Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. П. Андреянов, К. Е. Душин, Бифуркационные множества в задаче Ковалевской–Яхьи, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 4, 3–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7868>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 03:17:24

УДК 517.538

П. П. Андреянов, К. Е. Душин

Бифуркационные множества в задаче Ковалевской–Яхьи

Изучается двухпараметрическое семейство бифуркационных диаграмм Σ отображения момента интегрируемого случая Ковалевской–Яхьи задачи о движении твердого тела. Разработан метод, при помощи которого в пространстве параметров можно вычислить бифуркационное множество Θ , которому соответствуют перестройки бифуркационных диаграмм, а также классифицировать их. В работе детально изучены свойства множеств Σ и Θ , подробно описано, как перестраиваются диаграммы при прохождении параметра через Θ . Приведены иллюстрации, поясняющие, как устроены диаграммы разного вида и как они связаны между собой.

Библиография: 22 названия.

Ключевые слова: задача Ковалевской–Яхьи, интегрируемые системы, бифуркационные диаграммы.

§ 1. Введение

Один из методов качественного анализа интегрируемых гамильтоновых систем заключается в изучении отображения момента, соответствующего этой системе, и его особенностей. Основным объектом исследования при таком подходе является бифуркационная диаграмма отображения момента, т.е. множество его критических значений. Подробное изложение этого метода, а также примеры исследования конкретных интегрируемых систем даны в книге [1] и работах [2]–[13].

В настоящей работе изучается задача о движении тяжелого гиростата, распределение масс которого подчинено условиям Ковалевской: тензор инерции задается диагональной матрицей $\mathbf{A} = \text{diag}(A, A, A/2)$, а вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, 0)$, направленный из неподвижной точки в центр масс тела, находится в экваториальной плоскости эллипсоида инерции. Гиросtatический момент $\vec{\lambda} = (0, 0, \lambda)$ постоянен и направлен вдоль оси динамической симметрии. Этой задаче соответствует динамическая система с гамильтонианом H и первыми интегралами G, Γ в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^6(\omega, \nu)$

$$H = \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}\omega, \omega \rangle + \nu \times \vec{a}, \quad G = \langle \mathbf{A}\omega + \vec{\lambda}, \nu \rangle, \quad \Gamma = \langle \nu, \nu \rangle,$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00748), программы “Ведущие научные школы РФ” (грант № НШ-3224.2010.1), АБЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект № РНП-2.1.1.3704), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (контракты № 02.740.11.5213 и № 14.740.11.0794).

где через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено стандартное евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$. В работах Х. М. Яхьи [14], [15] был указан дополнительный интеграл K четвертой степени. При помощи замены (2.19) переходим к новым первым интегралам и новому параметру системы в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^6(\tilde{\omega}, \tilde{\nu})$

$$\tilde{H} = \gamma^{-1} \cdot H, \quad \tilde{K} = \gamma^{-2} \cdot K, \quad \tilde{G} = (2A\gamma)^{-1/2} \cdot G, \quad \tilde{\lambda} = \left(\frac{A\gamma}{2}\right)^{-1/2} \cdot \lambda,$$

где $\gamma = (a_1^2 + a_2^2)^{1/2}$. Рассмотрим четырехмерную совместную поверхность уровня интегралов $\tilde{G}, \Gamma$

$$M_{g,\mu}^4 = \{(\tilde{\omega}, \tilde{\nu}) \mid \tilde{G} = g, \Gamma = 1\}, \quad \mu = \frac{\tilde{\lambda}}{\sqrt{2}}.$$

На ней система является вполне интегрируемой и имеет два непрерывных параметра: g – постоянная площадей и μ – гиостатический момент.

В случае $\mu = 0$ получается интегрируемая система, известная как “случай Ковалевской”. Топология соответствующего слоения Лиувилля была полностью исследована в работах М. П. Харламова [16], [17] и А. В. Болсинова, П. Рихтера и А. Т. Фоменко [18]. В случае $g = 0$ получается другая известная система, топология которой была полностью исследована в работах М. П. Харламова, П. Е. Рябова [19], [20] и П. В. Морозова [21]. Выяснилось, что некоторые важные топологические свойства системы, обнаруженные в граничных случаях $g = 0$ и $\mu = 0$, продолжают на системы с произвольными значениями параметров. В то же время в них присутствуют принципиально новые эффекты, а топологические инварианты устроены гораздо сложнее.

Рассмотрим точку (g, μ) в области U и отображение момента $\tilde{K} \times \tilde{H}$, где

$$U = \{(g, \mu) \mid g > 0, \mu > 0\}, \quad \tilde{K} \times \tilde{H}: M_{g,\mu}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(k, h).$$

Множество его критических значений $\Sigma_{g,\mu}$ (далее просто Σ) называется бифуркационной диаграммой. В работе П. Е. Рябова [20] было доказано, что множество Σ принадлежит дискриминантному множеству $D_{g,\mu}$ (далее просто D), которое задается объединением двух алгебраических кривых γ_1, γ_2 , и показано, какую часть D необходимо отбросить, чтобы получить Σ . Оказывается, что точки (g, μ) , в которых происходят бифуркации диаграмм D и Σ , образуют одно и то же множество Θ в области U . В работе [20] было показано, что это множество состоит из кривых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_5$, делящих область U на 18 камер, и было дано описание диаграмм D и Σ для точек (g, μ) внутри этих камер.

Бифуркационные диаграммы Σ в задаче Ковалевской–Яхьи и их перестройки представляют большой интерес для исследования топологии слоения Лиувилля. Цель настоящей работы – провести более подробный анализ бифуркационных множеств Σ и Θ и дать описание перестроек, происходящих с Σ , когда точка (g, μ) на плоскости параметров проходит через Θ .

Работать с множеством D проще, чем с множеством Σ , так как оно состоит из алгебраических кривых. Кривые γ_1, γ_2 непрерывно деформируются при изменении параметров g, μ , поэтому можно считать, что качественный вид

диаграммы D задается набором ее особых точек и их расположением относительно дуг этих кривых. Особые точки диаграммы D – это, по определению, точки возврата кривых γ_1, γ_2 , а также точки пересечения или касания кривых γ_1, γ_2 друг с другом (самопересечения в нашем случае отсутствуют). Имея параметрическую (3.4), (3.5) и неявную (3.6), (3.7) записи кривых γ_1, γ_2 , мы получаем формулы (3.8) для многочленов $\mathbf{A}, \mathbf{B}$, действительными корнями которых являются те значения параметров на кривых γ_1, γ_2 , которым соответствуют особые точки. Эти многочлены разлагаются на множители, которым соответствуют точки разного типа (точки возврата, пересечения или касания).

Множество Θ бифуркационных значений параметров определим как такие $(g, \mu) \in U$, при которых происходят бифуркации множества особых точек диаграмм D . При помощи многочленов $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ мы выводим формулу (3.19) для многочлена $L(g, \mu)$, линией нулевого уровня которого является Θ . Область U разбивается на 18 камер, а диаграммы D , соответствующие точкам $(g, \mu) \in U \setminus \Theta$, разбиваются на 18 классов эквивалентности.

Благодаря удачной нормировке параметров системы множество Θ оказывается симметричным относительно оси $g = \mu$. Более того, этот факт является следствием более глубокой симметрии семейства диаграмм D . Существует гомеоморфизм (3.8) плоскости $\mathbb{R}^2(k, h)$, переводящий $D_{g, \mu}$ в $D_{\mu, g}$, поэтому существенно различных классов диаграмм D получается не 18, а только 10. Однако, эта симметрия пропадает, если перейти к диаграммам Σ . Схематические изображения диаграмм D и Σ для каждого из 18 классов приведены в § 7 (см. рис. 8, 9).

Главные результаты работы сформулированы в теоремах 1, 3, 4, 5.

В теореме 1 вычисляется многочлен $L(g, \mu)$, линией нулевого уровня которого является множество Θ .

В теоремах 3, 4 описываются бифуркации, происходящие с D , когда точка (g, μ) трансверсально пересекает одну из дуг множества Θ . В теореме 3 показано, особые точки какого типа (точки возврата, пересечения или касания) участвуют в каждой из бифуркаций, а в теореме 4 эта информация дополняется поведением дуг диаграмм D , примыкающим к этим особым точкам.

В теореме 5 описано поведение кривых γ_1, γ_2 , когда точка (g, μ) приближается к одной из осей $g = 0, \mu = 0$. Показано, что дискриминантное множество, соответствующее граничному случаю, является поточечным пределом дискриминантных множеств D , когда соответствующий параметр стремится к нулю.

Таким образом, в работе описаны все бифуркации диаграмм D (а значит и Σ) при переходе точки (g, μ) между камерами $U \setminus \Theta$, а также при переходе к граничным случаям $g = 0$ и $\mu = 0$. Из этого можно сделать вывод о том, какие части диаграмм D , соответствующих $(g, \mu) \in U$, можно отождествить с частями диаграмм, соответствующих уже исследованным частным случаям $g = 0$ и $\mu = 0$. В частности, оказалось, что некоторые элементы диаграмм D для $(g, \mu) \in U$ являются “новыми” и не продолжаются с граничных случаев $g = 0$ и $\mu = 0$ (см. § 7, рис. 8, 9). Для вычисления топологических инвариантов, соответствующих “старым” частям диаграмм D , можно воспользоваться уже имеющейся информацией в граничных случаях, а для “новых” необходимы дополнительные рассуждения.

При доказательстве теорем использовался пакет символьных вычислений Wolfram Mathematica, соответствующие функции и алгоритмы описаны в работе (см. § 6).

Авторы выражают глубокую благодарность своим научным руководителям А. Т. Фоменко и А. А. Ошемкову за постановку задачи. Авторы благодарят также П. Е. Рябова, П. В. Морозова за постоянное внимание к работе, множество ценных замечаний и консультаций.

§ 2. Постановка задачи Ковалевской–Яхьи

Случай интегрируемости Ковалевской–Яхьи является обобщением классического волчка Ковалевской на случай задачи о движении тяжелого гиростата. Приведем два способа описания уравнений движения этой системы и их первых интегралов.

2.1. Переменные (s, r) . Рассмотрим линейное шестимерное пространство – алгебру Ли $e(3)$ группы Ли $E(3)$ движений трехмерного евклидова пространства. На дуальном пространстве $e(3)^*$ определена скобка Ли–Пуассона двух произвольных гладких функций f и g

$$\{f, g\}(x) = x([d_x f, d_x g]),$$

где $x \in e(3)^*$, а $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор в алгебре Ли $e(3)$. В декартовых координатах $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$ на пространстве $e(3)^*$ эта скобка записывается следующим образом: для $1 \leq i, j, k \leq 3$

$$\{s_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk} s_k, \quad \{r_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk} r_k, \quad \{r_i, r_j\} = 0, \quad \varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i).$$

Соответствующая матрица Ω скобки Ли–Пуассона имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & s_3 & -s_2 & 0 & r_3 & -r_2 \\ -s_3 & 0 & s_1 & -r_3 & 0 & r_1 \\ s_2 & -s_1 & 0 & r_2 & -r_1 & 0 \\ 0 & r_3 & -r_2 & 0 & 0 & 0 \\ -r_3 & 0 & r_1 & 0 & 0 & 0 \\ r_2 & -r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Гамильтонова система на пространстве $e(3)^*$ со скобкой (2.1) задается уравнениями Эйлера

$$\dot{s}_i = \{s_i, H\}, \quad \dot{r}_i = \{r_i, H\}, \quad (2.2)$$

где $H(s, r)$ – гладкая функция на $e(3)^*$, называемая гамильтонианом. Функции

$$f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2, \quad f_2 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3 \quad (2.3)$$

лежат в ядре скобки Ли–Пуассона и поэтому являются первыми интегралами уравнений (2.2). На совместных четырехмерных поверхностях уровня этих функций $M_c^4 = \{(s, r) \mid f_1 = 1, f_2 = c\}$ ограничение системы (2.2) представляет

собой гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Неособые поверхности M^4 являются гладкими симплектическими подмногообразиями в $e(3)^*$, диффеоморфными TS^2 – касательному расслоению к двумерной сфере. Симплектическая структура задается ограничением скобки Ли–Пуассона на TS^2 из объемлющего пространства $e(3)^*$.

Система будет интегрируемой на поверхности M_c^4 , если на ней существует функционально независимая с H , f_1 , f_2 гладкая функция $K(s, r)$ такая, что $\{H, K\} = 0$. Если такая функция существует глобально на всем $e(3)^*$, то для любого значения c на M_c^4 возникает интегрируемая гамильтонова система с двумя степенями свободы.

Обозначим $s = (s_1, s_2, s_3)$ и $r = (r_1, r_2, r_3)$. Тогда уравнения (2.2) можно переписать в виде обобщенных уравнений Кирхгофа ($\times$ обозначает векторное произведение)

$$\dot{s} = \left(\frac{\partial H}{\partial s} \right) \times s + \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right) \times r, \quad \dot{r} = \left(\frac{\partial H}{\partial s} \right) \times r. \quad (2.4)$$

Рассмотрим следующее обобщение гамильтониана Ковалевской (движение гири в поле силы тяжести):

$$H = \frac{s_1^2}{2A} + \frac{s_2^2}{2A} + \frac{(s_3 + \lambda)^2}{A} + a_1 r_1 + a_2 r_2. \quad (2.5)$$

Запишем систему (2.4) для этого гамильтониана

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \frac{s_2(s_3 - \lambda)}{2} + a_2 r_3, & \dot{s}_2 &= -\frac{s_1(s_3 - \lambda)}{2} - a_1 r_3, & \dot{s}_3 &= a_1 r_2 - a_2 r_1, \\ \dot{r}_1 &= s_2 r_3 - \frac{r_2(s_3 + \lambda)}{2}, & \dot{r}_2 &= -s_1 r_3 + \frac{r_1(s_3 + \lambda)}{2}, & \dot{r}_3 &= s_1 r_2 - s_2 r_1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Как впервые указал Х. М. Яхья [14], [15], для этой системы существует дополнительный интеграл четвертой степени

$$\begin{aligned} K &= \left(\frac{s_1^2 - s_2^2}{2A} + a_2 r_2 - a_1 r_1 \right)^2 + \left(\frac{s_1 s_2}{A} - a_1 r_2 - a_2 r_1 \right)^2 \\ &\quad - \frac{2\lambda(s_3 + 2\lambda)(s_1^2 + s_2^2)}{A^2} + \frac{4\lambda r_3(a_1 s_1 + a_2 s_2)}{A}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

При помощи следующей замены избавимся от параметров A , a_1 , a_2 :

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1 &= \gamma^{-1}(-a_1 s_1 - a_2 s_2) \cdot \sqrt{\frac{2}{A\gamma}}, & \tilde{r}_1 &= \gamma^{-1}(-a_1 r_1 - a_2 r_2), & \tilde{\lambda} &= \sqrt{\frac{2}{A\gamma}} \cdot \lambda, \\ \tilde{s}_2 &= \gamma^{-1}(a_2 s_1 - a_1 s_2) \cdot \sqrt{\frac{2}{A\gamma}}, & \tilde{r}_2 &= \gamma^{-1}(a_2 r_1 - a_1 r_2), & \tau &= \sqrt{\frac{2\gamma}{A}} \cdot t, \\ \tilde{s}_3 &= s_3 \cdot \sqrt{\frac{2}{A\gamma}}, & \tilde{r}_3 &= r_3, & \gamma &= (a_1^2 + a_2^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где t – время в системе координат (s, r) , а τ – время в системе координат $(\tilde{s}, \tilde{r})$. В новых переменных матрица $\tilde{\Omega}$ скобки Ли–Пуассона примет вид

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{\frac{2\gamma}{A}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \tilde{s}_3 & -\tilde{s}_2 & 0 & \tilde{r}_3 & -\tilde{r}_2 \\ -\tilde{s}_3 & 0 & \tilde{s}_1 & -\tilde{r}_3 & 0 & \tilde{r}_1 \\ \tilde{s}_2 & -\tilde{s}_1 & 0 & \tilde{r}_2 & -\tilde{r}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{r}_3 & -\tilde{r}_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{r}_3 & 0 & \tilde{r}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{r}_2 & -\tilde{r}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

а первые интегралы (2.3) будут выглядеть следующим образом:

$$f_1 = \tilde{r}_1^2 + \tilde{r}_2^2 + \tilde{r}_3^2, \quad f_2 = \sqrt{\frac{A\gamma}{2}} \cdot (\tilde{s}_1\tilde{r}_1 + \tilde{s}_2\tilde{r}_2 + \tilde{s}_3\tilde{r}_3). \quad (2.10)$$

Уравнения (2.6), с учетом дифференцирования по τ , примут вид

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{s}}_1 &= -\frac{\tilde{s}_2(\tilde{s}_3 + 2\tilde{\lambda})}{2}, & \dot{\tilde{s}}_2 &= \frac{\tilde{s}_1(\tilde{s}_3 + 2\tilde{\lambda})}{2} + \tilde{r}_3, & \dot{\tilde{s}}_3 &= -\tilde{r}_2, \\ \dot{\tilde{r}}_1 &= \frac{\tilde{s}_2\tilde{r}_3}{2} - \tilde{r}_2(\tilde{s}_3 + \tilde{\lambda}), & \dot{\tilde{r}}_2 &= \frac{-\tilde{s}_1\tilde{r}_3}{2} + \tilde{r}_1(\tilde{s}_3 + \tilde{\lambda}), & \dot{\tilde{r}}_3 &= \frac{\tilde{s}_1\tilde{r}_2}{2} - \frac{\tilde{s}_2\tilde{r}_1}{2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Гамильтониан (2.5) и дополнительный интеграл (2.7) примут упрощенный вид

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \gamma^{-1} \cdot H = \frac{\tilde{s}_1^2}{4} + \frac{\tilde{s}_2^2}{4} + \frac{(\tilde{s}_3 + \tilde{\lambda})^2}{2} - \tilde{r}_1, \\ \tilde{K} &= \gamma^{-2} \cdot K = \left(\frac{\tilde{s}_1^2 - \tilde{s}_2^2}{4} + \tilde{r}_1 \right)^2 + \left(\frac{\tilde{s}_1\tilde{s}_2}{2} + \tilde{r}_2 \right)^2 - \frac{\tilde{\lambda}(\tilde{s}_3 + 2\tilde{\lambda})(\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2)}{2} - 2\tilde{\lambda}\tilde{r}_3\tilde{s}_1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.2. Переменные (ω, ν) . Гиростатом называется твердое тело, в котором закреплен маховик (тяжелый вращающийся диск). Классические уравнения Эйлера–Пуассона, описывающие движение гиростата с закрепленной точкой в поле силы тяжести, в системе координат, оси которой направлены вдоль главных осей инерции тела, имеют следующий вид:

$$\mathbf{A}\dot{\omega} = (\mathbf{A}\omega + \vec{\lambda}) \times \omega - \vec{a} \times \nu, \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega. \quad (2.13)$$

Фазовые переменные здесь таковы: ω – вектор угловой скорости, ν – единичный вертикальный вектор (в неподвижной системе координат). Параметры системы таковы: $\mathbf{A} = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – диагональная матрица, задающая тензор инерции твердого тела, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ – вектор, направленный из неподвижной (закрепленной) точки в центр масс тела, его модуль равен произведению веса тела на расстояние от центра масс до неподвижной точки. Вектор $(\mathbf{A}\omega + \vec{\lambda})$ имеет смысл кинетического момента гиростата. Гиростатический момент $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – это постоянный (в подвижной, связанной с телом, системе координат) вектор, который направлен вдоль оси маховика. Первыми интегралами уравнений движения (2.13) будут

$$H = \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}\omega, \omega \rangle + \nu \times \vec{a}, \quad G = \langle \mathbf{A}\omega + \vec{\lambda}, \nu \rangle, \quad \Gamma = \langle \nu, \nu \rangle, \quad (2.14)$$

где через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено стандартное евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$. В задаче Ковалевской-Яхи на гиристат накладываются следующие ограничения: моменты инерции удовлетворяют соотношениям $A_1 = A_2 = 2A_3 = A$, центр масс находится в экваториальной плоскости эллипсоида инерции ($a_3 = 0$), а гиристатический момент направлен вдоль оси динамической симметрии ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda \neq 0$). В этих условиях уравнения (2.13) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 &= \frac{A\omega_2\omega_3}{2} - \lambda\omega_2 - a_2\nu_3, & A\dot{\omega}_2 &= -\frac{A\omega_1\omega_3}{2} + \lambda\omega_1 + a_1\nu_3, \\ \frac{A\dot{\omega}_3}{2} &= a_2\nu_1 - a_1\nu_2, \\ \dot{\nu}_1 &= \nu_2\omega_3 - \nu_3\omega_2, & \dot{\nu}_2 &= \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3, & \dot{\nu}_3 &= \nu_1\omega_2 - \nu_2\omega_1. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Интегралы (2.14) будут выглядеть следующим образом:

$$G = A\omega_1\nu_1 + A\omega_2\nu_2 + \left(\frac{A\omega_3}{2} + \lambda\right)\nu_3, \quad \Gamma = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2, \quad (2.16)$$

$$H = \frac{A\omega_1^2}{2} + \frac{A\omega_2^2}{2} + \frac{A\omega_3^2}{4} + a_1\nu_1 + a_2\nu_2. \quad (2.17)$$

Система обладает дополнительным интегралом K четвертой степени

$$\begin{aligned} K &= \left(\frac{A(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{2} - a_1\nu_1 + a_2\nu_2\right)^2 + (A\omega_1\omega_2 - a_1\nu_2 - a_2\nu_1)^2 \\ &\quad + \lambda(A\omega_3 - 2\lambda)(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 4\lambda\nu_3(a_1\omega_1 + a_2\omega_2). \end{aligned} \quad (2.18)$$

При помощи следующей замены избавимся от переменных A , a_1 , a_2 :

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}_1 &= \gamma^{-1}(-a_1\omega_1 - a_2\omega_2) \cdot \sqrt{\frac{A}{2\gamma}}, & \widetilde{\nu}_1 &= \gamma^{-1}(-a_1\nu_1 - a_2\nu_2), & \widetilde{\lambda} &= \sqrt{\frac{2}{A\gamma}} \cdot \lambda, \\ \widetilde{\omega}_2 &= \gamma^{-1}(a_2\omega_1 - a_1\omega_2) \cdot \sqrt{\frac{A}{2\gamma}}, & \widetilde{\nu}_2 &= \gamma^{-1}(a_2\nu_1 - a_1\nu_2), & \tau &= \sqrt{\frac{2\gamma}{A}} \cdot t, \\ \widetilde{\omega}_3 &= \omega_3 \cdot \sqrt{\frac{A}{2\gamma}}, & \widetilde{\nu}_3 &= \nu_3, & \gamma &= (a_1^2 + a_2^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где t – время в системе координат (ω, ν) , а τ – время в системе координат $(\widetilde{\omega}, \widetilde{\nu})$. Смысл замены состоит в том, чтобы выбрать подвижные оси так, чтобы центр масс находился на первой из них, а расстояние от центра масс до неподвижной точки стало равным единице.

Первые интегралы (2.16), (2.17), (2.18) примут упрощенный вид

$$\widetilde{G} = (2A\gamma)^{-1/2} \cdot G = \widetilde{\omega}_1\widetilde{\nu}_1 + \widetilde{\omega}_2\widetilde{\nu}_2 + \frac{(\widetilde{\omega}_3 + \widetilde{\lambda})\widetilde{\nu}_3}{2}, \quad \Gamma = \widetilde{\nu}_1^2 + \widetilde{\nu}_2^2 + \widetilde{\nu}_3^2, \quad (2.20)$$

$$\widetilde{H} = \gamma^{-1} \cdot H = \widetilde{\omega}_1^2 + \widetilde{\omega}_2^2 + \frac{\widetilde{\omega}_3^2}{2} - \widetilde{\nu}_1 \quad (2.21)$$

$$\widetilde{K} = \gamma^{-2} \cdot K = (\widetilde{\omega}_1^2 - \widetilde{\omega}_2^2 + \widetilde{\nu}_1^2)^2 + (2\widetilde{\omega}_1\widetilde{\omega}_2 + \widetilde{\nu}_2^2)^2 + 2\widetilde{\lambda}(\widetilde{\omega}_3 - \widetilde{\lambda})(\widetilde{\omega}_1^2 + \widetilde{\omega}_2^2) + 4\widetilde{\lambda}\widetilde{\omega}_1\widetilde{\nu}_3. \quad (2.22)$$

С учетом дифференцирования по τ система уравнений (2.15) примет вид

$$\begin{aligned} 2\dot{\tilde{\omega}}_1 &= (\tilde{\omega}_3 - \tilde{\lambda})\tilde{\omega}_2, & 2\dot{\tilde{\omega}}_2 &= -(\tilde{\omega}_3 - \tilde{\lambda})\tilde{\omega}_1 - \tilde{\nu}_3, & \dot{\tilde{\omega}}_3 &= \tilde{\nu}_2, \\ \dot{\tilde{\nu}}_1 &= \tilde{\nu}_2\tilde{\omega}_3 - \tilde{\nu}_3\tilde{\omega}_2, & \dot{\tilde{\nu}}_2 &= \tilde{\nu}_3\tilde{\omega}_1 - \tilde{\nu}_1\tilde{\omega}_3, & \dot{\tilde{\nu}}_3 &= \tilde{\nu}_1\tilde{\omega}_2 - \tilde{\nu}_2\tilde{\omega}_1. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Зафиксируем значения параметров $g, \tilde{\lambda}$. Далее в работе будем рассматривать ограничение гамильтоновой системы на многообразие $M_{g,\mu}^4$, где

$$M_{g,\mu}^4 = \{(\tilde{\omega}, \tilde{\nu}) \mid \Gamma = 1, \tilde{G} = g\}, \quad \mu = \frac{\tilde{\lambda}}{\sqrt{2}}. \quad (2.24)$$

2.3. Связь между (s, r) и (ω, ν) . Следующая лемма [22] устанавливает переход от системы, заданной в координатах (ω, ν) к системе, заданной в координатах (s, r) .

ЛЕММА 2.1 (А. А. Ошемков). *Отображение $\varphi: \mathbb{R}^6(\omega, \nu) \rightarrow \mathbb{R}^6(s, r)$, заданное формулами*

$$s = -(\mathbf{A}\omega + \vec{\lambda}), \quad r = \nu \quad (2.25)$$

устанавливает изоморфизм системы

$$\begin{cases} \mathbf{A}\dot{\omega} = (\mathbf{A}\omega + \vec{\lambda}) \times \omega + \nu \times \frac{\partial U}{\partial r}, \\ \dot{\nu} = \nu \times \omega \end{cases}$$

и системы с гамильтонианом

$$H = \frac{(s_1 + \lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(s_2 + \lambda_2)^2}{2A_2} + \frac{(s_3 + \lambda)^2}{2A_3} + U.$$

Легко видеть, что при $U = \langle \vec{a}, r \rangle$ мы получим нужный переход. Остается заметить, что

$$f_1 = \Gamma, \quad f_2 = -G = -\sqrt{2A\gamma} \cdot \tilde{G}.$$

Теперь легко получить уравнения перехода от системы (2.11) к (2.23).

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1 &= -2\tilde{\omega}_1, & \tilde{s}_2 &= -2\tilde{\omega}_2, & \tilde{s}_3 &= -\tilde{\omega}_3 - \tilde{\lambda}, \\ \tilde{r}_1 &= \tilde{\nu}_1, & \tilde{r}_2 &= \tilde{\nu}_2, & \tilde{r}_3 &= \tilde{\nu}_3. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Следующая диаграмма показывает связь между всеми упомянутыми системами координат:

$$\begin{array}{ccc} (s, r, \lambda, t) & \xrightarrow{(2.8)} & (\tilde{s}, \tilde{r}, \tilde{\lambda}, \tau) \\ \uparrow (2.25) & & \uparrow (2.26) \\ (\omega, \nu, \lambda, t) & \xrightarrow{(2.19)} & (\tilde{\omega}, \tilde{\nu}, \tilde{\lambda}, \tau) \end{array} \quad (2.27)$$

§ 3. Образ критического множества

Рассмотрим гамильтонову систему (2.23) с первыми интегралами (2.20), (2.21), (2.22), ограниченную на (2.24). Зафиксируем точку (g, μ) в области U и рассмотрим отображение момента $\tilde{K} \times \tilde{H}: M_{g,\mu}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(k, h)$, где

$$U = \{(g, \mu) \mid g > 0, \mu > 0\}, \quad \tilde{K} \times \tilde{H}: M_{g,\mu}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(k, h). \quad (3.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Бифуркационной диаграммой $\Sigma_{g,\mu}$ (в дальнейшем просто Σ) будем называть подмножество плоскости $\mathbb{R}^2(k, h)$, состоящее из точек, над которыми отображение (3.1) не является локально тривиальным.*

В работе П. Е. Рябова [20] было доказано, что для $(g, \mu) \in U$ множество Σ принадлежит дискриминантному множеству $D_{g,\mu}$ (в дальнейшем просто D), которое состоит из двух кривых γ_1, γ_2 . Они были получены как в параметрическом, так и в неявном виде как линии нулевого уровня дискриминантов многочленов P_1 и P_2 соответственно.

Оказывается, что если эти кривые параметризовать специальным образом и выбрать подходящую нормировку параметров системы, то обнаружится интересная симметрия, о которой мы скажем далее. Новые формулы приведены ниже:

$$P_1(g, \mu) = -1 + k - 4gz - 2(h - \mu^2)z^2 + z^4, \quad (3.2)$$

$$P_2(g, \mu) = -8\mu^2(-4g^2 + 2h + 2\mu^2) + (k + 4h\mu^2)^2 - 16\mu^2z - 2(k + 4h\mu^2)z^2 + z^4, \quad (3.3)$$

$$\gamma_1(g, \mu) : \{k_1(t) = 1 + g^4t^{-4} + 2g^2t^{-1}, h_1(t) = g^2t^{-2} + \mu^2 - t\}, \quad (3.4)$$

$$\gamma_2(g, \mu) : \{k_2(t) = -8\mu^2g^2 + (t + 2\mu^2)^2 - 4\mu^2(\mu^2 + t)t^{-2}, \\ h_2(t) = 2g^2 - \mu^2 - t + \mu^2t^{-2}\}. \quad (3.5)$$

Дискриминант многочлена X обозначается $Z(X)$ (см. § 6). Выпишем многочлены Q_1 и Q_2 , линиями нулевого уровня которых являются кривые γ_1, γ_2 (коэффициенты $c_1 = 256$ и $c_2 = 65536 \cdot \mu^4$ можно опустить, так как $(g, \mu) \in U$).

$$Q_1(g, \mu) = c_1^{-1} \cdot Z(P_1) = -27g^4 + (k - 1)((h - \mu^2)^2 - k + 1)^2 \\ + 2g^2(h - \mu^2)((h - \mu^2)^2 - 9k + 9), \quad (3.6)$$

$$Q_2(g, \mu) = c_2^{-1} \cdot Z(P_2) = 2\mu^2(k(8g^2h - 4h^2 - 9)(2g^2 - h) \\ - k^2(2g^2 + 5h) + 8(2g^2 - h)^3) \\ + 8\mu^6(g^2(12 - 8h^2) + h(-4h^2 + k + 3)) + k^2((h - 2g^2)^2 - k) + 16(h^2 - 1)\mu^8 \\ + \mu^4(8(2g^2 - h)(4g^2(h^2 - 3) - 2h^3 - 3h) - 32hk(g^2 + h) + k^2 + 9(2k - 3)). \quad (3.7)$$

ЛЕММА 3.1. *Рассмотрим гомеоморфизм плоскости $\mathbb{R}^2(k, h)$ на себя, заданный формулой*

$$\rho_{g,\mu}(k, h) = (-k + h^2 - (4g^2 + 2\mu^2)h + 1 + 4g^4 - 4g^2\mu^2 + \mu^4, h + \mu^2 - g^2). \quad (3.8)$$

Тогда образ дискриминантного множества $D_{g,\mu}$ при гомеоморфизме $\rho_{g,\mu}$ совпадает с дискриминантным множеством $D_{\mu,g}$. Более того:

- 1) многочлены $Q_1(g, \mu)$, $Q_2(g, \mu)$ переходят в $Q_2(\mu, g)$, $Q_1(\mu, g)$ соответственно;
- 2) кривые $\gamma_1(g, \mu)$, $\gamma_2(g, \mu)$ переходят в $\gamma_2(\mu, g)$, $\gamma_1(\mu, g)$ соответственно с сохранением выбранной параметризации;
- 3) $\rho_{g, \mu} \circ \rho_{\mu, g} = \text{id}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение проверяется подстановкой.

3.1. Особые точки кривых γ_1 , γ_2 и критическое множество Θ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Точка, принадлежащая кривым γ_1 , γ_2 одновременно называется *общей точкой* этих кривых. Точка на одной из кривых γ_1 , γ_2 , которой соответствует более одного значения параметра, называется *точкой самопересечения*. Общая точка, в которой касательные к кривым γ_1 , γ_2 совпадают, называется *точкой касания*, в противном случае – *точкой пересечения*.

ЛЕММА 3.2. Кривые γ_1 , γ_2 не самопересекаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть кривая γ_1 самопересекается. Тогда существуют $t_1 \neq t_2$ такие, что

$$\begin{aligned} \begin{cases} k_1(t_1) = k_1(t_2), \\ h_1(t_1) = h_1(t_2), \end{cases} & \iff \begin{cases} (g^2 t_1^{-2} + g^2 t_2^{-2})(gt_1 + gt_2) + 2g = 0, \\ gt_1 + gt_2 + \frac{t_1 t_2}{g} = 0, \end{cases} \\ & \iff \frac{t_1}{t_2} + \frac{t_2}{t_1} = 2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $t_1 = t_2$, и мы приходим к противоречию. Кривая γ_2 также не самопересекается, так как по лемме 3.1 она получается из γ_1 при гомеоморфизме $\rho_{g, \mu}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множеством $T_{g, \mu}$ (в дальнейшем просто T) особых точек диаграммы $D_{g, \mu}$ будем называть подмножество плоскости $\mathbb{R}^2(k, h)$, состоящее из точек возврата (кловов) и общих точек кривых γ_1 , γ_2 .

Нетрудно проверить, что каждая из кривых γ_1 , γ_2 имеет ровно одну точку возврата.

ЛЕММА 3.3. Значения параметров на кривых γ_1 и γ_2 , соответствующие точкам возврата, являются действительными корнями многочленов $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ соответственно, где

$$\alpha(t) = t^3 + 2g^2, \quad \beta(t) = t^3 + 2\mu^2. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение легко следует из формул (3.4), (3.5).

ЛЕММА 3.4. Значения параметров на кривых γ_1 и γ_2 , соответствующие общим точкам этих кривых, являются действительными корнями многочленов $A(t) \cdot a(t)$ и $B(t) \cdot b(t)$ соответственно, где

$$a(t) = 2g^2 + t + 4\mu^2 t^2, \quad b(t) = 2\mu^2 + t + 4g^2 t^2, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
 A(t) &= \sum_{i=0}^{10} a_i t^i, & B(t) &= \sum_{i=0}^{10} b_i t^i, \\
 a_0 &= -g^8, & b_0 &= -\mu^8, \\
 a_1 &= 0, & b_1 &= 0, \\
 a_2 &= -6\mu^2 g^6 + g^8, & b_2 &= -6g^2 \mu^6 + \mu^8, \\
 a_3 &= -4g^6, & b_3 &= -4\mu^6, \\
 a_4 &= -2g^4 - 12g^4 \mu^4 + 4\mu^2 g^6, & b_4 &= -2\mu^4 - 12g^4 \mu^4 + 4g^2 \mu^6, \\
 a_5 &= 2\mu^2 g^4 + 4g^6, & b_5 &= 2g^2 \mu^4 + 4\mu^6, \\
 a_6 &= 10g^2 \mu^2 - 8\mu^6 g^2 - 2g^4 + 4g^4 \mu^4, & b_6 &= 10g^2 \mu^2 - 8g^6 \mu^2 - 2\mu^4 = 4g^4 \mu^4, \\
 a_7 &= -4g^2 + 20\mu^4 g^2 - 8\mu^2 g^4, & b_7 &= -4\mu^2 + 20g^4 \mu^2 - 8g^2 \mu^4, \\
 a_8 &= -1 + \mu^4 - 16g^2 \mu^2 + 4g^4, & b_8 &= -1 + g^4 - 16g^2 \mu^2 + 4\mu^4, \\
 a_9 &= -2\mu^2 + 4g^2, & b_9 &= -2g^2 + 4\mu^2, \\
 a_{10} &= 1, & b_{10} &= 1.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы найти значения параметров на кривых γ_1 и γ_2 , соответствующие их общим точкам, подставим формулы из (3.4) в (3.7) и формулы из (3.5) в (3.6). Утверждение вытекает из следующих формул:

$$Q_2|_{\gamma_1} = t^{-10} \cdot a^2(t) \cdot A(t), \quad Q_1|_{\gamma_2} = t^{-10} \cdot b^2(t) \cdot B(t).$$

Пусть точке касания соответствует значение параметра t_1 на кривой γ_1 и t_2 на кривой γ_2 . Тогда нетрудно проверить, что $d_1(t_1, t_2) = d_2(t_1, t_2) = 0$ – условие совпадения координат, а $c(t_1, t_2) = 0$ – условие совпадения углов наклона касательных, где

$$c(t_1, t_2) = -g^2 - 2\mu^2 t_1^2 - t_1^2 t_2, \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
 d_1(t_1, t_2) &= -2g^2 t_2^2 t_1^2 + g^2 t_2^2 - \mu^2 t_1^2 + 2\mu^2 t_2^2 t_1^2 - t_2^2 t_1^3 + t_2^3 t_1^2, \\
 d_2(t_1, t_2) &= g^4 t_2^2 + 8g^2 \mu^2 t_1^4 t_2^2 + 2g^2 t_1^3 t_2^2 + 4\mu^4 t_1^4 \\
 &\quad - 4\mu^4 t_1^4 t_2^2 - 4\mu^2 t_1^4 t_2^3 + 4\mu^2 t_1^4 t_2 - t_1^4 t_2^4 + t_1^4 t_2^2.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Корни многочленов $a(t_1)$ и $b(t_2)$ можно выписать явно:

$$\begin{aligned}
 t_1^- &= \frac{-1 - \sqrt{1 - 32g^2 \mu^2}}{8\mu^2}, & t_1^+ &= \frac{-1 + \sqrt{1 - 32g^2 \mu^2}}{8\mu^2}, \\
 t_2^- &= \frac{-1 - \sqrt{1 - 32g^2 \mu^2}}{8g^2}, & t_2^+ &= \frac{-1 + \sqrt{1 - 32g^2 \mu^2}}{8g^2}.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

ЛЕММА 3.5. Значения параметров на кривых γ_1 и γ_2 , соответствующие точкам касания этих кривых, являются действительными корнями многочленов $a(t)$ и $b(t)$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что пары (t_1^-, t_2^+) и (t_1^+, t_2^-) удовлетворяют условиям (3.12), (3.13)

$$d_1(t_1^-, t_2^+) = d_2(t_1^-, t_2^+) = c(t_1^-, t_2^+) = 0, \quad d_1(t_1^+, t_2^-) = d_2(t_1^+, t_2^-) = c(t_1^+, t_2^-) = 0.$$

Следовательно, им соответствуют точки касания. Предположим, что существует другое решение системы $d_1(t_1, t_2) = d_2(t_1, t_2) = c(t_1, t_2) = 0$, т.е. $a(t_1) \neq 0$, $b(t_2) \neq 0$. Тогда результаты многочленов d_1 , c и d_2 , c по переменной t_1 равны нулю. Результат многочленов X , Y обозначается $R(X, Y)$ (см. § 6).

$$\begin{aligned} p_1(t_2) &= R(d_1, c) = g^4 \cdot b(t_2) \cdot q_1(t_2), & q_1(t_2) &= -2g^2\mu^2t_2^2 - g^2t_2^3 - \mu^4, \\ p_2(t_2) &= R(d_2, c) = g^8 \cdot b(t_2) \cdot q_2(t_2), & & \\ q_2(t_2) &= 16g^2\mu^4t_2^2 + 8\mu^6 + 12\mu^4t_2 + 6\mu^2t_2^2 + t_2^3. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Так как $b(t_2) \neq 0$, то выполнено условие $q_1(t_2) = q_2(t_2) = 0$. Следовательно, результат многочленов q_1 , q_2 по переменной t_2 равен нулю.

$$R(q_1, q_2) = -\mu^{12}(16g^2\mu^2 + 1)^2(32g^2\mu^2 - 1). \quad (3.16)$$

Следовательно, $g^2 = (32\mu^2)^{-1}$. С учетом этой замены многочлены q_1 , q_2 принимают вид

$$-\mu^2 \cdot q_1(t_2) = \mu^6 + 64\mu^2t_2^2 + 32t_2^3, \quad q_2(t_2) = 8\mu^6 + 12\mu^4t_2 + 518\mu^2t_2^2 + t_2^3. \quad (3.17)$$

Вычисляя результат

$$R(-\mu^2 \cdot q_1(t_2), q_2(t_2)) = 269221887 \cdot \mu^{18} \neq 0,$$

приходим к противоречию.

СЛЕДСТВИЕ 1. Значения параметров t_1 и t_2 на кривых γ_1 и γ_2 , соответствующие особым точкам диаграмм D , являются действительными корнями многочленов $\mathbf{A}(t_1)$ и $\mathbf{B}(t_2)$ соответственно, где

$$\mathbf{A}(t) = \alpha(t) \cdot a(t) \cdot A(t), \quad \mathbf{B}(t) = \beta(t) \cdot b(t) \cdot B(t). \quad (3.18)$$

Общим точкам кривых γ_1 , γ_2 соответствуют корни многочленов $A(t) \cdot a(t)$ и $B(t) \cdot b(t)$, точкам касания соответствуют корни многочленов $a(t)$ и $b(t)$, точкам возврата соответствуют корни многочленов $\alpha(t)$ и $\beta(t)$.

Дискриминант многочлена X обозначается $Z(X)$ (см. § 6).

ЛЕММА 3.6. Линии нулевого уровня многочленов $Z(\mathbf{A})$ и $Z(\mathbf{B})$ совпадают с линией нулевого уровня многочлена

$$\begin{aligned} L(g, \mu) &= l_1(g, \mu) \cdot l_2(g, \mu) \cdot l_3(g, \mu) \cdot l_4(g, \mu) \cdot l_5(g, \mu), & (3.19) \\ l_1(g, \mu) &= 32g^2\mu^2 - 1, & l_2(g, \mu) = l_3(\mu, g) &= -1 + 24\mu^2g^2 + 128\mu^6g^2 + 4g^4, \\ l_4(g, \mu) &= l_5(\mu, g) = -256 + 256g^{12} - 384g^{10}\mu^2 + 864\mu^4 - 729\mu^8 \\ &\quad + g^4(768 - 9696\mu^4) + g^8(-768 + 192\mu^4) \\ &\quad + g^6(7680\mu^2 - 32\mu^6) + g^2(6528\mu^2 + 4536\mu^6). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверяется прямым вычислением дискриминантов и их разложением на множители с целыми коэффициентами.

Мы пока еще не дали строгого определения множества Θ бифуркационных значений параметров. Для этого необходимо рассмотреть двупараметрическое семейство диаграмм $D_{g,\mu}$ и понять, какие из них являются особыми. Для начала отметим, что каждая из кривых γ_1, γ_2 гладко зависит от параметров g, μ , следовательно, сами диаграммы изменяются непрерывно. Особые точки диаграмм – это две точки возврата и некоторое количество общих точек кривых γ_1, γ_2 . Отметим также, что в области $1 - 32g^2\mu^2 > 0$ у кривых γ_1, γ_2 всегда есть две точки касания, которые соединяются в одну только при $1 - 32g^2\mu^2 = 0$.

Таким образом, качественный вид диаграммы D фактически задается набором ее особых точек и их расположением относительно друг друга на кривых γ_1, γ_2 . Поскольку координаты особых точек непрерывно зависят от g, μ , бифуркация диаграммы D происходит, когда несколько особых точек взаимодействуют между собой (т.е. происходит склейка или распад) или одна из них уходит в бесконечность. Формально множество Θ можно определить следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $\tilde{T}$ – подмножество пространства $\mathbb{R}^4(k, h, g, \mu)$, которое совпадает с $T_{g,\mu}$ на каждом сечении плоскостью, заданной фиксированными значениями g, μ .

Рассмотрим отображение проекции

$$\pi: \mathbb{R}^4(k, h, g, \mu) \rightarrow \mathbb{R}^2(g, \mu). \quad (3.20)$$

Напомним, что $U = \{(g, \mu) \mid g > 0, \mu > 0\}$, а многочлен $L(g, \mu)$ задается формулой (3.19).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Множеством Θ бифуркационных значений параметров будем называть те точки $(g, \mu) \in U$, над которыми отображение (3.20), ограниченное на $\tilde{T}$, не является локально тривиальным.

ТЕОРЕМА 1. Множество Θ является линией нулевого уровня многочлена $L(g, \mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению 3 множество $T_{g,\mu}$ особых точек диаграмм $D_{g,\mu}$ на плоскости $\mathbb{R}^2(k, h)$ состоит из точек возврата и общих точек кривых γ_1, γ_2 . Согласно следствию 1 соответствующие им значения параметров t_1 и t_2 являются действительными корнями многочленов $\mathbf{A}(t_1)$ и $\mathbf{B}(t_2)$ соответственно. Если корень не является кратным, то локально он непрерывно зависит от g, μ . Если корень не равен нулю, то координаты соответствующей ему особой точки также непрерывно зависят от g, μ . Согласно определению 5 Θ – множество тех $(g, \mu) \in U$, над которыми отображение π , ограниченное на $\tilde{T}$, не является локально тривиальным. Поскольку множество $T_{g,\mu}$ состоит из набора точек, то это возможно, только если особая точка уходит в бесконечность или происходит взаимодействие нескольких особых точек (склейка или распад).

Таким образом, отображение π , ограниченное на $\tilde{T}$, не является локально тривиальным в точке (g, μ) в одном из трех случаев.

1) Особая точка уходит в бесконечность, т.е. корень одного из многочленов $\mathbf{A}(t_1)$ и $\mathbf{B}(t_2)$ равен нулю. Однако, свободные члены этих многочленов

равны $-4g^{12}$ и $-4\mu^{12}$ соответственно, следовательно, это невозможно, так как $(g, \mu) \in U$.

2) Две особые точки, находящиеся на одной из кривых γ_1, γ_2 , склеиваются в одну. Согласно лемме 3.2 кривые не самопересекаются, поэтому можно взаимно однозначно перейти от точек, лежащих на кривой, к соответствующим значениям параметра. Это значит, что корень одного из многочленов $\mathbf{A}(t_1)$ и $\mathbf{B}(t_2)$ кратный. Согласно лемме 3.6 это возможно только в том случае, когда $L(g, \mu) = 0$.

3) Две особые точки, не лежащие одновременно на одной из кривых γ_1, γ_2 , склеиваются в одну. Тогда это две точки возврата. Согласно лемме 5.2 в этом случае $g = \mu = 2^{-5/4}$ и $L(g, \mu) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Множество Θ в области U симметрично относительно прямой $g = \mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение вытекает из того, что $L(g, \mu) = L(\mu, g)$.

Итак, в области U мы имеем множество Θ бифуркационных значений параметров, оно состоит из 5 кривых Γ_i (см. рис. 1, (d)), каждая из которых является линией нулевого уровня многочлена $l_i(g, \mu)$. Как будет показано в § 4, оно делит область U на 18 непересекающихся камер (см. рис. 1, (с)). Для точки (g, μ) , перемещающейся внутри одной из камер, качественный вид диаграммы D не меняется. Для большинства известных интегрируемых систем верно, что эквивалентным (в указанном выше смысле) диаграммам соответствуют эквивалентные (в смысле слоения Лиувилля) интегрируемые системы. Однако, строго говоря, это условие не является ни необходимым, ни достаточным для лиувиллево эквивалентности. Следующее утверждение не является формально доказанным и требует дополнительных рассуждений.

ГИПОТЕЗА 1. Множество Θ разбивает область U на камеры, внутри которых соответствующие интегрируемые системы лиувиллево эквивалентны.

§ 4. Свойства множества Θ

Множество Θ в области U состоит из 5 кривых, для которых мы указали многочлены $l_i(g, \mu)$, заданные формулами (3.19), линиями нулевого уровня которых они являются (см. рис. 1, (d)). Чтобы получить более простые многочлены, перейдем от переменных (g, μ) к новым переменным (a, b) при помощи симметричной замены

$$a = \sqrt[3]{2g^2}, \quad b = \sqrt[3]{2\mu^2}. \quad (4.1)$$

Параметрическая запись (4.2) этих же кривых была получена в работе П. Е. Рябова [20]

$$\begin{aligned} \Gamma_1(g, \mu) &: \{32g^2\mu^2 - 1 = 0\}, \\ \Gamma_2(t) &: \left\{ g = \sqrt{-\frac{t^3}{2}}, \mu = \sqrt{\frac{t^2 - 1}{4t}} \right\}, \quad \Gamma_3(t) : \left\{ g = \sqrt{\frac{t^2 - 1}{4t}}, \mu = \sqrt{-\frac{t^3}{2}} \right\}, \\ \Gamma_4(t) &: \left\{ g = \sqrt{-\frac{(3t^2 - 1)^2}{4t^3}}, \mu = \sqrt{\frac{(t^2 - 1)^3}{2t^3}} \right\}, \end{aligned}$$

$$\Gamma_5(t): \left\{ g = \sqrt{\frac{(t^2 - 1)^3}{2t^3}}, \mu = \sqrt{-\frac{(3t^2 - 1)^2}{4t^3}} \right\}, \quad (4.2)$$

где $t \in (-1, 0)$ для кривых $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$.

Результант двух многочленов X, Y обозначается $R(X, Y)$ (см. § 6).

ЛЕММА 4.1. *Кривые Γ_i являются линиями нулевого уровня многочленов r_i , где*

$$\begin{aligned} \Gamma_1: r_1(a, b) &= 2ab - 1, \\ \Gamma_2: r_2(a, b) &= 2ab^3 + a^2 - 1, \quad \Gamma_3: r_3(a, b) = 2a^3b + b^2 - 1, \\ \Gamma_4: r_4(a, b) &= -4a^6 + 2a^3b^3 - 24a^3b + 9b^4 - 24b^2 + 16, \\ \Gamma_5: r_5(a, b) &= -4b^6 + 2b^3a^3 - 24b^3a + 9a^4 - 24a^2 + 16. \end{aligned} \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что так как множество $\Theta(g, \mu)$ симметрично относительно прямой $g = \mu$, то множество $\Theta(a, b)$ симметрично относительно прямой $a = b$.

1. Для кривой Γ_1 имеем

$$32g^2\mu^2 = 1 \iff 2ab = 1.$$

2. Для кривой Γ_2 имеем $g = \sqrt{-t^3/2} \iff 2g^2 = -t^3 \iff -t = a$, тогда

$$\mu = \sqrt{\frac{t^2 - 1}{4t}} = \mu \iff 2ab^3 + a^2 - 1 = 0.$$

3. Для кривой Γ_4 имеем

$$\mu = \sqrt{\frac{(t^2 - 1)^3}{2t^3}} \iff t^2 - 1 - bt = 0, \quad (4.4)$$

$$g = \sqrt{-\frac{(3t^2 - 1)^2}{4t^3}} \iff 2a^3t^3 + (3t^2 - 1)^2 = 0. \quad (4.5)$$

Система уравнений (4.4), (4.5) совместна тогда и только тогда, когда

$$R(t^2 - 1 - bt, 2a^3t^3 + (3t^2 - 1)^2) = -4a^6 + 2a^3b^3 - 24a^3b + 9b^4 - 24b^2 + 16 = 0.$$

4. Из-за симметричности замены (4.1) многочлены для Γ_3, Γ_5 получаются, если в формулах для $r_2(a, b), r_4(a, b)$ поменять a и b местами.

4.1. Свойства кривых Γ_i . Будем считать $\mu = 0$ осью абсцисс, а $g = 0$ – осью ординат.

1. Рассмотрим кривую Γ_1 (см. рис. 1, (d)). Это гипербола. Отметим на ней точку A пересечения с прямой $g = \mu$. Координаты точки A : $(g = 2^{-5/4}, \mu = 2^{-5/4})$, или $(a = 2^{-1/2}, b = 2^{-1/2})$. Подстановкой проверяется, что точка A лежит на каждой из кривых $\Gamma_i, i = 2, \dots, 5$, при значении параметра $t = -2^{-1/2}$ (на каждой из них).

2. Рассмотрим кривую Γ_2 (см. рис. 1, (d)). Из формул (4.2) получаем

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{3\sqrt{-t}}{2\sqrt{2}}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{(1 + t^2)\sqrt{-t}}{4t^2\sqrt{1 - t^2}}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial g} = -\frac{1 + t^2}{3\sqrt{2}t^2\sqrt{1 - t^2}}.$$

а) Кривая является гладкой при $t \in (-1, 0)$.

б) При $t = -1$ она пересекает ось абсцисс в точке B_4 : ($g = 2^{-1/2}$, $\mu = 0$) под прямым углом.

в) Так как $g(t)$ монотонна, то можно рассматривать функцию $\mu(g)$, задающую эту кривую в виде графика. Она монотонно убывает и имеет вертикальную асимптоту при $g \rightarrow 0$.

3. Рассмотрим кривую Γ_3 (см. рис. 1, (d)). Она симметрична кривой Γ_2 относительно прямой $g = \mu$. Точку пересечения с осью ординат назовем C_4 : ($g = 0$, $\mu = 2^{-1/2}$).

4. Рассмотрим кривую Γ_4 (см. рис. 1, (d)). Из формул (4.2) получаем

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{3(1+t^2)\text{Sign}(1-3t^2)}{4t^2\sqrt{-t}}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{3(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}{2\sqrt{2}t^2\sqrt{-t}},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial g} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}}{\text{Sign}(1-3t^2)}.$$

а) Кривая является гладкой при $t \in (-1, -3^{-1/2})$ и при $t \in (-3^{-1/2}, 0)$.

б) Кривая имеет излом в точке C_5 : ($g = 0$, $\mu = 2 \cdot 3^{-3/4}$).

в) При $t = -1$ она касается оси абсцисс в точке B_6 : ($g = 1$, $\mu = 0$).

г) Так как $g(t)$ монотонна на $(-1, -3^{-1/2})$ и $(-3^{-1/2}, 0)$, то можно рассматривать функции $\mu_1(g)$ и $\mu_2(g)$, задающие две части этой кривой в виде графиков. Функция $\mu_1(g)$ монотонно убывает, а $\mu_2(g)$ монотонно возрастает. Функция $\mu_2(g)$ имеет наклонную асимптоту $\mu = \sqrt{2}g$, так как

$$\lim_{g \rightarrow \infty} (\mu(g) - \sqrt{2}g) = \lim_{t \rightarrow 0} (\mu(t) - \sqrt{2}g(t)) = 0.$$

5. Рассмотрим кривую Γ_5 (см. рис. 1, (d)). Она симметрична кривой Γ_4 относительно прямой $g = \mu$. Точку касания с осью ординат назовем C_6 : ($g = 0$, $\mu = 1$). Точку излома назовем B_5 : ($g = 2 \cdot 3^{-3/4}$, $\mu = 0$).

ЛЕММА 4.2. *Кривые Γ_i не самопересекаются.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как кривая Γ_1 – гипербола, она не имеет самопересечений. Легко видеть, что для кривых Γ_2 , Γ_4 производная $\partial\mu/\partial t > 0$, следовательно, они не имеют самопересечений. Кривые Γ_3 , Γ_5 симметричны кривым Γ_2 , Γ_4 , следовательно, они также не имеют самопересечений.

4.2. Общие точки кривых Γ_i . Далее мы попытаемся найти точки пересечения кривых Γ_i , используя формулы (4.3). Там, где это не удастся сделать в аналитическом виде, мы сведем задачу к поиску корней некоторого многочлена. Если коэффициенты многочленов вещественные, то для них можно найти количество корней на любом интервале при помощи известной теоремы Штурма.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $f(x)$ – многочлен с вещественными коэффициентами. Рядом Штурма для $f(x)$ будем называть последовательность многочленов $f_i(x)$, $i = 0, \dots, \deg f$, определенную следующим образом:

$$f_0(x) = \frac{f(x)}{\text{НОД}(f(x), f'(x))}, \quad f_1(x) = f'_0(x), \quad f_{i+1}(x) = -f_{i-1}(x) \pmod{f_i(x)}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $f(x)$ – ненулевой многочлен с вещественными коэффициентами, $f_0(x), f_1(x), \dots, f_s(x)$ – ряд Штурма для него, $[a, b]$ – промежуток вещественной прямой, причем $f(a) \cdot f(b) \neq 0$. Тогда число различных корней многочлена $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ равно $W(a) - W(b)$, где $W(c)$ – количество перемен знака в последовательности $f_0(c), f_1(c), \dots, f_s(c)$.

В некоторых случаях можно воспользоваться другой известной теоремой – теоремой Декарта.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $f(x)$ – ненулевой многочлен с вещественными коэффициентами. Тогда число его положительных корней равно числу перемен знаков в ряду его коэффициентов или на четное число меньше этого числа (корни считаются с учетом кратности, нулевые коэффициенты при подсчете числа перемен знаков не учитываются).

ЛЕММА 4.3. Кривые Γ_1 и Γ_2 , Γ_1 и Γ_3 пересекаются только в точке A (см. рис. 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4.1 следует, что точкам пересечения кривых Γ_1, Γ_2 соответствует решение системы $r_1 = r_2 = 0$, которая совместна тогда и только тогда, когда $R(r_1, r_2) = 0$.

$$\begin{aligned} R(r_1, r_2) &= (2b^2 - 1)^{1/2} \implies b = 2^{-1/2}, \\ r_1(a, 2^{-2}) &= -1 + \sqrt{2}a \implies a = 2^{-1/2}. \end{aligned}$$

Следовательно, Γ_1 и Γ_2 пересекаются только в точке A . Кривая Γ_3 симметрична Γ_2 , следовательно, тоже пересекается с Γ_1 только в точке A .

ЛЕММА 4.4. Кривые Γ_2 и Γ_3 , Γ_3 и Γ_4 , Γ_2 и Γ_5 пересекаются только в точке A (см. рис. 1).

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.3.

ЛЕММА 4.5. Кривые Γ_1 и Γ_4 пересекаются в двух точках, одна из которых A , кривые Γ_1 и Γ_5 пересекаются в двух точках, одна из которых A (см. рис. 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4.1 следует, что точкам пересечения кривых Γ_1, Γ_2 соответствует решение системы $r_1 = r_4 = 0$, которая совместна тогда и только тогда, когда $R(r_1, r_4) = 0$.

$$R(r_1, r_4) = 4(2b^2 - 1)^2(36b^6 - 60b^4 - 4b^2 - 1).$$

Первая скобка дает корень $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, которому соответствует точка A . Вторая скобка дает один вещественный корень, который можно записать следующим образом:

$$b_2^2 = \frac{5}{9} + \frac{1}{108} \sqrt[3]{272376 - 12312\sqrt{57}} + \frac{1}{18} \sqrt[3]{1261 + 57\sqrt{57}}, \quad a_2 = \frac{1}{2b_2}.$$

Точку с координатами (a_2, b_2) обозначим C_3 . Кривая Γ_5 симметрична Γ_4 , следовательно, пересекается с Γ_1 только в двух точках, одна из которых A , а вторая – B_3 .

ЛЕММА 4.6. Кривые Γ_2 и Γ_4 пересекаются в двух точках, одна из которых A , Γ_3 и Γ_5 пересекаются в двух точках, одна из которых A (см. рис. 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4.1 следует, что точкам пересечения кривых Γ_2 , Γ_4 соответствует решение системы $r_2 = r_4 = 0$, которая совместна тогда и только тогда, когда $R(r_2, r_4) = 0$.

$$R(r_2, r_4) = -(2a^2 - 1)^3 P(a^2) = 0, \quad P(x) = \sum_{i=0}^8 p_i x^i,$$

$$\vec{p} = (729, -12366, 5542, -10944, -9903, -1386, 264, 288, 128).$$

Первая скобка дает корень $a = 2^{-1/2}$, которому соответствует точка A . Количество корней многочлена $P(x)$ на отрезке $[0, 1]$ найдем при помощи теоремы Штурма.

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$	$P_7(x)$	$P_8(x)$
0	+	−	−	+	+	−	+	+	−
1	−	−	+	−	−	−	+	−	−

Так как $r_2(a, b) = 2ab^3 + a^2 - 1 = 0$ и

$$2ab^3 > 0 \implies a^2 - 1 < 0 \implies 0 < a^2 < 1,$$

следовательно, вне отрезка $[0, 1]$ у многочлена $P(x)$ корней нет. Так как разница количеств перемен знака в 0 и в 1 равна единице, то у $P(x)$ ровно один вещественный корень на отрезке $[0, 1]$. Его приближенное значение $x_1 = 0.671797$, и ему соответствует точка C_2 . Кривая Γ_2 симметрична Γ_3 , а Γ_5 симметрична Γ_4 , значит Γ_3 и Γ_5 пересекаются в двух точках, одна из которых A , а вторая будет называться B_2 .

ЛЕММА 4.7. Кривые Γ_4 и Γ_5 пересекаются в трех точках, одна из которых A (см. рис. 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4.1 следует, что точкам пересечения кривых Γ_4 , Γ_5 соответствует решение системы $r_4 = r_5 = 0$.

$$\begin{aligned} r_5(a, b) - r_4(a, b) &= (a - b)(a + b) \cdot r_6(a, b), \\ r_6(a, b) &= 4a^4 + 4a^2b^2 + 9a^2 + 24ab + 4b^4 + 9b^2 - 24. \end{aligned}$$

Рассмотрим первый случай: $a - b = 0$, тогда $r_4(b, b) = -(b^2 + 4)^2(2b^2 - 1) \implies b = 2^{-1/2}$. Решению $a = b = 2^{-1/2}$ соответствует точка A . Рассмотрим второй случай: $r_6(a, b) = r_5(a, b) = 0$. Эта система совместна тогда и только тогда, когда $R(r_6, r_5) = 0$.

$$R(r_6, r_5) = (b^2 + 4)^2(2b^2 - 1)^2 \cdot Q(b^2), \quad Q(x) = \sum_{i=0}^8 q_i x^i,$$

$$\vec{q} = (234256, -16981624, 4479457, 255132, 2747616, 169296, 312768, 6912, 9216).$$

По теореме Декарта у полинома $Q(x)$ либо 0, либо 2 положительных корня. Но нетрудно понять, что есть хотя бы один корень. Для этого рассмотрим функцию $\mu_1(g)$, задающую кривую Γ_4 при $t \in (-3^{-1/2}, 0)$, и функцию $\mu_2(g)$, задающую кривую Γ_5 при $t \in (-1, -2^{-1/2})$. Функция $\mu_1(g)$ монотонно возрастает, начиная с точки C_5 : $(g = 0, \mu = 2 \cdot 3^{-3/4})$, и имеет наклонную асимптоту $\mu = \sqrt{2}g$. Функция $\mu_2(g)$ монотонно убывает, начиная с точки C_6 : $(g = 0, \mu = 1)$ и заканчивая точкой A : $(g = \mu = 2^{-5/4})$. Так как $2^{-5/4} < 2 \cdot 3^{-3/4} < 1$, то графики $\mu_1(g)$ и $\mu_2(g)$ пересекаются в точке, отличной от точки A (см. рис. 1, (b)). Таким образом, у многочлена $Q(x)$ ровно два положительных корня, их приближенные значения $x_1 = 0.01384$, $x_2 = 1.40073$. Им соответствуют точки C_1 , B_1 .

4.3. Камеры, определяемые критическим множеством Θ . Напомним, что $U = \{(g, \mu) \mid g > 0, \mu > 0\}$.

ТЕОРЕМА 2. *Попарные пересечения кривых Γ_i , $i = 1 \dots 5$, образуют 7 точек в области U .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4.2 следует, что кривые Γ_i не самопересекаются. Чтобы доказать утверждение теоремы, нужно перебрать 10 случаев попарных пересечений этих кривых. Благодаря симметричности некоторых из них перебор удалось фактически сократить до 6 случаев. Из лемм 4.3–4.7 следует, что кривые Γ_i пересекаются ровно в 7 точках: A , B_1 , C_1 , B_2 , C_2 , B_3 , C_3 .

Кривые Γ_i пересекают координатные оси в 6 точках: B_4 , C_4 , B_5 , C_5 , B_6 , C_6 . Начало координат обозначим O , а бесконечно удаленную точку $-\infty$. Посмотрим, на сколько частей эти точки делят кривые Γ_i .

Кривая Γ_1 состоит из 4 дуг: (∞, B_3) , (B_3, A) , (A, C_3) , (C_3, ∞) .

Кривая Γ_2 состоит из 3 дуг: (B_4, A) , (A, C_2) , (C_2, ∞) .

Кривая Γ_3 состоит из 3 дуг: (C_4, A) , (A, B_2) , (B_2, ∞) .

Кривая Γ_4 состоит из 7 дуг: (B_6, B_1) , (B_1, A) , (A, C_5) , (C_5, C_1) , (C_1, C_2) , (C_2, C_3) , (C_3, ∞) .

Кривая Γ_5 состоит из 7 дуг: (C_6, C_1) , (C_1, A) , (A, B_5) , (B_5, B_1) , (B_1, B_2) , (B_2, B_3) , (B_3, ∞) .

Ось абсцисс состоит из 4 частей: (O, B_4) , (B_4, B_5) , (B_5, B_6) , (B_6, ∞) .

Ось ординат состоит из 4 частей: (O, C_4) , (C_4, C_5) , (C_5, C_6) , (C_6, ∞) .

СЛЕДСТВИЕ 3. *Множество Θ делит область U на 18 камер.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы найти количество камер, рассмотрим область $g, \mu > 0$ как плоский многогранник. Его вершины – точки пересечения кривых Γ_i друг с другом и с координатными осями плюс точки O и ∞ , их число равно $7 + 6 + 2 = 15$. Его ребра – соответствующие дуги кривых Γ_i и отрезки координатных осей, их число равно $4 + 3 + 3 + 7 + 7 + 4 + 4 = 32$. Его грани – это камеры множества Θ . Эйлерова характеристика плоского многогранника равна 1, следовательно,

$$15(\text{к-во вершин}) - 32(\text{к-во ребер}) + x(\text{к-во граней}) = 1 \implies x = 18.$$

Все 18 камер множества Θ видны (см. рис. 1, (c)) в квадрате

$$(g, \mu) \in [0, \sqrt{2}] \times [0, \sqrt{2}].$$

§ 5. Свойства дискриминантного множества D

Множество D при $(g, \mu) \in U$ состоит из двух кривых γ_1, γ_2 , заданных неявно как линии нулевого уровня многочленов (3.6), (3.7) или параметрически при помощи формул (3.4), (3.5).

Рассмотрим кривую γ_1 , параметризованную t_1 . Согласно лемме 3.2 она не самопересекается. Кривая γ_1 имеет единственную точку возврата, соответствующее значение параметра обозначается t_1^C . Согласно лемме 3.5 кривая γ_1 также имеет не более двух точек касания с кривой γ_2 , соответствующие значения параметров обозначаются t_1^-, t_1^+ .

$$t_1^C = -(2g^2)^{1/3}, \quad t_1^- = \frac{-1 - \sqrt{1 - 32g^2\mu^2}}{8\mu^2}, \quad t_1^+ = \frac{-1 + \sqrt{1 - 32g^2\mu^2}}{8\mu^2}. \quad (5.1)$$

Разобьем γ_1 на три участка гладкости (см. рис. 2)

$$\gamma_{1,1}: t_1 \in (-\infty, t_1^C), \quad \gamma_{1,2}: t_1 \in (t_1^C, 0), \quad \gamma_{1,3}: t_1 \in (0, +\infty). \quad (5.2)$$

Рассмотрим кривую γ_2 , параметризованную t_2 . Согласно лемме 3.2 она не самопересекается. Кривая γ_2 имеет единственную точку возврата, соответствующее значение параметра обозначается t_2^C . Согласно лемме 3.5 кривая γ_2 также имеет не более двух точек касания с кривой γ_1 , соответствующие значения параметров обозначаются t_2^-, t_2^+ .

$$t_2^C = -(2\mu^2)^{1/3}, \quad t_2^- = \frac{-1 - \sqrt{1 - 32g^2\mu^2}}{8g^2}, \quad t_2^+ = \frac{-1 + \sqrt{1 - 32g^2\mu^2}}{8g^2}. \quad (5.3)$$

Разобьем γ_2 на три участка гладкости (см. рис. 3)

$$\gamma_{2,1}: t_2 \in (-\infty, t_2^C), \quad \gamma_{2,2}: t_2 \in (t_2^C, 0), \quad \gamma_{2,3}: t_2 \in (0, +\infty). \quad (5.4)$$

5.1. Перестройки множества T особых точек дискриминантного множества D . В теореме 1 мы показали, что множество Θ бифуркационных значений параметров является линией нулевого уровня многочлена $L(g, \mu)$. Он разлагается в произведение 5 многочленов $l_i(g, \mu)$, которым соответствуют 5 критических кривых Γ_i , пересекающихся в 7 точках:

$$A, C_1, B_1, C_2, B_2, C_3, B_3.$$

Когда точка (g, μ) находится на одной из этих кривых, то происходит склейка нескольких особых точек диаграмм D . Согласно следствию 1 мы знаем, корни каких многочленов задают точки возврата, касания или пересечения. Попробуем понять, особые точки какого типа участвуют в бифуркациях, соответствующих каждой из 5 критических кривых.

Далее мы будем использовать следующие обозначения: $Z(X)$ – дискриминант многочлена X , $R(X, Y)$ – результат многочленов X и Y , а $E(X, Y)$ – специальным образом определенный многочлен (см. § 6).

ЛЕММА 5.1. Пусть склеиваются две точки касания, тогда $(g, \mu) \in \Gamma_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 1 склейка двух точек касания означает, что $Z(a) = Z(b) = 0$.

$$Z(a) = Z(b) = -l_1(g, \mu).$$

Утверждение вытекает из того, что многочлен l_1 задает кривую Γ_1 .

ЛЕММА 5.2. Пусть склеиваются две точки возврата, тогда $(g, \mu) = A = (2^{-5/4}, 2^{-5/4})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя к переменным a, b при помощи замены $a = \sqrt[3]{2g^2}$, $b = \sqrt[3]{2\mu^2}$ и приравнявая координаты h, k в формулах (3.4), (3.5), получаем систему $p_1(a, b) = p_2(a, b) = 0$, где

$$p_1(a, b) = 2a^3b^3 - \frac{3a^2}{4} - (b^2 - 1)^3, \quad p_2(a, b) = -a^3 + \frac{3a}{2} + b^3 - \frac{3b}{2},$$

которая совместна тогда и только тогда, когда $R(p_1, p_2) = 0$. Вычисляя результаты по переменным a и b получаем систему

$$(b^2 + 4)(2b^2 - 1)^8 = (a^2 + 4)(2a^2 - 1)^8 = 0.$$

Следовательно, $a = b = 2^{-1/2}$ и $g = \mu = 2^{-5/4}$.

ЛЕММА 5.3. 1) Пусть склеиваются точка касания и точка пересечения, тогда $(g, \mu) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

2) Если $(g, \mu) \in \Gamma_2$, то такая точка единственна и совпадает с точкой возврата t_1^C . Если $(g, \mu) \in \Gamma_3$, то такая точка единственна и совпадает с точкой возврата t_2^C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 1 первое утверждение равносильно тому, что системы (5.5) совместны, а второе утверждение равносильно тому, что системы (5.6) совместны и имеют единственные решения, где

$$a(t) = A(t) = 0, \quad b(t) = B(t) = 0, \quad (5.5)$$

$$\alpha(t) = a(t) = A(t) = 0, \quad \beta(t) = b(t) = B(t) = 0. \quad (5.6)$$

1) Найдем значения параметров g, μ , при которых системы (5.5) совместны.

$$R(a(t), A(t)) = g^8 \cdot l_2(g, \mu) \cdot l_3(g, \mu)^2, \quad R(b(t), B(t)) = \mu^8 \cdot l_2(g, \mu)^2 \cdot l_3(g, \mu).$$

Первая часть утверждения вытекает из того, что многочлены l_2, l_3 задают кривые Γ_2, Γ_3 .

2) Рассмотрим многочлены

$$p_1(t, g, \mu) = E(a(t), A(t)), \quad p_2(t, g, \mu) = E(b(t), B(t)).$$

Они линейны по t , следовательно, существуют единственные значения параметра, при которых системы (5.6) совместны. Вторая часть утверждения вытекает из следующих равенств:

$$R(p_1(t, g, \mu), \alpha(t)) = 0 \pmod{l_2(g, \mu)}, \quad R(p_2(t, g, \mu), \beta(t)) = 0 \pmod{l_3(g, \mu)}.$$

ЛЕММА 5.4. 1) Пусть склеиваются две точки пересечения, тогда $(g, \mu) \in \Gamma_4 \cup \Gamma_5$.

2) Если $(g, \mu) \in \Gamma_4$, то такая точка единственна и совпадает с точкой возврата t_2^C . Если $(g, \mu) \in \Gamma_5$, то такая точка единственна и совпадает с точкой возврата t_1^C .

ЛЕММА 5.5. 1) Пусть одна из точек возврата склеивается с точкой касания, тогда $(g, \mu) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Если $(g, \mu) \in \Gamma_2$, то это точка t_1^C . Если $(g, \mu) \in \Gamma_3$, то это точка t_2^C .

2) В обоих случаях точка возврата склеивается еще и с точкой пересечения.

ЛЕММА 5.6. 1) Пусть одна из точек возврата склеивается с точкой пересечения, тогда $(g, \mu) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5$. Если $(g, \mu) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_5$, то это точка t_1^C . Если $(g, \mu) \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, то это точка t_2^C .

2) В случаях Γ_2, Γ_3 точка возврата склеивается еще и с точкой касания. В случаях Γ_4, Γ_5 точка возврата склеивается еще с одной точкой пересечения.

Доказательства лемм 5.4–5.6 аналогичны доказательству леммы 5.3.

ЛЕММА 5.7. 1) Пусть $(g, \mu) \in \Gamma_2 \setminus A$, тогда точка возврата t_1^C склеивается не более чем с одной точкой пересечения.

2) Пусть $(g, \mu) \in \Gamma_3 \setminus A$, тогда точка возврата t_2^C склеивается не более чем с одной точкой пересечения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 5.6 и следствию 1 первое утверждение равносильно тому, что система (5.7) несовместна, а второе утверждение равносильно тому, что система (5.8) несовместна, где

$$\alpha(t) = a(t) = A'(t) = A(t) = 0, \quad (5.7)$$

$$\beta(t) = b(t) = B'(t) = B(t) = 0. \quad (5.8)$$

1) Предположим, что система (5.7) совместна при $(g, \mu) \in \Gamma_2 \setminus A$, тогда совместны системы $p_1(g, \mu) = l_2(g, \mu) = 0$ и $p_2(g, \mu) = l_2(g, \mu) = 0$, где

$$p_1(g, \mu) = R(A'(t), \alpha(t)), \quad p_2(g, \mu) = R(A'(t), a(t)).$$

Следовательно верны следующие два равенства:

$$R(p_1(g, \mu), l_2(g, \mu)) = (-1 + 32\mu^4)^8 \cdot q_1(\mu) = 0,$$

$$R(p_2(g, \mu), l_2(g, \mu)) = (-1 + 32\mu^4)^{12} \cdot q_2(\mu) = 0.$$

Так как решение уравнения $-1 + 32g^4 = 0$ соответствует точке A и $R(q_1, q_2) \neq 0$, то мы приходим к противоречию.

2) Предположим, что система (5.8) совместна при $(g, \mu) \in \Gamma_3 \setminus A$. Аналогичным образом приходим к противоречию.

ЛЕММА 5.8. 1) Пусть $(g, \mu) \in \Gamma_4 \setminus A$, тогда точка возврата t_2^C склеивается не более чем с двумя точками пересечения.

2) Пусть $(g, \mu) \in \Gamma_5 \setminus A$, тогда точка возврата t_1^C склеивается не более чем с двумя точками пересечения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 5.6 и следствию 1 первое утверждение равносильно тому, что система (5.10) несовместна, а второе утверждение равносильно тому, что система (5.9) несовместна, где

$$\alpha(t) = A''(t) = A'(t) = A(t) = 0, \quad (5.9)$$

$$\beta(t) = B''(t) = B'(t) = B(t) = 0. \quad (5.10)$$

1) Предположим, что система (5.10) совместна при $(g, \mu) \in \Gamma_4 \setminus A$, тогда совместна система $\beta(t) = B''(t) = l_4(g, \mu) = 0$, следовательно, верно следующее равенство:

$$R(R(B''(s), \beta(s)), l_4(g, \mu)) = (-1 + g)^{42} \cdot (-1 + 32g^4)^4 \cdot p_1(g) = 0.$$

Поскольку решение уравнения $-1 + 32g^4 = 0$ соответствует точке A , решение уравнения $-1 + g = 0$ соответствует точке на оси $\mu = 0$, а многочлен $p_1(g)$ не имеет вещественных корней, то мы приходим к противоречию.

2) Предположим, что система (5.9) совместна при $(g, \mu) \in \Gamma_5 \setminus A$. Аналогичным образом приходим к противоречию.

Рассмотрим множество T особых точек диаграмм D , среди которых можно выделить точки возврата, точки пересечения и точки касания. Согласно теореме 1 множество Θ бифуркационных значений параметров состоит из 5 критических кривых Γ_i , которым соответствуют случаи склейки нескольких особых точек.

ТЕОРЕМА 3. Все бифуркации множества T в окрестности точек $(g, \mu) \in \Gamma_i$ перечислены в следующем списке:

- 1) склейка двух точек касания при $(g, \mu) \in \Gamma_1 \setminus A$;
- 2) склейка точки возврата t_1^C с одной точкой касания и одной точкой пересечения при $(g, \mu) \in \Gamma_2 \setminus A$;
- 3) склейка точки возврата t_2^C с одной точкой касания и одной точкой пересечения при $(g, \mu) \in \Gamma_3 \setminus A$;
- 4) склейка точки возврата t_2^C с двумя точками пересечения при $(g, \mu) \in \Gamma_4 \setminus A$;
- 5) склейка точки возврата t_1^C с двумя точками пересечения при $(g, \mu) \in \Gamma_5 \setminus A$;
- 6) склейка двух точек возврата t_1^C, t_2^C при $(g, \mu) \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению 3 особые точки диаграмм D – это точки возврата и общие точки (точки касания и пересечения) кривых γ_1, γ_2 . Согласно следствию 1 точки возврата t_1^C и t_2^C задаются многочленами $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, точки касания задаются многочленами $a(t), b(t)$, а точки пересечения задаются многочленами $A(t), B(t)$.

Из определения 3 следует, что Θ – множество значений параметров $(g, \mu) \in U$, при которых склеиваются особые точки. Таким образом нам достаточно рассмотреть случаи склейки

- а) двух точек касания (см. лемма 5.1),
- б) двух точек возврата (см. лемма 5.2),
- с) точки касания и точки пересечения (см. лемма 5.3),

- d) двух точек пересечения (см. лемма 5.4),
- e) точки возврата и точки касания (см. лемма 5.5),
- f) точки возврата и точки пересечения (см. лемма 5.6).

Случаи а)–b) полностью разобраны в леммах 5.1 и 5.2. Случаи с)–f) рассматриваются в леммах 5.3–5.6, где показано, что происходит склейка как минимум трех особых точек, а в леммах 5.7, 5.8 показано, что, за исключением точки $A \in \Theta$, происходит склейка не более трех особых точек.

Все точки множества Θ можно разбить на три класса. Первый класс – точки, принадлежащие только одной из критических кривых Γ_i . Для них описание бифуркаций было дано в терминах склейки точек разного типа. Второй класс – точки, лежащие в пересечении двух критических кривых, это

$$\begin{aligned}\Gamma_1 \cap \Gamma_4 &= C_3, & \Gamma_1 \cap \Gamma_5 &= B_3, & \Gamma_2 \cap \Gamma_4 &= C_2, \\ \Gamma_3 \cap \Gamma_5 &= B_2, & \Gamma_4 \cap \Gamma_5 &= C_1 \cup B_1.\end{aligned}$$

Для них бифуркации, соответствующие каждой из двух критических кривых, происходят одновременно, но независимо друг от друга (т.е. в разных точках плоскости $\mathbb{R}^2(k, h)$), так как $t_1^C \neq t_2^C$ при $(g, \mu) \neq A$. Наконец, третий класс – точка A , в которой пересекаются все критические кривые. Для нее описание бифуркации будет зависеть от траектории, по которой мы будем двигаться через нее.

5.2. Перестройки дискриминантного множества D при $(g, \mu) \in U$.

В теореме 3 мы рассмотрели множество T особых точек диаграмм D и указали, сколько точек каждого типа (возврата, пересечения или касания) участвуют в бифуркации, когда (g, μ) принадлежит одной из кривых Γ_i . Далее мы опишем поведение дуг кривых γ_1, γ_2 , примыкающих к особым точкам, участвующим в описанных бифуркациях.

Отдельно рассмотрим случай склейки двух точек касания. Согласно теореме 3 при $(g, \mu) \in \Gamma_1 \setminus A$ происходит склейка двух точек касания кривых γ_1, γ_2 . Им соответствует пара значений параметров на кривых γ_1, γ_2 : (t_1^-, t_2^+) для одной и (t_1^+, t_2^-) для другой точки.

ЛЕММА 5.9. 1) Кривые γ_1, γ_2 в точках (t_1^-, t_2^+) и (t_1^+, t_2^-) имеют порядок касания 1 при всех $(g, \mu) \in U$ кроме Γ_1 .

2) Кривые γ_1, γ_2 в точке $(t_{1,1}, t_2^+) = (t_1^+, t_2^-)$ имеют порядок касания 3 при всех $(g, \mu) \in \Gamma_1 \setminus A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулы (3.4), (3.5), разложим в ряд функцию $h_1(k_1)$, задающую кривую γ_1 , и функцию $h_2(k_2)$, задающую кривую γ_2 , в окрестности точки касания, которой соответствуют параметры $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)$. Вычитая первое разложение из второго, получаем ряд для разности функций $h(k)$, задающих кривые γ_1, γ_2 в точке $\tilde{k} = k_1(\tilde{t}_1) = k_2(\tilde{t}_2)$

$$h_1 - h_2 = c_0 + c_1(k - \tilde{k}) + c_2(k - \tilde{k})^2 + c_3(k - \tilde{k})^3 + c_4(k - \tilde{k})^4 + o((k - \tilde{k})^4).$$

Приведем коэффициенты c_i к общему знаменателю и рассмотрим их числители p_i (мы не будем их выписывать в силу громоздкости). Для точки касания,

которой соответствуют параметры $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2$ на кривых γ_1, γ_2 выполнено условие $a(\tilde{t}_1) = b(\tilde{t}_2) = c(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2) = 0$ (см. формулы (3.10), (3.12)).

1) Первое утверждение вытекает из следующих равенств:

$$\begin{aligned} R(R(p_0(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2), c(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)), b(\tilde{t}_1)) &= 0, & R(R(p_1(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2), c(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)), b(\tilde{t}_1)) &= 0, \\ R(R(p_2(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2), c(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)), b(\tilde{t}_1)) &= \text{Const} \cdot g^{34} \mu^{24} \cdot (32g^2 \mu^2 + 1)^2 \cdot l_1(g, \mu)^2. \end{aligned}$$

2) Второе утверждение вытекает из следующих двух равенств:

$$\begin{aligned} R(R(R(p_3(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2), c(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)), b(\tilde{t}_1)), l_1(g, \mu)) &= 0, \\ R(R(R(p_4(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2), c(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)), b(\tilde{t}_1)), l_1(g, \mu)) &= (32\mu^4 - 1)^{48} \cdot f(\mu), \end{aligned}$$

где $f(\mu) \neq 0$ при $(g, \mu) \in U$.

Напомним, что каждую из кривых мы разбили на три гладкие дуги. Определим, каким из этих дуг принадлежит описанная выше бифуркация (склейка двух точек касания).

ЛЕММА 5.10. Пусть $(g, \mu) \in \Gamma_1$ и $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)$ – значения параметров на кривых γ_1, γ_2 , соответствующие их точке касания. Тогда при $g < \mu$ $\tilde{t}_1 \in \gamma_{1,2}$, $\tilde{t}_2 \in \gamma_{2,1}$, а при $g > \mu$ $\tilde{t}_1 \in \gamma_{1,1}$, $\tilde{t}_2 \in \gamma_{2,2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из того, что при $(g, \mu) \in \Gamma_1$ $\tilde{t}_1 = -(8\mu^2)^{-1}$, $\tilde{t}_2 = -(8g^2)^{-1}$.

Перейдем к другим бифуркациям. Согласно теореме 3 во всех бифуркациях, кроме склейки двух точек касания, участвуют точки возврата (клювы). Более подробно, при $(g, \mu) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_5 \setminus A$ точка возврата t_1^C , а при $(g, \mu) \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \setminus A$ точка возврата t_2^C склеиваются с несколькими общими точками кривых γ_1, γ_2 .

Если касательные к кривым γ_1, γ_2 в точке склейки совпадают, будем говорить, что клюв одной кривой “касается” дуги второй кривой. Если касательные к кривым γ_1, γ_2 в точке склейки не совпадают, будем говорить, что клюв одной кривой “протыкает” дугу второй кривой.

ЛЕММА 5.11. 1) Пусть $(g, \mu) \in \Gamma_2 \setminus A$, тогда клюв кривой γ_1 “касается” дуги кривой γ_2 .

2) Пусть $(g, \mu) \in \Gamma_3 \setminus A$, тогда клюв кривой γ_2 “касается” дуги кривой γ_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3 в обоих случаях в бифуркации участвует точка касания, следовательно, клюв одной кривой “касается” дуги второй кривой.

ЛЕММА 5.12. 1) Пусть $(g, \mu) \in \Gamma_4 \setminus A$, тогда клюв кривой γ_2 “протыкает” дугу кривой γ_1 .

2) Пусть $(g, \mu) \in \Gamma_5 \setminus A$, тогда клюв кривой γ_1 “протыкает” дугу кривой γ_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3 в обоих случаях в бифуркации не участвуют точки касания, следовательно, клюв одной кривой “протыкает” дугу второй кривой.

Далее определим, каким частям кривых γ_1 , γ_2 принадлежат бифуркации при $(g, \mu) \in \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$. В следующих двух леммах будем обозначать $\gamma_1(t_1^C)$ и $\gamma_2(t_2^C)$ – точки возврата на плоскости $\mathbb{R}^2(k, h)$.

ЛЕММА 5.13. 1) Пусть $(g(t), \mu(t)) \in \Gamma_2$, тогда $\gamma_1(t_1^C) \in \gamma_{2,1}$.

2) Пусть $(g(t), \mu(t)) \in \Gamma_5$, тогда $\gamma_1(t_1^C) \in \gamma_2^+$ при $-\frac{1}{\sqrt{3}} < t < 0$ и $\gamma_1(t_1^C) \in \gamma_{2,2}$ при $-1 < t < -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим координаты (h_1, k_1) точки возврата $\gamma_1(t_1^C)$ на кривой γ_1 и приравняем их к координатам $(h_2(\tilde{t}_2), k_2(\tilde{t}_2))$ точки на кривой γ_2 с параметром $\tilde{t}_2$. Получим два многочлена, зависящих от $\tilde{t}_2, g(t), \mu(t)$. Найдем значение параметра $\tilde{t}_2$, при котором система $h_1 - h_2(\tilde{t}_2) = k_1 - k_2(\tilde{t}_2) = 0$ совместна.

1) В случае $(g(t), \mu(t)) \in \Gamma_2$

$$E(h_1 - h_2(\tilde{t}_2), k_1 - k_2(\tilde{t}_2)) = f(t) \cdot (2\tilde{t}_2 t - 1),$$

где f – многочлен, не зависящий от $\tilde{t}_2$. Единственное решение этого уравнения $\tilde{t}_2 = 1/(2t) < 0$, следовательно, $\gamma_1(t_1^C) \in \gamma_2^-$ при $-1 < t < 0$. Сравним точку $\tilde{t}_2(t)$ с точкой возврата $t_2^C(t)$

$$(\tilde{t}_2)^3(t) - (t_2^C)^3(t) = \frac{(2t^2 - 1)^2}{8t^3} < 0.$$

Следовательно, $\gamma_1(t_1^C) \in \gamma_{2,1}$ при $-1 < t < 0$.

2) В случае $(g(t), \mu(t)) \in \Gamma_5$

$$E(h_1 - h_2(\tilde{t}_2), k_1 - k_2(\tilde{t}_2)) = g(t) \cdot (t^2(2\tilde{t}_2 t - 3) + 1),$$

где g – многочлен, не зависящий от $\tilde{t}_2$. Единственное решение этого уравнения $\tilde{t}_2 = (-1 + 3t^2)/(2t^3)$, следовательно, $\gamma_1(t_1^C) \in \gamma_2^+$ при $-\frac{1}{\sqrt{3}} < t < 0$ и $\gamma_1(t_1^C) \in \gamma_2^-$ при $-1 < t < -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Сравним точку $\tilde{t}_2$ с точкой возврата t_2^C

$$(\tilde{t}_2)^3(t) - (t_2^C)^3(t) = -\frac{(t^2 + 1)(2t^2 - 1)^2(3t^2 - 1)^2}{8t^9} > 0.$$

Следовательно, $\gamma_1(t_1^C) \in \gamma_{2,2}$ при $-1 < t < -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

ЛЕММА 5.14. 1) Пусть $(g(t), \mu(t)) \in \Gamma_3$, тогда $\gamma_2(t_2^C) \in \gamma_{1,1}$.

2) Пусть $(g(t), \mu(t)) \in \Gamma_4$, тогда $\gamma_2(t_2^C) \in \gamma_1^+$ при $-\frac{1}{\sqrt{3}} < t < 0$ и $\gamma_2(t_2^C) \in \gamma_{1,2}$ при $-1 < t < -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 5.13.

Далее будем изучать, как ведут себя дуги кривых γ_1, γ_2 при прохождении точки (g, μ) трансверсально через одну из этих критических кривых Γ_i .

Пусть $t_0 \in (-1, 0)$ – фиксированный параметр на кривой Γ_i (такой, что $g(t) \neq 0$ и $\mu(t) \neq 0$), тогда прямую, проходящую через точку $(g(t_0), \mu(t_0))$ трансверсально Γ_i , можно задать следующей формулой:

$$(g(x), \mu(x)) = \left(g(t_0) + x \frac{\partial \mu}{\partial t}(t_0), \mu(t_0) - x \frac{\partial g}{\partial t}(t_0) \right). \quad (5.11)$$

Кривые γ_1 , γ_2 являются линиями нулевого уровня многочленов Q_1 и Q_2 , заданных формулами (3.6), (3.7). Они делят плоскость на области, в которых соответствующие многочлены имеют положительное или отрицательное значение (см. рис. 4).

В следующих двух леммах мы определим, в какую сторону (положительную или отрицательную) движется клов одной кривой относительно второй кривой при движении параметра $(g(x), \mu(x))$ вдоль прямой, заданной формулой (5.11).

ЛЕММА 5.15. 1) При прохождении параметра (g, μ) трансверсально кривой $\Gamma_2 \setminus A$ точка возврата $\gamma_1(t_1^C)$ проходит через кривую γ_2 (т.е. Q_2 меняет знак).

2) При прохождении параметра (g, μ) трансверсально кривой $\Gamma_3 \setminus A$ точка возврата $\gamma_2(t_2^C)$ проходит через кривую γ_1 (т.е. Q_1 меняет знак).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем точку $(g(t_0), \mu(t_0))$ на кривой Γ_i , отличную от A и не лежащую на осях $g = 0$, $\mu = 0$. Рассмотрим прямую $(g(x), \mu(x))$, заданную формулой (5.11), проходящую через эту точку при $x = 0$ трансверсально Γ_i .

1) Пусть $i = 2$. Рассмотрим значение функции $Q_2(h, k)$ в точке возврата $\gamma_1(t_1^C)$, это будет функция от g, μ . Ограничим ее на нашу прямую и разложим в ряд в точке $x = 0$.

$$Q_2(x) = c_3 x^3 + o(x^3), \quad c_3 = -\frac{(2t_0^2 - 1)^3(18t_0^6 - 19t_0^4 - 2t_0^2 - 1)^3}{864\sqrt{2}(t_0 - 1)t_0^{11}(t_0 + 1)\sqrt{1 - t_0^2}}.$$

Единственное значение t_0 в интервале $(-1, 0)$ такое, что $c_4 = 0$, это $t_0 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, соответствующее точке A . Следовательно функция $Q_2(x)$ меняет знак и первое утверждение доказано.

2) Пусть $i = 3$. Проводя аналогичные вычисления для точки возврата $\gamma_2(t_2^C)$, убеждаемся, что $Q_1 = c_3 x^3 + o(x^3)$, т.е. разложение то же, что и в предыдущем случае. Следовательно функция $Q_1(x)$ меняет знак и второе утверждение доказано.

ЛЕММА 5.16. 1) При прохождении параметра (g, μ) трансверсально кривой $\Gamma_4 \setminus A$ точка возврата $\gamma_2(t_2^C)$ проходит через кривую γ_1 (т.е. Q_1 меняет знак).

2) При прохождении параметра (g, μ) трансверсально кривой $\Gamma_5 \setminus A$ точка возврата $\gamma_1(t_1^C)$ проходит через кривую γ_2 (т.е. Q_2 меняет знак).

Доказательство аналогично доказательству леммы 5.15.

Чтобы закончить описание бифуркаций, соответствующих критическим кривым Γ_i , $i = 2 \dots 5$, попробуем понять, в каком порядке расположены особые точки на кривых γ_i до и после склейки. Напомним, что при $(g, \mu) \in \Gamma_2, \Gamma_3$ происходит склейка трех точек: возврата, пересечения и касания; а при $(g, \mu) \in \Gamma_4, \Gamma_5$ происходит склейка точки возврата и двух точек пересечения.

ЛЕММА 5.17. 1) При прохождении точки (g, μ) трансверсально через кривую $\Gamma_5 \setminus A$ в одном направлении точки пересечения пропадают, а в другом направлении – расходятся в разные стороны от точки возврата (клова) $\gamma_1(t_1^C)$ на кривой γ_1 .

2) При прохождении точки (g, μ) трансверсально через кривую $\Gamma_2 \setminus A$ в одном направлении точки пересечения и касания расходятся в разные стороны

от точки возврата (клюва) $\gamma_1(t_1^C)$, а в другом направлении – так же, но в обратном порядке на кривой γ_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем точку $(g(t_0), \mu(t_0))$ на кривой Γ_i , отличную от A и не лежащую на осях $g = 0$, $\mu = 0$. Рассмотрим прямую $(g(x), \mu(x))$, заданную формулой (5.11), проходящую через эту точку при $x = 0$ трансверсально Γ_i .

1) Пусть $i = 5$. Рассмотрим значение многочлена $A(t_1)$ в точке возврата t_1^C , это будет функция от g , μ . Ограничим ее на кривую Γ_5 , тогда t_1^C – корень этого многочлена.

$$A'(t_1^C(t_0)) = 0, \quad A''(t_1^C(t_0)) = \frac{3(t_0^2 - 1)(t_0^2 + 1)^3(2t_0^2 - 1)^2(3t_0^2 - 1)}{8t_0^8}.$$

Функция $A(t_1)$ имеет максимум в точке $t_1^C(t_0)$ при $(3t_0^2 - 1) < 0$ и минимум при $(3t_0^2 - 1) > 0$. Теперь ограничим эту функцию на нашу прямую (5.11) и разложим ее в ряд в точке $x = 0$

$$A(x) = c_1x + o(x), \quad c_1 = \frac{3(1 - t_0^2)^{1/2}(t_0^2 + 1)^4(2t_0^2 - 3)(1 - 2t_0^2)^3|1 - 3t_0^2|}{32\sqrt{2}t_0^{12}}.$$

Коэффициент c_1 равен нулю только в точке $t_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, которая соответствует $g = 0$, и в точке $t_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, которая соответствует точке A , следовательно, для всех остальных точек t_0 коэффициент c_1 имеет постоянный знак.

Теперь ясно, что при движении по прямой (5.11) в одном направлении точка t_1^C перестает быть корнем $A(t_1)$, а в другом направлении оказывается между корней $A(t_1)$, т.е. первое утверждение доказано.

2) Пусть $i = 2$. Рассмотрим значение многочлена $P(t_1) = A(t_1) \cdot a(t_1)$ в точке возврата t_1^C , это будет функция от g , μ . Ограничим ее на кривую Γ_2 , тогда t_1^C – корень этого многочлена.

$$P'(t_1^C(t_0)) = 0, \quad P''(t_1^C(t_0)) = \frac{(2t_0^2 - 1)^5}{4\sqrt{2}(-t_0)^{3/2}}.$$

Функция $P(t_1)$ имеет максимум в точке $t_1^C(t_0)$ при $(2t_0^2 - 1) < 0$ и минимум при $(2t_0^2 - 1) > 0$. Теперь ограничим эту функцию на нашу прямую (5.11) и разложим ее в ряд в точке $x = 0$

$$P(x) = c_2x^2 + o(x^2), \quad c_2 = \frac{(2t_0^2 - 1)^3(18t_0^6 - 19t_0^4 - 2t_0^2 - 1)^2}{576\sqrt{2}t_0^4(-t_0^3)^{5/6}(t_0^2 - 1)}.$$

Коэффициент c_2 равен нулю только в точке $t_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, которая соответствует точке A . Убеждаемся, что $c_2 > 0$ при $2t_0^2 - 1 < 0$ и $c_2 < 0$ при $2t_0^2 - 1 > 0$. Таким образом, при движении по прямой (5.11) точка t_1^C оказывается между корнями многочлена $P(t_1)$. Наконец, аналогично разложим в ряд многочлен $a(t_1)$

$$a(x) = c_1x + o(x), \quad c_1 = -\frac{-18t_0^6 + 19t_0^4 + 2t_0^2 + 1}{6t_0^3\sqrt{t_0 - 1/t_0}}.$$

Коэффициент $c_1 \neq 0$. Теперь ясно, что при движении вдоль прямой (5.11) в разных направлениях соответствующие корни многочленов $A(t_1)$, $a(t_1)$ меняются местами, т.е. второе утверждение доказано.

ЛЕММА 5.18. 1) При прохождении точки (g, μ) трансверсально через кривую $\Gamma_4 \setminus A$ в одном направлении точки пересечения пропадают, а в другом направлении – расходятся в разные стороны от точки возврата (клюва) $\gamma_2(t_2^C)$ на кривой γ_2 .

2) При прохождении точки (g, μ) трансверсально через кривую $\Gamma_3 \setminus A$ в одном направлении точки пересечения и касания расходятся в разные стороны от точки возврата (клюва) $\gamma_2(t_2^C)$, а в другом направлении – так же, но в обратном порядке на кривой γ_2 .

Доказательство аналогично доказательству леммы 5.17.

Типичные бифуркации множества D , т.е. те, которые соответствуют трансверсальному пересечению точкой (g, μ) дуг Γ_i , можно разбить на три основных типа.

Первый – склейка двух точек касания. При этой бифуркации две точки касания кривых γ_1 , γ_2 склеиваются в одну, при этом область, заключенная между двух дуг, соединяющих эти точки, стягивается в точку, после чего она исчезает, а кривые γ_1 , γ_2 перестают касаться друг друга в этом месте (см. рис. 6, (a)). Порядок касания в этих двух точках равен 1, а в момент склейки он равен 3.

Второй – касание клюва одной кривой дуги второй кривой. При этой бифуркации происходит склейка трех особых точек: точки возврата, точки пересечения и точки касания. При этом область, заключенная между дуг, соединяющих эти точки, стягивается в точку, а затем снова образуется, но с противоположной стороны (см. рис. 6, (b)). Порядок следования трех особых точек при этом меняется на обратный.

Третий – протыкание клюва одной кривой дуги второй кривой. При этой бифуркации клюв одной кривой приближается к дуге второй кривой, затем трансверсально пересекает ее, при этом образуются две новые точки пересечения (см. рис. 6, (c)).

Рассмотрим точку $(g_0, \mu_0) \in \Theta \setminus A$, и пусть ей соответствует значение t_0 параметра на одной из критических кривых Γ_i . Пусть точка (g, μ) трансверсально пересекает Γ_i , перемещаясь по прямой, заданной формулой (5.11).

ТЕОРЕМА 4. Типичные бифуркации дискриминантного множества D перечислены ниже.

1) Пусть $(g_0, \mu_0) \in \Gamma_1 \setminus A$. При трансверсальном движении точки (g, μ) из области $l_1(g, \mu) < 0$ в область $l_1(g, \mu) > 0$ происходит склейка двух точек касания (см. рис. 6, (a)). Если $g_0 < \mu_0$, то эта бифуркация происходит с дугами $\gamma_{1,2}$, $\gamma_{2,1}$ (это переходы между камерами $8' \rightarrow 9'$, $5' \rightarrow 1'$). Если $g_0 > \mu_0$, то эта бифуркация происходит с дугами $\gamma_{1,1}$, $\gamma_{2,2}$ (это переходы между камерами $8 \rightarrow 9$, $5 \rightarrow 1'$).

2) Пусть $(g_0, \mu_0) \in \Gamma_2 \setminus A$. При движении точки (g, μ) трансверсально этой кривой происходит касание клюва кривой γ_1 дуги $\gamma_{2,1}$ (см. рис. 6, (b)). При $t_0 \in (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ клюв переходит из области $Q_2 < 0$ в область $Q_2 > 0$ (это переходы между камерами $1 \rightarrow 2$). При $t_0 \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ клюв переходит из

области $Q_2 > 0$ в область $Q_2 < 0$ (это переходы между камерами $4' \rightarrow 5'$, $7' \rightarrow 8'$).

3) Пусть $(g_0, \mu_0) \in \Gamma_3 \setminus A$. При движении точки (g, μ) трансверсально этой кривой происходит касание ключа кривой γ_2 дуги $\gamma_{1,1}$ (см. рис. 6, (b)). При $t_0 \in (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ключ переходит из области $Q_1 < 0$ в область $Q_1 > 0$ (это переходы между камерами $1 \rightarrow 2'$). При $t_0 \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ключ переходит из области $Q_1 > 0$ в область $Q_1 < 0$ (это переходы между камерами $4 \rightarrow 5$, $7 \rightarrow 8$).

4) Пусть $(g_0, \mu_0) \in \Gamma_4 \setminus A$. При движении точки (g, μ) трансверсально этой кривой ключ кривой γ_2 протыкает дугу кривой γ_1 (см. рис. 6, (c)). При $t_0 \in (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ключ переходит из области $Q_1 > 0$ в область $Q_1 < 0$, протыкая дугу $\gamma_{1,2}$ (это переходы между камерами $6 \rightarrow 7$, $3 \rightarrow 4$). При $t_0 \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ ключ переходит из области $Q_1 < 0$ в область $Q_1 > 0$, протыкая дугу $\gamma_{1,2}$ (это переходы между камерами $2' \rightarrow 3'$). При $t_0 \in (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ ключ переходит из области $Q_1 < 0$ в область $Q_1 > 0$, протыкая дугу $\gamma_{1,3}$ (это переходы между камерами $6' \rightarrow 3'$, $7' \rightarrow 4'$, $8' \rightarrow 5'$, $9' \rightarrow 1'$).

5) Пусть $(g_0, \mu_0) \in \Gamma_5 \setminus A$. При движении точки (g, μ) трансверсально этой кривой ключ кривой γ_1 протыкает дугу кривой γ_2 (см. рис. 6, (c)). При $t_0 \in (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ключ переходит из области $Q_2 > 0$ в область $Q_2 < 0$, протыкая дугу $\gamma_{2,2}$ (это переходы между камерами $6' \rightarrow 7'$, $3' \rightarrow 4'$). При $t_0 \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ ключ переходит из области $Q_2 < 0$ в область $Q_2 > 0$, протыкая дугу $\gamma_{2,2}$ (это переходы между камерами $2 \rightarrow 3$). При $t_0 \in (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ ключ переходит из области $Q_2 < 0$ в область $Q_2 > 0$, протыкая дугу $\gamma_{2,3}$ (это переходы между камерами $6 \rightarrow 3$, $7 \rightarrow 4$, $8 \rightarrow 5$, $9 \rightarrow 1'$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все утверждения теоремы следуют из лемм 5.9–5.18.

5.3. Перестройки дискриминантного множества D при $g \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow 0$.

Выше мы исследовали, как изменяются диаграммы D при переходе между 18 камерами, на которые множество Θ делит область U . Как мы знаем, множество $D_{g,\mu}$ в случае $(g, \mu) \in U$ состоит из двух кривых γ_1 , γ_2 , заданных формулами (3.4), (3.5). Нетрудно видеть, что при $g \rightarrow 0$ происходит вырождение кривой γ_1 , а при $\mu \rightarrow 0$ – кривой γ_2 . Это связано с тем, что часть формул становятся зависимыми от квадрата соответствующего параметра на кривой, в следствие чего происходит склейка отрицательного и положительного “хвостов” этой кривой.

Дискриминантные множества в случаях $g = 0$, $\mu = 0$ хорошо известны, их можно записать в следующей форме:

$$D_{0,\mu} = \bar{\gamma}_1(\mu) \cup \gamma_2(0, \mu),$$

где $\gamma_2(g, \mu)$ задается формулой (5.14), а $\bar{\gamma}_1(\mu)$ задается формулой (5.13), и

$$D_{g,0} = \gamma_1(g, 0) \cup \bar{\gamma}_2(g),$$

где $\gamma_1(g, \mu)$ задается формулой (5.12), а $\bar{\gamma}_2(g)$ задается формулой (5.15). Далее мы покажем, что дискриминантные множества $D_{0,\mu}$ и $D_{g,0}$ получаются, когда

определенные части $D_{g,\mu}$ склеиваются при $g \rightarrow 0$ и $\mu \rightarrow 0$ соответственно. Напомним, что значения параметров на кривых γ_1 , γ_1 , соответствующие точкам возврата, обозначаются t_1^C и t_2^C соответственно.

Рассмотрим $D_{0,\mu} = \bar{\gamma}_1(\mu) \cup \gamma_2(0, \mu)$. Кривая $\gamma_1(g, \mu)$ задается формулой

$$\gamma_1: \{k = 1 + g^4 t_1^{-4} + 2g^2 t_1^{-1}, h = g^2 t_1^{-2} + \mu^2 - t_1\}, \quad (5.12)$$

$$t_1 \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

Разобьем ее на четыре дуги $\gamma_{1,i}$, и на каждой из них перейдем к новому параметру s_1

$$\begin{aligned} \gamma_{1,1}: t_1 &\in (-\infty, t_1^C), & s_1 &= (t_1^C - t_1), \\ \gamma_{1,2}: t_1 &\in (t_1^C, 0), & s_1 &= g((t_1^C)^{-1} - (t_1)^{-1}), \\ \gamma_{1,5}: t_1 &\in (-t_1^C, \infty), & s_1 &= (t_1^C + t_1), \\ \gamma_{1,4}: t_1 &\in (0, -t_1^C), & s_1 &= g((t_1^C)^{-1} + (t_1)^{-1}). \end{aligned}$$

Тогда $s_1 \in (0, \infty)$ для каждой из них. Теперь разобьем предельное множество $\bar{\gamma}_1(\mu)$ на три кривые $\bar{\gamma}_{1,i}(\mu)$, заданные следующими формулами:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{1,1}: \{k = 1, h = -gs_1^{-1} + \mu^2\}, & s_1 \in (0, \infty), \\ \bar{\gamma}_{1,2}: \{k = 1, h = gs_1^{-1} + \mu^2\}, & s_1 \in (0, \infty), \\ \bar{\gamma}_{1,3}: \{k = 1 + g^4 s_1^{-4}, h = g^2 s_1^{-2} + \mu^2\}, & s_1 \in (0, \infty). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Это две части прямой и часть параболы. Следующая лемма показывает, что кривые $\gamma_{1,i}(g, \mu)$ сходятся поточечно к кривым $\bar{\gamma}_{1,j}(\mu)$ при $g \rightarrow 0$.

ЛЕММА 5.19. Пусть $g \rightarrow 0$, тогда следующие четыре выражения стремятся к нулю при любом фиксированном $\bar{t}_1 \in (0, \infty)$.

$$\gamma_{1,1}(s_1) - \bar{\gamma}_{1,2}(s_1), \quad \gamma_{1,2}(s_1) - \bar{\gamma}_{1,3}(s_1), \quad \gamma_{1,4}(s_1) - \bar{\gamma}_{1,3}(s_1), \quad \gamma_{1,5}(s_1) - \bar{\gamma}_{1,1}(s_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из формул (5.12), (5.13).

Рассмотрим $D_{g,0} = \gamma_1(g, 0) \cup \gamma_2(g)$. Кривая $\gamma_2(g, \mu)$ задается следующей формулой:

$$\gamma_2: \left\{ k = 8\mu^2 g^2 + (t_2 + 2\mu^2)^2 - \frac{4\mu^2(\mu^2 + t_2^2)}{t_2^2}, h = 2g^2 - \mu^2 - t_2 + \frac{\mu^2}{t_2^2} \right\}, \quad (5.14)$$

$$t_2 \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

Разобьем ее на четыре дуги $\gamma_{2,i}$ и на каждой из них перейдем к новому параметру s_2

$$\begin{aligned} \gamma_{2,1}: t_2 &\in (-\infty, t_2^C), & s_2 &= (t_2^C - t_2), \\ \gamma_{2,2}: t_2 &\in (t_2^C, 0), & s_2 &= \mu((t_2^C)^{-1} - (t_2)^{-1}), \\ \gamma_{2,5}: t_2 &\in (-t_2^C, \infty), & s_2 &= (t_2^C + t_2), \\ \gamma_{2,4}: t_2 &\in (0, -t_2^C), & s_2 &= \mu((t_2^C)^{-1} + (t_2)^{-1}). \end{aligned}$$

Тогда $\tilde{t}_2 \in (0, \infty)$ для каждой из них. Теперь разобьем предельное множество $\bar{\gamma}_2(g)$ на три кривые $\bar{\gamma}_{2,i}(g)$, заданные следующими формулами:

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_{2,1}: \{k = s_2^2, h = 2g^2 + s_2\}, \quad s_2 \in (0, \infty), \\ \bar{\gamma}_{2,2}: \{k = s_2^2, h = 2g^2 - s_2\}, \quad s_2 \in (0, \infty), \\ \bar{\gamma}_{2,3}: \{k = 0, h = 2g^2 + s_2^2\}, \quad s_2 \in (0, \infty).\end{aligned}\tag{5.15}$$

Это две части параболы и часть прямой. Следующая лемма показывает, что кривые $\gamma_{2,i}(g, \mu)$ сходятся поточечно к кривым $\bar{\gamma}_{2,j}(g)$ при $\mu \rightarrow 0$.

ЛЕММА 5.20. *Пусть $\mu \rightarrow 0$, тогда следующие четыре выражения стремятся к нулю при любом фиксированном $\tilde{t}_2 \in (0, \infty)$.*

$$\gamma_{2,1}(s_2) - \bar{\gamma}_{2,1}(s_2), \quad \gamma_{2,2}(s_2) - \bar{\gamma}_{2,3}(s_2), \quad \gamma_{2,4}(s_2) - \bar{\gamma}_{2,3}(s_2), \quad \gamma_{2,5}(s_2) - \bar{\gamma}_{2,2}(s_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из формул (5.14), (5.15).

ТЕОРЕМА 5. *При $g \rightarrow 0$ дискриминантное множество $D_{g,\mu}$ поточечно сходится к множеству $D_{0,\mu} = \bar{\gamma}_1(\mu) \cup \gamma_2(0, \mu)$, а при $\mu \rightarrow 0$ — к множеству $D_{g,0} = \gamma_1(g, 0) \cup \bar{\gamma}_2(g)$ (см. рис. 5).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение вытекает из лемм 5.19, 5.20.

Остается понять, что происходит с особыми точками. Точка возврата t_1^C при $g \rightarrow 0$ оказывается на стыке прямой и части параболы, образующих $\bar{\gamma}_1$. Аналогично, точка возврата t_2^C при $\mu \rightarrow 0$ оказывается на стыке параболы и части прямой, образующих множество $\bar{\gamma}_2$. Если две точки пересечения лежат на дугах кривой γ_1 , которые должны склеиться при $g \rightarrow 0$, и их соединяет дуга кривой γ_2 , то они должны, очевидно, также склеиться при $g \rightarrow 0$. Для случая $\mu \rightarrow 0$ ситуация такая же, только кривые γ_1, γ_2 меняются местами. Нетрудно проверить, что точки пересечения не могут стремиться к бесконечности (на плоскости $\mathbb{R}^2(k, h)$), так как они задаются корнями многочленов $A(t_1), B(t_2)$, которые не могут одновременно равняться нулю. С точками касания картина иная. При $g \rightarrow 0$ точка касания, которой соответствуют параметры (t_1^+, t_2^-) , лежит на дуге $\gamma_{1,2}$ и стремится к бесконечности. При $\mu \rightarrow 0$ точка касания, которой соответствуют параметры (t_1^-, t_2^+) , лежит на дуге $\gamma_{2,2}$ и стремится к бесконечности.

Таким образом, зная, как выглядят диаграммы D в камерах, прилегающих к координатным осям, мы можем сказать, как из них получаются диаграммы, соответствующие случаям $g \cdot \mu = 0$. Типичные бифуркации схематически изображены на рис. 7.

§ 6. Приложение 1. Методы изучения многочленов

В данной задаче нам приходится неоднократно иметь дело с корнями довольно сложных многочленов, зависящих от нескольких параметров. Для исследования структуры этих многочленов и проведения над ними алгебраических операций мы будем пользоваться пакетом символьных вычислений Wolfram

Mathematica. Приведем основные понятия, функции и алгоритмы, используемые в работе. Пусть $p(x, y, \dots)$, $q(x, y, \dots)$ – многочлены от нескольких переменных с целыми неотрицательными степенями.

1. Многочлен p разлагается на простые множители в кольце $\mathbb{Z}[x, y, \dots]$ или $\mathbb{Q}[x, y, \dots]$ при помощи функции **Factor[p]**, однако не существует алгоритма, позволяющего разложить его на множители с коэффициентами из $\mathbb{R}$.

2. НОД многочленов p , q в кольце $\mathbb{Z}[x, y, \dots]$ или $\mathbb{Q}[x, y, \dots]$ вычисляется при помощи функции **PolynomialGCD[p, q]**.

3. Если p делится на q без остатка, то многочлен r такой, что $p = r \cdot q$ вычисляется при помощи функции **Cancel[p/q]**.

Выделим переменную x и запишем p , q как многочлены от этой переменной.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0, \quad q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_1 x + b_0.$$

Заметим, что коэффициенты a_i , b_j – это не числа, а многочлены от оставшихся переменных. Обозначим через α_i корни $p(x)$, β_j – корни $q(x)$.

4. Остаток от деления многочлена $p(x)$ на $q(x)$ (мы будем писать $p(x) \bmod q(x)$) вычисляется при помощи функции **PolynomialRemainder[p, q, x]**.

5. Результат многочленов $p(x)$, $q(x)$ вычисляется при помощи функции **Resultant[p, q, x]**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Результантом* многочленов p , q называется следующий многочлен:

$$R(p, q) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j).$$

Результант $R(p, q)$ равен нулю тогда и только тогда, когда многочлены $p(x)$, $q(x)$ имеют общий корень или один из коэффициентов a_n , b_m равен нулю. В частности, если многочлены $p(x)$, $q(x)$ имеют нетривиальный НОД (степени ≥ 1 по x), то $R(p, q) = 0$ автоматически. Результант $R(p, q)$ также дает определитель соответствующей матрицы Сильвестра. Это матрица размера $(m + n) \times (m + n)$, специальным образом заполненная коэффициентами многочленов $p(x)$, $q(x)$, поэтому $R(p, q)$ является многочленом от тех же переменных, что и p , q , за исключением x . Важное для нас приложение результата – исключение переменной из системы двух полиномиальных уравнений. Если $a_n = b_m = 1$, то равенство $R(p, q) = 0$ является необходимым и достаточным условием совместности системы $p(x) = q(x) = 0$.

6. Дискриминант многочлена $p(x)$ вычисляется при помощи функции **Discriminant[p, x]**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. *Дискриминантом* многочлена p называется следующий многочлен:

$$Z(p) = a_n^{2n-2} \prod_{i < j}^n (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Из определения следует, что дискриминант $Z(p)$ равен нулю тогда и только тогда, когда многочлен $p(x)$ имеет кратный корень или коэффициент a_n равен

нулю. Дискриминант многочлена p выражается через результат многочленов p, p' (где p' – это производная многочлена p) по следующей формуле:

$$Z(p) = (-1)^{n(n-1)/2} R(p, p') a_n^{n-k-2}.$$

7. Для понижения степени в системе уравнений $p(x) = q(x) = 0$ в пакете Wolfram Mathematica не предусмотрено специальных команд, поэтому мы будем использовать новую функцию `Euclid[p,q,x]`, реализующую алгоритм, схожий с алгоритмом Евклида. Шаг алгоритма опирается на следующую очевидную лемму.

ЛЕММА 6.1. Пусть p_1, p_2 – многочлены от x такие, что $0 < \deg p_1 \leq \deg p_2$, где

$$\begin{aligned} p_1(x) &= a_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i, & p_2(x) &= b_m x^m + \sum_{i=0}^{m-1} b_i x^i, \\ p_3(x) &= x^{m-n} \cdot p_1(x) \cdot b_m - p_2(x) \cdot a_n. \end{aligned}$$

Тогда

$$p_1(x) = p_2(x) = 0 \implies p_1(x) = p_3(x) = 0, \quad \text{где } \deg p_3 < \deg p_2.$$

Таким образом, строится цепочка систем из двух полиномиальных уравнений, в которой каждая следующая система является необходимым условием для предыдущей. При этом с каждым шагом понижается степень одного из многочленов. Алгоритм останавливается, когда степень одного из них становится равна нулю. Нас интересует тот многочлен, степень которого не равна нулю. Обозначим его через $E(p, q)$. Он, очевидно, выражается через многочлены p, q

$$E(p, q) = M(x) \cdot p(x) + N(x) \cdot q(x),$$

где M, N определяются из описанного выше алгоритма. Из этой формулы следует, что если $p(x) = q(x) = 0$, то $E(p, q) = 0$. Более того, если $E(p, q)$ – многочлен степени n , то система $p(x) = q(x) = 0$ имеет не более n решений. Отсюда следует, что $E(p, q) = ax - b$ равносильно тому, что $x = b/a$ – единственное значение, при котором система $p(x) = q(x) = 0$ совместна.

Важное для нас приложение этого алгоритма – исключение переменной из системы трех полиномиальных уравнений. Если $E(p, q) = ax - b$, то $R(E(p, q), r) = 0$ является необходимым и достаточным условием того, что $x = b/a$ является единственным решением системы $p(x) = q(x) = r(x)$. Эту функцию мы реализовали на языке Wolfram Mathematica следующим образом:

```
Euclid[poly1_, poly2_, t_] :=
Module[{P1, P2, P3, Rank1, Rank2, Coef1, Coef2, q1, q2},
P1=poly1; P2=poly2; Rank1=Rank2=1;
While[Rank1 Rank2!=0,
Coef1=CoefficientList[P1, t]; Coef2=CoefficientList[P2, t];
Rank1=Length[Coef1]-1; Rank2=Length[Coef2]-1;
If[Rank1 Rank2!=0,
```

```

q1=Coef1[[Rank1+1]];q2=Coef2[[Rank2+1]];
P3=(t^(Max[0,Rank2-Rank1])P1-q2-t^(Max[0,Rank1-Rank2])P2-q1)
//Expand;
If[Rank2>Rank1,P2=P3,P1=P3]]];
If[Rank1==0,Return[Collect[P2,t]]];
If[Rank2==0,Return[Collect[P1,t]]]]];

```

§ 7. Приложение 2. Иллюстрации

В данной задаче приходится работать с большим числом сложно устроенных кривых. Некоторые из них можно изобразить с помощью компьютера, а некоторые удобно изображать схематически. Напомним, что $U = \{(g, \mu) \mid g > 0, \mu > 0\}$. Бифуркационная диаграмма Σ при $(g, \mu) \in U$ содержится в множестве D , состоящем из двух алгебраических кривых γ_1, γ_2 , которые являются линиями нулевого уровня многочленов Q_1, Q_2 соответственно.

1. На рис. 1 изображено множество Θ бифуркационных значений параметров (g, μ) в области U . Оно состоит из 5 кривых Γ_i , которые пересекаются в 7 точках. Множество Θ делит область U на 18 непересекающихся камер.

2. На рис. 2 изображена кривая γ_1 , а на рис. 3 – кривая γ_2 при $(g, \mu) \in U$. Каждая из них имеет одну точку разрыва в бесконечности и одну точку возврата (клюв).

3. На рис. 4 показано, где, относительно кривых γ_1, γ_2 , расположены области, в которых соответственно многочлены Q_1, Q_2 принимают положительные значения.

4. На рис. 5 показано, как кривая γ_1 вырождается при $g \rightarrow 0$, а кривая γ_2 – при $\mu \rightarrow 0$.

5. На рис. 6 локально (и схематически) изображены все виды бифуркаций, которые происходят с множеством D , когда точка (g, μ) перемещается внутри области U . На рис. 7 локально (и схематически) изображены те бифуркации, которые происходят с D , когда точка (g, μ) приближается к одной из осей $g = 0, \mu = 0$.

6. На рис. 8, рис. 9 схематически изображены множества D (с пунктиром) и Σ (без пунктира) для каждой из 18 камер, на которые множество Θ делит область U , а также для камер граничного случая $g = 0$: 1к, 2к, 6к, 7к, которые граничат с камерами 1, 2, 6, 7 соответственно, и для камер граничного случая $\mu = 0$: 1м, 2м, 6м, 7м, которые граничат с камерами 1, 2', 6', 7' соответственно.

Диаграммы изображены схематически, поскольку некоторые эффекты практически невозможно увидеть одновременно в реальном масштабе. Дуги кривых γ_1, γ_2 специально изогнуты так, чтобы все особые точки (т.е. пересечения, касания и возврата) оказались на одном рисунке, и было легко понять их тип, при этом все камеры были приблизительно одинакового размера для удобства работы с ними.

На рис. 8 представлены те камеры, которые попадают в область $g > \mu$, а на рис. 9 представлены те камеры, которые попадают в область $g < \mu$. Те диаграммы, которые расположены рядом, соответствуют смежным камерам. В теоремах 3, 4, 5 описаны все бифуркации множества D в области U , а также

при $g \rightarrow 0$ и $\mu \rightarrow 0$. Поэтому мы можем сказать, какие части диаграмм D переходят из одной камеры в другую, не претерпевая бифуркаций.

Серым цветом отмечены области в $\mathbb{R}^2(k, h)$, в которых в граничных случаях отсутствует образ отображения момента. Пунктирной линией отмечены те дуги, которые содержатся в дискриминантном множестве, но отсутствуют в бифуркационной диаграмме. Сплошной линией отмечены дуги, которые присутствуют в бифуркационной диаграмме. Жирной линией отмечены те дуги, которые невозможно перевести в дугу диаграммы, соответствующей одному из граничных случаев, так, чтобы они не претерпели бифуркаций (т.е. ограничивающие их особые точки не склеивались).

Рис. 1. Множество Θ :

(a) пересечение дуг, (b) к лемме 4.7, (c) камеры, (d) дуги

 Рис. 2. Кривая γ_1

 Рис. 3. Кривая γ_2

Рис. 4. Закрашены области, в которых $Q_1 > 0$ и $Q_2 > 0$ при $g = \mu = 0.2$

Рис. 5. Склейка дуг D при $g \cdot \mu = 0$

Рис. 6. Перестройки дискриминантного множества D при $g \cdot \mu \neq 0$:

- (a) перестройка, соответствующая Γ_1 ,
- (b) перестройка, соответствующая Γ_2, Γ_3 ,
- (c) перестройка, соответствующая Γ_4, Γ_5

Рис. 7. Перестройки дискриминантного множества D при $g \cdot \mu = 0$:
 (a) точки касания, (b) точки пересечения, (c) точки возврата

Рис. 8. Множества D (с пунктиром), Σ (без). Жирным отмечены дуги, для которых отсутствуют аналогичные дуги на диаграммах, соответствующих граничным случаям $g = 0$ и $\mu = 0$

Рис. 9. Множества D (с пунктиром), Σ (без). Жирным отмечены дуги, для которых отсутствуют аналогичные дуги на диаграммах, соответствующих граничным случаям $g = 0$ и $\mu = 0$

Список литературы

- [1] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, 2, Изд-во УдГУ, Ижевск, 1999; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, v. 1, 2, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 2004.
- [2] Г. Г. Аппельрот, “Не вполне симметричные тяжелые гироскопы”, *Движение твердого тела вокруг неподвижной точки*, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1940, 61–155.
- [3] М. П. Харламов, *Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела*, Изд-во ЛГУ, Л., 1988.
- [4] А. Т. Фоменко, “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем”, *Докл. АН СССР*, **287**:5 (1986), 1071–1075; англ. пер.: A. T. Fomenko, “Morse theory of integrable Hamiltonian systems”, *Soviet Math. Dokl.*, **33**:2 (1986), 502–506.
- [5] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, “Теория типа Морса для интегрируемых гамильтоновых систем с ручными интегралами”, *Матем. заметки*, **43**:5 (1988), 663–671; англ. пер.: S. V. Matveev, A. T. Fomenko, “Morse-type theory for integrable Hamiltonian systems with tame integrals”, *Math. Notes*, **43**:5 (1988), 382–386.
- [6] А. Т. Фоменко, “Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:6 (1986), 1276–1307; англ. пер.: A. T. Fomenko, “The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability”, *Math. USSR-Izv.*, **29**:3 (1987), 629–658.
- [7] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **52**:2 (1988), 378–407; англ. пер.: A. T. Fomenko, Kh. Tsishang, “On typical topological properties of integrable Hamiltonian systems”, *Math. USSR-Izv.*, **32**:2 (1989), 385–412.
- [8] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:3 (1990), 546–575; англ. пер.: A. T. Fomenko, Kh. Tsishang, “A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom”, *Math. USSR-Izv.*, **36**:3 (1991), 567–596.
- [9] А. Т. Фоменко, “Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю”, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:4 (1988), 38–51; англ. пер.: A. T. Fomenko, “Topological invariants of Liouville integrable Hamiltonian systems”, *Funct. Anal. Appl.*, **22**:4 (1988), 286–296.
- [10] А. Т. Фоменко, “Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем”, *УМН*, **44**:1 (1989), 145–173; англ. пер.: A. T. Fomenko, “The symplectic topology of completely integrable Hamiltonian systems”, *Russian Math. Surveys*, **44**:1 (1989), 181–219.
- [11] А. В. Браилов, А. Т. Фоменко, “Топология интегральных подмногообразий вполне интегрируемых гамильтоновых систем”, *Матем. сб.*, **134**(176):3(11) (1987), 375–385; англ. пер.: A. V. Brailov, A. T. Fomenko, “The topology of integral submanifolds of completely integrable Hamiltonian systems”, *Math. USSR-Sb.*, **62**:2 (1989), 373–383.
- [12] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, В. В. Шарко, “Круглые функции Морса и изоэнергетические поверхности интегрируемых гамильтоновых систем”, *Матем. сб.*, **135**(177):3 (1988), 325–345; англ. пер.: S. V. Matveev, A. T. Fomenko, V. V. Sharko, “Round Morse functions and isoenergy surfaces of integrable Hamiltonian systems”, *Math. USSR-Sb.*, **63**:2 (1989), 319–336.
- [13] А. В. Болсинов, С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, “Двумерные римановы метрики с интегрируемым геодезическим потоком. Локальная и глобальная геометрия”, *Матем. сб.*, **189**:10 (1998), 5–32; англ. пер.: A. V. Bolsinov, V. S. Matveev,

- A. T. Fomenko, “Two-dimensional Riemannian metrics with integrable geodesic flows. Local and global geometry”, *Sb. Math.*, **189**:10 (1998), 1441–1466.
- [14] H. M. Yehia, “New integrable cases in the dynamics of rigid bodies”, *Mech. Res. Comm.*, **13**:3 (1986), 169–172.
- [15] X. М. Яхья, “Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **4** (1987), 88–90.
- [16] М. П. Харламов, “Топологический анализ классических интегрируемых систем в динамике твердого тела”, *Докл. АН СССР*, **273**:6 (1983), 1322–1325; англ. пер.: М. Р. Kharlamov, “Topological analysis of classical integrable systems in the dynamics of the rigid body”, *Soviet Math. Dokl.*, **28**:3 (1983), 802–805.
- [17] М. П. Харламов, “Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской”, *ПММ*, **47**:6 (1983), 922–930; англ. пер.: М. Р. Kharlamov, “Bifurcation of common levels of first integrals of the Kovalevskaya problem”, *J. Appl. Math. Mech.*, **47**:6 (1983), 737–743.
- [18] А. В. Болсинов, П. Х. Рихтер, А. Т. Фоменко, “Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской”, *Матем. сб.*, **191**:2 (2000), 3–42; англ. пер.: A. V. Bolsinov, P. H. Richter, A. T. Fomenko, “The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top”, *Sb. Math.*, **191**:2 (2000), 151–188.
- [19] П. Е. Рябов, М. П. Харламов, “Бифуркации первых интегралов в случае Ковалевской–Яхьи”, *Регулярная и хаотическая динамика*, **2**:2 (1997), 25–40.
- [20] П. Е. Рябов, *Бифуркационное множество задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Ковалевской–Яхьи*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, М., МГУ, 1997.
- [21] П. В. Морозов, *Лиувиллева классификация некоторых интегрируемых систем механики твердого тела*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 2006.
- [22] А. А. Ошемков, “Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела”, *Тр. сем. по вект. и тенз. анализу*, **25**:2 (1993), 23–109.

П. П. Андреянов (P. P. Andreyanov)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: andreyanov.pp@gmail.com

Поступила в редакцию

25.03.2011

К. Е. Душин (K. E. Dushin)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: kirilldushin@ya.ru