Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. П. Бибило, Изомонодромные деформации систем линейных дифференциальных уравнений с иррегулярными особенностями, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 6, 63–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7861>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 17:12:41

УДК 517.927.7

Ю. П. Бибило

Изомонодромные деформации систем линейных дифференциальных уравнений с иррегулярными особенностями

Рассматривается изомонодромная деформация линейных систем дифференциальных уравнений с иррегулярными особенностями. Доказана теорема об общем виде дифференциальной формы, задающей такую деформацию.

Библиография: 21 название.

Ключевые слова: изомонодромная деформация, иррегулярные особенности, данные Стокса, форма деформации.

§ 1. Введение

Вопрос об изучении изомонодромных деформаций систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений впервые был сформулирован Б. Риманом в 1857 г. [1]. В течение длительного периода времени изучались преимущественно изомонодромные деформации линейных систем с фуксовыми особыми точками, в частности Л. Шлезингером, Б. Мальгранжем, А. А. Болибрухом, Б. А. Дубровиным и М. Маццокко и др.

В 1980-х годах М. Джимбо и Т. Мива построили и исследовали деформацию систем с иррегулярными нерезонансными особыми точками [2]. Для описания систем с иррегулярными особыми точками помимо представления монодромии необходим дополнительный набор данных [3], в частности, данные Стокса [4], [5]. Позже изомонодромные деформации систем с иррегулярными особенностями изучались в работах А. Р. Итса и В. Ю. Новокшенова [6], М. В. Федорюка [7], И. М. Кричевера [8] и др.

Исследование изомонодромных деформаций включает в себя следующие проблемы: построение изомонодромных деформаций линейных дифференциальных систем, нахождение общего вида таких деформаций [9], [10], исследование связи изомонодромных деформаций линейных уравнений и систем с нелинейными дифференциальными уравнениями (в частности, нахождение пар Лакса) [6], изомонодромные слияния особых точек [11], [12] и др.

Линейная система с фуксовыми особыми точками (определения приведены ниже) определяется своим представлением монодромии [9], [10], поэтому изомонодромность фуксовой системы естественно понимать как сохранение представления монодромии при деформации. Представление монодромии определяется с точностью до сопряжения на постоянную матрицу (в частности, в зависимости от выбора исходной фундаментальной матрицы). А. А. Болибрух

Работа выполнена в рамках Программы Президента РФ поддержки молодых ученых (грант № МК-4270.2011.1).

предложил расширить понятие изомонодромной деформации и понимать изомонодромность как сохранение представления монодромии с точностью до сопряжения на постоянную матрицу [10], [13]. Ему удалось получить общий вид дифференциальной 1-формы (в том числе для систем с резонансными фуксовыми особыми точками), задающей изомонодромную деформацию системы с фуксовыми особенностями [10], [14].

В настоящей работе расширенное определение А. А. Болибруха распространяется на случай систем с иррегулярными особыми точками, в результате чего доказана теорема о общем виде дифференциальной формы, задающей изомонодромную деформацию в случае, когда в качестве параметров деформации выбраны положения особых точек.

§ 2. Классификация особых точек

Рассмотрим линейную систему из d дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dz} = A(z)y, \quad y(z) \in \mathbb{C}^d, \quad (2.1)$$

где матрица коэффициентов $A(z)$ мероморфна на $\mathbb{CP}^1$ и точки $a_1, \dots, a_n$ – ее полюсы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Особая точка a_i называется *регулярной* особенностью системы (2.1), если внутри каждого сектора конечного раствора с вершиной в точке a_i фундаментальная матрица $Y(z)$ системы имеет не более чем степенной рост. В противном случае особая точка a_i называется *иррегулярной* особой точкой системы (2.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Особая точка a_i называется *фуксовой*, если матричная функция $A(z)$ имеет полюс первого порядка в точке a_i .

Как хорошо известно, фуксова особая точка является регулярной (см., например, [9]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Целое неотрицательное число r_i называется *рангом Пуанкаре* системы (2.1) в точке a_i , если разложение в ряд Лорана матрицы $A(z)$ в окрестности a_i имеет вид

$$A(z) = \frac{A_{-r_i-1}}{(z-a_i)^{r_i+1}} + \dots + \frac{A_{-1}}{z-a_i} + A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(z-a_i)^k, \quad A_{-r_i-1} \neq 0. \quad (2.2)$$

Преобразование неизвестной функции $y(z) = \Gamma(z)\tilde{y}(z)$, где $\Gamma(z)$ – мероморфная матричная функция, удовлетворяющая условию $\det \Gamma(z) \not\equiv 0$, называют *калибровочным*, при этом матрица коэффициентов системы преобразуется следующим образом:

$$\tilde{A}(z) = \Gamma^{-1}(z)A(z)\Gamma(z) - \Gamma^{-1}(z)\Gamma'(z). \quad (2.3)$$

Две системы вида (2.1) с матрицами коэффициентов $A(z)$ и $\tilde{A}(z)$ называются *мероморфно эквивалентными*, если найдется некоторое калибровочное преобразование $y(z) = \Gamma(z)\tilde{y}(z)$ такое, что справедливо соотношение (2.3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Ранг Пуанкаре системы (2.1) в точке a_i называется *минимальным*, если он наименьший среди рангов Пуанкаре всех локально мероморфно эквивалентных ей в точке a_i систем.

Минимальный ранг Пуанкаре системы (2.1) в регулярной особой точке равен нулю, а в иррегулярной особой точке он строго положителен. Если ранг Пуанкаре регулярной особой точки минимален, то такая точка является фуксовой (см. [9]).

Пусть ранги Пуанкаре системы (2.1) во всех особых точках $a_1, \dots, a_n$ минимальны и равны соответственно $r_1, \dots, r_n$. И пусть, кроме того, все особые точки отличны от бесконечности. Общий вид системы в таком случае следующий:

$$\frac{dy}{dz} = A(z)y, \quad A(z) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{r_i} \frac{A_{-k-1}^i}{(z - a_i)^{k+1}}, \quad \sum_{i=1}^n A_{-1}^i = 0. \quad (2.4)$$

Система (2.4) будет основным объектом нашего исследования.

В случае, если все особые точки системы (2.4) фуксовы, система называется фуксовой и представима в виде

$$\frac{dy}{dz} = \sum_{i=1}^n \frac{A_{-1}^i}{z - a_i} y, \quad \sum_{i=1}^n A_{-1}^i = 0. \quad (2.5)$$

Определим представление монодромии системы (2.4). Выберем произвольную точку $z_0 \in \mathbb{CP}^1 \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, и пусть γ – некоторая петля, которая начинается и заканчивается в неособой точке z_0 . Аналитически продолжим фундаментальную матрицу $Y(z)$ системы вдоль петли γ , в результате продолжения получим некоторую, вообще говоря, отличную от $Y(z)$ фундаментальную матрицу $\tilde{Y}(z)$. Так как две фундаментальные матрицы одной и той же линейной системы могут отличаться не более чем на постоянную матрицу, справедливо соотношение $Y(z) = \tilde{Y}(z)G^\gamma$, где G^γ – невырожденная постоянная матрица. Таким образом, каждой петле γ (а точнее, ее гомотопическому классу $[\gamma]$; более подробно см. [10]) соответствует матрица G^γ . Отображение $[\gamma] \rightarrow G^\gamma$ задает представление

$$\chi: \pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, z_0) \rightarrow \mathbf{GL}(d, \mathbb{C}), \quad (2.6)$$

называемое представлением монодромии системы (2.4).

Заметим, что представление χ зависит от выбора фундаментальной матрицы $Y(z)$. Рассмотрим другую фундаментальную матрицу $Z(z) = Y(z)C$, тогда получим соотношение $Z(z) = \tilde{Z}(z)C^{-1}G^\gamma C$. Это значит, что для системы (2.4) определено не единственное представление монодромии χ , а класс представлений по общему сопряжению на постоянную матрицу.

Пусть δ_i – простая петля, обходящая вокруг только одной особой точки a_i . Матрица $G^i = (\chi(\delta_i))^{-1}$ называется *матрицей монодромии*. Всего n матриц монодромии $G^1, \dots, G^n$ порождают группу монодромии с одним групповым равенством $G^1 \cdots G^n = I$, где I – единичная матрица.

Поведение системы в окрестности фуксовой особой точки характеризуют соответствующая матрица монодромии и матрица нормирований. Но в случае иррегулярной особой точки требуется расширенный набор данных. Его описание проводится при помощи локального формального фундаментального решения системы (2.4).

§ 3. Формальное решение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Иррегулярная особая точка a_i системы (2.4) называется *нерезонансной*, если все собственные значения матрицы $A_{-r_i-1}^i$ попарно различны. В противном случае особая точка a_i называется *резонансной*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Фуксова особая точка a_i системы (2.4) называется *нерезонансной*, если для каждой пары собственных значений матрицы A_{-1}^i их разность не является ненулевым целым числом. В противном случае точка a_i называется *резонансной*.

ТЕОРЕМА 1 (см. [15]). Система (2.4) в окрестности иррегулярной особой точки $a_i \neq \infty$ имеет формальное фундаментальное решение $\hat{Y}^i(z)$ вида

$$\hat{Y}^i(z) = \hat{F}(z)(z - a_i)^L e^{Q^i(z)}. \quad (3.1)$$

При этом, если a_i – нерезонансная особая точка, то $\hat{F}(z)$ – обратимый формальный ряд Тейлора от $z - a_i$, L – диагональная постоянная матрица, $Q^i(z)$ – диагональная матрица, элементами которой являются полиномы от $(z - a_i)^{-1}$ с нулевыми свободными членами.

Если a_i – резонансная особая точка, то $\hat{F}(z)$ – обратимый формальный ряд Лорана от $(z - a_i)^{1/p}$ (p – натуральное число) с конечной главной частью, L – постоянная матрица, $Q^i(z)$ – диагональная матрица, элементами которой являются полиномы от $(z - a_i)^{-1/p}$ с нулевыми свободными членами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Формальное фундаментальное решение (3.1) системы (2.4) называется *разветвленным* в точке a_i , если $Q^i(z)$ содержит дробные степени $z - a_i$. В противном случае – *неразветвленным*.

Существуют различные способы зафиксировать выбор формального фундаментального решения так, чтобы оно определялось однозначно. В работе [16] доказана следующая теорема о разложении формального фундаментального решения так, что выбор мероморфных инвариантов системы фиксирован и формальный ряд Лорана $\hat{F}(z)$ не содержит дробных степеней z .

ТЕОРЕМА 2 (см. [16]). Система (2.4) в окрестности иррегулярной особой точки a_i имеет формальное решение вида

$$\hat{Y}(z) = \hat{F}(z)(z - a_i)^{J^i} U e^{Q^i(z)}, \quad (3.2)$$

где $\hat{F}(z)$ и $(\hat{F}(z))^{-1}$ – формальные ряды Лорана от $z - a_i$ с конечной главной частью; $Q^i(z)$, U , J^i – блочные матрицы, у которых блочная структура (т.е. размеры соответствующих блоков) совпадает.

Каждый ненулевой блок диагональной матрицы $Q^i(z)$ имеет вид

$$Q_j^i(z) = \text{diag}(q_j^i(x)I_{s_j}, q_j^i(x\zeta_j)I_{s_j}, \dots, q_j^i(x\zeta_j^{p_j-1})I_{s_j}), \quad (3.3)$$

где q_j^i – полином от $x = (z - a_i)^{-1/p_j}$ с нулевым свободным членом и $\zeta_j = e^{2\pi i/p_j}$ (p_j – натуральное число, i – мнимая единица), I_{s_j} – единичная матрица размера $s_j \times s_j$.

Каждый ненулевой блок блочно-диагональной матрицы J^i имеет вид

$$J_j^i = \text{diag} \left(J_{s_j}^i, J_{s_j}^i + \frac{1}{p_j} I_{s_j}, \dots, J_{s_j}^i + \frac{p_j - 1}{p_j} I_{s_j} \right), \quad (3.4)$$

где $J_{s_j}^i$ – матрица в жордановой форме и ее собственные значения $\rho_j^1, \dots, \rho_j^{s_j}$ удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq \text{Re } \rho_j^m < \frac{1}{p_j}, \quad m = 1, \dots, s_j. \quad (3.5)$$

Постоянная блочно-диагональная матрица $U = \text{diag}(U_1, \dots, U_{N_Q})$ содержит ненулевые блоки вида

$$U_j = [\zeta_j^{(l-1)(k-1)} I_{s_j}]_{l,k=1}^{p_j}, \quad \zeta_j = e^{2\pi i / p_j}. \quad (3.6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Матрица $\widehat{G}^i$, определяемая равенством

$$\widehat{Y}(a_i + (z - a_i)e^{2\pi i}) = \widehat{Y}(z)\widehat{G}^i,$$

называется матрицей *формальной монодромии* системы (2.4) в точке a_i .

Приведем еще одну форму записи формального фундаментального решения, которая потребуется в дальнейшем. Сделаем замену независимой переменной $\xi = (z - a_i)^{1/p}$, где p – наименьшее общее кратное чисел p_j из формулировки теоремы 2 (натуральное число p будем называть *порядком ветвления* формального фундаментального решения системы (2.4) в точке a_i). В случае, когда формальное решение неразветвлено, полагаем $\xi = z - a_i$. Тогда формальное фундаментальное решение представляется в виде

$$\widehat{Y}(\xi) = \widehat{\mathcal{F}}(\xi)\xi^{\mathcal{J}^i} \exp \mathcal{Q}^i(\xi), \quad \mathcal{J}^i = \text{diag}(\mathcal{J}_1^i, \dots, \mathcal{J}_h^i), \quad (3.7)$$

где $\mathcal{J}^i$ – жорданова матрица, действительные части собственных значений которой лежат в промежутке $[0, 1)$, матрица $\mathcal{Q}^i(\xi)$ получается из матрицы $Q^i(z)$ только заменой независимой переменной, т.е. $\mathcal{Q}^i(\xi) = Q^i(z)$.

Далее используем построение, повторяющее рассуждения Левеля о построении базиса специального вида (будем называть его левелевским), и приведенное в [17]. Для каждого блока $\mathcal{J}_k^i$ рассмотрим пространство $\widehat{X}^k$, порожденное столбцами матрицы $\widehat{\mathcal{F}}(\xi)\xi^{\mathcal{J}_k^i}$. Выделим в каждом $\widehat{X}^k$ формальный левелевский базис и обозначим через C_k матрицу перехода к этому базису. Матрица $C = \text{diag}(C_1, \dots, C_h)$ коммутирует с $\mathcal{Q}^i(\xi)$, получаем

$$\widehat{Y}(\xi)C = \widehat{U}(\xi)\xi^{\Lambda^i}\xi^{\widehat{E}^i} \exp \mathcal{Q}^i(\xi), \quad (3.8)$$

где Λ^i – блочная диагональная матрица с целочисленными элементами, блочная структура которой согласована с блочной структурой $\mathcal{J}^i$, и внутри каждого блока диагональные элементы упорядочены по невозрастанию. Новая матрица $\widehat{E}^i$ коммутирует с $Q^i(z)$, кроме того, матрица $\xi^{\Lambda^i}\widehat{E}^i\xi^{-\Lambda^i}$ голоморфна при $\xi = 0$ (см. [17]).

Элементы матрицы Λ^i/p называются *формальными нормированиями* системы (2.4) в точке a_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Если в разложении (3.8) формальный ряд $\widehat{U}(\xi) = U_0 + U_1\xi + \dots$ таков, что $\det U_0 \neq 0$, то особую точку a_i будем называть *формально фuchsовой* иррегулярной особой точкой системы (2.4).

§ 4. Данные Стокса

Формальные инварианты (относительно формальных мероморфных преобразований) $J^i, Q^i(z)$ недостаточно полно описывают систему (2.4) в окрестности иррегулярной особой точки a_i . Для более точного описания поведения системы в окрестности особой точки вводится дополнительный набор данных, называемых данными Стокса.

Формальное решение, вообще говоря, является расходящимся рядом. В [15] приводится теорема о том, что формальное решение является асимптотическим разложением некоторого фундаментального решения в каждом достаточно узком секторе с вершиной в особой точке.

Рассмотрим иррегулярную особую точку a_i . Пусть $\hat{Y}(z)$ – некоторое формальное фундаментальное решение системы (2.4) в окрестности точки a_i . Любое формальное фундаментальное решение представимо в виде

$$\hat{Y}(z) = \hat{F}(z)(z - a_i)^{J^i} U e^{Q^i(z)} C_0,$$

где $\hat{F}(z)$ – формальный ряд Лорана, C_0 – постоянная невырожденная матрица, $Q^i(z) = \text{diag}(q_1^i(z)I_{s_1}, \dots, q_l^i(z)I_{s_l})$ и все функции $q_j^i(z)$ различны (см. [4]).

Определим секторы и матрицы Стокса аналогично [4] (данные Стокса могут быть определены более общим способом, приведенным в [5]). Рассмотрим разность двух неравных диагональных элементов матрицы $Q^i(z)$

$$q_j^i(z) - q_h^i(z) = b \frac{1}{(z - a_i)^m} + \dots, \quad b \neq 0,$$

где m – некоторое рациональное положительное число.

Обозначим главное значение $\arg b$ через β . Тогда при $z \rightarrow a_i$ вдоль направления $\tau = \arg(z - a_i)$ имеем

$$|z - a_i|^m \text{Re}(q_j^i(z) - q_h^i(z)) \rightarrow |b| \cos(\beta - m\tau) = c.$$

Если значение c равно нулю, то направление τ называется *направлением Стокса*. Заметим, что $c = 0$ при $\beta - m\tau \equiv -\pi/2 \pmod{\pi}$, следовательно, направления Стокса определяются совокупностью равенств

$$\tau \equiv \frac{\beta + \pi/2}{m} \pmod{\frac{2\pi}{m}}, \quad \tau \equiv \frac{\beta - \pi/2}{m} \pmod{\frac{2\pi}{m}}. \quad (4.1)$$

Выберем покрытие проколотой окрестности $\dot{D}(a_i)$ секторами

$$\Omega_1(a_i), \dots, \Omega_{N_i}(a_i), \quad \Omega_k(a_i) = \{z : \varphi_k^- < \arg(z - a_i) < \varphi_k^+\} \cap \dot{D}(a_i)$$

(будем их называть секторами Стокса) такими, что в каждом секторе $\Omega_k(a_i)$ содержится только одно направление Стокса (т.е. найдется $z \in \Omega_k(a_i)$ такое, что $\tau = \arg(z - a_i)$ удовлетворяет одному из равенств (4.1)), φ_k^-, φ_k^+ – соседние с ним направления Стокса и в пересечениях секторов $\Omega_k(a_i) \cap \Omega_{k'}(a_i)$, $k \neq k'$, направлений Стокса не содержится.

Секторы Стокса, как показывает следующая теорема, важны для понимания связи формального фундаментального решения и “настоящего”.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Часто в качестве набора канонических решений выбирают набор фундаментальных решений в виде (3.2), т.е.

$${}^{st}Y_k^i(z) = F_k(z)(z - a_i)^{J^i} Ue^{\mathcal{Q}^i(z)}, \quad z \in \Omega_k(a_i). \quad (4.7)$$

Будем называть такой набор ${}^{st}Y_1^i, \dots, {}^{st}Y_{N_i}^i$ *стандартным* набором канонических решений. Тогда фундаментальное решение $Y(z)$, относительно которого определено представление монодромии, и каноническое решение ${}^{st}Y_1^i(z)$, связаны равенством $Y(z) = {}^{st}Y_1^i(z)C^i$, $z \in \Omega_1(a_i)$. Постоянная невырожденная матрица C^i , определяемая этим равенством, называется матрицей связи. Матрицы Стокса, определенные выше, и матрицы Стокса, определенные при помощи стандартного набора канонических решений, равны с точностью до сопряжения на соответствующую матрицу связи.

§ 5. Допустимые деформации

Рассмотрим семейство систем линейных дифференциальных уравнений (предполагаем, что оно существует), которое голоморфно зависит от $t \in D(t^0)$, где $D(t^0)$ – окрестность точки t^0 в пространстве параметров,

$$\frac{dy}{dz} = A(z, t)y, \quad A(z, t) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_j+1} \frac{A_{-k}^j(t)}{(z - a_j(t))^k}, \quad \sum_{j=1}^n A_{-1}^j(t) = 0. \quad (5.1)$$

Кроме того, пусть выполнено равенство $A(z, t^0) = A(z)$, где $A(z)$ – матрица коэффициентов системы (2.4).

Сделаем несколько предположений относительно семейства систем (5.1).

1) $a_1(t), \dots, a_n(t)$ – голоморфные функции от t такие, что $a_i(t) \neq a_j(t)$ для любого $t \in D(t^0)$ (другими словами, количество особых точек не меняется).

2) Ранги Пуанкаре $r_1, \dots, r_n$ системы (5.1) в особых точках $a_1(t), \dots, a_n(t)$ не изменяются и остаются равными минимальным рангам Пуанкаре.

3) При всех значениях параметра $t \in D(t^0)$ в окрестности каждой особой точки соответствующей системы (5.1) можно выбрать секторы Стокса таким образом, что секторы Стокса, соответствующие разным значениям параметра t , переходят друг в друга параллельным переносом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Семейство систем (5.1) с учетом предположений 1)–3) будем называть *допустимой деформацией* системы (2.4).

В дальнейшем нам потребуется следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $Y(z, t)$ – голоморфное по (z, t) фундаментальное решение допустимой деформации (5.1), и формальное фундаментальное решение $\hat{Y}(z, t)$ является его асимптотическим разложением в секторе $\Omega_1(a_i)$. Тогда:

- 1) асимптотическое разложение равномерно в $D(t^0)$;
- 2) формальное фундаментальное решение $\hat{Y}(z, t)$ голоморфно по t .

Условие 2) понимается в следующем смысле. Коэффициенты формального ряда, входящего в $\hat{Y}(z, t)$, голоморфны по t , и остальные множители, входящие в $\hat{Y}(z, t)$, также голоморфны по t .

Доказательство теоремы 4 опирается на теорему о существовании формального фундаментального решения аналитического по набору параметров. Первоначально следующее утверждение было получено Д. Баббитом и В. Варадаражаном и позднее несколько расширено Р. Шафке [18].

ТЕОРЕМА 5. Пусть при каждом значении t система (5.1) имеет формальное фундаментальное решение, показатель экспоненты которого равен матрице $Q^i(z, t) = \text{diag}(q_1^i(z, t), \dots, q_p^i(z, t))$, и для матрицы $Q^i(z, t)$ выполнены условия:

1) она аналитична по z и по t ;

2) для всех k, j рациональная степень $\deg(q_k^i(z, t) - q_j^i(z, t))$ не зависит от t .

Тогда найдется окрестность $D(t^0)$ в пространстве параметров и формальное фундаментальное решение вида

$$\hat{Y}(z, t) = \hat{F}(z, t)(z - a_i)^{J^i(t)} U e^{Q^i(z, t)} \quad (5.2)$$

такое, что матричная функция $J^i(t)$ и формальный ряд $\hat{F}(z, t)$ голоморфно зависят от t .

Заметим, что условие 2) теоремы 5 выполнено для допустимой деформации (5.1). Действительно, если условие 2) нарушается, количество направлений Стокса изменится, и следовательно, изменится количество секторов Стокса.

Приведем еще две общие теоремы о равномерных асимптотических разложениях из [15].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Функция $f(z, t)$ имеет равномерное по $t \in D(t^0)$ асимптотическое разложение $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k(t)(z - a_i)^k$ в секторе $\Omega = \{z : \alpha \leq \arg(z - a_i) \leq \beta, 0 < |z - a_i| \leq \rho\}$, если для всех целых $V > 0$ существует предел

$$\lim_{z \rightarrow a_i, z \in \Omega} (z - a_i)^{-V} \left(f(z, t) - \sum_{k=0}^V x_k(t)(z - a_i)^k \right) = 0, \quad (5.3)$$

равномерный относительно $t \in D(t^0)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть функция $f(z, t)$ голоморфна по (z, t) в $\Omega \times D(t^0)$, где $\Omega = \{z : \alpha \leq \arg(z - a_i) \leq \beta, 0 < |z - a_i| \leq \rho\}$, и у нее есть равномерное асимптотическое разложение

$$f(z, t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t)(z - a_i)^k, \quad z \rightarrow a_i, \quad z \in \Omega.$$

Тогда все коэффициенты $x_k(t)$ голоморфны в $D(t^0)$. Кроме того,

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t_j} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial x_k(t)}{\partial t_j} (z - a_i)^k$$

равномерно на любом собственном компактном подмножестве $\mathcal{K}$ множества $D(t^0)$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $x_k(t)$, $k = 0, 1, \dots$, голоморфны в $D(t^0)$ и Ω – произвольный сектор, $\Omega = \{z : \alpha \leq \arg(z - a_i) \leq \beta, 0 < |z - a_i| < \rho\}$. Тогда найдется функция $f(z, t)$, голоморфная по обоим переменным в $\Omega \times D(t^0)$ и такая, что для нее имеется равномерное в $D(t^0)$ асимптотическое разложение

$$f(z, t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t)(z - a_i)^k, \quad z \rightarrow a_i, \quad z \in \Omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. По теореме 5 система (5.1) имеет аналитичное формальное фундаментальное решение $\hat{X}(z, t)$. Формальное фундаментальное решение $\hat{X}(z, t)$, в свою очередь, является равномерным в $D(t^0)$ асимптотическим разложением некоторого фундаментального решения $X(z, t)$, $z \in \Omega_1(a_i)$. Следовательно, фундаментальные решения $X(z, t)$ и $Y(z, t)$ связаны соотношением $Y(z, t) = X(z, t)C_0(t)$, где $C_0(t)$ – невырожденная матрица. И значит, фундаментальное решение имеет равномерное асимптотическое разложение $\hat{Y}(z, t) = \hat{X}(z, t)C_0(t)$, $z \in \Omega_1(a_i)$, коэффициенты формального ряда $\hat{F}(z, t)$ которого голоморфны по $t \in D(t^0)$.

§ 6. Изомонодромные деформации

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Допустимая деформация (5.1) системы (2.4) называется *изомонодромной*, если для каждого параметра $t \in D(t^0)$ найдется фундаментальное решение $Y(z, t)$ системы (5.1) такое, что выполнены следующие условия:

- 1) представление монодромии, определенное при помощи $Y(z, t)$, совпадает с представлением монодромии χ системы (2.4);
- 2) в окрестности каждой иррегулярной особой точки $a_i(t)$ найдутся набор канонических фундаментальных решений системы $Y_1^i(z, t), \dots, Y_{N_i}^i(z, t)$ такой, что $Y_1^i(z, t) = Y(z, t)$ для $z \in \Omega_1(a_i)$, и определяющий набор матриц Стокса $S_1^i, \dots, S_{N_i}^i$, совпадающий с набором матриц Стокса системы (2.4).

Заметим, что определение 12 согласовано с определением изомонодромных деформаций системы общего положения (т.е. системы, у которой все особенности фуксовы либо нерезонансные иррегулярные). Обычно в таком определении выбор фундаментальной матрицы фиксирован $Y(\infty, t) = I$ и в качестве канонических решений выбираются стандартные канонические решения. Тогда деформация называется *изомонодромной*, если система остается системой общего положения при деформации и ее матрицы монодромии, матрицы Стокса и матрицы связи постоянны.

Положим $t = (a_1, \dots, a_n)$, т.е. в дальнейшем параметрами деформации будут служить положения особых точек.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $t = (a_1, \dots, a_n)$ и (5.1) – изомонодромная деформация. Тогда найдется фундаментальное решение $Y(z, t)$ семейства (5.1) голоморфное по $t \in D(t^0)$ такое, что для него выполнены условия 1), 2) из определения 12.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, деформация (5.1) изомонодромна. Следовательно, найдется изомонодромная матрица $Y(z, t)$, и для каждой точки a_i выполнено $Y_1^i(z, t) = Y(z, t)$, $z \in \Omega_1(a_i)$.

Согласно теореме Коши существует фундаментальная матрица $\tilde{Y}(z, t)$ голоморфная по совокупности переменных z и t . Для любого фиксированного значения параметра t выполнено соотношение $\tilde{Y}(z, t) = Y(z, t)C(t)$. Тогда матрицы монодромии и матрицы Стокса, определенные при помощи $\tilde{Y}(z, t)$, имеют вид

$$G^i(t) = C^{-1}(t)G^iC(t), \quad S_k^i(t) = C^{-1}(t)S_k^iC(t). \quad (6.1)$$

Обозначим группу $H = \{A \in GL(p, C) : AG^iA^{-1} = G^i, AS_k^iA^{-1} = S_k^i\}$. Далее, аналогично случаю деформаций фуксовых систем (см. доказательство теоремы 13.1 из [9]) можно построить голоморфную по t матрицу $\tilde{C}(t)$ такую, что $C(t)\tilde{C}(t) \in H$ и ${}^{\text{new}}Y(z, t) = \tilde{Y}(z, t)\tilde{C}(t)$ – голоморфное изомонодромное фундаментальное решение, поскольку матрица $\tilde{C}(t)$ такова, что выполнены равенства

$$\tilde{C}^{-1}(t)G^i(t)\tilde{C}(t) = G^i, \quad \tilde{C}^{-1}(t)S_k^i(t)\tilde{C}(t) = S_k^i.$$

Зададим новую систему канонических решений

$${}^{\text{new}}Y_k^i(z, t) = \tilde{Y}_k^i(z, t)\tilde{C}(t) = Y_k^i(z, t)C(t)\tilde{C}(t),$$

она определяет набор матриц Стокса S_k^i по построению. Каждое каноническое решение голоморфно зависит от t , так как

$$\begin{aligned} {}^{\text{new}}Y_k^i(z, t) &= Y_k^i(z, t)C(t)\tilde{C}(t) = Y(z, t)S_1^i \cdots S_{k-1}^iC(t)\tilde{C}(t) \\ &= \tilde{Y}(z, t)S_1^i(t) \cdots S_{k-1}^i(t)\tilde{C}(t) = \tilde{Y}(z, t)\tilde{C}(t)S_1^i \cdots S_{k-1}^i, \end{aligned}$$

а произведение $\tilde{Y}(z, t)\tilde{C}(t)S_1^i \cdots S_{k-1}^i$ голоморфно по t .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В работе [14] для деформации, особые точки которой неразветвлены, построена изомонодромная матрица в случае, когда параметрами деформации служат $t = (\beta_1, \dots, \beta_H)$, где $\beta_1, \dots, \beta_H$ – коэффициенты полиномов от $(z - a_i)^{-1}$, являющихся элементами матриц $Q^i(z)$, за исключением коэффициентов при старших степенях.

В настоящей работе задача построения изомонодромной деформации системы с иррегулярными особыми точками не решается. Изомонодромная деформация системы общего положения впервые была построена М. Джимбо и Т. Мивой [2].

Построение изомонодромной деформации системы с иррегулярными резонансными особыми точками, ранги Пуанкаре которых минимальны, более трудно. Мальгранж расширил результат М. Джимбо и Т. Мивы и доказал существование изомонодромной деформации для системы с иррегулярными особыми точками такими, что каждому собственному значению матрицы $A_{-r_i-1}^i$ соответствует только один жорданов блок [19]. Основываясь на результатах Б. Мальгранжа, В. Ю доказала существование изомонодромной деформации произвольной иррегулярной системы размера 2×2 (см. [20]). В работах М. Бертолы, М. Мо [21] и М. В. Федорюка [7] строятся изомонодромные деформации системы с иррегулярными особыми точками при специальных условиях на матрицу коэффициентов.

§ 7. Локальный вид формы деформации

Справедлива следующая теорема, доказательство которой приведено в § 9.

ТЕОРЕМА 9. *Допустимая деформация (5.1), $t = (a_1, \dots, a_n)$, является изо-монодромной тогда и только тогда, когда существует матричная дифференциальная мероморфная 1-форма ω , определенная на $\mathbb{CP}^1 \times D(t^0)$, с особенностями вдоль гиперплоскостей $\{z - a_i = 0\}$ такая, что:*

- 1) $\omega = A(z, t)dz$, при каждом фиксированном значении параметра $t \in D(t^0)$;
- 2) $d\omega = \omega \wedge \omega$.

Дифференциальная матричная 1-форма ω из теоремы 9 называется формой, задающей деформацию системы (2.4) (кратко – формой деформации). В силу теоремы 9 возникает вопрос, каков общий вид такой формы деформации.

Пусть $Y(z, t)$ – изомонодромная фундаментальная матрица, голоморфная по z и по t . Зададим дифференциальную 1-форму $\omega = dY(z, t)Y^{-1}(z, t)$. Она однозначна, так как матрицы монодромии, определенные при помощи фундаментального решения $Y(z, t)$, постоянны. Дифференциальная 1-форма ω имеет асимптотическое разложение по степеням $z - a_i$ одинаковое во всех секторах Стокса $\Omega_k(a_i)$. Действительно, в секторах Стокса выполнены равенства (4.5). Так как матрицы Стокса постоянны по z и по t , получаем

$$dY(z, t)Y^{-1}(z, t) = dY_k^i(z, t)(Y_k^i(z, t))^{-1}, \quad z \in \Omega_k(a_i).$$

Кроме того, по теореме 6 получаем $dY_k^i(z, t) \sim d\hat{Y}(z, t)$, $z \in \Omega_k(a_i)$. Таким образом, дифференциальная форма ω имеет следующее асимптотическое разложение:

$$\omega = dY(z, t)Y^{-1}(z, t) \sim d\hat{Y}(z, t)\hat{Y}^{-1}(z, t), \quad z \rightarrow a_i.$$

Исследуем структуру дифференциальной 1-формы ω в окрестности гиперплоскости $\{z - a_i = 0\}$:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_1 = \frac{\partial Y(z, t)}{\partial(z - a_i)} Y^{-1}(z, t) d(z - a_i), \quad (7.1)$$

$$\omega_2 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial Y(z, t)}{\partial a_j} Y^{-1}(z, t) da_j. \quad (7.2)$$

Из (7.1) сразу следует равенство

$$\omega_1 = \sum_{k=1}^{r_i+1} \frac{A_{-k}^i(t)}{(z - a_i)^k} d(z - a_i) + \psi_i(z, t) d(z - a_i), \quad (7.3)$$

где $\psi_i(z, t)$ – некоторая голоморфная по z и t матрица.

Дифференциальная 1-форма ω_2 имеет асимптотическое разложение

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \hat{Y}(z, t)}{\partial a_j} \hat{Y}^{-1}(z, t) da_j$$

в проколотой окрестности $\{z - a_i = 0\}$. Следовательно, главная часть лорановского разложения ω_2 совпадает с главной частью ее асимптотического

разложения, т.е.

$$\omega_2 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\Phi_{M_i,j}^i(t)}{(z-a_i)^{M_i}} + \dots + \frac{\Phi_{1,j}^i(t)}{z-a_i} + \varphi_j^i(z,t) \right) da_j, \quad (7.4)$$

где $\{\Phi_{k,j}^i(t), \varphi_j^i(z,t)\}$ – голоморфные по t матричные функции, $t \in D(t^0)$.

В случае, если a_i – формально фуксовая особая точка, порядок полюса M_i формы ω_2 можно оценить.

Для каждого значения параметра t запишем формальное фундаментальное решение в левелевском базисе (3.8)

$$\hat{Y}(z,t) = \hat{U}(z,t)(z-a_i)^{\Lambda^i(t)/p}(z-a_i)^{\hat{E}^i(t)/p}e^{Q^i(z,t)}. \quad (7.5)$$

ЛЕММА 1. Если a_i – формально фуксовая иррегулярная особая точка системы (5.1), то матрица $\Lambda^i(t)$ в разложении (7.5) постоянна по t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка a_i – неразветвленная формально фуксовая особая точка системы (5.1). Для фундаментального решения $Y(z,t) \sim \hat{Y}(z,t)$ (формальное фундаментальное решение $\hat{Y}(z,t)$ имеет вид (7.5)) должно быть выполнено равенство

$$A_{-1}^i(t) = \lim_{z \rightarrow a_i} \left((z-a_i) \frac{dY(z,t)}{dz} Y^{-1}(z,t) - \frac{A_{-r_i-1}^i(t)}{(z-a_i)^{r_i}} - \dots - \frac{A_{-2}^i(t)}{z-a_i} \right).$$

При построении левелевского базиса мы отмечали, что произведение

$$(z-a_i)^{\Lambda^i(t)} \hat{E}^i(t) (z-a_i)^{-\Lambda^i(t)}$$

голоморфно, следовательно существует конечный предел

$$\tilde{E}^i(t) = \lim_{z \rightarrow a_i} ((z-a_i)^{\Lambda^i(t)} \hat{E}^i(t) (z-a_i)^{-\Lambda^i(t)}).$$

И, далее, получаем

$$A_{-1}^i(t) = P(t)(\Lambda^i(t) + \tilde{E}^i(t))P^{-1}(t), \quad (7.6)$$

где матрица $P(t)$ определяется равенством $P(t) = U_k^i(a_i, t)$ для некоторого номера k (матрица $U_k^i(z, t)$ в $\Omega_k(a_i)$ определяется своим асимптотическим разложением $\hat{U}(z, t)$).

Таким образом, $\alpha_k^i = \rho_k^i + \lambda_k^i$, где α_k^i – собственные значения матрицы $A_{-1}^i(t)$. Собственные значения ρ_k^i матрицы $\hat{E}^i(t)$ постоянны, следовательно, каждое собственное значение α_k^i также не зависит от t , иначе оно изменялось бы сразу на целое число, что противоречит непрерывности матрицы $A_{-1}^i(t)$. Следовательно, матрица Λ^i не зависит от t .

Пусть теперь точка a_i – разветвленная формально фуксовая особая точка системы (5.1). Значит, формальное фундаментальное решение системы (5.1) в окрестности точки a_i зависит от $(z-a_i)^{1/p}$, $p \in \mathbb{N}$ и имеет вид (3.2). Сделаем замену независимой переменной $\xi = (z-a_i)^{1/p}$ и перейдем к системе

$$\frac{dY(\xi, t)}{d\xi} = \xi^{p-1} p A(\xi^p + a_i, t) Y(\xi, t), \quad (7.7)$$

$$\xi^{p-1} p A(\xi^p + a_i, t) = \frac{p A_{-r_i-1}^i(t)}{\xi^{pr_i+1}} + \dots + \frac{p A_{-1}^i(t)}{\xi} + \dots$$

Аналогично случаю неразветвленной особой точки получаем, что выполнено равенство $\lambda_k^i/p + \rho_k^i/p = \alpha_k^i$ и элементы λ_k^i матрицы Λ^i не зависят от t .

ТЕОРЕМА 10. Пусть a_i – формально фуксова особая точка и пусть $\hat{Y}(z, t)$ – некоторое формальное голоморфное по t фундаментальное решение системы (5.1) в окрестности точки a_i . Тогда для каждого значения $t \in D(t^0)$ найдется невырожденная матрица $C(t)$, коммутирующая с $Q^i(z, t)$, такая, что

$$\hat{Y}(z, t)C_0C(t) = \hat{U}(z, t)(z - a_i)^{\Lambda^i/p}(z - a_i)^{\hat{E}^i(t)/p}e^{Q^i(z, t)}. \quad (7.8)$$

При этом, Λ^i не зависит от t , матрицы Λ^i , $\hat{E}^i(t)$ и $C(t)$ имеют одинаковый блочно-диагональный вид, матрицу $C(t)$ можно выбрать голоморфной по t в некоторой окрестности $D'(t^0) \subset D(t^0)$ и C_0 – постоянная невырожденная матрица.

Доказательство голоморфной зависимости $C(t)$ от t аналогично доказательству теоремы 1 из [9; приложение 2].

СЛЕДСТВИЕ. В окрестности формально фуксовой иррегулярной особой точки a_i голоморфные по t канонические решения $Y_k^i(z, t)$ системы (5.1), определенные по формальному решению $\hat{Y}(z, t)$, представляются в виде

$$Y_k^i(z, t)C_0C(t) = U_k(z, t)(z - a_i)^{\Lambda^i/p}(z - a_i)^{\hat{E}^i(t)/p}e^{Q^i(z, t)}, \quad z \in \Omega_k(a_i). \quad (7.9)$$

ЛЕММА 2. Пусть a_i – формально фуксова иррегулярная особая точка, тогда порядок полюса M_i формы ω_2 вдоль гиперплоскости $\{z - a_i = 0\}$ не превосходит максимума из минимального ранга Пуанкаре r_i и целочисленных разностей собственных значений матрицы $A_{-1}^i(t^0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему канонических решений $Y_k^i(z, t)$, определенных по изомонодромному голоморфному фундаментальному решению $Y(z, t)$. Тогда с учетом равенства (7.9) каждое каноническое решение может быть представлено в виде

$$Y_k^i(z, t) = U_k^i(z, t)(z - a_i)^{\Lambda^i/p}C^{-1}(t)(z - a_i)^{\mathcal{J}^i/p}e^{Q^i(z, t)}C_0^{-1}.$$

При помощи равенства $dY(z, t)Y^{-1}(z, t) = dY_k^i(z, t)(Y_k^i(z, t))^{-1}$ получаем асимптотическое разложение дифференциальной 1-формы ω_2 , определенной в (7.2), вдоль гиперплоскости $\{z - a_i = 0\}$

$$\begin{aligned} \omega_2 \sim \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \hat{U}(z, t)}{\partial a_j} \hat{U}^{-1}(z, t) + \hat{U}(z, t) \frac{\partial Q^i(z, t)}{\partial a_j} \hat{U}^{-1}(z, t) \right) da_j \\ + \sum_{j=1}^n \hat{U}(z, t)(z - a_i)^{\Lambda^i/p} \frac{\partial C^{-1}(t)}{\partial a_j} C(t)(z - a_i)^{-\Lambda^i/p} \hat{U}^{-1}(z, t) da_j. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Из соотношения (7.10) видно, что порядок M_i полюса 1-формы ω_2 вдоль гиперплоскости $\{z - a_i = 0\}$ не превосходит минимального ранга Пуанкаре r_i или максимальной разности формальных нормирований в точке a_i , т.е.

$$M_i \leq \max_{k, j} \left\{ \frac{|\lambda_k^i - \lambda_j^i|}{p}, r_i \right\},$$

где p – порядок ветвления, λ_j^i – элементы матрицы Λ^i .

Значит, с учетом равенства (7.6) получаем, что порядок полюса M_i не превосходит минимального ранга Пуанкаре или максимума разностей собственных значений матрицы $A_{-1}^i(t^0)$, разность которых является целым числом.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Форма изомонодромной деформации (5.1) вдоль гиперплоскости $\{z - a_i = 0\}$, где точка a_i – фуксова, описана в [10] и имеет вид

$$\omega = \frac{A_{-1}^i(t)}{z - a_i} d(z - a_i) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{M_i} \frac{\gamma_{j,k}^i(t)}{(z - a_i)^k} da_j + \sum_{j=1}^n \psi_j^i(z, t) da_j, \quad (7.11)$$

где матрицы $\psi_j(z, t)$ голоморфны, целое число $M_i \geq 0$ и равно максимальной целой разности собственных значений матрицы $A_{-1}^i(t^0)$ из (2.4).

§ 8. Глобальный вид формы деформации

ТЕОРЕМА 11. Пусть $t = (a_1, \dots, a_n)$. Дифференциальная 1-форма ω , определенная на $\mathbb{CP}^1 \times D(t^0)$ и задающая изомонодромную деформацию (5.1), имеет вид

$$\begin{aligned} \omega = & \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{r_i+1} \frac{A_{-k}^i(t)}{(z - a_i)^k} d(z - a_i) \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\Phi_{M_i,j}^i(t)}{(z - a_i)^{M_i}} + \dots + \frac{\Phi_{1,j}^i(t)}{z - a_i} \right) da_j + \sum_{j=1}^n \Psi_j(t) da_j, \end{aligned} \quad (8.1)$$

где матричные функции $\{\Phi_{k,j}^i(t), \Psi_j(t)\}$ голоморфны в $D(t^0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вдоль каждой гиперплоскости $\{z - a_i = 0\}$ справедливо разложение (7.3)–(7.4) или (7.11). Следовательно,

$$\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\Phi_{M_i,j}^i(t)}{(z - a_i)^{M_i}} + \dots + \frac{\Phi_{1,j}^i(t)}{z - a_i} \right) da_j + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{r_i+1} \frac{A_{-k}^i(t)}{(z - a_i)^k} d(z - a_i) + \Psi(z, t), \quad (8.2)$$

где $\Psi(z, t)$ – дифференциальная 1-форма, которая голоморфна на $\mathbb{CP}^1 \times D(t^0)$ и, следовательно, не зависит от z . Таким образом, справедливо равенство (8.1).

§ 9. Теорема о дифференциальной форме

Приведенная ниже теорема хорошо известна для деформаций фуксовых систем (см. [9; лекция 13]). Также аналогичное утверждение (в несколько другой формулировке) доказано для допустимых деформаций систем с иррегулярными нерезонансными особыми точками [6]. Следующее доказательство в основном повторяет доказательство соответствующей теоремы из [9].

ТЕОРЕМА 12. Допустимая деформация (5.1) при $t = (a_1, \dots, a_n)$ является изомонодромной тогда и только тогда, когда существует матричная дифференциальная мероморфная 1-форма ω , определенная на $\mathbb{CP}^1 \times D(t^0)$, с особенностями вдоль гиперплоскостей $\{z - a_i = 0\}$ такая, что:

- 1) $\omega = A(z, t) dz$, при каждом фиксированном значении параметра $t \in D(t^0)$;
- 2) $d\omega = \omega \wedge \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем необходимость. Пусть семейство (5.1) изомонодромно и $Y(z, t)$ – его изомонодромное голоморфное по обоим переменным фундаментальное решение. Рассмотрим дифференциальную 1-форму

$$\omega = dY(z, t)Y^{-1}(z, t).$$

1-форма ω голоморфна на $\mathcal{M} = \mathbb{CP}^1 \times D(t^0) \setminus \bigcup_{i=1}^n \{z - a_i = 0\}$. Кроме того, она мероморфна в силу (8.1). Условие 1) выполнено по определению ω . Условие 2) доказывается непосредственной проверкой (см. [9; лекция 13]).

Докажем достаточность. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$dY - \omega Y = 0, \quad \langle (z, t), Y \rangle \in \mathcal{M} \times \mathbf{GL}(d, \mathbb{C}). \quad (9.1)$$

Она интегрируема с любыми начальными условиями $\langle (z^0, t^0), Y^0 \rangle$. Действительно,

$$d(dY - \omega Y) = d^2Y - d(\omega Y) = \omega \wedge (dY - \omega Y),$$

т.е. выполнено условие Фробениуса (распределение, заданное дифференциальной 1-формой $\{dY - \omega Y = 0\}$, определенной на многообразии $\mathcal{M} \times \mathbf{GL}(d, \mathbb{C})$, интегрируемо) и система $dY - \omega Y = 0$ имеет локальное решение $Y(z, t)$, удовлетворяющее начальному условию $Y(z^0, t^0) = Y^0$. Фундаментальное решение $Y(z, t)$ аналитично по t .

Так как выполнено условие 1) из формулировки теоремы, следовательно, $Y(z, t)$ при фиксированном значении t является фундаментальным решением соответствующей системы $dy/dz = A(z, t)y$ семейства. Матрицы монодромии, соответствующие фундаментальному решению $Y(z, t)$, не зависят от t .

Рассмотрим особую точку a_i . По теореме 4 фундаментальное решение $Y(z, t)$ имеет равномерное асимптотическое разложение $\hat{Y}(z, t)$, $z \in \Omega_1(a_i)$, коэффициенты которого голоморфно зависят от $t \in D(t^0)$.

Так как дифференциальная 1-форма ω является рациональной по z , то при каждом фиксированном $t \in D(t^0)$ существуют фундаментальные решения $Y_1^i(z, t), \dots, Y_{N_i}^i(z, t)$ уравнения $dY = \omega Y$, нормированные условием $Y_k^i \sim \hat{Y}$ при $z \in \Omega_k(a_i)$ и голоморфные в секторах Стокса $\Omega_k(a_i)$.

Решения $Y_k^i(z, t)$ голоморфны и по $t \in D(t^0)$ (по теореме Коши–Ковалевской). Действительно, так как формальный ряд $\hat{Y}(z, t)$ имеет голоморфные по t коэффициенты, следовательно (согласно теореме 7), найдется голоморфная по t функция, для которой $\hat{Y}(z, t)$ является равномерным асимптотическим разложением. В силу условия 1) решения $Y_k^i(z, t)$ являются решениями системы $dy/dz = A(z, t)y$ при фиксированном t .

Запишем систему (9.1) покоординатно, т.е.

$$\frac{\partial Y}{\partial a_j} = \theta_j Y, \quad \omega = \sum_j \theta_j da_j + \theta_0 dz. \quad (9.2)$$

Докажем теперь, что матрицы Стокса постоянны по t . Канонические решения Y_k^i и Y_{k+1}^i связаны соотношением $Y_{k+1}^i(z, t) = Y_k^i(z, t)S_k^i(t)$, где $S_k^i(t)$ – матрица

Стокса. Тогда получаем

$$\begin{aligned}\theta_h Y_{k+1}^i &= \frac{\partial Y_{k+1}^i}{\partial a_h} = \frac{\partial(Y_k^i S_k^i)}{\partial a_h} = \frac{\partial Y_k^i}{\partial a_h} S_k^i + Y_k^i \frac{\partial S_k^i}{\partial a_h} \\ &= \theta_h Y_k^i S_k^i + Y_k^i \frac{\partial S_k^i}{\partial a_h} = \theta_h Y_{k+1}^i + Y_k^i \frac{\partial S_k^i}{\partial a_h}.\end{aligned}\quad (9.3)$$

Следовательно, $\partial S_k^i(t)/\partial a_h = 0$, так как $Y_k^i(z, t)$ – невырожденная матрица.

Таким образом, матрицы Стокса не зависят от параметров деформации. Следовательно, в силу равенства (4.6), матрицы формальной монодромии $\hat{G}^i$ также постоянны по t .

§ 10. Расширение набора параметров

Предыдущие утверждения остаются справедливыми и в том случае, когда деформируются положения особых точек a_i , и для каждой неразветвленной особой точки деформируются коэффициенты β_h полиномов, которые являются элементами матриц $Q^i(z)$, за исключением коэффициентов при старших степенях $(z - a_i)^{-1}$. То есть в качестве набора параметров служит $t = (a_1, \dots, a_n, \beta_1, \dots, \beta_H)$. В этом случае общий вид формы деформации станет следующим:

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{r_i+1} \frac{A_{-k}^i(t)}{(z - a_i)^k} d(z - a_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\Phi_{M_i,j}^i(t)}{(z - a_i)^{M_i}} + \dots + \frac{\Phi_{1,j}^i(t)}{z - a_i} \right) da_j + \sum_{j=1}^n \Psi_j(t) da_j \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^H \left(\frac{\bar{\Phi}_{N_i,h}^i(t)}{(z - a_i)^{N_i}} + \dots + \frac{\bar{\Phi}_{1,h}^i(t)}{z - a_i} \right) d\beta_h + \sum_{h=1}^H \bar{\Psi}_h(t) d\beta_h,\end{aligned}\quad (10.1)$$

где матричные функции $\{\Phi_{k,j}^i(t), \Psi_j(t), \bar{\Phi}_{k,h}^i(t), \bar{\Psi}_h(t)\}$ голоморфны в $D(t^0)$.

Список литературы

- [1] Б. Риман, *Сочинения*, ОГИЗ, М., 1949; пер. с нем.: В. Riemann, *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, Teubner, Leipzig, 1892.
- [2] M. Jimbo, T. Miwa, K. Ueno, “Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. I. General theory and τ -function”, *Phys. D*, **2:2** (1981), 306–352.
- [3] A. A. Bolibruch, S. Malek, C. Mitschi, “On the generalized Riemann–Hilbert problem with irregular singularities”, *Expo. Math.*, **24:3** (2006), 235–272.
- [4] W. Balser, W. B. Jurkat, D. A. Lutz, “A general theory of invariants for meromorphic differential equations. II. Proper invariants”, *Funkcial. Ekvac.*, **22:3** (1979), 257–283.
- [5] Y. Sibuya, “Stokes phenomena”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83:5** (1977), 1075–1077.
- [6] А. Р. Итс, А. А. Капаев, В. Ю. Новокшенов, А. С. Фокас, *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана*, Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2005; пер. с англ.: A. S. Fokas, A. R. Its, A. A. Kapaev, V. Yu. Novokshenov, *Painlevé transcendents. The Riemann–Hilbert approach*, Amer. Math. Soc., **128**, Princeton Univ. Press, Providence, RI, 2006.

- [7] М. В. Федорюк, “Изомонодромные деформации уравнений с иррегулярными особенностями”, *Матем. сб.*, **181**:12 (1990), 1623–1639; англ. пер.: M. V. Fedoryuk, “Isomonodromy deformations of equations with irregular singularities”, *Math. USSR-Sb.*, **71**:2 (1992), 463–479.
- [8] I. M. Krichever, “Isomonodromy equations on algebraic curves, canonical transformations and Whitham equations”, *Mosc. Math. J.*, **2**:4 (2002), 717–752.
- [9] А. А. Болибрух, *Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений*, МЦНМО, М., 2009.
- [10] А. А. Болибрух, “Дифференциальные уравнения с мероморфными коэффициентами”, *Совр. пробл. матем.*, **1**, МИАН, М., 2003, 29–82; англ. пер.: A. A. Bolibrukh, “Differential equations with meromorphic coefficients”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **272**, suppl. 2 (2011), 13–43.
- [11] А. А. Болибрух, “Об изомонодромных слияниях фуксовых особенностей”, *Локальные и глобальные задачи теории особенностей*, Тр. МИАН, **221**, Наука, М., 1998, 127–142; англ. пер.: A. A. Bolibrukh, “On isomonodromic confluences of Fuchsian singularities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **221** (1998), 117–132.
- [12] А. А. Болибрух, “Регулярные особые точки как изомонодромные слияния фуксовых”, *УМН*, **56**:4 (2001), 135–136; англ. пер.: A. A. Bolibrukh, “Regular singular points as isomonodromic confluences of Fuchsian singular points”, *Russian Math. Surveys*, **56**:4 (2001), 745–746.
- [13] D. V. Anosov, “Concerning the definition of isomonodromic deformation of Fuchsian systems”, *Ulmer Seminaire Euber Funktionalysis und Differentialgleichungen*, **2** (1997), 1–12.
- [14] A. Bolibrukh, “Inverse problems for linear differential equations with meromorphic coefficients”, *Isomonodromic deformations and applications in physics* (Montreal, QC, Canada, 2000), CRM Proc. Lecture Notes, **31**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, 3–25.
- [15] В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1968; пер. с англ.: W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Wiley, New York–London–Sydney, 1965.
- [16] W. Balser, W. B. Jurkat, D. A. Lutz, “A general theory of invariants for meromorphic differential equations. I. Formal invariants”, *Funkcial. Ekvac.*, **22**:2 (1979), 197–221.
- [17] Р. Р. Гонцов, “Уточненные неравенства Фукса для систем линейных дифференциальных уравнений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:2 (2004), 39–52; англ. пер.: R. R. Gontsov, “Refined Fuchs inequalities for systems of linear differential equations”, *Izv. Math.*, **68**:2 (2004), 259–272.
- [18] R. Schäfke, “Formal fundamental solutions of irregular singular differential equations depending upon parameters”, *J. Dynam. Control Systems*, **7**:4 (2001), 501–533.
- [19] B. Malgrange, “Deformations of differential systems. II”, *J. Ramanujan Math. Soc.*, **1**:1–2 (1986), 3–15.
- [20] V. Heu, “Universal isomonodromic deformations of meromorphic rank 2 connections on curves”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **60**:2 (2010), 515–549.
- [21] M. Bertola, M. Y. Mo, “Isomonodromic deformation of resonant rational connections”, *IMRP Int. Math. Res. Pap.*, 2005, № 11, 565–635.

Ю. П. Бибило (Yu. P. Bibilo)

Национальный исследовательский университет

“Высшая школа экономики”, г. Москва

E-mail: y.bibilo@gmail.com

Поступила в редакцию

16.03.2011