(R)^{\alpha/2} \text{vol}(S)^{\alpha/2}}. \quad (2.5)$$

ТЕОРЕМА 2.2. а) Пусть

$$\alpha = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{или} \quad \alpha > n-1. \quad (2.6)$$

Тогда существуют гильбертово пространство H_α и система векторов $e_R \in H_\alpha$, где R пробегает Lat_n , такие, что скалярные произведения векторов e_R имеют вид

$$\langle e_R, e_S \rangle = K_\alpha(R, S) \quad (2.7)$$

и линейные комбинации векторов e_R плотны в H_α .

б) Если α не содержится в множестве (2.6), то гильбертово пространство H_α не существует.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пространство H_α единственно в следующем смысле. Пусть H'_α — другое гильбертово пространство, а $e'_R \in H'$ — другая система векторов, удовлетворяющая тем же условиям. Тогда существует унитарный оператор $A: H_\alpha \rightarrow H'_\alpha$ такой, что $Ae_R = e'_R$ для всех решеток R .

ЗАМЕЧАНИЕ. Пространство H_0 одномерно, а все векторы e_R в этом случае совпадают.

Группа $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ действует в пространстве H_α унитарными операторами

$$U_\alpha(g)e_R = e_{gR}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\alpha \rightarrow +\infty$. Тогда

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} K_\alpha(R, T) = \begin{cases} 1, & \text{если } R = T, \\ 0, & \text{если } R \neq T. \end{cases}$$

В этом смысле пределом H_α при $\alpha \rightarrow +\infty$ является пространство $l_2(\text{Lat}_n)$.

2.3. Формула Планшереля для пространств H_α , $\alpha > n-1$. Следующая теорема дает явное спектральное разложение пространства H_α по отношению к действию группы $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.

ТЕОРЕМА 2.3. Для $\alpha > n-1$

$$K_\alpha(R, T) = \int \Phi_{is_1, \dots, is_n}(R, T) d\mu_\alpha(s), \quad (2.8)$$

где сферические ядра Φ определены в п. 1.7, интеграл берется по кубу (тору) $s_j \in [0, 2\pi/\ln p]$, а мера Планшереля μ_α равна

$$\begin{aligned} d\mu_\alpha(s) = & C \prod_{j=1}^n (1 - p^{-\alpha+j-1}) \prod_{j=1}^n |1 - p^{-(\alpha-n+1)/2 - is_j}|^{-2} \\ & \times \prod_{1 \leq k < l \leq n} \left| \frac{p^{is_k} - p^{is_l}}{p^{is_k} - p^{-1+is_l}} \right|^2 ds_1 \cdots ds_n, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$C = \frac{\ln^n p}{(2\pi)^{n!}} \prod_{j=1}^n \frac{1 - p^{-j}}{1 - p^{-1}}.$$

2.4. Формула Планшереля при $\alpha = 0, 1, \dots, n-1$.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $\alpha = 0, 1, \dots, n-1$. Тогда

$$K_\alpha(R, T) = \int \Phi_{is_1, \dots, is_\alpha, -(n-\alpha+1)/2, -(n-\alpha+1)/2+1, \dots, (n-\alpha+1)/2}(R, T) d\mu_\alpha(s),$$

где $s_j \in [0, 2\pi/\ln p]$, мера Планшереля равна

$$d\mu_\alpha(s) = C_\alpha \prod_{j=1}^{\alpha} |1 - p^{(n-\alpha-1)/2 + is_j}|^2 \prod_{1 \leq k < l \leq \alpha} \left| \frac{p^{is_k} - p^{is_l}}{p^{is_k} - p^{-1+is_l}} \right|^2 ds_1 \cdots ds_\alpha$$

и

$$C_\alpha = \frac{\ln^\alpha p}{(2\pi)^\alpha (n-\alpha)!} (1-p^{-1})^{-\alpha} \prod_{k=1}^{\alpha} (1-p^{-k}) \prod_{k=n-\alpha+1}^n (1-p^{-k}).$$

2.5. Спектры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Для любого α спектр представления U_α группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ в H_α однократен.

Дадим явное описание спектров.

Рассмотрим флаг

$$\mathbb{K}^1 \subset \mathbb{K}^2 \subset \dots \subset \mathbb{K}^k$$

в $\mathbb{K}^n$. Обозначим через P_k стабилизатор этого флага в группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Это подгруппа блочных $(1+1+\dots+1+(n-k)) \times (1+1+\dots+1+(n-k))$ верхнетреугольных матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2(k+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & a_{k(k+1)} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{(k+1)(k+1)} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n(k+1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

В частности, P_n совпадает с ранее определенной группой B_n верхнетреугольных матриц.

Спектр есть носитель меры Планшереля, поэтому теоремы 2.3, 2.4 влекут

СЛЕДСТВИЕ 2.6. а) При $\alpha > n-1$ спектр состоит из всех сферических представлений $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ невырожденной унитарной основной серии.

б) При $\alpha = 0, 1, 2, \dots, n-1$ спектр состоит из представлений $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, унитарно индуцированных с характеров

$$\chi_s(A) = \prod_{j=1}^{\alpha} |a_{jj}|^{is_j}, \quad 0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_\alpha \leq \frac{2\pi}{\ln p},$$

группы P_α .

ЗАМЕЧАНИЯ. а) Для $\alpha = n - 1$ спектр состоит из представлений T_{is} унитарной невырожденной серии таких, что $s_n = 0$.

б) Для $\alpha = n - 2, n - 3, \dots$ спектр состоит из вырожденных унитарных серий. В обозначениях п. 1.4 рассмотрим подпространство $Y_\alpha \subset L^2(\text{Fl}_n)$, состоящее из функций, не зависящих от элементов $V_{n-\alpha+1}, \dots, V_{n-1}$ флага $\mathcal{V} \in \text{Fl}_n$; очевидно, $Y_\alpha \simeq L^2(\text{GL}_n(\mathbb{K})/P_k)$. Легко видеть, что при наших значениях параметров представления подпространство Y_α является GL_n -инвариантным. Это дает реализацию нашего представления в $L^2(\text{GL}_n(\mathbb{K})/P_k)$.

2.6. Реализация системы векторов e_R . Пусть для определенности $\alpha > n - 1$. Тогда H_α эквивалентно прямому интегралу представлений основной серии. Выпишем явно образ системы e_R в этом прямом интеграле.

Рассмотрим симплекс Ξ_n , определенный неравенствами (1.19). Снабдим этот симплекс мерой Планшереля $n! d\mu_\alpha$, см. теорему 2.3. Введем на пространстве $\Xi_n \times \text{Fl}_n$ произведение мер $n! d\mu_\alpha \times d\mathcal{V}$ и рассмотрим пространство $L^2(\Xi_n \times \text{Fl}_n)$ по нашей мере. Группа $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ действует в пространстве L^2 унитарными операторами $\rho_\alpha(g)$, заданными формулой (1.20); формула для самих операторов не содержит α , но пространство представления зависит от α .

Для решетки R рассмотрим функцию $u_R(s, \mathcal{V})$ на $\Xi_n \times \text{Fl}_n$, заданную формулой

$$u_R(s, \mathcal{V}) = \prod_{j=1}^{n-1} \text{vol}(R \cap V_j)^{1-is_j+is_{j+1}} \cdot \text{vol}(R)^{-(n-1)/2-is_n}.$$

Наша формула Планшереля влечет следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.7. Для любых $R, T \in \text{Lat}_n$

$$\begin{aligned} \langle u_R, u_S \rangle_{L^2(\Xi_n \times \text{Fl}_n)} &= \int_{\Xi_n \times \text{Fl}_n} u_R(s, \mathcal{V}) \overline{u_T(s, \mathcal{V})} n! d\mu_\alpha(s) d\mathcal{V} \\ &= \langle e_R, e_S \rangle_{H_\alpha} = K_\alpha(R, T). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Обозначим через μ_∞ макдональдовскую меру Планшереля (1.17) на Ξ_n . Система $u_R(s, \mathcal{V})$ является ортонормальным базисом в пространстве $L^2(\Xi_n \times \text{Fl}_n)$ по отношению к мере $\mu_\infty \times d\mathcal{V}$:

$$\int_{\Xi_n \times \text{Fl}_n} u_R(s, \mathcal{V}) \overline{u_T(s, \mathcal{V})} n! d\mu_\infty(s) d\mathcal{V} = \begin{cases} 1, & \text{если } R = T, \\ 0, & \text{если } R \neq T. \end{cases}$$

2.7. Линейная зависимость. Пусть $\alpha = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. В этих случаях пространство H_α меньше, чем при $\alpha > n - 1$ (во-первых, носитель меры Планшереля имеет меньшую размерность; во-вторых, представления из спектра сами являются вырожденными). При этих значениях α векторы e_R линейно зависимы.

ТЕОРЕМА 2.8. Пусть $R \subset S$ — произвольные решетки такие, что $S/R \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\alpha+1}$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\alpha+1} \left[(-1)^k p^{k(k-\alpha-1)/2} \sum_{Q \in \text{Lat}_n : R \subset Q \subset S, S/Q \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^k} e_R \right] = 0. \quad (2.10)$$

2.8. Замечание. Связь с представлением Вейля. Рассмотрим представление Вейля (см. [13], а также явные формулы в [14]) группы $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{K})$ и его ограничение σ на подгруппу $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. Представление σ эквивалентно естественному представлению $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ в подпространстве L_+^2 пространства $L^2(\mathbb{K}^n)$, состоящего из четных функций, т.е. $f(-x) = f(x)$; оно определяется формулой

$$\sigma(g)f(x) = f(gx) |\det g|^{1/2}, \quad g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}), \quad x \in \mathbb{K}^n.$$

В частности, представление σ однозначно (само представление Вейля двузначно).

Через ξ мы обозначим $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{O})$ -неподвижный вектор в представлении Вейля. “Вакуумный вектор” ξ соответствует функции $f(z)$, определенной по правилу: $f(z) = 1$ при $z \in \mathbb{O}^n$ и $f(z) = 0$ в противном случае.

Рассмотрим всевозможные векторы вида $U(g)\xi$, где g пробегает $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Для любого $h \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$ выполнено $U(gh)\xi = U(g)\xi$, следовательно, векторы вида $U(g)\xi$ параметризуются точками пространства $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}) = \mathrm{Lat}_n$; мы обозначаем вектор, соответствующий решетке R , через ξ_R .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. $\langle \xi_R, \xi_S \rangle = K_1(R, S)$.

Это высказывание тривиально, но важно. Мы видим, что

$$K_\alpha(R, T) = |\langle \xi_R, \xi_S \rangle|^\alpha.$$

В вещественном случае в точности та же процедура дает ядра Березина. Это дает возможность угадать форму ядер Березина в p -адическом случае.

Более серьезный апостериорный довод в пользу нашей аналогии – это формула (2.9) для меры Планшереля, так как она может быть получена из формулы над $\mathbb{R}$ (см. [5]) заменой обычных Γ -функций их p -адическими аналогами.

2.9. Замечание. Реализация пространства H_α в функциях на Lat_n . Произвольному $h \in H_\alpha$ мы ставим в соответствие функцию f_h на Lat_n по формуле

$$f_h(R) = \langle h, e_R \rangle_{H_\alpha}.$$

Таким образом, мы реализуем H_α как некоторое пространство функций на Lat_n . После этого можно применить обычный формализм воспроизводящих ядер; см., например, [5], здесь мы этого не касаемся.

При $\alpha = 0, 1, \dots, n-1$ соотношения (2.10) становятся разностными уравнениями на функции f_h ; для любых решеток $R \subset S$ таких, что $S/R = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\alpha+1}$, функции f_h удовлетворяют тождеству

$$\sum_{k=0}^{\alpha+1} \left[(-1)^k p^{k(k-\alpha-1)/2} \sum_{Q \in \mathrm{Lat}_n : R \subset Q \subset S, S/Q \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^k} f_h(R) \right] = 0.$$

Эти уравнения являются аналогом детерминантных систем уравнений с частными производными для ядер Березина, см., например, [5].

2.10. Замечание. Дополнительная симметрия. Для любого элемента $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ мы определяем линейный функционал

$$\ell_a(z) = a_1 z_1 + \dots + a_n z_n.$$

Для решетки R в $\mathbb{K}^n$ мы определяем двойственную решетку $R^\vee$ как множество всех $a \in \mathbb{K}^n$ таких, что $\ell_a(z) \in \mathbb{O}$ для всех $z \in R$.

ЛЕММА 2.10. $K_\alpha(R^\vee, S^\vee) = K_\alpha(R, S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма следует из

$$\begin{aligned} R^\vee \cap S^\vee &= (R + S)^\vee, & \text{vol}(R^\vee) &= 1/\text{vol}(R), \\ \text{vol}(R + S) \text{vol}(R \cap S) &= \text{vol}(R) \cdot \text{vol}(S). \end{aligned}$$

Следовательно, отображение $e_R \mapsto e_{R^\vee}$ определяет оператор в пространстве H_α .

Очевидно, для $g \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, $R \in \text{Lat}_n$ мы имеем $(gR)^\vee = (g^t)^{-1}R^\vee$, где t обозначает транспонирование матрицы. Таким образом, мы получили каноническое действие полупрямого произведения $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \ltimes \text{GL}_n(\mathbb{K})$ в пространстве H_α .

ЗАМЕЧАНИЕ. В представлении Вейля (см. выше п. 2.8) оператор $e_R \mapsto e_{R^\vee}$ соответствует матрице $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Sp}(2n, \mathbb{K})$. В $L^2(\mathbb{K}^n)$ -модели представления U_1 (см. п. 2.8; в более общей ситуации с U_m см. ниже п. 6.1) этот оператор есть преобразование Фурье.

Теорема 2.8 и структура формулы Планшереля в теореме 4.4 (см. ниже) также совместимы с этой симметрией.

2.11. Замечание. Тожества с функциями Холла–Литтлвуда. Пусть p вещественно, $p > 1$. Определим функции $\varphi_\lambda^{(p)}(\mathbf{k}) = \varphi_\lambda(\mathbf{k})$ по формуле (1.11). Для простых значений p эти функции являются сферическими функциями над $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.11. а) *Тожество (2.8) выполнено при любых $p > 1$, $\alpha > n - 1$.*

б) *Для любого $p > 1$ при достаточно больших вещественных α выполнено*

$$\sum_{\mathbf{k}} \varphi_{is}^{(p)}(\mathbf{k}) p^{-\alpha \sum_j |k_j|} \nu(\mathbf{k}) = \prod_{l=0}^{n-1} (1 - p^{-\alpha+l}) \prod_{j=1}^n |1 - p^{-(\alpha+n-1)/2+is_j}|^{-2},$$

где $\nu(\mathbf{k})$ задано формулой (1.4).

2.12. Замечание: дзета-функция Тамагавы. Положим в теореме 2.1

$$\alpha_j = t, \quad \beta_j = \gamma_j - t.$$

Переходя к пределу при $t \rightarrow +\infty$, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.12.

$$\sum_{R \in \text{Lat}_n, R \subset \mathbb{O}^n} \prod_{j=1}^n \text{vol}(R \cap \mathbb{K}_j)^{\gamma_j - \gamma_{j+1}} = \prod_{j=1}^n (1 - p^{-\gamma_j - n - j})^{-1}.$$

Это – дзета-функция Тамагавы, см. [11; IV.4].

2.13. Замечание. Решетки в $\mathbb{Q}^n$ и классическая дзета-функция. Рассмотрим n -мерное пространство $\mathbb{Q}^n$ над рациональными числами. Решетка в $\mathbb{Q}^n$ – это свободный $\mathbb{Z}$ -подмодуль с n образующими. Обозначим пространство решеток в $\mathbb{Q}^n$ через $\text{Lat}_n(\mathbb{Q})$.

Для решетки $R \subset \mathbb{Q}^n$ обозначим через $v_n(R)$ объем тора $\mathbb{R}^n/R$.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ – стандартный базис в $\mathbb{Q}^n$. Обозначим

$$\mathbb{Q}^k = \mathbb{Q}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}e_k, \quad \mathbb{Z}^k = \mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_k.$$

Фиксируем комплексные $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и $\beta_1, \dots, \beta_n$; положим $\alpha_{n+1} = 0, \beta_{n+1} = 0$. Пусть

$$\text{Re } \alpha_j - n + 1 > 1, \quad \text{Re } \alpha_j + \text{Re } \beta_j - n + j > 1, \quad \text{Re } \beta_j + j < 0.$$

ТЕОРЕМА 2.13.

$$\begin{aligned} & \sum_{R \in \text{Lat}_n(\mathbb{Q})} \prod_{j=1}^n v_k(R \cap \mathbb{Q}^k)^{-\beta_k + \beta_{k+1}} v_k(R \cap \mathbb{Z}^k)^{-\alpha_k + \alpha_{k+1}} \\ &= \prod_{j=1}^n \frac{\zeta(-(\beta_j + j - 1)) \zeta(\alpha_j + \beta_j - n + j)}{\zeta(\alpha_j - n + j)}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \prod_{p - \text{простое}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

– дзета-функция.

§3. Вычисление бета-суммы

В этом параграфе мы доказываем теоремы 2.1 и 2.13.

3.1. Преобразование бета-суммы. Обозначим через Lat_{n-1} пространство решеток в подпространстве $\mathbb{K}^{n-1} \subset \mathbb{K}^n$. Преобразуем выражение (2.3) к виду

$$\sum_{R' \in \text{Lat}_{n-1}} \prod_{j=1}^{n-2} \left[\left\{ \text{vol}(R' \cap \mathbb{K}^j)^{\beta_j - \beta_{j+1}} \text{vol}(R' \cap \mathbb{O}^j)^{\alpha_j - \alpha_{j+1}} \right\} \right. \quad (3.1)$$

$$\times \text{vol}(R' \cap \mathbb{K}^{n-1})^{\beta_{n-1}} \text{vol}(R' \cap \mathbb{O}^{n-1})^{\alpha_{n-1}} \quad (3.2)$$

$$\times \sum_{R \in \text{Lat}_n : R \cap \mathbb{K}^{n-1} = R'} \left\{ \frac{\text{vol}(R)^{\beta_n}}{\text{vol}(R \cap \mathbb{K}^{n-1})^{\beta_n}} \frac{\text{vol}(R \cap \mathbb{O}^n)^{\alpha_n}}{\text{vol}(R \cap \mathbb{O}^{n-1})^{\alpha_n}} \right\}. \quad (3.3)$$

ЛЕММА 3.1. *Внутренняя сумма (3.3) равна*

$$\frac{\sigma_n}{\text{vol}(\mathbb{O}^{n-1} \cap R')},$$

где

$$\sigma_n = \frac{1 - p^{-\alpha_n}}{(1 - p^{-\alpha_n - \beta_n})(1 - p^{\beta_n + n - 1})}. \quad (3.4)$$

Лемма 3.1 доказывается ниже.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Обозначим через $F_n(\alpha; \beta)$ левую часть (2.3)–(2.4). Выражение $F_n(\alpha; \beta)$ удовлетворяет тождеству*

$$F_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n) = \sigma_n F_{n-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} - 1; \beta_1, \dots, \beta_{n-1}),$$

где σ_n задано формулой (3.4).

Это следствие влечет теорему 2.1.

3.2. Новые переменные ξ и ν . Рассмотрим подпространство $\mathbb{K}^{n-1} \subset \mathbb{K}^n$; очевидно, $\mathbb{K}^n = \mathbb{K}^{n-1} \oplus \mathbb{K}e_n$.

Фиксируем решетку $R' \subset \mathbb{K}^{n-1}$. Пусть R удовлетворяет условию

$$R \cap \mathbb{K}^{n-1} = R'. \quad (3.5)$$

Любой вектор r из R представим в виде $r = ap^k e_n + v$, где $v \in \mathbb{K}^{n-1}$, $|a| = 1$.

ЛЕММА 3.3. *Через ξ мы обозначим минимальное возможное k . Пусть $h = p^\xi e_n + v \in R$. Тогда*

$$R = R' \oplus \mathbb{O}h = R' \oplus \mathbb{O}(p^\xi e_n + v). \quad (3.6)$$

Это утверждение очевидно. Следующая лемма равносильна лемме 3.3.

ЛЕММА 3.3'. *Рассмотрим естественное отображение $\pi: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}e_n$. Пусть $h \in R$, и пусть $\pi(h)$ порождает $\mathbb{O}$ -модуль $\pi(R)$. Тогда $R = R' \oplus \mathbb{O}h$.*

ЛЕММА 3.4. *Решетки $R_1 = R' \oplus \mathbb{O}(p^{\xi_1} e_n + v_1)$ и $R_2 = R' \oplus \mathbb{O}(p^{\xi_2} e_n + v_2)$ совпадают, если $\xi_1 = \xi_2$, $v_1 - v_2 \in R'$.*

Доказательство очевидно.

Итак, решетка R со свойством (3.5) определяется целым числом $\xi = \xi(R)$ и элементом $v = v(R)$ факторгруппы $\mathbb{K}^{n-1}/R'$.

Мы также определяем неотрицательное целое число $\nu = \nu(R)$ условием:

– если $v \in R' + \mathbb{O}^{n-1}$, то $\nu = 0$;

– в противном случае ν – это минимальное k такое, что $p^k v \in R' + \mathbb{O}^{n-1}$.

ЛЕММА 3.5. а) $\frac{\text{vol}(R)}{\text{vol}(R')} = p^{-\xi}$.

б) $\frac{\text{vol}(R \cap \mathbb{O}^n)}{\text{vol}(R \cap \mathbb{O}^{n-1})} = p^{-\max(0, \xi + \nu)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) очевидно. Утверждение б) вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 3.6. Пусть R имеет форму (3.6). Тогда $R \cap \mathbb{O}^n$ имеет вид

$$R \cap \mathbb{O}^n = R' \oplus \mathbb{O}[p^\varkappa(p^\xi e_n + v) + w],$$

где $\varkappa = \max(\nu, -\xi)$, $w \in -p^\varkappa v + R'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых,

$$p^\varkappa(p^\xi e_n + v) + w \in R' \iff \varkappa \geq 0, \quad w \in R'. \quad (3.7)$$

Во-вторых,

$$p^\xi(p^\xi e_n + v) + w \in \mathbb{O}^n \iff \varkappa + \xi \geq 0, \quad p^\varkappa v + w \in \mathbb{O}^{n-1}. \quad (3.8)$$

Условия $w \in R'$, $p^\varkappa v + w \in \mathbb{O}^{n-1}$ влекут $p^\varkappa v \in R' + \mathbb{O}^{n-1}$. Но $\varkappa \geq 0$, поэтому $\varkappa \geq \nu$. Кроме того, $\varkappa \geq -\xi$, см. (3.8). Остается применить леммы 3.3–3.3'.

ЛЕММА 3.7. Число решеток $R \in \text{Lat}_n$, удовлетворяющих (3.5) с данными $\nu \geq 0$, ξ , равно

$$u_n(\nu, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\text{vol}(R' \cap \mathbb{O}^{n-1})}, & \nu = 0, \\ \frac{p^{\nu(n-1)}(1 - p^{-n+1})}{\text{vol}(R' \cap \mathbb{O}^{n-1})}, & \nu > 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. От ξ ничего не зависит. Нам нужно найти число векторов $v \in \mathbb{K}^{n-1}/R'$ таких, что $p^\nu v \in (R' + \mathbb{O}^{n-1})/R'$.

Индекс R' в $R' + \mathbb{O}^{n-1}$ равен $1/\text{vol}(R' \cap \mathbb{O}^{n-1})$. Остается найти число $u_n^*(\nu)$ векторов $v \in \mathbb{K}^{n-1}/(R' + \mathbb{O}^{n-1})$ таких, что $p^\nu v \in R' + \mathbb{O}^{n-1}$; действительно,

$$u_n(\nu, \xi) = \frac{u_n^*(\nu)}{\text{vol}(R' \cap \mathbb{O}^{n-1})}.$$

Для любой решетки $S \subset \mathbb{K}^{n-1}$ аддитивная группа $\mathbb{K}^{n-1}/S$ изоморфна $(\mathbb{K}/\mathbb{O})^{n-1}$. Поэтому мы должны найти число решений уравнения $p^\nu v = 0$ в $(\mathbb{K}/\mathbb{O})^{n-1}$.

Аддитивная группа $\mathbb{K}/\mathbb{O}$ является индуктивным пределом циклических групп

$$\mathbb{K}/\mathbb{O} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{Z}/p^k \mathbb{Z}.$$

Следовательно, число решений уравнения $p^\nu v = 0$ в $(\mathbb{K}/\mathbb{O})^{n-1}$ равно $p^{\nu(n-1)}$. Но $p^{(\nu-1)(n-1)}$ из этих решений также являются решениями уравнения $p^{\nu-1} v = 0$.

Если $\nu = 0$, то существует единственное решение $v = 0$.

3.3. Конец вычисления. Леммы 3.5, 3.7 сводят вычисление (3.3) к вычислению суммы

$$\frac{1}{\text{vol}(R' \cap \mathbb{O}^{n-1})} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \sum_{\nu \geq 0} p^{-\alpha_n \max(0, \xi + \nu)} p^{-\beta_n \xi} u_n(\nu, \xi).$$

Ее вычисление сводится к суммированию нескольких геометрических прогрессий.

3.4. Доказательство теоремы 2.13. Обозначим теперь p -адические числа через $\mathbb{Q}_p$, а целые p -адические числа – через $\mathbb{O}_p$. Для любого простого p рассмотрим естественные вложения $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}_p^n$ и индуцированное отображение

$$\pi_p: \text{Lat}_n(\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Lat}_n(\mathbb{Q}_p),$$

т.е. для $R \in \text{Lat}_n(\mathbb{Q})$ мы рассматриваем его замыкание в $\mathbb{Q}_p^n$.

Наше вычисление основано на двух следующих замечаниях.

Во-первых, для любого $R \in \text{Lat}_n(\mathbb{Q})$

$$v_n(R)^{-1} = \prod_{p - \text{простое}} \text{vol}_{\mathbb{Q}_p^n}(\pi_p(R)).$$

Во-вторых, отображение

$$R \mapsto (\pi_2(R), \pi_3(R), \pi_5(R), \pi_7(R), \pi_{11}(R), \dots)$$

есть биекция $\text{Lat}_n(\mathbb{Q})$ и множества последовательностей $(S_2, S_3, S_5, S_7, S_{11}, \dots)$ таких, что $S_p \in \text{Lat}_n(\mathbb{Q}_p)$ и $S_p = \mathbb{O}_p^n$, за исключением конечного числа простых p ; см. [10; теорема V.2.2].

Следовательно, левая часть (2.11) преобразуется к виду

$$\prod_{p - \text{простое}} \left[\sum_{S_p \in \text{Lat}_n(\mathbb{Q}_p)} \prod_{j=1}^n \{ \text{vol}(S_p \cap \mathbb{Q}_p^j)^{\beta_j - \beta_{j+1}} \text{vol}(S_p \cap \mathbb{O}_p^j)^{\alpha_j - \alpha_{j+1}} \} \right].$$

Остается применить теорему 2.1.

§ 4. Формула Планшереля

Этот параграф содержит доказательства теоремы 2.3 (п. 4.1), теоремы 2.4 (пп. 4.2–4.6), предложения 2.5 (п. 4.7), теоремы 2.7 (п. 4.8), предложения 2.11 (п. 4.9). Мы также получаем “индефинитную формулу Планшереля” (теорема 4.4), которая используется ниже в § 5.

4.1. Формула Планшереля. Рассмотрим $\text{GL}_n(\mathbb{O})$ -инвариантную функцию

$$\Delta_\alpha(R) = K_\alpha(\mathbb{O}^n, R) = \frac{\text{vol}(R \cap \mathbb{O}^n)^\alpha}{\text{vol}(R)^{\alpha/2}}, \quad R \in \text{Lat}_n.$$

В силу (1.15) ее сферическое преобразование равно

$$\tilde{\Delta}_\alpha(\lambda) = \sum_{R \in \text{Lat}_n} \frac{\text{vol}(R \cap \mathbb{O}^n)^\alpha}{\text{vol}(R)^{\alpha/2}} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \text{vol}(R \cap \mathbb{K}^j)^{1+\lambda_j-\lambda_{j+1}} \cdot \text{vol}(R)^{-(n-1)/2+\lambda_n}. \quad (4.1)$$

В силу теоремы 2.1 это равно

$$\tilde{\Delta}_\alpha(\lambda) = \prod_{j=1}^n \frac{1 - p^{-(\alpha-n+j)}}{(1 - p^{-(\alpha-n+1)/2+\lambda_j})(1 - p^{-(\alpha-n+1)/2-\lambda_j})}.$$

Применяя формулу обращения (1.16) для сферического преобразования, мы получаем теорему 2.3.

4.2. Формула Планшереля как контурный интеграл. Введем новые переменные $z_k = p^{is_k}$. Введем также новое обозначение для сферических функций:

$$\varphi[z_1, \dots, z_n; R] := \varphi_{is_1, \dots, is_n}(R).$$

Теорема 2.3 преобразуется к виду

$$\Delta_\alpha(R) = C_0 I_0, \quad (4.2)$$

где I_0 – следующий интеграл по тору:

$$I_0 = I_0(\alpha, R) = \int_{|z_1|=1, \dots, |z_n|=1} \prod_{j=1}^n \frac{1}{(z_j - p^{(\alpha-n+1)/2})(z_j - p^{-(\alpha-n+1)/2})} \quad (4.3)$$

$$\times \prod_{1 \leq k < l \leq n} \frac{(z_k - z_l)^2}{(z_k - pz_l)(z_k - p^{-1}z_l)} \varphi[z_1, \dots, z_n; R] dz_1 \cdots dz_n, \quad (4.4)$$

а постоянная C_0 равна

$$C_0 = C_0(\alpha) = \frac{p^{\alpha n}}{(-2\pi i)^n} \prod_{j=1}^n \frac{1 - p^{-j}}{1 - p^{-1}} \prod_{l=0}^{n-1} (1 - p^{-\alpha+l}). \quad (4.5)$$

Выражение $\Delta_\alpha(R)$ является голоморфной функцией от переменной $\alpha \in \mathbb{C}$ во всей комплексной плоскости. Интегральное представление $C_0 I_0$ для $\Delta_\alpha(R)$ голоморфно лишь в области $\text{Re } \alpha > n - 1$. Мы хотим построить голоморфное продолжение $C_0(\alpha) I_0(\alpha, R)$ во всю комплексную плоскость $\alpha \in \mathbb{C}$.

4.3. Аналитическое продолжение в полосу $n - 3 < \text{Re } \alpha < n - 1$. Обозначим

$$\beta := \frac{\alpha - n + 1}{2}, \quad (4.6)$$

$$\mu_m(z_1, \dots, z_m) := \prod_{1 \leq k < l \leq m} \frac{(z_k - z_l)^2}{(z_k - pz_l)(z_k - p^{-1}z_l)}. \quad (4.7)$$

Легко видеть, что μ_m симметрична по переменным z_j . Напомним также, что сферические функции симметричны по z_j .

ЛЕММА 4.1. Для $n - 3 < \operatorname{Re} \alpha < n - 1$

$$\Delta_\alpha(R) = C_0 I_0 + n C_{01} (I_{01}^+ + I_{01}^-) + n(n-1) C_1 I_1, \quad (4.8)$$

где C_0, I_0 – те же, что и выше (4.3)–(4.5),

$$\begin{aligned} I_{01}^+ &= \int_{|z_1|=1, \dots, |z_{n-1}|=1} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{z_j - p^\beta}{(z_j - p^{\beta+1})(z_j - p^{\beta-1})(z_j - p^{-\beta})} \\ &\quad \times \mu_{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1}) \varphi[z_1, \dots, z_{n-1}, p^\beta; R] dz_1 \cdots dz_{n-1}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} I_{01}^- &= \int_{|z_1|=1, \dots, |z_{n-1}|=1} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{z_j - p^{-\beta}}{(z_j - p^{-\beta-1})(z_j - p^{-\beta+1})(z_j - p^\beta)} \\ &\quad \times \mu_{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1}) \varphi[z_1, \dots, z_{n-1}, p^{-\beta}; R] dz_1 \cdots dz_{n-1}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|z_1|=1, \dots, |z_{n-2}|=1} \prod_{j=1}^{n-2} \frac{(z_j - p^\beta)(z_j - p^{-\beta})}{(z_j - p^{-\beta-1})(z_j - p^{\beta+1})(z_j - p^{\beta-1})(z_j - p^{-\beta+1})} \\ &\quad \times \mu_{n-2}(z_1, \dots, z_{n-2}) \varphi[z_1, \dots, z_{n-2}, p^{-\beta}, p^\beta; R] dz_1 \cdots dz_{n-2}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

а постоянные равны

$$\begin{aligned} C_{01} &= \frac{2\pi i C_0}{p^\beta - p^{-\beta}}, \\ C_1 &= p^{-2\beta} (1 - p^{-2\beta-1})^{-1} (1 - p^{-2\beta+1})^{-1} (2\pi i)^2 C_0. \end{aligned}$$

Мы обозначаем подынтегральные выражения в $I_k, I_{kl}^\pm$, см. (4.9)–(4.11) и теорему 4.4 ниже, через $\mathfrak{I}_k, \mathfrak{I}_{kl}^\pm$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (см. рис. 1а)). Во-первых, разложим

$$\prod_{j=1}^n \frac{1}{(z_j - p^\beta)(z_j - p^{-\beta})} = (p^\beta - p^{-\beta})^{-n} \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{z_j - p^\beta} - \frac{1}{z_j - p^{-\beta}} \right) \quad (4.12)$$

и раскроем скобки. Интеграл (4.3)–(4.4) распадается в сумму 2^n интегралов, и достаточно вычислить аналитическое продолжение каждого слагаемого.

Для определенности рассмотрим слагаемое

$$\begin{aligned} N(\beta) &:= \int_{|z_1|=1, \dots, |z_n|=1} \frac{1}{(z_1 - p^\beta) \cdots (z_s - p^\beta)(z_{s+1} - p^{-\beta}) \cdots (z_n - p^{-\beta})} \\ &\quad \times \mu_n(z_1, \dots, z_n) \varphi[z_1, \dots, z_n; R] dz_1 \cdots dz_n; \end{aligned}$$

соображения симметрии показывают, что при этом мы не теряем общности. Обозначим подынтегральное выражение в $N(\beta)$ через $\mathfrak{N}(\beta; z)$. Аналитическое продолжение $N(\beta)$ через прямую $\operatorname{Re} \beta = 0$ задается тем же интегралом, но по другому контуру:

$$|z_1| = 1 - \varepsilon, \dots, |z_s| = 1 - \varepsilon, |z_{s+1}| = 1 + \varepsilon, \dots, |z_n| = 1 + \varepsilon. \quad (4.13)$$

а) Полюсы $z_1 = p^{\pm\beta}$ подынтегрального выражения в I_0 при $\beta > 0$ и их движение при уменьшении β . Если $z_2, \dots, z_n$ фиксированы и $|z_2| = \dots = |z_n| = 1$, то все остальные полюсы (по переменной z_1) лежат на окружностях $|z_1| = p^{-1}, |z_1| = p$

б) Полюсы подынтегрального выражения в I_1 при $0 > \beta > -1$. Параметр β уменьшается

в) Полюсы подынтегрального выражения I_{01}^- при $0 > \beta > -1$. Параметр β уменьшается

Рис. 1

Рассмотрим набор контуров $L_0, \dots, L_n$, где L_m определяется как

$$L_m: \quad |z_j| = \begin{cases} 1, & \text{если } j \leq m, \\ 1 \pm \varepsilon & \text{если } j > m, \end{cases}$$

а знаки $\pm$ те же, что и в (4.13). В частности, L_n — это тор $|z_1| = \dots = |z_n| = 1$, а L_0 — это контур (4.13).

Тогда

$$\int_{L_0} = \left(\int_{L_0} - \int_{L_1} \right) + \left(\int_{L_1} - \int_{L_2} \right) + \dots + \left(\int_{L_{n-1}} - \int_{L_n} \right) + \int_{L_n}. \quad (4.14)$$

Каждая скобка может быть вычислена с помощью одномерных вычетов. Последняя скобка равна

$$\int_{|z_1|=\dots=|z_{n-1}|=1} \operatorname{res}_{z_n=p^{-\beta}} \mathfrak{N}(\beta; z) \prod_{j=1}^{n-1} dz_j,$$

и мы получаем желаемое выражение.

Ситуация с другими скобками сложнее. Например, в первой скобке получаем

$$- \int \operatorname{res}_{z_1=p^\beta} \mathfrak{N}(\beta; z) \prod_{j=2}^n dz_j,$$

где интеграл берется по тору $|z_2| = 1 - \varepsilon, \dots, |z_n| = 1 + \varepsilon$. К этому тору мы применим преобразование типа (4.14) и т.д. Таким образом, мы получим 2^n слагаемых вида $\int \operatorname{res} \operatorname{res} \dots \operatorname{res}$. Однако $\mu_n(z) = 0$ на гиперплоскости $z_k = z_l$ и, следовательно,

$$\operatorname{res}_{z_k=p^\beta} \operatorname{res}_{z_l=p^\beta} \mathfrak{N}(\beta; z) = 0, \quad \operatorname{res}_{z_k=p^{-\beta}} \operatorname{res}_{z_l=p^{-\beta}} \mathfrak{N}(\beta; z) = 0.$$

Поэтому

$$\int_{L_0} - \int_{L_n} = - \sum_{j \leq s} \int \operatorname{res}_{z_j=p^\beta} \mathfrak{N} + \sum_{j > s} \int \operatorname{res}_{z_j=p^{-\beta}} \mathfrak{N} - \sum_{j \leq s; k > s} \int \operatorname{res}_{z_j=p^\beta} \operatorname{res}_{z_k=p^{-\beta}} \mathfrak{N},$$

где интегрирование ведется по торам $|z_l| = 1$. Далее, мы преобразуем эту сумму к виду

$$\begin{aligned} & - \sum_{1 \leq j \leq n} \int \operatorname{res}_{z_j=p^\beta} \mathfrak{N}(\beta; z) \prod_{1 \leq m \leq n; m \neq j} dz_m \\ & + \sum_{1 \leq k \leq n} \int \operatorname{res}_{z_j=p^{-\beta}} \mathfrak{N}(\beta; z) \prod_{1 \leq m \leq n; m \neq k} dz_m \\ & - \sum_{1 \leq j \leq n; 1 \leq k \leq n} \int \operatorname{res}_{z_j=p^\beta} \operatorname{res}_{z_k=p^{-\beta}} \mathfrak{N}(\beta; z) \prod_{1 \leq m \leq n; m \neq j, k} dz_m \quad (4.15) \end{aligned}$$

(все “новые” слагаемые равны нулю).

Складывая вместе все 2^n слагаемых интеграла I_0 , мы получаем выражение вида (4.15), только $\mathfrak{N}$ заменяется на подынтегральное выражение $\mathfrak{J}_0$ в I_0 . Вычисляя вычеты и применяя симметрию сферических функций по z_j , мы получаем (4.8); симметрия по z_j — источник коэффициентов $n, n(n-1)$ в (4.8).

4.4. Формула Планшереля при $\alpha = n-1$ и $\alpha = n-2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2.

$$\Delta_{n-2}(R) = n(n-1)[C_1 I_1] \Big|_{\alpha=n-2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\alpha = n-2$ мы имеем $C_0 = C_{01} = 0$ в (4.8). Это дает желаемый результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3.

$$\Delta_{n-1}(R) = \frac{1}{2} n [C_{01} (I_{01}^+ + I_{01}^-)] \Big|_{\alpha=n-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\alpha = n - 1$ обе наши формулы (4.2), (4.8) не “работают”. Введем новую функцию

$$h(\beta, R) := \frac{2\beta \ln p}{C_0(\beta)} \Delta_\alpha(R),$$

где $(\alpha - n + 1)/2 = \beta$. Множитель $2\beta \ln p / C_0(\beta)$ является голоморфной не обращающейся в нуль функцией вблизи точки $\beta = 0$, и, следовательно, достаточно найти интегральное представление для $h(0, R)$. Для любого достаточно малого ρ

$$h(0, R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\beta|=\rho} \frac{h(\beta, R)}{\beta} d\beta.$$

Мы преобразуем это выражение к виду

$$\begin{aligned} h(0, R) &= \frac{2 \ln p}{2\pi i} \int_{|\beta|=\rho} I_0(\beta) d\beta \\ &+ \frac{2 \ln p}{2\pi i} \int_{|\beta|=\rho, \operatorname{Re} \beta < 0} \left[\frac{n \cdot 2\pi i}{p^\beta - p^{-\beta}} (I_{01}^+(\beta) + I_{01}^-(\beta)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)(2\pi i)^2}{2p^{2\beta}(1-p^{-2\beta-1})(1-p^{-2\beta+1})} I_1(\beta) \right] d\beta. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Во-первых, функция $I_0(\beta)$ четна, т.е. $I_0(\beta) = I_0(-\beta)$, см. (4.3). Поэтому первое слагаемое в (4.16) обращается в нуль.

Во-вторых, $I_1(0)$ конечен; конечен и соответствующий множитель в точке $\beta = 0$. Поэтому последнее слагаемое (4.16) стремится к нулю при $\rho \rightarrow 0$.

В-третьих, вычислим

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{|\beta|=\rho, \operatorname{Re} \beta < 0} \frac{2 \ln p}{p^\beta - p^{-\beta}} I_{01}^+(\beta, R) d\beta. \quad (4.17)$$

Формула (4.9) определяет I_{01}^+ как интеграл по контуру $|z_1| = \dots = |z_{n-1}| = 1$. Мы можем заменить этот контур на M : $|z_1| = \dots = |z_{n-1}| = 1 + \varepsilon$; полученный интеграл $\int_M \mathfrak{I}_{01}^+$ голоморфен в полосе $|\operatorname{Re} \beta| < \varepsilon$. Это позволяет преобразовать (4.17) к виду

$$\begin{aligned} &\int_M \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{|\beta|=\rho, \operatorname{Re} \beta < 0} \frac{2 \ln p}{p^\beta - p^{-\beta}} \mathfrak{I}_{01}^+(\beta, z) d\beta dz_1 \dots dz_{n-1} \\ &= \pi i \int_M \mathfrak{I}_{01}^+(0, z) d\beta dz_1 \dots dz_{n-1}, \end{aligned}$$

что дает желаемый результат.

4.5. Полное аналитическое продолжение. Мы сохраняем обозначения (4.6), (4.7) для β и $\mu(z)$.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $\operatorname{Re} \alpha \neq n-1, n-3, \dots, -n+1$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha(R) = & C_0 I_0 + \sum_{k: k \geq 1, 2(k-1) + \operatorname{Re} \alpha < n-1} \frac{n!}{(n-2k)!} C_k I_k \\ & + \sum_{k, l: k \geq 0, l \geq 1, 2(k+l-1) + \operatorname{Re} \alpha < n-1} \frac{n!}{(n-2k-l)!} C_{kl} (I_{kl}^+ + I_{kl}^-), \quad (4.18) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_k = & \int_{|z_1|=\dots=|z_{n-2k}|=1} \prod_{j=1}^{n-2k} \frac{(z_j - p^{-\beta-k+1})(z_j - p^{\beta+k-1})}{(z_j - p^{\beta+k})(z_j - p^{-\beta-k})(z_j - p^{\beta-1})(z_j - p^{-\beta+1})} \\ & \times \varphi[z_1, \dots, z_{n-2k}, p^\beta, p^{\beta+1}, \dots, p^{\beta+k-1} p^{-\beta-k+1}, \dots, p^{-\beta+1}, p^{-\beta}; R] \\ & \times \mu_{n-2k}(z_1, \dots, z_{n-2k}) dz_1 \cdots dz_{n-2k}, \\ I_{kl}^+ = & \int_{|z_1|=\dots=|z_{n-2k-l}|=1} \prod_{j=1}^{n-2k-l} \frac{(z_j - p^{-\beta-k+1})(z_j - p^{\beta+k+l-1})}{(z_j - p^{\beta+k+l})(z_j - p^{-\beta-k})(z_j - p^{\beta-1})(z_j - p^{-\beta+1})} \\ & \times \varphi[z_1, \dots, z_{n-2k-l}, p^\beta, p^{\beta+1}, \dots, p^{\beta+k+l-1} p^{-\beta-k-1}, \dots, p^{-\beta+1}, p^{-\beta}; R] \\ & \times \mu_{n-2k-l}(z_1, \dots, z_{n-2k-l}) dz_1 \cdots dz_{n-2k-l}, \\ I_{kl}^- = & \int_{|z_1|=\dots=|z_{n-2k-l}|=1} \prod_{j=1}^{n-2k-l} \frac{(z_j - p^{\beta+k-1})(z_j - p^{-\beta-k-l+1})}{(z_j - p^{-\beta-k-l})(z_j - p^{\beta+k})(z_j - p^{\beta-1})(z_j - p^{-\beta+1})} \\ & \times \varphi[z_1, \dots, z_{n-2k-l}, p^\beta, p^{\beta+1}, \dots, p^{\beta+k-1} p^{-\beta-k-l-1}, \dots, p^{-\beta+1}, p^{-\beta}; R] \\ & \times \mu_{n-2k-l}(z_1, \dots, z_{n-2k-l}) dz_1 \cdots dz_{n-2k-l}, \end{aligned}$$

а постоянные C_k, C_{kl} равны

$$\begin{aligned} C_k = & (2\pi i)^{2k} C_0 \cdot \frac{p^{2\beta k + k(k-1)} (1-p)^{2k} (1-p^{2\beta-1})}{1 - p^{2\beta+2k-1}} \\ & \times \prod_{j=1}^k \frac{1}{(1-p^j)^2 (1-p^{2\beta+j-2})^2}, \quad (4.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{kl} = & (2\pi i)^l C_k \cdot \frac{p^{-(\beta+k)l-l(l-1)/2} (1-p^{-2\beta-2k+1}) (1-p^{-1})^l}{1 - p^{-2\beta-2k-l+1}} \\ & \times \prod_{j=1}^l \frac{1}{(1-p^{-k-j})(1-p^{-2\beta-k-j+2})}. \quad (4.20) \end{aligned}$$

Слагаемые, присутствующие в формуле Планшереля, указаны на рис. 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (см. рис. 1b), c)). Мы начинаем с леммы 4.1 и хотим написать аналитическое продолжение (4.8) в полосу $|\operatorname{Re} \beta + 1| < \varepsilon$.

Во-первых, у I_0 нет особенностей в полуплоскости $\operatorname{Re} \beta < 0$. Поэтому достаточно написать аналитическое продолжение $I_{01}^\pm, I_1$, см. (4.9)–(4.11), в полосу $|\operatorname{Re} \beta + 1| < \varepsilon$.

Рис. 2. Слагаемые формулы Планшереля в разных полосах. Слагаемые формулы Планшереля, выживающие в точках $\alpha = n - 1 - m \geq 0$

Во-вторых, подынтегральное выражение $\mathfrak{I}_1$ в I_1 содержит множитель

$$\prod \frac{1}{(z - p^{\beta+1})(z - p^{-\beta-1})}.$$

Мы преобразуем его как (4.12) и буквально повторяем доказательство леммы 4.1. Это дает дополнительно три слагаемых I_2, I_{11}^+, I_{11}^- в полосе $-\varepsilon < \text{Re } \beta + 1 < 0$.

В-третьих, $\mathfrak{I}_{01}^+$ содержит множитель

$$\prod \frac{1}{(z - p^{\beta+1})};$$

все остальные множители $\mathfrak{I}_{01}^+$ не имеют полюсов при β лежащем в полосе $|\text{Re } \beta + 1| < \varepsilon$. Поэтому мы пишем аналитическое продолжение I_{01}^+ как

$$\int_{|z_1|=1-\varepsilon, \dots, |z_{n-1}|=1-\varepsilon} \mathfrak{I}_{01}^+ dz_1 \cdots dz_n$$

и вычисляем его как сумму вычетов

$$\begin{aligned} & \int_{|z_1|=\dots=|z_{n-1}|=1} \mathfrak{I}_{01}^+ \prod_{j=1}^{n-1} dz_j \\ & - \sum_{j=1}^{n-1} \int_{|z_1|=\dots=|z_{j-1}|=|z_{j+1}|=|z_{n-1}|} \text{res}_{z_j=p^{\beta+1}} \mathfrak{I}_{01}^+ \prod_{1 \leq j \leq n-1, j \neq s} dz_j \end{aligned}$$

(по соображениям симметрии все слагаемые суммы $\sum_{j=1}^{n-1}$ совпадают). Другие слагаемые

$$\int \text{res}_{z_j=p^{\beta+1}} \text{res}_{z_m=p^{\beta+1}} \mathfrak{I}_{01}^+, \int \text{res}_{z_j=p^{\beta+1}} \text{res}_{z_m=p^{\beta+1}} \text{res}_{z_s=p^{\beta+1}} \mathfrak{I}_{01}^+ \text{ и т.д.}$$

обращаются в нуль, так как множитель $\mu_{n-1}(z)$ равен нулю на гиперплоскостях $z_k = z_m$. Это дает новое слагаемое I_{02}^+ в полосе $-\varepsilon < \text{Re } \beta - 1 < 0$.

Случай I_{01}^- аналогичен.

Далее, у $I_1, I_{01}^\pm$ нет особенностей в полуплоскости $\operatorname{Re} \beta < -1$. “Новые” слагаемые $I_2, I_{11}^\pm, I_{02}^\pm$ имеют особенности на прямой $\operatorname{Re} \beta = -2$. Их аналитическое продолжение через эту прямую может быть получено тем же способом и т. д.

Теперь наши явные формулы для $I_k, I_{kl}^\pm, C_k, C_{kl}^\pm$ можно доказать по индукции. Все сводится к проверке тождеств

$$\begin{aligned} C_{k+1} \mathfrak{J}_{k+1} &= 2\pi i C_k \operatorname{res}_{z_{n-2k}=p^\beta} \operatorname{res}_{z_{n-2k-1}=p^{-\beta}} \mathfrak{J}_k, \\ C_{k(l+1)} \mathfrak{J}_{k(l+1)}^\pm &= 2\pi i C_{kl} \operatorname{res}_{z_{n-2k-l}=p^{\mp\beta}} \mathfrak{J}_{kl}^\pm. \end{aligned}$$

4.6. Целые значения α . Доказательство теоремы 2.4. Пусть $\alpha = 0, 1, 2, \dots, n-1$. В этом случае все решает множитель (см. (4.5))

$$\prod_{m=0}^{n-1} (1 - p^{-\alpha+m}) \quad (4.21)$$

выражения C_0 . Он обращается в нуль при всех наших α , и, следовательно, слагаемое I_0 в формуле Планшереля (4.18) исчезает. Тот же множитель убивает большинство других слагаемых, так как C_0 присутствует в качестве множителя в формулах для C_k и C_{kl} .

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть $n - \alpha = 2k$ — четное положительное число. Тогда

$$\Delta_{n-2k} = \frac{n!}{(n-2k)!} [C_k I_k] \Big|_{\alpha=n-2k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все другие слагаемые в формуле (4.18) нулевые благодаря (4.21), слагаемое $C_k I_k$ выживает, так как знаменатель C_k содержит множитель

$$1 - p^{2\beta+2k-1} = 1 - p^{\alpha-n+2k}$$

(см. (4.19)), который тоже равен нулю в α .

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть $n - \alpha = 2m + 1$ — нечетное положительное число. Тогда

$$\Delta_{n-2m-1} = \frac{n!}{2(n-2m-1)!} [C_{m1}(I_{m1}^+(\alpha) + I_{m1}^-(\alpha))] \Big|_{\alpha=n-2m-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом случае теорема 4.4 не дает немедленного ответа, и мы используем те же доводы, что и в доказательстве предложения 4.3.

Рассмотрим аналитическое продолжение нашего интеграла в полосу $-m < \operatorname{Re} \beta < -m + 1$ или, что равносильно, в $n - 2m - 1 < \operatorname{Re} \alpha < n - 2m + 1$. Оно задается формулой (4.18). Мы должны вычислить предел всех слагаемых (4.18) при $\beta \rightarrow -m$ из нашей полосы.

Во-первых, пусть $k < m$. Тогда I_k голоморфно в $\operatorname{Re} \beta < -m + 1$ и $C_k|_{\beta=-m} = 0$. Следовательно, слагаемое $C_k I_k$ равно нулю в $\beta = -m$.

Во-вторых, пусть $k + l < m$. Тогда $I_{kl}^\pm$ голоморфны в $\operatorname{Re} \beta < -m + 1$ и $C_{kl}|_{\beta=-m} = 0$. Следовательно, $C_{kl}I_{kl}^\pm$ тоже обращается в нуль.

В-третьих, пусть $k + l = m$, $l > 0$. Тогда аналитическое продолжение I_{kl}^+ в полосу $|\operatorname{Re} \beta + m| < \varepsilon$ задается формулой

$$\int_{|z_1|=\dots=|z_{n-2k-l}|=1 \mp \varepsilon} \mathfrak{I}_{kl}^+.$$

Следовательно, I_{kl}^+ голоморфно при $|\operatorname{Re} \beta + m| < \varepsilon$. Но коэффициент C_{kl} опять равен нулю в $\beta = -m$.

Таким образом, задача сводится к вычислению предела $\lim_{\beta \rightarrow -m+0} C_m I_m$. Множитель C_m имеет простой нуль в $\beta = -m$, и, следовательно, достаточно вычислить

$$\lim_{\beta \rightarrow -m+0} (\beta + m) I_m.$$

Мы представляем

$$\begin{aligned} & \frac{(z - p^{\beta+m-1})(z - p^{-\beta-m+1})}{(z - p^{\beta+m})(z - p^{-\beta-m})(z - p^{\beta-1})(z - p^{-\beta+1})} \\ &= \frac{\lambda(\beta)}{(z - p^{\beta+m})(z - p^{-\beta-m})} + \frac{\sigma(\beta)}{(z - p^{\beta-1})(z - p^{-\beta+1})}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

где

$$\lambda(\beta) = \frac{(1-p)(1-p^{2\beta+2m-1})}{(1-p^{m+1})(1-p^{2\beta+m-1})}, \quad \sigma(\beta) = \frac{p(p^{2\beta+k-2}-1)(p^k-1)}{(p^{2\beta+k-1}-1)(p^{k+1}-1)}.$$

Пусть J – подмножество в $\{1, 2, \dots, n-2m\}$. Обозначим через $\|J\|$ число элементов J . Используя (4.22), мы представляем $(\beta + m)I_m$ как сумму 2^{n-2m} интегралов

$$\begin{aligned} (\beta + m)I_m(\beta) &= \sum_J \lambda(\beta)^{\|J\|} \sigma(\beta)^{n-2m-\|J\|} \\ &\times \int_{|z_s|=1, s \notin J} \prod_{s \notin J} \frac{1}{(z_s - p^{\beta-1})(z_s - p^{-\beta+1})} \\ &\times \left[(\beta + m) \int_{|z_j|=1, j \in J} \prod_{j \in J} \frac{1}{(z_j - p^{\beta+m})(z_j - p^{-\beta-m})} \right. \\ &\times \left. \mu_{n-2m}(z_1, \dots, z_{n-2m}) \varphi(\dots; R) \prod_{j \in J} dz_j \right] \prod_{s \notin J} dz_s. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Обозначим выражение в квадратных скобках через $F(\beta) = F_J(\beta)$ (оно зависит также от $z_s, s \notin J$). Обозначим через $\mathfrak{F}$ подынтегральное выражение в $F(\beta)$. Аналитическое продолжение $F(\beta)$ легко пишется по способу, изложенному в доказательстве леммы 4.1. В полосе $-m-1 < \operatorname{Re} \beta < -m$ оно равно

$$F(\beta) + (\beta + m)G(\beta),$$

где $F(\beta)$ – то же выражение в квадратных скобках (и, следовательно, $F(\beta)$ имеет особенность на прямой $\operatorname{Re} \beta = -m$), а

$$G(\beta) = 2\pi i \sum_{k \in J} \int_{|z_j|=1, j \in J, j \neq k} \left[- \operatorname{res}_{z_k=p^{\beta+m}} \mathfrak{F} + \operatorname{res}_{z_k=p^{-\beta-m}} \mathfrak{F} \right] \prod_{j \in J, j \neq k} dz_j \\ - (2\pi i)^2 \sum_{k, l \in J} \int_{|z_j|=1, j \in J, j \neq k, l} \operatorname{res}_{z_k=p^{\beta+m}} \operatorname{res}_{z_l=p^{-\beta-m}} \mathfrak{F} \prod_{j \in J, j \neq k, l} dz_j.$$

Итак,

$$\lim_{\beta \rightarrow -m+0} F(\beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\beta+m|=\rho} \frac{F(\beta) d\beta}{\beta+m} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\beta+m|=\rho, \operatorname{Re} \beta < -m} G(\beta) d\beta.$$

Преобразование $\beta \mapsto -2m - \beta$ сохраняет $F_I(\beta)$, и, следовательно, первое слагаемое в правой части равно нулю.

Второе слагаемое дает желаемый результат, как и в доказательстве предложения 4.3.

4.7. Отсутствие кратностей. Очевидно, $\operatorname{GL}_n(\mathbb{O})$ -неподвижный вектор $e_{\mathbb{O}^n}$ является $\operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$ -циклическим. Это легко влечет предложение 2.5, см. доказательство леммы 1.10 в [5].

4.8. Система e_R в прямом интеграле. Доказательство теоремы 2.7. Во-первых, $\rho_\alpha(g)u_R = u_{gR}$ и можно положить $R = \mathbb{O}^n$, $u_{\mathbb{O}^n}(s, \mathcal{V}) = 1$. Поэтому достаточно вычислить

$$\int_{\Xi_n} \int_{\operatorname{Fl}_n} u_T(s, \mathcal{V}) d\mathcal{V} d\mu_\alpha(s).$$

Интегрируя по Fl_n с помощью (1.8), получаем

$$\int_{\Xi_n} \varphi_{is}(T) d\mu_\alpha(s).$$

По теореме 2.3 это равно $K_\alpha(\mathbb{O}^n, T)$.

4.9. Тождества с функциями Холла–Литтлвуда. Докажем утверждение а) предложения 2.11. Используя (1.11), можно представить интеграл (4.3)–(4.4) как сумму вычетов. Результатом является (громоздкое) рациональное выражение от p и p^α . Поэтому тождество, которое мы хотим доказать, есть равенство рациональных функций, которое верно для счетного числа p (и всех α при фиксированном p). Значит, искомое тождество выполнено всегда.

Утверждение б) следует из а) и формулы обращения для сферического преобразования (доказательство Макдональда теоремы [12; 5.1.2] основано на вычислениях с холл–литтлвудовскими выражениями типа (1.11) и не использует простоты p).

§ 5. Положительность и неположительность

В этом параграфе мы доказываем теорему 2.2 об условиях положительной определенности ядер K_α .

5.1. Случай $\alpha > n - 1$. Этот случай сводится к теореме 2.3. Действительно, $K_\alpha(R, T)$ оказывается интегралом положительно определенных ядер $\Phi_{is_1, \dots, is_n}(R, T)$ по положительному весу $d\mu_\alpha$.

5.2. Положительная определенность ядра $K_\alpha(R, T)$ при целых α . В этом случае наше утверждение тоже вытекает из формулы Планшереля (теорема 2.4).

Более простое доказательство дано ниже в п. 6.1.

5.3. Случай $\alpha < 0$. Этот случай очевиден:

$$\langle e_R, e_R \rangle = \langle e_S, e_S \rangle = 1, \quad \langle e_R, e_S \rangle > 1.$$

Последнее невозможно.

5.4. Нецелые α между 0 и $n - 1$. Допустим, что функция Δ_α положительно определена. Тогда она разлагается в интеграл положительно определенных сферических функций φ_τ

$$\Delta_\alpha(R) = \int \varphi_\tau(R) d\kappa_\alpha(\tau) \quad (5.1)$$

по отношению к некоторой положительной мере κ_α .

Теорема 4.4 дает разложение Δ_α в интеграл сферических функций

$$\Delta_\alpha(R) = \int \varphi_\tau(R) d\sigma_\alpha(\tau) \quad (5.2)$$

по некоторой мере (заряду) σ_α . При нецелых $\alpha < n - 1$ мы имеем слагаемое I_{01} , входящее в наше разложение с ненулевым коэффициентом. Но сферическая функция $\varphi_{is_1, \dots, is_{n-1}, n-1-\alpha}$ не является положительно определенной; см., например, классификацию унитарных представлений в [15]. Поэтому разложения (5.1), (5.2) различны.

Достаточно свести к противоречию существование этих двух разных разложений, что и делается в оставшейся части параграфа.

5.5. Множество Σ_n . Обозначим через ρ вектор $((n-1)/2, (n-1)/2 - 1, \dots, -(n-1)/2) \in \mathbb{R}^n$. Симметрическая группа S_n действует на $\mathbb{R}^n$ перестановками координат. Обозначим через Q выпуклую оболочку S_n -орбиты вектора ρ .

Через Σ_n мы обозначим множество всех

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbb{C}^n \Big/ \frac{2\pi i}{\ln p} \mathbb{Z}^n$$

таких, что любое τ_j вещественно или чисто мнимо и $\operatorname{Re} \tau \in Q$.

Множество Σ_n важно для нас по следующим причинам.

1°. Если φ_τ положительно определена, то $\tau \in \Sigma_n$. В частности, Σ_n содержит носитель меры κ_α из (5.1).

2°. При $\alpha > 0$ носитель меры σ_α из (5.2) содержится в Σ_n .

3°. Σ_n компактно.

Множество унитарных представлений группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ известно (см. [15], [16]), однако утверждение 1° проще свести к теореме 4.7.1 из [12].

Через Σ_n^u обозначим множество положительно определенных сферических функций на $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

5.6. Действие алгебры Гекке. Алгебра Гекке $\mathcal{H}_n$ группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (см. [11]) — это сверточная алгебра $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$ -биинвариантных функций с компактным носителем на $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Функция f на $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ называется $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$ -биинвариантной, если

$$f(h_1 g h_2) = f(g), \quad g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad h_1, h_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{O}).$$

Умножение в алгебре Гекке есть свертка.

Алгебра Гекке действует на пространстве $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$ -биинвариантных функций посредством свертки.

Сферические функции φ_τ суть собственные функции $\mathcal{H}_n$, т.е.

$$\gamma * \varphi_\tau = c_\gamma(\tau) \varphi_\tau, \quad \gamma \in \mathcal{H}, \quad (5.3)$$

где $c_\gamma(\tau)$ — скалярный множитель.

Обозначим через $\mathcal{A}$ алгебру всех полиномиальных выражений от $p^{\tau_1}, \dots, p^{\tau_n}, p^{-\tau_1}, \dots, p^{-\tau_n}$, симметричных относительно перестановок τ_j . Отображение $\gamma \mapsto c_\gamma$ является изоморфизмом $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{A}$, см. [11; V, (3.2)].

ЛЕММА 5.1. Пусть положительно определенная $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$ -биинвариантная функция f представлена как интеграл по Σ_n по некоторому заряду

$$f(g) = \int_{\Sigma_n} \varphi_\tau(g) d\sigma(\tau).$$

Пусть $u(\tau) \in \mathcal{A}$ неотрицательна на Σ_n . Тогда функция

$$q(g) = \int_{\Sigma_n} u(\tau) \varphi_\tau(g) d\sigma(\tau)$$

также положительно определена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду того что f положительно определена, она может быть представлена в виде

$$f(g) = \int_{\Sigma_n^u} \varphi_\tau(g) d\nu(\tau)$$

для некоторой положительной меры ν . Пусть γ — элемент алгебры Гекке, соответствующий функции $u(\tau)$. Тогда

$$(\gamma * f)(g) = \int_{\Sigma_n} u(\tau) \varphi_\tau(g) d\sigma(\tau) = \int_{\Sigma_n^u} u(\tau) \varphi_\tau(g) d\nu(\tau).$$

Второй интеграл является положительно определенной функцией. Лемма доказана.

5.7. Аппроксимация сферических функций матричными элементами U_α . Обозначим через W_n гипероктаэдральную группу пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. группу, порожденную перестановками координат и всевозможными сменами направлений осей.

Рассмотрим отображение $\Sigma_n \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданное

$$(\tau_1, \dots, \tau_n) \mapsto (p^{\tau_1} + p^{-\tau_1}, \dots, p^{\tau_n} + p^{-\tau_n}).$$

Очевидно, оно постоянно на орбитах группы W_n и поэтому является вложением факторпространства Σ_n/W_n в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим функции

$$u_k(\tau) = \sum_{j=1}^n (p^{\tau_j} + p^{-\tau_j})^k.$$

Очевидно, эти функции вещественны на множестве Σ_n и разделяют орбиты гипероктаэдральной группы на Σ_n .

Фиксируем точку $\varkappa = (is_1, \dots, is_{n-1}, n-1-\alpha) \in \Sigma_n$. Рассмотрим функцию

$$F(\tau) = \sum_{k=1}^n [u_k(\tau) - u_k(\varkappa)]^2.$$

Функция F равна нулю на орбите $W_n \cdot \varkappa$ и положительна вне этой орбиты. Пусть M – максимум F на Σ_n . Рассмотрим новую функцию

$$X(\tau) = 1 - F(\tau)/M.$$

Она положительна и достигает максимума на орбите $W_n \cdot \varkappa$. Для простоты предположим, что s_j попарно различны. Тогда точки $w\tau$ являются невырожденными критическими точками X . Пусть ξ – соответствующий элемент алгебры Гекке. Рассмотрим последовательность положительно определенных функций

$$m^{n/2} \xi^m * \Delta_\alpha(g) = m^{n/2} \int X^m(\tau) \varphi_s(g) d\sigma_\alpha(\tau). \quad (5.4)$$

Асимптотика этого интеграла вычисляется по методу Лапласа, см., например, [17; II, (4.4.8)]. Мы получаем, что предел (5.4) при $m \rightarrow \infty$ имеет вид

$$r(g) := \sum_{w \in W_n} c(w\varkappa) \varphi_{w\varkappa}(g), \quad (5.5)$$

где числовые коэффициенты $c(w\varkappa)$ отличны от нуля. Функция $r(g)$ положительно определена как предел положительно определенных функций. Следовательно, $r(g)$ разлагается в интеграл положительно определенных сферических функций,

$$r(g) = \int_{\Sigma_n^u} \varphi_\tau(g) d\lambda(\tau). \quad (5.6)$$

Вычислим предел $\xi^m * r$ при $m \rightarrow \infty$ (теперь без нормализующего множителя $m^{n/2}$). Применяя $\xi^m * r$ к (5.6), получаем

$$\xi^m * r(g) = \int_{\Sigma_n^u} X(g)^m \varphi_\tau(g) d\lambda(\tau). \quad (5.7)$$

Орбита $W_n \chi$ не пересекается с (замкнутым) множеством Σ_n^u , и, следовательно, предел интегралов (5.7) — нулевой.

Вычисляя тот же предел с помощью (5.5), получаем $r(g)$ (так как $\xi^m * r = r$). Поэтому $r(g) = 0$. Но $r(g)$ — конечная линейная комбинация сферических функций; с другой стороны, сферические функции являются собственными для алгебры Гекке. Получаем противоречие.

§ 6. Целые значения α и разностные уравнения

Докажем теорему 2.8 о линейной зависимости векторов e_R .

6.1. Вложение H_m в $L^2(\mathbb{K}^{nm})$. Пусть m — неотрицательное целое число. Рассмотрим пространство

$$\mathbb{K}^{nm} = \underbrace{\mathbb{K}^n \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}^n}_{m \text{ раз}}.$$

Пусть $R \in \text{Lat}_n$. Определим решетку

$$R^m := R \oplus \cdots \oplus R \subset \mathbb{K}^{nm}.$$

Определим функции e_R на $\mathbb{K}^{nm}$ по формуле

$$e_R(\theta) = \begin{cases} \text{vol}(R)^{-m/2}, & \text{если } \theta \in R^m, \\ 0, & \text{если } \theta \notin R^m. \end{cases}$$

Очевидно, $L^2(\mathbb{K}^{nm})$ -скалярные произведения векторов e_R равны

$$\langle e_R, e_S \rangle = K_m(R, S),$$

и, следовательно, мы можем отождествить H_m с подпространством в $L^2(\mathbb{K}^{nm})$, порожденным функциями $e_R(\theta)$.

В частности, это доказывает существование гильбертовых пространств H_m при целых m .

6.2. Сведение теоремы 2.8 к комбинаторной задаче. Пусть теперь $m = 0, 1, \dots, n-1$.

Рассмотрим решетки $R \subset S$ в $\mathbb{K}^n$ такие, что $S/R = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{m+1}$. Без потери общности мы можем положить $\text{vol}(S) = 1$.

Удобно отождествить фактор S/R с $(m+1)$ -мерным линейным пространством $\mathbb{F}_p^{m+1}$ над конечным полем $\mathbb{F}_p$ из p элементов. Обозначим через π естественную проекцию

$$\pi: S \rightarrow S/R \simeq \mathbb{F}_p^{m+1}.$$

Пусть $Q \in \text{Lat}_n$ удовлетворяет $R \subset Q \subset S$.

Функция e_Q равна нулю вне S^n ; если $\xi - \eta \in R^n$, то $e_Q(\xi) = e_Q(\eta)$. Поэтому мы можем рассматривать функции e_Q как функции на факторгруппе

$$S^m/R^m \simeq \underbrace{\mathbb{F}_p^{m+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_p^{m+1}}_{m \text{ раз}} \simeq \mathbb{F}_p^{(m+1)m}.$$

Более точно, для любого линейного подпространства $L \subset \mathbb{F}_p^{m+1}$ мы определяем функцию

$$\tilde{e}_L(w_1 \oplus \dots \oplus w_m) := \begin{cases} p^{\text{codim}(L)m/2}, & \text{если } w_j \in L \text{ при всех } j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если Q содержит R и содержится в S , то $L := Q/R$ – линейное подпространство в $S/R = \mathbb{F}_p^{m+1}$. Очевидно,

$$e_Q(\theta_1 \oplus \dots \oplus \theta_m) = \tilde{e}_L(\pi(\theta_1) \oplus \dots \oplus \pi(\theta_m)).$$

Таким образом, достаточно исследовать линейную зависимость функций $\tilde{e}_L$.

6.3. Доказательство теоремы 2.8. Пусть $k = 0, \dots, m+1$. Рассмотрим функцию G_k на $\mathbb{F}_p^{(m+1)m}$, определенную равенством

$$G_k(w_1 \oplus \dots \oplus w_m) = p^{-km/2} \sum_{k: \text{codim } L=k} \tilde{e}_L(w_1 \oplus \dots \oplus w_m).$$

Мы хотим найти числа $u_0, \dots, u_m$ такие, что

$$\sum_k u_k G_k = 0.$$

ЛЕММА 6.1. $u_k = (-1)^k p^{k(k-1)/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $G_k(w_1 \oplus \dots \oplus w_m)$ совпадает с числом подпространств L коразмерности k , содержащих векторы $w_1, \dots, w_m$. Обозначим через W линейную оболочку w_j . Нам надо найти число подпространств в $\mathbb{F}_p^{m+1}$, содержащих W , или, что равносильно, число линейных подпространств в $\mathbb{F}_p^{m+1}/W$.

Число A_l^j всех j -мерных подпространств в $\mathbb{F}_p^l$ равно

$$A_l^j = \frac{(p^l - 1)(p^{l-1} - 1) \dots (p^{l-j+1} - 1)}{(p^j - 1)(p^{j-1} - 1) \dots (p - 1)}.$$

Итак, наша лемма эквивалентна следующему семейству тождеств

$$\sum_{i=0}^s (-1)^i p^{i(i-1)/2} \frac{(p^s - 1)(p^{s-1} - 1) \dots (p^{s-i+1} - 1)}{(p^i - 1)(p^{i-1} - 1) \dots (p - 1)} = 0. \quad (6.1)$$

Здесь мы можем сослаться на [11; пример I.2.3] или на q -биномиальную теорему (см., например, [18; § 1.3]),

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1-aq)(1-aq^2) \dots (1-aq^{i-1})}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^i)} z^i = \frac{(1-az)(1-azq)(1-azq^2) \dots}{(1-z)(1-zq^2)(1-zq^3) \dots},$$

мы подставляем $q = 1/p$, $a = p^s$, $z = q$.

Список литературы

1. *Brown K.* Buildings. New York: Springer-Verlag, 1989.
2. *Garrett P.* Buildings and classical groups. London: Chapman & Hall, 1997.
3. *Гиндикин С. Г.* Анализ на однородных пространствах // УМН. 1964. Т. 19. № 4. С. 3–92.
4. *Неретин Ю. А.* Матричные аналоги бета-функции и формула Планшереля для ядер-представлений Березина // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 5. С. 67–100; <http://arXiv.org/abs/math/9905045>.
5. *Neretin Yu. A.* Plancherel formula for Berezin deformation of L^2 on Riemannian symmetric space // J. Funct. Anal. 2002. V. 189. P. 336–408; <http://arXiv.org/abs/math/991102>.
6. *Неретин Ю. А.* Разделение спектров в анализе ядер Березина // Функц. анализ и его прилож. 2000. Т. 34. № 3. С. 49–62.
7. *Neretin Yu. A.* Groups of hierarchomorphisms of trees and related Hilbert spaces // J. Funct. Anal. 2003. V. 200. № 2. P. 505–535; <http://arXiv.org/abs/math/0106243>.
8. *Haagerup U.* An example of a nonnuclear C^* -algebra, which has the metric approximation property // Invent. Math. 1979. V. 50. № 3. P. 279–293.
9. *Ольшанский Г. И.* Новые большие группы типа I // Соврем. проблемы матем. Т. 16. М.: ВИНТИ, 1980. С. 31–52.
10. *Weil A.* Basic number theory. Berlin: Springer-Verlag, 1967.
11. *Macdonald I. G.* Symmetric functions and Hall polynomials. Oxford: Clarendon Press, 1995.
12. *Макдональд И. Г.* Сферические функции на группе p -адического типа // УМН. 1973. Т. 28. № 5. С. 155–224.
13. *Weil A.* Sur certains groupes d'opérateurs unitaires // Acta Math. 1964. V. 111. P. 143–211.
14. *Nazarov M. L.* The oscillator semigroup over nonarchimedian field // J. Funct. Anal. 1995. V. 128. P. 384–438.
15. *Tadic M.* Classification of unitary representations in irreducible representations of general linear group (nonarchimedian case) // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1986. V. 19. P. 335–382.
16. *Tadic M.* An external approach to unitary representations // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1993. V. 28. № 2. P. 215–252; <http://arXiv.org/abs/math/9304215>.
17. *Федоряк М. В.* Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
18. *Gaspar G., Rahman M.* Basic hypergeometric series. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.

Институт теоретической и экспериментальной физики,
г. Москва
E-mail: neretin@mccme.ru

Поступила в редакцию
12.05.2003