Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Баранов, К. Ю. Федоровский, Регулярность границ неванлинновских областей и однолистные функции в модельных подпространствах, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 12, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7864>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:47:43

УДК 517.542+517.547.5

А. Д. Баранов, К. Ю. Федоровский

Регулярность границ неванлинновских областей и однолистные функции в модельных подпространствах

В работе исследуются свойства регулярности границ неванлинновских областей, возникших в связи с задачами аппроксимации функций полианалитическими многочленами. Предложен новый способ построения неванлинновских областей с существенно нерегулярными неаналитическими границами, основанный на отыскании подходящих однолистных функций в модельных подпространствах, т.е. в подпространствах вида $K_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2$, где Θ – внутренняя функция. Для описания степени нерегулярности границ полученных областей использованы недавние результаты Е. П. Долженко о граничной регулярности конформных отображений.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: неванлинновская область, модельное подпространство K_Θ , конформное отображение, внутренняя функция, произведение Бляшке.

§ 1. Введение

Понятие *неванлинновской области* возникло в связи с задачей о равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами на компактных подмножествах комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Свойство области быть неванлинновской – это специальная аналитическая характеристика односвязной области в $\mathbb{C}$, в терминах которой формулируется ряд интересных и важных результатов в этой аппроксимационной задаче (см. [1]–[4]). В частности, в работе [2; теорема 2.2] в терминах неванлинновских областей был получен критерий равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами на плоских компактах Каратеодори. Кроме того, неванлинновские области возникли и в задачах равномерного приближения функций полиномиальными решениями общих однородных эллиптических уравнений второго порядка на плоских компактах (см., например, [5; теорема 3]).

Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – единичный круг, а $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ – единичная окружность в $\mathbb{C}$. Для произвольного открытого множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ через $H^\infty(E)$ обозначим совокупность всех голоморфных ограниченных функций на E . Напомним, что если функция f принадлежит пространству $H^\infty = H^\infty(\mathbb{D})$, то

Работа первого автора выполнена в рамках Программы Президента РФ поддержки молодых российских ученых (грант № МК-7656.2010.1) и поддержана Лабораторией им. П. Л. Чебышёва СПбГУ (грант Правительства РФ № 11.G34.31.0026). Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00837) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-3476.2010.1).

для почти всех $\xi \in \mathbb{T}$ существуют конечные угловые граничные значения $f(\xi)$ функции f в точке ξ .

Следующее определение было дано в [2; определение 2.1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Ограниченная односвязная область Ω в $\mathbb{C}$ называется *неванлинновской*, если существуют две функции $u, v \in H^\infty(\Omega)$ (причем $v \not\equiv 0$) такие, что равенство

$$\bar{\zeta} = \frac{u(\zeta)}{v(\zeta)} \quad (1.1)$$

выполняется на $\partial\Omega$ почти всюду в смысле конформного отображения. Это означает, что для почти всех точек $\xi \in \mathbb{T}$ имеет место равенство угловых граничных значений

$$\overline{\varphi(\xi)} = \frac{(u \circ \varphi)(\xi)}{(v \circ \varphi)(\xi)},$$

где φ – некоторое конформное отображение $\mathbb{D}$ на Ω .

Определение неванлинновской области корректно в том смысле, что оно не зависит от выбора φ . Более того, по теореме единственности Лузина–Привалова [6; гл. 4, раздел 2.5], отношение u/v определено в Ω (для неванлинновской области Ω) единственным образом.

Если Ω – жорданова область со спрямляемой границей, то равенство (1.1) может пониматься непосредственно как равенство угловых граничных значений почти всюду на $\partial\Omega$ (см. [1; определение 3]). Равенство (1.1) можно аналогично понимать и на любой спрямляемой жордановой дуге $\gamma \subset \partial\Omega$, обладающей тем свойством, что всякая точка $a \in \gamma$ не является предельной точкой для множества $\partial\Omega \setminus \gamma$.

Интересным и полезным оказался также следующий критерий того, что область является неванлинновской.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А (см. [2; предложение 3.1]). *Область Ω является неванлинновской тогда и только тогда, когда конформное отображение φ единичного круга $\mathbb{D}$ на Ω допускает псевдопродолжение неванлинновского типа, т.е. если существуют две функции $f_1, f_2 \in H^\infty(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ такие, что $f_2 \not\equiv 0$ и для почти всех точек $\xi \in \mathbb{T}$ выполнено равенство $\varphi(\xi) = f_1(\xi)/f_2(\xi)$, где $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ – угловые граничные значения функций f_1 и f_2 из $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.*

Легко найти примеры областей, являющихся неванлинновскими (любой круг в $\mathbb{C}$) и не являющихся таковыми (любая область в $\mathbb{C}$, ограниченная эллипсом, не являющимся окружностью, или ломаной линией) среди областей с кусочно аналитическими границами. Ряд интересных и полезных свойств и примеров неванлинновских областей приведен в разделах 1, 2 работы [7], а первый пример неванлинновской области с нигде не аналитической границей был построен в работе [8]. Необходимо отметить, что построение неванлинновских областей с неаналитическими границами, так же, как с другими предписанными аналитическими или геометрическими свойствами, является достаточно трудной задачей, требующей использования весьма тонких аналитических конструкций и оценок.

В работе [7] был предложен метод построения неванлинновских областей, при помощи которого, в частности, для каждого $\alpha \in (0, 1)$ был построен пример неванлинновской области с границей, принадлежащей классу C^1 , но не классу $C^{1,\alpha}$ (см. [7; теорема 3]). Обсудим этот метод более подробно, так как он будет использован и в настоящей работе. Напомним, что функция $\Theta \in H^\infty$ называется *внутренней функцией*, если $|\Theta(\xi)| = 1$ для почти всех $\xi \in \mathbb{T}$.

Для произвольной внутренней функции Θ введем пространство

$$K_\Theta := (\Theta H^2)^\perp = H^2 \ominus \Theta H^2,$$

где $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ – стандартное пространство Харди в $\mathbb{D}$ (см., например, [9; гл. II, § 1]). В силу классической теоремы Берлинга (см. [9; гл. II, теорема 7.1]) подпространства $K_\Theta \subset H^2$ и только они являются инвариантными подпространствами для оператора обратного сдвига $f \mapsto (f(z) - f(0))/z$ в H^2 . Пространства K_Θ называют *модельными подпространствами*. Соответствующий термин был предложен Н. К. Никольским (см., например, [10; лекция VIII]) и объясняется выдающейся ролью, которую эти пространства играют в функциональной модели Нады–Фойаша. Пространства K_Θ часто называют также **-инвариантными подпространствами*.

В [7; теорема 1] было доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА А. *Пусть Θ – внутренняя функция. Тогда любая ограниченная однолистная функция из пространства K_Θ конформно отображает единичный круг $\mathbb{D}$ на некоторую неванлинновскую область.*

На самом деле верно и обратное утверждение, которое непосредственно вытекает из доказательства этой теоремы.

ТЕОРЕМА В. *Если однолистная функция $\varphi \in H^\infty$ отображает $\mathbb{D}$ конформно на некоторую неванлинновскую область, то существует внутренняя функция Θ такая, что $\varphi \in K_\Theta$.*

Таким образом, возникает следующий метод построения неванлинновских областей: в пространстве K_Θ (для некоторой специально выбранной внутренней функции Θ) необходимо найти однолистную функцию, имеющую определенные аналитические свойства (например, заданное граничное поведение).

Рассмотрим следующий вопрос: для каких внутренних функций Θ в соответствующих пространствах K_Θ существуют однолистные функции? Если Θ_1 и Θ_2 – внутренние функции, а $\Theta = \Theta_1 \Theta_2$, то нетрудно показать, что

$$K_\Theta = K_{\Theta_1} \oplus (\Theta_1 K_{\Theta_2}). \quad (1.2)$$

Хорошо известно (см., например, [9; гл. II, теорема 5.5]), что всякая внутренняя функция Θ может быть представлена в виде $\Theta(z) = e^{ic} B(z) S(z)$, где $c \in \mathbb{R}$, а B и S – некоторые произведение Бляшке и сингулярная внутренняя функция соответственно. Напомним, что произведение Бляшке (см. [9; гл. II, § 2]) – это функция вида

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_n}{|a_n|} \frac{z - a_n}{\bar{a}_n z - 1}, \quad (1.3)$$

где $(a_n)_{n=1}^\infty$ – некоторая последовательность Бляшке в $\mathbb{D}$, (т.е. $a_n \in \mathbb{D}$ при $n \in \mathbb{N}$ и выполняется условие $\sum_{n=1}^\infty (1 - |a_n|) < \infty$), а сингулярная внутренняя функция (см. [9; гл. II, § 6]) – это функция вида

$$S(z) = \exp\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu_S(\zeta)\right), \quad (1.4)$$

где μ_S – некоторая конечная положительная сингулярная мера на $\mathbb{T}$. С учетом (1.2) представляется целесообразным рассмотреть вопросы о существовании однолистных функций в пространствах K_B и K_S по отдельности.

Очевидно, что для любого произведения Бляшке B в пространстве K_B существуют однолистные функции (например, функция $1/(1 - \bar{a}_n z)$, где a_n – любой из нулей B). В случае же сингулярной внутренней функции S вопрос о существовании однолистных функций в K_S является открытым.

Интересной и важной задачей, связанной со свойствами неванлинновских областей, является изучение возможной иррегулярности границ таких областей. Так, в [11; задача 2.10] и [2; задача 3.2] был поставлен следующий вопрос: верно ли, что размерность по Хаусдорфу границы жордановой неванлинновской области равна единице или, более того, верно ли, что неванлинновская жорданова область имеет спрямляемую границу?

Во многих случаях вопросы о регулярности или иррегулярности границ плоских областей могут быть сведены к соответствующим вопросам о граничной регулярности конформных отображений круга $\mathbb{D}$ на рассматриваемые области. Таким образом, нас интересует вопрос о существовании в пространствах K_Θ (для специально подобранных внутренних функций Θ) однолистных функций, обладающих нужными свойствами граничной регулярности или иррегулярности.

В § 2 настоящей работы рассматривается новый способ построения однолистных функций в пространствах K_B , где B – произведение Бляшке, и предлагается ряд новых конструкций неванлинновских областей с существенно иррегулярными границами. Для описания “степени” иррегулярности границ построенных областей используются недавние результаты Е. П. Долженко о граничной регулярности конформных отображений (см. [12] и [13]). При этом полученные в § 2 теоремы 1 и 2 обобщают теоремы 2 и 3 работы [7], а из теоремы 3 вытекает, что существуют неванлинновские области с “почти неспрямляемыми” границами. Однако необходимо отметить, что упомянутый выше вопрос о существовании неванлинновских областей с неспрямляемыми границами остается открытым. В § 3 обсуждается вопрос о существовании однолистных функций в пространствах K_S , где S – сингулярная внутренняя функция.

Всюду в дальнейшем $A, A_1, A_2, \dots$ обозначают подходящие положительные константы, которые могут принимать различные значения в различных соотношениях. Кроме того, символ B всегда будет обозначать некоторое произведение Бляшке, т.е. функцию вида (1.3), а символ S – некоторую сингулярную внутреннюю функцию, т.е. функцию вида (1.4).

Авторы благодарны М. С. Мельникову, П. В. Парамонову, С. М. Шиморину и Н. А. Широкову за полезные обсуждения и ряд ценных замечаний к этой работе.

§ 2. Однолистные функции в пространствах K_B и конструкция неванлинновских областей с иррегулярными границами

Пусть $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность Бляшке в единичном круге $\mathbb{D}$. Рассмотрим пространство K_B , где B – соответствующее произведение Бляшке, определяемое формулой (1.3). Если последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ является интерполяционной, т.е. если для нее выполняется *условие Карлесона*

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \left| \frac{a_n - a_k}{1 - \overline{a_n} a_k} \right| > 0,$$

то из теоремы Шапиро и Шилдса (см., например, [10; лекция 4]) следует, что семейство функций

$$\left\{ \psi_n(z) = \frac{\sqrt{1 - |a_n|^2}}{1 - \overline{a_n} z} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

образует базис Рисса в пространстве K_B . Таким образом, если $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ – интерполяционная последовательность Бляшке, то для любой последовательности коэффициентов $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ с условием $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(z) \tag{2.1}$$

сходится к некоторой функции из пространства K_B . Изучим вопрос о существовании однолистных функций вида (2.1), удовлетворяющих специальным требованиям, означающим определенную иррегулярность границ соответствующих неванлинновских областей.

Первое условие иррегулярности, за выполнением которого мы будем следить, состоит в том, что граница области $f(\mathbb{D})$, получаемой как образ круга $\mathbb{D}$ при отображении однолистной функцией f вида (2.1), должна быть неаналитической. Из этого условия непосредственно вытекает, что мы должны рассматривать только бесконечные последовательности Бляшке. В самом деле, если исходная последовательность конечна, то соответствующая функция f может быть продолжена до однолистной функции в окрестности $\overline{\mathbb{D}}$ и, следовательно, область $f(\mathbb{D})$ будет иметь аналитическую границу.

Итак, всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что последовательность Бляшке (a_n) бесконечна. Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ – интерполяционная последовательность Бляшке в круге $\mathbb{D}$ такая, что

$$D(a_1) := \min_{z \in \mathbb{D}} \operatorname{Re} \psi_1'(z) > 0.$$

Тогда для любой последовательности комплексных чисел $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию

$$\Delta_1 := 4 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|c_k|}{(1 - |a_k|^2)^{3/2}} < c_1 D(a_1), \tag{2.2}$$

функция f вида (2.1) принадлежит пространству $H^2 \cap C^1(\overline{\mathbb{D}})$, однолистка в $\mathbb{D}$ и отображает $\mathbb{D}$ конформно на некоторую неванлинновскую область с неаналитической границей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (2.2) вытекает, что $\Delta_1 < \infty$. Из этого неравенства, в свою очередь, следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$. Таким образом, функция

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(z)$$

принадлежит пространству $K_B \subset H^2$. Далее, для функции f верно равенство

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi'_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \bar{a}_n \sqrt{1 - |a_n|^2}}{(1 - \bar{a}_n z)^2}$$

и имеет место оценка

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} c_n \psi'_n(z) \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|c_n| \sqrt{1 - |a_n|^2}}{|1 - \bar{a}_n z|^2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|c_n| \sqrt{1 - |a_n|^2}}{(1 - |a_n|)^2}. \quad (2.3)$$

Так как $|a_n| < 1$, а при $b \in [0, 1]$ имеет место неравенство $(1 - b^2)^2 \leq 4(1 - b)^2$, то из неравенства (2.3) вытекает, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|c_n| \sqrt{1 - |a_n|^2}}{(1 - |a_n|)^2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4|c_n|}{(1 - |a_n|^2)^{3/2}} = \Delta_1.$$

Из полученной оценки для f' вытекает, что $f \in C^1(\overline{\mathbb{D}})$.

Установим теперь однолиственность функции f в $\mathbb{D}$. Так как a_1 и c_1 выбраны таким образом, что $D(a_1) > 0$ и $\Delta_1 < c_1 D(a_1)$, то при всех $z \in \mathbb{D}$ имеет место неравенство $\operatorname{Re} f'(z) > 0$, что является достаточным условием однолиственности f в $\mathbb{D}$ (см., например, [14; предложение 1.10]). Так как $f \in K_B$, то в силу теоремы 1 работы [7] область $f(\mathbb{D})$ является неванлинновской.

И, наконец, так как последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечной, то полюсы функций ψ_n накапливаются к $\mathbb{T}$. Таким образом, функция f не продолжается до однолистной функции в окрестности $\overline{\mathbb{D}}$ и, следовательно, область $f(\mathbb{D})$ имеет неаналитическую границу.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из оценки (2.3) вытекает, что утверждение теоремы 1 останется справедливым, если условие (2.2) заменить на условие

$$\Delta_2 := \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|c_k| \sqrt{1 - |a_k|^2}}{(1 - |a_k|)^2} < c_1 D(a_1), \quad (2.4)$$

которое оказывается более удобным при анализе ряда конкретных примеров.

Теорема 1 существенно упрощает конструкцию, приведенную в [7; теорема 2], где вместо рядов вида (2.1) рассматривались ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(z)$ по функциям

$$g_n(z) := \frac{\sqrt{1 - |a_n|^2} B_{n-1}(z)}{1 - \bar{a}_n z},$$

где

$$B_0 \equiv 1, \quad B_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{\bar{a}_k}{|a_k|} \frac{z - a_k}{\bar{a}_k z - 1}, \quad n \geq 1.$$

Известно (см., например, [15]), что для любой, не обязательно интерполяционной, последовательности Бляшке $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ система функций $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в пространстве K_B . При этом функции ψ_n имеют намного более простое аналитическое выражение, чем функции g_n и, соответственно, условия (2.2) и (2.4) проверять значительно проще, чем условие (3) работы [7].

В [7; теорема 3] было доказано, что для любого $\alpha \in (0, 1)$ существует неванлинновская область с границей, принадлежащей классу C^1 , но не классу $C^{1,\alpha}$. Эта область была получена как конформный образ круга $\mathbb{D}$ при отображении функцией φ вида $\sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(z)$, причем исходная последовательность Бляшке, определяющая функцию φ , имеет единственную точку накопления на $\mathbb{T}$.

При помощи метода построения однолистных функций из пространства K_B , использованного при доказательстве теоремы 1, результат [7; теорема 3] можно существенно усилить, причем соответствующая конструкция оказывается значительно проще конструкции, использованной в [7; теорема 3]. Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого $\alpha \in (0, 1)$ и для любого замкнутого подмножества $E \subseteq \mathbb{T}$ существует интерполяционная последовательность Бляшке $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ такая, что множество ее предельных точек равно E , а в пространстве K_B , где B – соответствующее произведение Бляшке, существует однолистная функция f вида (2.1), конформно отображающая $\mathbb{D}$ на неванлинновскую область $f(\mathbb{D})$ с границей, принадлежащей классу C^1 , но не классу $C^{1,\alpha}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним (см. [14; с. 49]), что замкнутая жорданова кривая Γ принадлежит классу $C^{1,\alpha}$, если существует такая ее параметризация $\zeta(t)$, $t \in [0, 1]$, что

$$\begin{aligned} \zeta &\in C^1([0, 1]), \quad \zeta'(t) \neq 0, \quad t \in [0, 1], \\ |\zeta'(t_1) - \zeta'(t_2)| &\leq A_1 |t_1 - t_2|^\alpha, \quad \forall t_1, t_2 \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Если Ω – область с границей класса $C^{1,\alpha}$, а f – конформное отображение $\mathbb{D}$ на Ω , то согласно классической теореме Келлога–Варшавского (см. [14; теорема 3.6]) $f'(z) \in C(\bar{\mathbb{D}})$ и для любых $z_1, z_2 \in \bar{\mathbb{D}}$ имеет место неравенство

$$|f'(z_1) - f'(z_2)| \leq A_2 |z_1 - z_2|^\alpha.$$

Из этого неравенства и интегральной формулы Коши вытекает, что для всех $z \in \mathbb{D}$ справедлива оценка

$$|f''(z)| \leq \frac{A}{(1 - |z|)^{1-\alpha}}, \quad (2.5)$$

где A – константа, зависящая только от f .

Таким образом, в силу теоремы 1 работы [7] для доказательства теоремы достаточно найти такую интерполяционную последовательность Бляшке $(a_n)_{n=1}^{\infty}$,

что для соответствующего произведения Бляшке B в пространстве K_B существует однолистная функция f вида (2.1), не удовлетворяющая в $\mathbb{D}$ оценке вида (2.5) ни для какой константы A .

Выберем счетное множество $\Sigma = \{\sigma_n\}_{n=2}^\infty \subset \mathbb{T}$ такое, что $\overline{\Sigma} = E$. При $n \in \mathbb{N}$ положим

$$a_1 = r_1 = \frac{1}{4}, \quad r_n := 1 - \frac{1}{n^n}, \quad a_n := r_n e^{i\sigma_n}, \quad n \geq 2.$$

При этом последовательность $(a_n)_{n=1}^\infty$ является интерполяционной последовательностью Бляшке.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и определим последовательность коэффициентов $(c_n)_{n=2}^\infty$ так:

$$c_n = \frac{(1 - r_n^2)^{3/2}}{2\bar{a}_n^2 n^{1+\varepsilon}}.$$

При указанном выборе последовательностей $(a_n)_{n=1}^\infty$ и $(c_n)_{n=2}^\infty$ величина Δ_2 , определенная формулой (2.4), такова, что $\Delta_2 < \infty$. Так как $D(a_1) > 0$, то при соответствующем выборе (положительного) коэффициента c_1 для функции

$$f(z) = \sum_{n=1}^\infty c_n \psi_n(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(1 - r_n^2)^2}{2\bar{a}_n^2 n^{1+\varepsilon}} \frac{1}{1 - \bar{a}_n z}$$

будет выполнено условие (2.4). Следовательно, в силу теоремы 1 функция f принадлежит пространству $H^2 \cap C^1(\overline{\mathbb{D}})$, однолистка в $\mathbb{D}$ и отображает $\mathbb{D}$ конформно на неванлинновскую область $f(\mathbb{D})$ с неаналитической границей.

Заметим, что множеством предельных точек последовательности $(a_n)_{n=1}^\infty$ является множество E .

Проверим, что для функции f оценка (2.5) нарушается в точке $z = a_m$ при достаточно большом $m \in \mathbb{N}$. В самом деле, при $z \in \mathbb{D}$

$$f''(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(1 - r_n^2)^2}{n^{1+\varepsilon} (1 - \bar{a}_n z)^3},$$

откуда

$$|f''(a_m)| \geq \frac{1}{m^{1+\varepsilon}(1 - r_m^2)} - \sum_{n=1}^{m-1} \left| \frac{(1 - r_n^2)^2}{n^{1+\varepsilon}(1 - \bar{a}_n a_m)^3} \right| - \sum_{n=m+1}^\infty \left| \frac{(1 - r_n^2)^2}{n^{1+\varepsilon}(1 - \bar{a}_n a_m)^3} \right|. \quad (2.6)$$

Легко видеть, что

$$\frac{1}{m^{1+\varepsilon}(1 - r_m^2)} \geq \frac{1}{2m^{1+\varepsilon}(1 - r_m)} = \frac{1}{2} \frac{m^m}{m^{1+\varepsilon}}. \quad (2.7)$$

Оценим сверху второе и третье слагаемые из правой части неравенства (2.6). Начнем со второго слагаемого. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(1 - r_n^2)^2}{n^{1+\varepsilon}} \frac{1}{|1 - \bar{a}_n a_m|^3} &\leq \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(1 - r_n^2)^2}{n^{1+\varepsilon}} \frac{1}{(1 - r_n r_m)^3} \\ &\leq \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(1 - r_n^2)^2}{n^{1+\varepsilon}} \frac{1}{(1 - r_n)^3} \leq 4 \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}(1 - r_n)} = 4 \sum_{n=1}^{m-1} \frac{n^n}{n^{1+\varepsilon}}. \end{aligned}$$

При достаточно больших значениях m справедлива оценка

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{n^n}{n^{1+\varepsilon}} \leq \frac{1}{100} \frac{m^m}{m^{1+\varepsilon}},$$

из которой вытекает, что

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{(1 - r_n^2)^2}{n^{1+\varepsilon}} \frac{1}{|1 - \bar{a}_n a_m|^3} \leq \frac{1}{25} \frac{m^m}{m^{1+\varepsilon}}. \quad (2.8)$$

Третье слагаемое из правой части неравенства (2.6) оценивается (также при достаточно больших значениях m) так:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(1 - r_n^2)^2}{n^{1+\varepsilon}} \frac{1}{|1 - \bar{a}_n a_m|^3} \\ & \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(1 - r_n^2)^2}{n^{1+\varepsilon}} \frac{1}{(1 - r_n r_m)^3} \leq \frac{4}{(1 - r_m)^3} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(1 - r_n)^2}{n^{1+\varepsilon}} \\ & = 4m^{3m} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{n^{-2n}}{n^{1+\varepsilon}} \leq \frac{4m^{3m}}{100} \frac{m^{-2m}}{m^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{25} \frac{m^m}{m^{1+\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из неравенств (2.6)–(2.9) вытекает, что

$$|f''(a_m)| \geq \frac{2}{5} \frac{m^m}{m^{1+\varepsilon}}. \quad (2.10)$$

Остается заметить, что оценка (2.5) имеет в точке $z = a_m$ следующий вид

$$|f''(a_m)| \leq A(1 - a_m)^{\alpha-1} = A(m^m)^{1-\alpha},$$

что противоречит оценке (2.10).

Оказывается, что среди областей, являющихся образами единичного круга при конформном отображении (однолиственными) функциями вида (2.1), можно найти примеры неванлинновских областей с границами, существенно более иррегулярными, чем границы класса C^1 . Нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть f – функция вида (2.1), у которой все точки соответствующей последовательности Бляшке (a_n) лежат на интервале $(0, 1)$, а все коэффициенты c_n положительны, причем $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$, и пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{1 - a_n}} < \infty. \quad (2.11)$$

Тогда $f \in C(\bar{\mathbb{D}})$, f однолистка в $\mathbb{D}$ и отображает $\mathbb{D}$ конформно на неванлинновскую жорданову область со спрямляемой границей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$, то

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \sqrt{1 - a_n^2}}{1 - a_n z} \in K_B,$$

где B – произведение Бляшке с нулями $(a_n)_{n=1}^\infty$. Тот факт, что $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$, вытекает из условия (2.11), так как

$$\frac{c_n \sqrt{1 - a_n^2}}{|1 - a_n z|} \leq \frac{c_n \sqrt{1 - a_n^2}}{(1 - a_n)} \leq \frac{2c_n}{\sqrt{1 - a_n}}.$$

Проверим однолиственность функции f в $\mathbb{D}$. Для этого заметим, что при $z = \rho e^{i\tau}$ имеет место соотношение

$$\operatorname{Im} f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n c_n \sqrt{1 - a_n^2}}{|1 - a_n z|^4} 2a_n \rho \sin \tau (1 - a_n \rho \cos \tau),$$

из которого вытекает, что $\operatorname{Im} f'(\rho e^{i\tau}) > 0$ при $\rho > 0$ и $\tau \in (0, \pi)$, т.е. $\operatorname{Im} f'(z) > 0$ при $z \in \mathbb{D}_+$, где $\mathbb{D}_+ = \mathbb{D} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$. Аналогично проверяется, что $\operatorname{Im} f'(z) < 0$ при $z \in \mathbb{D}_- = \mathbb{D} \cap \{\operatorname{Im} z < 0\}$. Отсюда вытекает, что f однолистна в $\mathbb{D}_+$ и в $\mathbb{D}_-$. Заметим также, что $f(x) \in \mathbb{R}$ при $x \in (-1, 1)$. Кроме того, отображение f инъективно на $(-1, 1)$. В самом деле, для любых $\zeta_1, \zeta_2 \in \overline{\mathbb{D}}$ имеет место равенство

$$f(\zeta_1) - f(\zeta_2) = (\zeta_1 - \zeta_2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n c_n \sqrt{1 - a_n^2}}{|1 - a_n \zeta_1|^2 |1 - a_n \zeta_2|^2} (1 - a_n \bar{\zeta}_1)(1 - a_n \bar{\zeta}_2), \quad (2.12)$$

а если $\zeta_1, \zeta_2 \in (-1, 1)$ и $\zeta_1 \neq \zeta_2$, то ряд, стоящий в правой части равенства (2.12), состоит из положительных членов, т.е. $f(\zeta_1) \neq f(\zeta_2)$. Применяя принцип симметрии Римана–Шварца, заключаем, что f однолистна в $\mathbb{D}$.

Проверим теперь инъективность f на $\mathbb{T}$. Пусть $\zeta_1 = e^{i\tau_1} \in \mathbb{T}$, $\zeta_2 = e^{i\tau_2} \in \mathbb{T}$, $\zeta_1 \neq \zeta_2$. Так как

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(1 - a_n \bar{\zeta}_1)(1 - a_n \bar{\zeta}_2) &= ((1 - a_n \cos \tau_1)(1 - a_n \cos \tau_2) - a_n^2 \sin \tau_1 \sin \tau_2), \\ \operatorname{Im}(1 - a_n \bar{\zeta}_1)(1 - a_n \bar{\zeta}_2) &= a_n ((1 - a_n \cos \tau_1) \sin \tau_2 + (1 - a_n \cos \tau_2) \sin \tau_1), \end{aligned}$$

то из (2.12) вытекает, что при $\tau_1 \in (0, \pi)$, $\tau_2 \in (0, \pi)$ и при $\tau_1 \in (\pi, 2\pi)$, $\tau_2 \in (\pi, 2\pi)$

$$\operatorname{Im}(f(\zeta_1) - f(\zeta_2)) \neq 0,$$

а при $\tau_1 \in (0, \pi)$, $\tau_2 \in (\pi, 2\pi)$ и при $\tau_1 \in (\pi, 2\pi)$, $\tau_2 \in (0, \pi)$

$$\operatorname{Re}(f(\zeta_1) - f(\zeta_2)) \neq 0.$$

Аналогично проверяется, что $\operatorname{Re}(f(\pm 1) - f(\zeta)) \neq 0$ для любого $\zeta \in \mathbb{T}$. Следовательно, $f(\zeta_1) \neq f(\zeta_2)$ для любых $\zeta_1 \neq \zeta_2$ на $\mathbb{T}$.

Из классической теоремы Каратеодори (см., например, [14; теорема 2.6]) вытекает, что $f(\mathbb{D})$ – жорданова область, а так как $f \in K_B$, то $f(\mathbb{D})$ – неванлинновская область.

Для доказательства спрямляемости границы области $f(\mathbb{D})$ нам необходимо проверить, что $f' \in H^1$ (где $H^1 = H^1(\mathbb{D})$ – стандартное пространство Харди в единичном круге). Для этого достаточно заметить, что

$$|f'(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \sqrt{1 - a_n^2}}{|1 - a_n z|^2}$$

и что

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{c_n \sqrt{1-a_n^2}}{|1-a_n e^{it}|^2} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{1-a_n^2}} < \infty.$$

Отметим, что ограничения, наложенные на последовательности (a_n) и (c_n) (их положительность и выполнение условия (2.11)) в лемме 1, позволяют сделать вывод об однолиственности функции f даже в случаях, когда условия (2.2) и (2.4) не выполняются (например, когда ряды, фигурирующие в определениях величин Δ_1 и Δ_2 , расходятся).

Кроме того, если функция $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$ имеет вид (2.1), а последовательности (a_n) и (c_n) состоят из положительных чисел, то

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \sqrt{1-a_n^2}}{1-a_n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{1-a_n}},$$

т.е. для таких функций условие (2.11) выполняется автоматически. Из этого наблюдения вытекает следующее утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Среди жордановых областей вида $f(\mathbb{D})$, где f – такая функция вида (2.1), что соответствующие последовательности (a_n) и (c_n) состоят из положительных чисел, нет областей с непрямыми границами.

Рассмотрим теперь следующую конструкцию.

ПРИМЕР 1. Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Положим $r_n := 1 - 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. При этом последовательность $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ является интерполяционной последовательностью Бляшке. Возьмем $\varepsilon > 0$, определим последовательность коэффициентов

$$c_n := \frac{\sqrt{1-r_n^2}}{n^{1+\varepsilon}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-r_n^2}{n^{1+\varepsilon}(1-r_n z)}$$

вида (2.1). Так как последовательности (r_n) и (c_n) удовлетворяют всем условиям леммы 1, то функция f однолистна в $\mathbb{D}$ и отображает $\mathbb{D}$ конформно на неванлинновскую жорданову область $f(\mathbb{D})$ со спрямляемой границей.

Покажем теперь, что для функции f оценка

$$|f'(z)| \leq \frac{A}{(1-|z|)^{1-\alpha}} \quad (2.13)$$

не выполняется во всем круге $\mathbb{D}$ ни для какой константы A . В самом деле, оценивая производную $f'(r_m)$ при достаточно большом $m \in \mathbb{N}$, получаем

$$f'(r_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(1-r_n^2)}{n^{1+\varepsilon}(1-r_n r_m)^2} \geq \frac{r_m}{m^{1+\varepsilon}(1-r_m^2)} = \frac{2^m}{m^{1+\varepsilon}} \frac{r_m}{2-2^{-m}} \geq \frac{1}{4} \frac{2^m}{m^{1+\varepsilon}}.$$

Это неравенство противоречит оценке (2.13) в точке $z = r_m$, которая имеет вид $|f'(r_m)| \leq A 2^{m(1-\alpha)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Итак, установлено, что имеет место следующее утверждение: для любого $\alpha \in (0, 1)$ существует интерполяционная последовательность Бляшке $(a_n)_{n=1}^\infty$ такая, что в пространстве K_B , где B – соответствующее произведение Бляшке, существует ограниченная однолистная функция f , не удовлетворяющая в $\mathbb{D}$ оценке вида (2.13) ни для какой константы A и отображающая $\mathbb{D}$ конформно на некоторую неванлинновскую жорданову область со спрямляемой границей.

Заметим, что как и в предыдущих конструкциях, область $f(\mathbb{D})$ в этом примере имеет неаналитическую границу. Более того, из неравенства (2.13) вытекает, что функция f обладает тем свойством, что $f \notin H^p$ ни при каком $p > 1$, где через H^p обозначено стандартное пространство Харди в $\mathbb{D}$. Однако, насколько это известно авторам, свойство (2.13) не выражается в терминах какой-либо известной классической характеристики регулярности границы области $f(\mathbb{D})$.

Развивая идею построения неванлинновских областей с достаточно нерегулярными границами, использованную в примере 1, можно более детально понять степень возможной нерегулярности границ таких областей.

Нам потребуется понятие модуля спрямляемости спрямляемой жордановой кривой, недавно введенное Е. П. Долженко (см. [12], [13]). Напомним это понятие. Пусть Γ – спрямляемая жорданова кривая (замкнутая или разомкнутая, с концами или без них). *Модулем спрямляемости* $m(\Gamma, \delta)$, $\delta > 0$, называется величина

$$m(\Gamma, \delta) := \sup\{\ell(\Gamma; z, w) : z, w \in \Gamma, |z - w| \leq \delta\},$$

где $\ell(\Gamma; z, w)$ обозначает либо длину дуги $\Gamma(z, w)$ кривой Γ с концами z и w в случае разомкнутой кривой Γ , либо меньшую из длин двух дуг $\Gamma(z, w)$ кривой Γ с этими концами в случае замкнутой кривой Γ . Напомним основные свойства модуля спрямляемости. Во-первых, функция $m(\Gamma, \delta)$ не убывает при $\delta \geq 0$ и может иметь разрывы первого рода. Кроме того, $m(\Gamma, \delta) \geq \delta$ при любом $\delta \geq 0$. Наконец, $m(\Gamma, \delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ для любой жордановой спрямляемой кривой Γ .

Пусть теперь функция $g = g(x)$ определена, не убывает и непрерывна справа при

$$x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) \geq x, \quad g(0) = g(0+) = 0.$$

Обозначим через $\mathcal{J}_0(g)$ класс всех спрямляемых жордановых кривых Γ , для которых $m(\Gamma, \delta) \leq g(\delta)$ при всех $\delta \geq 0$. Кроме того, при $\beta > 0$ обозначим через $\mathcal{J}_0(g, \beta)$ класс всех спрямляемых жордановых кривых Γ , для которых $m(\Gamma, \delta) \leq g(\delta)$ при всех $\delta \in (0, \beta)$. Ясно, что любая спрямляемая жорданова кривая Γ принадлежит некоторому классу $\mathcal{J}_0(g)$ – например, классу, определяемому функцией $g(x) = m(\Gamma, x)$.

При $k \in (0, 1]$ введем также класс $\mathcal{J}_0^k$ всех спрямляемых жордановых кривых Γ таких, что $\Gamma \in \mathcal{J}_0(cx^k, \beta)$ для некоторых $c > 1$ и $\beta > 0$. Имеет место следующее утверждение, показывающее, что существуют неванлинновские области с “почти неспрямляемыми” границами.

ТЕОРЕМА 3. Для любого $k \in (0, 1]$ существует неванлинновская область Ω такая, что $\partial\Omega \notin \mathcal{J}_0^k$. При этом $\Omega = f(\mathbb{D})$, где f – однолистная функция вида (2.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r_n := 1 - \exp(-2^n)$, $n \in \mathbb{N}$. При этом $(r_n)_{n=1}^\infty$ – интерполяционная последовательность Бляшке. Обозначим через B произведение Бляшке с нулями $(r_n)_{n=1}^\infty$. Выберем произвольное число $q > 1$ и определим последовательность коэффициентов $(c_n)_{n=1}^\infty$ следующим образом:

$$c_n = \frac{\sqrt{1 - r_n^2}}{n^q}.$$

При этом, как и в конструкции примера 1, последовательности (r_n) и (c_n) удовлетворяют всем условиям леммы 1 и, следовательно, функция f однолистка в $\mathbb{D}$ и отображает $\mathbb{D}$ конформно на неванлинновскую жорданову область $f(\mathbb{D})$ со спрямляемой границей.

Рассмотрим отдельно два случая: случай, когда $k \in (0, 1)$ и случай, когда $k = 1$.

Пусть $k \in (0, 1)$, а $\nu(k) := k^2/(2 - 2k)$. В работе [12; следствие 2.2] установлено, что если граница $\partial f(\mathbb{D})$ принадлежит классу $\mathcal{J}_0(cx^k, \beta)$ при некоторых $c > 1$, $\beta > 0$, то при $\delta > 0$ имеет место оценка

$$\omega(f, \overline{\mathbb{D}}, \delta) \leq \frac{A}{(1 + |\ln \delta|)^{\nu(k)}}, \quad (2.14)$$

где $\omega(f, \overline{\mathbb{D}}, \delta)$ – модуль непрерывности функции f в $\overline{\mathbb{D}}$. В частности, если

$$\delta_m = \exp(-2^m) - \exp(-2^{m+1}) = \exp(-2^m)(1 - \exp(-2^m)),$$

то

$$A_1 \exp(-2^m) \leq \delta_m \leq A_2 \exp(-2^m)$$

и оценка (2.14) будет иметь вид

$$\omega(f, \overline{\mathbb{D}}, \delta_m) \leq A_3 2^{-m\nu(k)}. \quad (2.15)$$

Возьмем достаточно большое $m \in \mathbb{N}$ и рассмотрим точки $z_1 = r_m$ и $z_2 = r_{m+1}$, для которых

$$|z_2 - z_1| = r_{m+1} - r_m = \delta_m.$$

Оценим снизу разность $f(z_2) - f(z_1)$:

$$\begin{aligned} f(z_2) - f(z_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - r_n^2}{n^q} \left[\frac{1}{1 - r_n r_{m+1}} - \frac{1}{1 - r_n r_m} \right] \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_4 r_n (1 - r_n^2)}{e^{2^m} n^q (1 - r_n r_m) (1 - r_n r_{m+1})} \geq \frac{A_4 r_m (1 - r_m^2)}{e^{2^m} m^q (1 - r_m^2) (1 - r_m r_{m+1})} \geq \frac{A_5}{m^q}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Полученная оценка противоречит оценке (2.15). Таким образом, граница области $f(\mathbb{D})$ не принадлежит классу $\mathcal{J}_0^k$.

Пусть теперь $k = 1$. Если область Ω в этом случае является образом единичного круга при конформном отображении φ и имеет границу класса $\mathcal{J}_0(cx, \beta)$

при некоторых $c > 1$ и $\beta > 0$, то модуль непрерывности $\omega(\varphi, \overline{\mathbb{D}}, \delta)$ функции φ удовлетворяет оценке

$$\omega(\varphi, \overline{\mathbb{D}}, \delta) \leq A_6 \delta^{\alpha(c)} \quad (2.17)$$

(см. [12; теорема 2.2]), где $\alpha(c) \in (0, 4]$ определяется в [12; формула (16)].

Для функции f оценка (2.16) противоречит при достаточно большом m оценке (2.17) и, следовательно, граница области $f(\mathbb{D})$ при таком выборе функции f не принадлежит классу $\mathcal{J}_0^1$.

§ 3. О существовании однолистных функций в пространствах K_S

Пусть μ – некоторая конечная положительная сингулярная мера на единичной окружности $\mathbb{T}$, а $S = S_\mu$ – соответствующая сингулярная внутренняя функция (1.4).

В отличие от случая пространства K_B , где B – произведение Бляшке, вопрос об описании сингулярных внутренних функций S (или, соответственно, положительных сингулярных мер μ на $\mathbb{T}$), для которых пространство K_S содержит однолистные функции, остается открытым.

Для натурального числа N обозначим через ω_N первообразный корень степени N из единицы, т.е. $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$. Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 2. *Пусть S – сингулярная внутренняя функция, и пусть в пространстве K_S существует функция f класса $C^2(\overline{\mathbb{D}})$. Тогда существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что пространство K_{S_N} , где сингулярная внутренняя функция S_N определена равенством*

$$S_N(z) = S(z)S(\omega_N z)S(\omega_N^2 z) \cdots S(\omega_N^{N-1} z), \quad z \in \mathbb{D}, \quad (3.1)$$

содержит однолистные функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве этой леммы мы будем следовать схеме рассуждений, использованной при доказательстве предложения 4.5 из [16]. Так как пространство K_S инвариантно относительно оператора обратного сдвига, то без ограничения общности можно считать, что

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k,$$

причем

$$\sum_{k=2}^{\infty} k|b_k| < \infty. \quad (3.2)$$

Для натурального N рассмотрим функцию f_N (“симметризацию” функции f), определенную следующим образом:

$$f_N(z) = \frac{1}{N} (f(z) + \bar{\omega}_N f(\omega_N z) + \cdots + \bar{\omega}_N^{N-1} f(\omega_N^{N-1} z)). \quad (3.3)$$

Заметим, что $f_N \in K_{S_N}$. Далее, так как

$$f_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{kN+1} z^{kN+1} = z + \sum_{k=2}^{\infty} b'_k z^k,$$

то из условия (3.2) вытекает, что при достаточно больших N имеет место неравенство

$$\sum_{k=2}^{\infty} k|b'_k| < 1,$$

из которого, в свою очередь, следует однолистность функции f_N в $\mathbb{D}$.

Заметим, что функция S_N определяется (положительной сингулярной) мерой μ_N на $\mathbb{T}$, для которой справедливо соотношение

$$\mu_N(E) = \mu(E) + \mu(\omega_N E) + \dots + \mu(\omega_N^{N-1} E) \quad (3.4)$$

для любого борелевского множества $E \subset \mathbb{T}$.

Заметим также, что функция f_N , построенная в лемме 2, будет ограниченной.

Нам потребуется понятие множества Карлесона (см. [17]). Напомним, что множество $Y \subset \mathbb{T}$ называется *множеством Карлесона*, если

$$\int_{\mathbb{T}} \log \text{dist}(\zeta, Y) dm(\zeta) > -\infty,$$

где $m(\cdot)$ – нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}$. Напомним также, что если $Y \subset \mathbb{T}$ – замкнутое множество нулевой меры Лебега, а $\{I_\ell\}$ – не более чем счетное множество непересекающихся открытых дуг $I_\ell \subset \mathbb{T}$ таких, что $\mathbb{T} \setminus Y = \bigcup_\ell I_\ell$, то Y будет множеством Карлесона тогда и только тогда, когда

$$\sum_\ell m(I_\ell) \log m(I_\ell) > -\infty.$$

Такие множества впервые возникли в работах Берлинга и Карлесона как граничные нуль-множества аналитических в круге функций, гладких вплоть до границы.

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть S – сингулярная внутренняя функция, а μ – соответствующая (положительная сингулярная) мера на $\mathbb{T}$. Следующие условия эквивалентны.

- 1) Существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что пространство K_{S_N} содержит ограниченные однолистные функции.
- 2) Существует множество Карлесона $Y \subset \mathbb{T}$ такое, что $\mu(Y) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что пространство Бергмана A^2 состоит из всех голоморфных функций класса $L^2(\mathbb{D})$ (рассматриваемого относительно нормированной меры Лебега в $\mathbb{D}$), а пространство Бергмана–Соболева $A^{2,1}$ состоит из всех функций $f \in A^2$ таких, что $f' \in A^2$.

Пусть выполнено условие 1) и в пространстве K_{S_N} существует ограниченная однолистная функция f . Так как $f \in A^{2,1}$, то согласно [18; теорема 2.1, импликация ii.1 $\Rightarrow$ iii.1] найдется такое множество Карлесона Y_0 , что $\mu_N(Y_0) > 0$. Так как

$$0 < \mu_N(Y_0) = \sum_{k=0}^{N-1} \mu(\omega_N^k Y_0)$$

– сумма положительных слагаемых, то существует целое k , $0 \leq k < N$, такое, что $\mu(\omega_N^k Y_0) > 0$. Остается заметить, что множество $Y = \omega_N^k Y_0$ является множеством Карлесона.

Обратно, пусть мера μ удовлетворяет условию 2). Из [18; теорема 2.1, импликация iii.1 $\Rightarrow$ i.1] вытекает, что в пространстве K_S существует функция класса $H^\infty \cap C^\infty(\mathbb{T})$. Из этого в силу леммы 2 вытекает существование такого $N \in \mathbb{N}$, что пространство K_{S_N} содержит ограниченные однолистные функции.

С учетом утверждений теоремы 4 и [18; теорема 2.1] представляет интерес следующий вопрос: для каких конечных положительных сингулярных мер μ на $\mathbb{T}$, для которых существует множество Карлесона $Y \subset \mathbb{T}$ с условием $\mu(Y) > 0$, в пространстве K_{S_μ} есть однолистные функции (т.е. утверждение теоремы 4 верно для $N = 1$)?

Следующее утверждение доставляет, наряду с леммой 2, еще один способ доказывать существование ограниченных однолистных функций в пространствах K_Θ для сингулярных внутренних функций Θ .

ЛЕММА 3. Пусть μ – положительная сингулярная мера на $\mathbb{T}$ такая, что $\mu(Y) > 0$ для некоторого множества Карлесона $Y \subset \mathbb{T}$, а $S = S_\mu$ – соответствующая сингулярная внутренняя функция. Тогда существует такое $N \in \mathbb{N}$, что пространство $K_{\tilde{S}_N}$, где

$$\tilde{S}_N(z) = (S_N(z^{1/N}))^N, \quad (3.5)$$

а функция S_N определена соотношением (3.1), содержит ограниченные однолистные функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [18; теорема 2.1, импликация iii.1 $\Rightarrow$ i.1] вытекает, что в пространстве K_S существует функция f класса $H^\infty \cap C^\infty(\mathbb{T})$. Из этого в силу леммы 2 вытекает существование такого $N \in \mathbb{N}$, что пространство K_{S_N} содержит ограниченную однолистную функцию f_N , которая получается из функции f в результате процедуры симметризации, см. (3.3). Так как $f_N(\omega_N z) = \overline{\omega_N} f_N(z)$, то функция

$$\tilde{f}_N(z) = (f_N(z^{1/N}))^N$$

(“десимметризация” функции f_N) корректно определена (не зависит от выбора корня) и однолистка в $\mathbb{D}$.

Проверим, что $\tilde{f}_N \in K_{\tilde{S}_N}$. Для этого достаточно проверить, что функция $\tilde{S}_N(\zeta) \zeta \overline{\tilde{f}_N(\zeta)}$, $\zeta \in \mathbb{T}$, принадлежит $H^\infty(\mathbb{T})$. Заметим, что функция

$$\varphi(\zeta) = S_N(\zeta) \zeta \overline{f_N(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{T},$$

принадлежит $H^\infty(\mathbb{T})$ (в смысле угловых граничных значений) и обладает тем свойством, что $\varphi(\omega_N \zeta) = \varphi(\zeta)$. Следовательно, функция $(\varphi(\zeta^{1/N}))^N$, $\zeta \in \mathbb{T}$, также принадлежит $H^\infty(\mathbb{T})$. Остается заметить, что

$$(\varphi(\zeta^{1/N}))^N = (S_N(\zeta^{1/N}) \zeta^{1/N} \overline{f_N(\zeta^{1/N})})^N = \tilde{S}_N(\zeta) \zeta \overline{\tilde{f}_N(\zeta)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из (1.4), (3.1), (3.5) и равенства

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\zeta + \omega_N^k z}{\zeta - \omega_N^k z} = N \frac{\zeta^N + z^N}{\zeta^N - z^N}$$

вытекает, что

$$\tilde{S}_N(z) = \exp \left(-N^2 \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta^N + z}{\zeta^N - z} d\mu_S(\zeta) \right). \quad (3.6)$$

Изучим поставленный выше вопрос о существовании однолистных функций в пространстве K_{S_μ} в случае, когда μ – точечная мера, сосредоточенная в точке $\zeta_0 \in \mathbb{T}$. Для произвольных $Q > 0$ и $\zeta \in \mathbb{T}$ определим сингулярную внутреннюю функцию

$$S(\zeta, Q)(z) := \exp \left(Q \frac{z + \zeta}{z - \zeta} \right).$$

Предположим, что в пространстве $K_{S(1,Q)}$ существует ограниченная однолистная функция f . Тогда функция $f(z/\zeta_0)$ ограничена, однолистка в $\mathbb{D}$ и принадлежит пространству $K_{S(\zeta_0,Q)}$. Таким образом, нам достаточно изучить случай точечной меры, сосредоточенной в точке $\zeta_0 = 1$.

Так как множество $\{1\}$ является множеством Карлесона, то из леммы 3 следует, что для функции $S = S(1, 1)$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что пространство $K_{\tilde{S}_N}$ содержит ограниченные однолистные функции. Из (3.6) вытекает, что

$$\tilde{S}_N(z) = \exp \left(N^2 \frac{z + 1}{z - 1} \right) = S(1, N^2)(z).$$

Таким образом, пространство $K_{S(1,Q)}$ при $Q = N^2$ содержит ограниченные однолистные функции. Следующая лемма показывает, что из этого вытекает существование ограниченных однолистных функций в пространстве $K_{S(1,Q)}$ для любого $Q > 0$.

ЛЕММА 4. Пусть существует $M > 0$ такое, что в пространстве $K_{S(1,M)}$ существуют ограниченные однолистные функции. Тогда для любого $Q > 0$ в пространстве $K_{S(1,Q)}$ существуют ограниченные однолистные функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство леммы состоит из нескольких шагов. Для упрощения записи введем пространства K_Θ^∞ и $K_\Theta^\infty(\mathbb{C}_+)$, где Θ – внутренняя функция в единичном круге и в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ соответственно, следующим образом:

$$K_\Theta^\infty = K_\Theta \cap H^\infty, \quad K_\Theta^\infty(\mathbb{C}_+) = K_\Theta(\mathbb{C}_+) \cap H^\infty(\mathbb{C}_+),$$

где $K_\Theta(\mathbb{C}_+) = H^2(\mathbb{C}_+) \ominus \Theta H^2(\mathbb{C}_+)$. Заметим, что $f \in K_\Theta^\infty$ в том и только том случае, когда $f \in H^\infty$ и $\bar{z}f\Theta \in H^\infty$, в то время как включение $g \in K_\Theta^\infty(\mathbb{C}_+)$ равносильно тому, что $g \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$ и $\bar{g}\Theta \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$.

Пусть $f \in K_{S(1,M)}^\infty$ и f однолистка в $\mathbb{D}$. Используя функцию f , найдем однолистную функцию в пространстве $K_{S(1,1)}^\infty$. Определим функцию g в $\mathbb{C}_+$ следующим образом

$$g(w) := f \left(\frac{w - i}{w + i} \right), \quad w \in \mathbb{C}_+.$$

Ясно, что g однолистка в $\mathbb{C}_+$ и $g \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$. Так как

$$\overline{g(w)}e^{iMw} = \overline{f(z)}S(1, M) \in H^\infty$$

при $w = i\frac{1+z}{1-z}$, то $g \in K_{\exp(iMw)}^\infty(\mathbb{C}_+)$.

Определим теперь функцию $g_1(w) := g(w/M)$, однолистную в $\mathbb{C}_+$. Непосредственно проверяется, что $g_1 \in K_{\exp(iw)}^\infty(\mathbb{C}_+)$. Известно, что пространство $K_{\exp(iw)}^\infty(\mathbb{C}_+)$ состоит в точности из функций вида $\exp(iw/2)H(w)$, где H – целая функция экспоненциального типа не выше $1/2$, сужение которой на вещественную прямую принадлежит $L^\infty(\mathbb{R})$. Поэтому найдется такое $a \in \mathbb{C}$ (а именно, $a = g_1(-i)$), что

$$\frac{g_1(w) - a}{w + i} \in K_{\exp(iw)}^\infty(\mathbb{C}_+).$$

Положим $g_2 := g_1 - a$ (ясно, что g_2 будет однолистка в $\mathbb{C}_+$) и рассмотрим функцию f_1 в $\mathbb{D}$, определенную следующим образом:

$$f_1(z) = g_2\left(i\frac{1+z}{1-z}\right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Проверим, что $f_1 \in K_{S(1,1)}^\infty$. По определению $f_1 \in H^\infty$. Далее,

$$\overline{zf_1(z)}S(1, 1) = \overline{\left(\frac{w-i}{w+i}\right)}\overline{g_2(w)}e^{iw}$$

при $z = \frac{w-i}{w+i}$, откуда следует, что $\overline{zf_1}S(1, 1)$ ограничена на $\mathbb{T}$. Кроме того, при $w \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\overline{\left(\frac{w-i}{w+i}\right)}\overline{g_2(w)}e^{iw} = (w+i)\overline{\left(\frac{g_2(w)}{w+i}\right)}e^{iw},$$

откуда вытекает, что $\overline{zf_1}S(1, 1) \in H^\infty$. Таким образом, $f_1 \in K_{S(1,1)}^\infty$. Однолистность функции f_1 в $\mathbb{D}$ очевидна.

Повторение приведенной конструкции с минимальными очевидными изменениями позволяет получить из функции f_1 однолистную функцию в пространстве $K_{S(1,Q)}^\infty$ для любого $Q > 0$.

Список литературы

- [1] К. Ю. Федоровский, “О равномерных приближениях функций n -аналитическими полиномами на спрямляемых контурах в $\mathbb{C}$ ”, *Матем. заметки*, **59**:4 (1996), 604–610; англ. пер.: K. Yu. Fedorovskii, “Uniform n -analytic polynomial approximations of functions on rectifiable contours in $\mathbb{C}$ ”, *Math. Notes*, **59**:4 (1996), 435–439.
- [2] Д. Д. Кармона, П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, “О равномерной аппроксимации полианалитическими многочленами и задаче Дирихле для бианалитических функций”, *Матем. сб.*, **193**:10 (2002), 75–98; англ. пер.: J. J. Carmona, P. V. Paramonov, K. Yu. Fedorovskii, “On uniform approximation by polyanalytic polynomials and the Dirichlet problem for bianalytic functions”, *Sb. Math.*, **193**:10 (2002), 1469–1492.

- [3] А. Буаве, П. М. Готье, П. В. Парамонов, “О равномерной аппроксимации n -аналитическими функциями на замкнутых множествах в $\mathbb{C}$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:3 (2004), 15–28; англ. пер.: A. Boivin, P. M. Gauthier, P. V. Paramonov, “On uniform approximation by n -analytic functions on closed sets in $\mathbb{C}$ ”, *Izv. Math.*, **68**:3 (2004), 447–459.
- [4] J. Carmona, K. Fedorovskiy, “Conformal maps and uniform approximation by polyanalytic functions”, *Selected topics in complex analysis*, Oper. Theory Adv. Appl., **158**, Birkhäuser, Basel, 2005, 109–130.
- [5] А. Б. Зайцев, “О равномерной приближаемости функций полиномиальными решениями эллиптических уравнений второго порядка на плоских компактах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:6 (2004), 85–98; англ. пер.: A. B. Zaitsev, “Uniform approximability of functions by polynomial solutions of second-order elliptic equations on compact plane sets”, *Izv. Math.*, **68**:6 (2004), 1143–1156.
- [6] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950.
- [7] К. Ю. Федоровский, “О некоторых свойствах и примерах неванлинновских областей”, *Комплексный анализ и приложения*, Тр. МИАН, **253**, Наука, М., 2006, 204–213; англ. пер.: K. Yu. Fedorovskii, “On some properties and examples of Nevanlinna domains”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **253**:1 (2006), 186–194.
- [8] М. Я. Мазалов, “Пример непостоянной бианалитической функции, обращающейся в нуль всюду на нигде не аналитической границе”, *Матем. заметки*, **62**:4 (1997), 629–632; англ. пер.: M. Ya. Mazalov, “An example of a nonconstant bianalytic function vanishing everywhere on a nowhere analytic boundary”, *Math. Notes*, **62**:4 (1997), 524–526.
- [9] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Pure Appl. Math., **96**, Academic Press, New York–London, 1981.
- [10] Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980; англ. пер.: N. K. Nikol'skii, *Treatise on the shift operator*, Grundlehren Math. Wiss., **273**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1986.
- [11] К. Ю. Федоровский, “Аппроксимация и граничные свойства полианалитических функций”, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Тр. МИАН, **235**, Наука, М., 2001, 262–271; англ. пер.: K. Yu. Fedorovskii, “Approximation and boundary properties of polyanalytic functions”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **235**:4 (2001), 251–260.
- [12] Е. П. Долженко, “О граничной гладкости конформных отображений областей с негладкими границами”, *Докл. РАН*, **415**:2 (2007), 155–159; англ. пер.: E. P. Dolzhenko, “On the boundary smoothness of conformal mappings between domains with nonsmooth boundaries”, *Dokl. Math.*, **76**:1 (2007), 514–518.
- [13] Е. П. Долженко, “Оценки модулей непрерывности конформных отображений областей вблизи их достижимых граничных дуг”, *Матем. сборник*, **202**:12 (2011), 57–106.
- [14] Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Grundlehren Math. Wiss., **299**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [15] P. R. Ahern, D. N. Clark, “On functions orthogonal to invariant subspaces”, *Acta Math.*, **124**:1 (1970), 191–204.
- [16] M. Putinar, H. S. Shapiro, “The Friedrichs operator of a planar domain”, *Complex analysis, operators, and related topics*, Oper. Theory Adv. Appl., **113**, Birkhäuser, Basel, 2000, 303–330.

- [17] L. Carleson, “Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle”, *Acta Math.*, **87**:1 (1952), 325–345.
- [18] K. Dyakonov, D. Khavinson, “Smooth functions in star-invariant subspaces”, *Recent advances in operator-related function theory* (Dublin, Ireland, 2004), *Contemp. Math.*, **393**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, 59–66.

А. Д. Баранов (A. D. Baranov)

Математико-механический факультет

Санкт-Петербургского государственного университета

E-mail: a.baranov@ev13934.spb.edu

Поступила в редакцию

22.03.2011 и 11.07.2011

К. Ю. Федоровский (K. Yu. Fedorovskiy)

Московский государственный технический университет

им. Н. Э. Баумана

E-mail: kfedorovs@yandex.ru