Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Суетин, О сходимости чебышёвских непрерывных дробей для эллиптических функций, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 12, 63–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm787>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 11:23:42

УДК 517.53

С. П. Суетин

О сходимости чебышёвских непрерывных дробей для эллиптических функций

В работе получено обобщение классической теоремы Дюма о поведении чебышёвской непрерывной дроби, соответствующей голоморфной в точке $z = \infty$ эллиптической функции $f(z) = \sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)} - z^2 + z(e_1 + \cdots + e_4)/2$, на некоторый достаточно общий класс эллиптических функций. Поведение чебышёвских непрерывных дробей, соответствующих функциям из этого класса, охарактеризовано в терминах, связанных с взаимным расположением точек ветвления $e_1, \dots, e_4$. Доказательство основано на изучении свойств решения определенной краевой задачи Римана на эллиптической римановой поверхности.

Библиография: 23 названия.

§ 1. Введение

1. Исследуя [1] в 1855 году задачу оптимального приближенного восстановления функции по ее значениям в конечном числе узлов на вещественной прямой, П. Л. Чебышёв дал точный ответ в терминах параметров непрерывной (“чебышёвской”) дроби вида

$$\frac{b_1}{z - a_1} - \frac{b_2}{z - a_2} - \cdots - \frac{b_n}{z - a_n} - \cdots, \quad (1)$$

которая строится непосредственно по лорановским коэффициентам s_k , $k = 0, 1, \dots$, разложения в ряд в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ функции вида

$$\hat{\mu}(z) := \int_S \frac{d\mu(x)}{z - x}, \quad (2)$$

где μ — положительная борелевская мера с носителем $S \Subset \mathbb{R}$, состоящим из бесконечного множества точек, s_k — ее моменты (для таких функций все $b_n \neq 0$). Как хорошо известно, n -я подходящая дробь $C_n = P_n/Q_n$ для чебышёвской дроби (1) обладает свойством “касания” функции $\hat{\mu}$ в точке $z = \infty$:

$$(\hat{\mu} - C_n)(z) = O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00564), Программы поддержки ведущих научных школ России (грант № НШ-1551.2003.1) и Программы РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

Тем самым, C_n совпадает с диагональной аппроксимацией Паде $[n/n]_{\hat{\mu}}$ функции $\hat{\mu}$, полиномы Q_n оказываются ортогональными относительно меры μ на S , а сама непрерывная дробь (1) как целое и есть вся последовательность $\{[n/n]_{\hat{\mu}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ диагональных аппроксимаций Паде для функции $\hat{\mu}$. В классической теореме Маркова [2] утверждается равномерная сходимость чебышёвской непрерывной дроби (1), а тем самым, и всей последовательности $\{[n/n]_{\hat{\mu}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ к $\hat{\mu}$ вне $\hat{S}$ — выпуклой оболочки S . Сходимость всей последовательности $\{[n/n]_{\hat{\mu}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ вне S , вообще говоря, не имеет места, поскольку в случае, когда S состоит из нескольких (непересекающихся) отрезков, в лакунах между этими отрезками при некоторых n располагаются нули ортогональных полиномов Q_n , т.е. полюсы рациональных функций $[n/n]_{\hat{\mu}}$.

Случай одной лакуны принято называть эллиптическим: соответствующие ему ортогональные на двух отрезках полиномы изучались Ахиезером (см. [3], а также [4] и [5]), а асимптотическое поведение Q_n было описано им в терминах эллиптических функций.

В 1908 году Дюма [6] (см. также [7]) исследовал поведение чебышёвской непрерывной дроби для квадратного корня из полинома четвертой степени с простыми, вообще говоря, комплексными корнями. Точнее, пусть функция $f \in \mathcal{H}(\infty)$ имеет вид

$$f(z) = \sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)} - z^2 + \frac{e_1 + \cdots + e_4}{2}z, \quad (3)$$

где точки $e_1, \dots, e_4 \in \mathbb{C}$ попарно различны и выбрана та ветвь корня, главный член которой в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$ равен z^2 (тем самым $f \in \mathcal{H}(\infty)$). Соответствующая (3) чебышёвская непрерывная дробь представляет собой последовательность диагональных аппроксимаций Паде $\{[n/n]_f\}_{n \in \mathbb{N}}$ функции f в бесконечно удаленной точке $z = \infty$. Напомним, что $[n/n]_f := P_n/Q_n$, где $P_n, Q_n \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P_n, \deg Q_n \leq n$, $Q_n \neq 0$ и

$$R_n(z) := (Q_n f - P_n)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Функция R_n называется *функцией остатка*. В соответствии с общей теоремой Шталя [8] о сходимости аппроксимаций Паде алгебраических функций для функции (3) имеем: *последовательность $[n/n]_f$ сходится к f по (логарифмической) емкости внутри области $D_f = \overline{\mathbb{C}} \setminus S$, где $S = S_f$ — так называемый компакт минимальной емкости [9]–[11], соответствующий алгебраической функции $\sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)}$: выбранная выше ветвь корня (а вместе с ней и функция f) продолжается из окрестности точки $z = \infty$ в дополнение к S как голоморфная (т.е. однозначная аналитическая) функция, а из всех компактов, обладающих таким свойством, S имеет наименьшую емкость. Как известно [10], [11], множество $\overline{\mathbb{C}} \setminus S$ связно, а S состоит из конечного числа кусочно аналитических дуг, причем для эллиптического случая компакт S или связан, или состоит из двух непересекающихся аналитических дуг.*

В [6] Дюма изучил вопрос о поведении чебышёвской непрерывной дроби для функции (3) в случае, когда S состоит из двух дуг: $S = S_1 \sqcup S_2$. Он показал, в частности, что если определенные числовые параметры, связанные только с расположением точек $e_1, \dots, e_4$, рационально независимы, то *множество полюсов*

подходящих дробей C_n всюду плотно в $\overline{\mathbb{C}}$, т.е. последовательность $\{C_n\}$ не может равномерно сходиться ни в какой области $\Omega \in D$ (отметим, что f продолжается в D как голоморфная функция). Поскольку $C_n = [n/n]_f$, то результат Дюма о поведении полюсов подходящих дробей есть фактически утверждение об асимптотике знаменателей Q_n . Полиномы Q_n (неэрмитово) ортогональны на $S = S_1 \sqcup S_2$ с весом $\sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)}$, $\zeta \in S$. Если, в частности, все $e_1, \dots, e_4 \in \mathbb{R}$, то S состоит из двух отрезков, а Q_n – полиномы Ахизера [3]–[5].

Для функции $\sqrt{z^2 - 1} - z \in \mathcal{H}(\infty)$ знаменатели подходящих дробей – полиномы Чебышёва II-го рода, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $\sqrt{1 - x^2}$. Аналогично, разложение функции $1/\sqrt{z^2 - 1}$ в чебышёвскую непрерывную дробь приводит к классическим полиномам Чебышёва (I-го рода), ортогональным с весом $1/\sqrt{1 - x^2}$. Наконец, для функции вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\rho(x)}{\sqrt{1 - x^2}} \frac{dx}{z - x},$$

где $\rho \neq 0$ и непрерывна на $[-1, 1]$, соответствующие полиномы Q_n ортогональны на $[-1, 1]$ относительно $\rho(x)/\sqrt{1 - x^2}$ (см. [12]). При условии, что ρ удовлетворяет условию Дини–Липшица, “сильная” асимптотика полиномов Q_n была изучена С. Н. Бернштейном (см. [12], а также [13; гл. XII]) с помощью разработанного им параллельно с Г. Сегё аппроксимационного метода.

По аналогии с классической ситуацией мы рассматриваем здесь класс функций вида

$$\hat{\rho}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_S \frac{\rho(\zeta)}{\sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)}} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad (5)$$

где под $\sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)}$, $\zeta \in S = S_1 \sqcup S_2$, понимаются граничные значения на S выбранной в D ветви корня; комплекснозначная функция $\rho(\zeta) \neq 0$ и голоморфна на S (т.е. ρ – комплекснозначная вещественно аналитическая функция); такую функцию ρ в дальнейшем будем называть *допустимым весом*. Если $\rho \in \mathbb{C}(\zeta)$ и не имеет на S ни нулей, ни полюсов, то $\hat{\rho}$ – эллиптическая функция: $\hat{\rho}(z) = r_1(z) + r_2(z)/\sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)}$, где $r_1, r_2 \in \mathbb{C}(z)$, $r_2 \neq 0, \infty$ на S .

Оказывается, поведение последовательности диагональных аппроксимаций Падэ для функций класса (5) полностью определяется взаимным расположением точек $e_1, \dots, e_4$ и, тем самым, качественно совпадает с поведением непрерывной дроби для конкретной функции (3).

2. Пусть $g(z, \infty)$ – функция Грина области D с особенностью в точке $z = \infty$, $\tilde{g}(z, \infty)$ – гармонически сопряженная к ней функция, $G(z, \infty) = g(z, \infty) + i\tilde{g}(z, \infty)$ – комплексная функция Грина. Область $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus (S_1 \sqcup S_2)$ двусвязна, поэтому G – многозначная функция. Все периоды функции G чисто мнимые, причем лишь два из них независимы. В качестве одного периода можно выбрать величину $-2\pi i \omega_1(\infty)$, где $\omega_1(z) = \omega(S_1, z; D)$ – гармоническая мера дуги S_1 (в точке $z \in D$) относительно области D , $0 < \omega_1(z) < 1$. Обозначим другой период через $2\pi i \tau_1(\infty)$, $\tau_1(\infty) \in \mathbb{R}$. Из [14; формула (26)] вытекает, что два вещественных параметра,

введенных Дюма для характеристики расположения точек $e_1, \dots, e_4$, совпадают с $\omega_1(\infty)$ и $\tau_1(\infty) \pmod{1}$ (см. ниже формулу (23)).

Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА. Пусть (как и в работе Дюма [6]) множество S состоит из двух непересекающихся дуг. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Если величины $\tau_1(\infty)$, $\omega_1(\infty)$ и 1 рационально независимы, то для любого допустимого веса ρ полюсы аппроксимаций Паде $[n/n]_{\hat{\rho}}$ всюду плотны в $\overline{\mathbb{C}}$, т.е. последовательность $\{[n/n]_{\hat{\rho}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ не может равномерно сходиться ни в какой области $\Omega \in D$.

2) Если $\tau_1(\infty), \omega_1(\infty) \in \mathbb{Q}$, то для любого допустимого веса ρ существует конечное множество Z точек из D таких, что множество предельных точек полюсов $[n/n]_{\hat{\rho}}$ совпадает с $S \cup Z$, а аппроксимации Паде $[n/n]_{\hat{\rho}}$ сходятся к $\hat{\rho}$ равномерно внутри области $D \setminus Z$.

3) Если величины $\tau_1(\infty)$, $\omega_1(\infty)$ и 1 рационально зависимы, но хотя бы одна из величин $\tau_1(\infty)$, $\omega_1(\infty)$ иррациональна, то для любого допустимого веса ρ существует конечное число непересекающихся дуг $\gamma_1, \dots, \gamma_k \subset D$ таких, что множество предельных точек полюсов $[n/n]_{\hat{\rho}}$ совпадает с $S \sqcup \gamma_1 \sqcup \dots \sqcup \gamma_k$, а аппроксимации Паде $[n/n]_{\hat{\rho}}$ сходятся к $\hat{\rho}$ равномерно внутри множества $D \setminus \bigcup_{j=1}^k \gamma_j$.

Доказательство этого результата проводится без использования аппроксимационного метода Бернштейна–Сегё по следующей схеме, впервые примененной в [14] (см. также [15] и [16]) для случая гиперэллиптических функций:

- i) существует обладающее специальными свойствами решение проблемы Якоби обращения абелевых интегралов $\Rightarrow$
- ii) существует решение определенной краевой задачи Римана $\Rightarrow$
- iii) справедливо сингулярное интегральное уравнение Наттолла на ортогональные полиномы $Q_n \Rightarrow$
- iv) существует формула для сильной асимптотики ортогональных полиномов Q_n и функций остатка $R_n \Rightarrow$
- v) имеется полная информация об асимптотическом поведении свободных полюсов рациональных функций $[n/n]_{\hat{\rho}}$ (нулей полиномов Q_n) и их свободных точек интерполяции (свободных нулей функций остатка R_n).

Отметим, что для допустимых весов естественным образом [14] вводятся классы эквивалентности. Как нетрудно увидеть из приводимого ниже доказательства основного результата настоящей работы (см. §§ 3–5), множество Z в 2) и набор дуг $\{\gamma_j\}$ в 3) зависят лишь от этих классов.

Также непосредственно из доказательства вытекает, что приведенный результат остается справедливым и для более общего случая ортогональности с весом $\rho(\zeta)P(\zeta)/\sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)}$, где $P \in \mathbb{C}[z]$ и делит полином $(z - e_1) \cdots (z - e_4)$.

Наконец, отметим самое интересное следствие доказательства (см. ниже § 4, п. 3). Пусть

$$\tilde{f}(z) = -\sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)} - z^2 + \frac{e_1 + \cdots + e_4}{2}z$$

— другая ветвь функции (3), Ω — множество точек $z \in D$ таких, что $[n/n]_f(z) = f(z)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{\Omega}$ — аналогичное множество точек $z \in D$ для функции $\tilde{f}$: $[n/n]_{\tilde{f}}(z) = \tilde{f}(z)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда *если величины $\tau_1(\infty)$, $\omega_1(\infty)$ и 1 рационально независимы, то $\Omega' = \tilde{\Omega}' = \overline{\mathbb{C}}$, т.е. точки, в которых диагональные аппроксимации Паде, построенные по функции f , интерполируют функцию $\tilde{f}$ — другую ветвь функции f , всюду плотны в $\overline{\mathbb{C}}$.*

Изложим схему построения работы. В §2 приводятся основные сведения из теории абелевых дифференциалов на эллиптических римановых поверхностях и доказываются некоторые вспомогательные результаты, которые используются в следующих параграфах. Третий параграф посвящен вопросу существования и свойствам решения определенной краевой задачи Римана на эллиптической римановой поверхности. Там же получено явное выражение — в терминах эллиптических абелевых интегралов — для этого решения Ψ . В четвертом параграфе показано, что свойства этой функции $\Psi = \Psi_n$, в частности асимптотика ее единственного свободного нуля, оказываются тесно связанными с интересующими нас вопросами: асимптотикой *свободного* нуля функции остатка R_n и *блуждающего* нуля полинома Q_n ; показано, что в условиях теоремы существует не более одного блуждающего нуля полинома Q_n (по поводу терминологии см. [16; §1, п. 2], где имеются дальнейшие ссылки). Этот анализ проводится в работе с помощью метода, основанного на сингулярном интегральном уравнении Наттолла и заменяющего собой классический аппроксимационный метод Бернштейна–Сегё. Наконец, в §5 исследуется асимптотическое поведение единственного свободного нуля функции Ψ в зависимости от арифметических свойств чисел $\tau_1(\infty)$ и $\omega_1(\infty)$.

§2. Вспомогательные результаты

1. Доказательство теоремы основано на исследовании свойств решения некоторой краевой задачи Римана на эллиптической римановой поверхности — подходе, восходящем к Наттоллу [9], [17] и развитом затем в [14]–[16]. В этой связи в настоящем параграфе мы изложим кратко основные понятия, связанные с теорией абелевых дифференциалов на эллиптической римановой поверхности (подробности см. в [18]–[21]).

Пусть $\mathfrak{R}$ — эллиптическая риманова поверхность, заданная уравнением $w^2 = (z - e_1) \cdots (z - e_4)$. Будем считать, что $\mathfrak{R}$ реализована как двулистное (разветвленное) накрытие над $\overline{\mathbb{C}}$ следующим образом. Два листа $\mathfrak{R}$ — это два экземпляра $\overline{\mathbb{C}}$, разрезанных по $S = S_1 \sqcup S_2$. Заданная на дугах $S_1 = \arg(e_1, e_2)$ и $S_2 = \arg(e_3, e_4)$ ориентация (“от e_1 к e_2 ” и “от e_3 к e_4 ”) естественным образом определяет “верхний” и “нижний” берега разрезов. Переход с одного листа на другой осуществляется по этим разрезам, “склеенным накрест”. Тем самым, компакт S соответствует на $\mathfrak{R}$ пара непересекающихся замкнутых кривых $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \sqcup \mathcal{L}_2$. Определим однозначную в $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus S$ ветвь корня $\sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)}$ соотношением

$$\frac{\sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)}}{z^2} \rightarrow 1, \quad z \rightarrow \infty.$$

Пусть точки $\mathbf{z} = (z, w)$ римановой поверхности, принадлежащие первому (открытому) листу $D^{(1)}$, определяются соотношением $w = \sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)}$, а точки второго листа $D^{(2)}$ — соотношением $w = -\sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)}$. Имеем $\mathfrak{R} = D^{(1)} \sqcup \mathcal{L} \sqcup D^{(2)}$. Каждый из листов — двусвязная область, первый лист $D^{(1)}$ мы будем отождествлять с “физической” многосвязной областью $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus S$. Для явного указания, на каком именно листе римановой поверхности лежит точка $\mathbf{z}$, мы будем часто использовать запись $z^{(1)}$ при $\mathbf{z} \in D^{(1)}$ и $z^{(2)}$ при $\mathbf{z} \in D^{(2)}$, причем в соответствии с нашим соглашением об отождествлении D и $D^{(1)}$ будем считать, что $z = z^{(1)}$. Функция w однозначна на $\mathfrak{R}$: $w(\mathbf{z}) = \sqrt{h(z)}$ при $\mathbf{z} = z^{(1)}$ и $w(\mathbf{z}) = -\sqrt{h(z)}$ при $\mathbf{z} = z^{(2)}$, где $h(z) = (z - e_1) \cdots (z - e_4)$. Для $\mathbf{z} = z^{(1)}$ будем часто писать просто $w(z)$ вместо $w(\mathbf{z})$; тем самым, приобретает смысл и запись $w^+(\zeta)$, $\zeta \in S$. Каноническая проекция $\pi: \mathfrak{R} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ определяется соотношением $\pi(\mathbf{z}) = z$, в частности $\pi(D^{(1)}) = \pi(D^{(2)}) = D$. Две различные точки $\mathbf{z}$ и ζ будем называть сопряженными и писать $\zeta = \mathbf{z}^*$, если $\pi(\mathbf{z}) = \pi(\zeta)$; имеем $\pi(\mathcal{L}) = S$.

Положительным обходом кривой $\mathcal{L}$ на $\mathfrak{R}$ будем считать такой, при котором область $D^{(1)}$ остается слева, а область $D^{(2)}$ — справа; соответствующее обозначение — $\mathcal{L}^+$. Предельное положение ζ точки $\mathbf{z} \in D^{(1)}$ (соответственно $\mathbf{z} \in D^{(2)}$) на $\mathcal{L}$ будем обозначать $\zeta +$ или $\zeta^{(1)} +$ (соответственно $\zeta -$ или $\zeta^{(2)} -$). Если в $D^{(1)}$ задана функция $F(\mathbf{z})$, то под $F(\zeta +)$ (или $F(\zeta^{(1)} +)$) понимаются ее предельные значения, если они существуют, в точке $\zeta \in \mathcal{L}$; аналогичный смысл придается и $F(\zeta -)$ (а также и $F(\zeta^{(2)} -)$).

2. Первый из контуров $\mathcal{L}_1$ выберем в качестве базисного a -цикла $\mathbf{a}_1$, а затем стандартным образом дополним его b -циклом $\mathbf{b}_1$ так, что $\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{b}_1 = 1$ и циклы $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1\}$ образуют базис гомологий на $\mathfrak{R}$. Для произвольного голоморфного абелева дифференциала $d\Omega$ на $\mathfrak{R}$ функция $\int^{\mathbf{z}} d\Omega$ определена однозначно по модулю его a - и b -периодов: $\oint_{\mathbf{a}_1} d\Omega$ и $\oint_{\mathbf{b}_1} d\Omega$. Пусть $d\Omega_1$ — a -нормированный голоморфный

дифференциал: $\oint_{\mathbf{a}_1} d\Omega_1(\zeta) = 1$. Тогда $\oint_{\mathbf{b}_1} d\Omega_1(\zeta) = B_1$, где $\text{Im } B_1 > 0$.

Факторпространство $\mathbb{C}/\{n + mB_1\}$ по целочисленной решетке, $n, m \in \mathbb{Z}$, является 2-мерным вещественным тором $\mathbb{T}^2$ и называется многообразием Якоби $\Pi = \text{Jac } \mathfrak{R}$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Любое комплексное число v однозначно представимо в виде $v = x + yB_1 + n + mB_1 = x + yB_1 \pmod{\text{периодов}}$, $0 \leq x, y < 1$, $n, m \in \mathbb{Z}$; иногда для краткости вместо сравнения по модулю периодов дифференциала $d\Omega_1$ мы будем писать просто $v \equiv x + yB_1$. Вещественные числа $x, y \in [0, 1)$ будем называть соответственно x - и y -координатами v в многообразии Якоби (точнее, x - и y -координатами класса $[v]$ всех эквивалентных v векторов). Пусть $\mathbf{z}_0$ — некоторая фиксированная точка римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Функция

$$A(\mathbf{z}) = \int_{\mathbf{z}_0}^{\mathbf{z}} d\Omega_1 \pmod{\text{периодов}}$$

определяет отображение Абеля $A: \mathfrak{R} \rightarrow \text{Jac } \mathfrak{R}$.

Если задано комплексное число $v \in \text{Jac } \mathfrak{R}$, то задача нахождения точки $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}$, для которой

$$A(\mathbf{z}) = v \pmod{\text{периодов}}, \quad (6)$$

называется проблемой обращения Якоби. Как хорошо известно, для эллиптической римановой поверхности проблема обращения Якоби всегда разрешима и притом единственным образом.

3. Для любых двух различных точек $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$ существует абелев дифференциал третьего рода, голоморфный всюду на $\mathfrak{R}$, за исключением этих двух точек, в которых он имеет простые полюсы с вычетами соответственно 1 и -1 ; такой дифференциал называется *нормальным*. Нормальный дифференциал будет определен однозначно, если потребовать, чтобы его a -период был равен нулю; будем называть такой дифференциал *a -нормированным* абелевым дифференциалом третьего рода и обозначать $d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z})$; для a -нормированного дифференциала $d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z})$ будем иногда для краткости использовать обозначение $d\Omega(\mathbf{z})$. Другой способ однозначно задать (нормировать) дифференциал третьего рода – потребовать, чтобы все его периоды были чисто мнимыми. Таким является, например, дифференциал комплексной функции Грина $G_D(z, \infty) = g_D(z, \infty) + i\tilde{g}_D(z, \infty)$ (здесь $\tilde{g}_D(z, \infty)$ – функция, гармонически сопряженная к функции Грина $g_D(z, \infty)$), соответствующей компакту минимальной емкости S . Хорошо известно, что

$$G_D(z, \infty) = \int_{e_1}^z \frac{p_1(\zeta)}{\sqrt{h(\zeta)}} d\zeta, \quad z \in D = \overline{\mathbb{C}} \setminus S,$$

где $h(z) = (z - e_1) \cdots (z - e_4)$, $p_1(z) = p_1(z; h) = z - c$ – полином, нуль которого при условии $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ лежит вне S . Дифференциал $dG(\mathbf{z}) = dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) = p_1(z) dz/w(\mathbf{z})$ определен на всей римановой поверхности $\mathfrak{R}$, имеет чисто мнимые периоды и простые полюсы в точках $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ и $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$ с вычетами соответственно -1 и 1 . Тем самым, функция $u(\mathbf{z}) = \operatorname{Re} \int_{e_1}^{\mathbf{z}} dG(\zeta)$ – однозначная гармоническая функция на $\mathfrak{R} \setminus \{\infty^{(1)}, \infty^{(2)}\}$, линия уровня которой $\{\mathbf{z} : u(\mathbf{z}) = 0\}$ совпадает с $\mathcal{L}$, а $g_D(z, \infty) = u(z^{(1)})$, $z \in D$. Нам понадобится следующее соотношение [14; (26)] между дифференциалом $dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z})$ и a -нормированным дифференциалом $d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z})$:

$$dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) + 2\pi i \omega_1(\infty) d\Omega_1(\mathbf{z}) + d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) = 0; \quad (7)$$

здесь $\omega_1(z)$ – гармоническая мера S_1 относительно D (в точке $z \in D$).

Как известно, a -период дифференциала комплексной функции Грина связан с гармонической мерой ω_1 следующим образом:

$$\oint_{\mathbf{a}_1} dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) = -2\pi i \omega_1(\infty).$$

Положим по аналогии

$$\tau_1(\infty) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{b}_1} dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) \in \mathbb{R}.$$

Приведем также используемые в дальнейшем “явные” представления для некоторых a -нормированных абелевых дифференциалов третьего рода:

$$\begin{aligned} d\Omega(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}; \mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{w(\mathbf{z}) + w(\mathbf{z}_1)}{z - z_1} \frac{dz}{w(\mathbf{z})} - \frac{w(\mathbf{z}) + w(\mathbf{z}_2)}{z - z_2} \frac{dz}{w(\mathbf{z})} + \frac{c_1}{w(\mathbf{z})} dz \right\}, \\ d\Omega(z_1^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \frac{w(\mathbf{z}) + w(\mathbf{z}_1)}{z - z_1} \frac{dz}{w(\mathbf{z})} - \frac{1}{2} \frac{z - c_2}{w(\mathbf{z})} dz, \\ d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) &= -\frac{z - c_3}{w(\mathbf{z})} dz, \end{aligned} \quad (8)$$

где $c_j \in \mathbb{C}$.

Рассеченная риманова поверхность $\tilde{\mathfrak{R}}$ получается из $\mathfrak{R}$ проведением сечений по базисным циклам $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$ поверхности: $\tilde{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R} \setminus (\mathbf{a}_1 \cup \mathbf{b}_1)$; $\tilde{\mathfrak{R}}$ связна (переход с одного листа на другой осуществляется через $\mathcal{L}_2$) и односвязна. Для b -периода a -нормированного абелева дифференциала $d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z})$ справедливо соотношение Римана:

$$\int_{\mathbf{b}_1} d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \zeta) = -2\pi i \int_{\mathbf{z}_1}^{\mathbf{z}_2} d\Omega_1(\zeta), \quad (9)$$

где интеграл берется по произвольному пути, соединяющему точки $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ и лежащему в $\mathfrak{R}$.

4. Дивизором d на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ будем называть формальный символ $d = \nu_1 \mathbf{z}_1 + \nu_2 \mathbf{z}_2 + \dots + \nu_m \mathbf{z}_m$, где $\mathbf{z}_j \in \mathfrak{R}$, $\nu_j \in \mathbb{Z}$; $|d| = \nu_1 + \dots + \nu_m$ — степень дивизора d ; если точки $\mathbf{z}_j$ попарно различны и все $\nu_j > 0$, то дивизор d целый. Произвольной функции F , мероморфной на $\mathfrak{R}$ (тем самым, $F \in \mathbb{C}(z, w)$), т.е. $F = r_1 + r_2 w$, $r_1, r_2 \in \mathbb{C}(z)$, сопоставим дивизор (F) ее нулей и полюсов: $(F) = \nu_1 \mathbf{z}_1 + \dots + \nu_\ell \mathbf{z}_\ell - \mu_1 \zeta_1 - \dots - \mu_m \zeta_m$, где $\mathbf{z}_j, \zeta_j \in \mathfrak{R}$ — соответственно нули и полюсы F , а $\nu_j, \mu_j \geq 0$ — их кратности; такие дивизоры называются главными. По теореме Абеля дивизор $d = \nu_1 \mathbf{z}_1 + \dots + \nu_\ell \mathbf{z}_\ell - \mu_1 \zeta_1 - \dots - \mu_m \zeta_m$ — главный тогда и только тогда, когда $|d| = 0$ и

$$\sum_{j=1}^{\ell} \nu_j \Omega_1(\mathbf{z}_j) - \sum_{j=1}^m \mu_j \Omega_1(\zeta_j) = 0 \pmod{\text{периодов}}, \quad \text{где } \Omega_1(\mathbf{z}) = \int_{e_3}^{\mathbf{z}} d\Omega_1(\zeta).$$

Два дивизора d_1 и d_2 эквивалентны, если их разность $d_1 - d_2$ — главный дивизор.

5. Предположим, что на $\mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$ задана (кусочно) мероморфная функция $F(\mathbf{z})$, имеющая полюсы только в бесконечно удаленных точках $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ и $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$ каждый порядка ≤ 1 , предельные значения которой на $\mathcal{L}$ существуют и удовлетворяют условию

$$F(\zeta+) - F(\zeta-) = \chi(\zeta), \quad \zeta \in \mathcal{L}, \quad (10)$$

где функция χ голоморфна на $\mathcal{L}$. Тогда [18] с помощью мероморфного абелева дифференциала

$$d\Omega(\mathbf{z}; \zeta) = \frac{1}{2} \frac{w(\zeta) + w(\mathbf{z})}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{w(\zeta)}, \quad (11)$$

заданного на римановой поверхности $\mathfrak{R}$, функция $F(\mathbf{z})$ восстанавливается по граничным условиям (10) интегралом типа Коши:

$$F(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \chi(\zeta) d\Omega(\mathbf{z}; \zeta) + p(z), \quad \mathbf{z} \notin \mathcal{L}, \quad (12)$$

где $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg p \leq 1$, а контур $\mathcal{L}^+$ ориентирован положительно относительно области $D^{(1)}$ — область остается слева при обходе по контуру.

Действительно, легко проверяются следующие свойства дифференциала (11):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} P(\zeta) d\Omega(\mathbf{z}; \zeta) = \begin{cases} -P(z)/2, & \mathbf{z} \in D^{(1)}, \\ P(z)/2, & \mathbf{z} \in D^{(2)}, \end{cases} \quad P \in \mathbb{C}[z], \quad \deg P \leq 1;$$

дифференциал $d\Omega(\mathbf{z}; \zeta)$ имеет полюсы только в точках $\mathbf{z}, \infty^{(1)}, \infty^{(2)}$ с вычетами соответственно 1, $-1/2$, $-1/2$.

Если функция χ голоморфна на $\mathcal{L}$, то функция

$$F_\chi(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \chi(\zeta) d\Omega(\mathbf{z}; \zeta), \quad \mathbf{z} \notin \mathcal{L},$$

обладает следующими свойствами:

- 1) F_χ голоморфна в $D^{(1)} \setminus \{\infty^{(1)}\}$ и $D^{(2)} \setminus \{\infty^{(2)}\}$;
- 2) $F_\chi(\mathbf{z}) = O(z)$ при $\mathbf{z} \rightarrow \infty^{(1)}$ или $\mathbf{z} \rightarrow \infty^{(2)}$;
- 3) справедлива формула Сохоцкого

$$F_\chi(\zeta_0 \pm) = \pm \frac{1}{2} \chi(\zeta_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \chi(\zeta) d\Omega(\zeta_0; \zeta)$$

(последний интеграл понимается как несобственный);

- 4) $F_\chi(\zeta_0 +) - F_\chi(\zeta_0 -) = \chi(\zeta_0)$, $\zeta_0 \in \mathcal{L}$.

Рассмотрим разность $v(\mathbf{z}) = F(\mathbf{z}) - F_\chi(\mathbf{z})$. В силу (10) эта функция продолжается на всю $\mathfrak{R}$ как мероморфная функция, т.е. $v \in \mathbb{C}(z, w)$, а следовательно, имеет вид $v(\mathbf{z}) = r_1(z) + r_2(z)w(\mathbf{z})$, $r_1, r_2 \in \mathbb{C}(z)$. Так как v может иметь полюсы порядка ≤ 1 и только в точках $\infty^{(1)}$ и $\infty^{(2)}$, то $r_j = p_j \in \mathbb{C}[z]$. Следовательно, $v(\mathbf{z}) = p_1(z) + p_2(z)w(\mathbf{z})$. Учитывая, что $|w(\mathbf{z})| \sim |z|^2$ при $\mathbf{z} \rightarrow \infty^{(1)}, \infty^{(2)}$, получаем $p_2 \equiv 0$, $\deg p_1 \leq 1$. Формула (12) доказана.

Приведем некоторые представления дифференциала (11), которые понадобятся нам в дальнейшем. При $\zeta = \zeta^{(1)}$, $\mathbf{z} = z^{(1)}$ или $\zeta = \zeta^{(2)}$, $\mathbf{z} = z^{(2)}$ имеем

$$d\Omega(z^{(1)}; \zeta^{(1)}) = d\Omega(z^{(2)}; \zeta^{(2)}) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{h(\zeta)} + \sqrt{h(z)}}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\sqrt{h(\zeta)}};$$

при $\zeta = \zeta^{(1)}$, $\mathbf{z} = z^{(2)}$ имеем

$$d\Omega(z^{(2)}; \zeta^{(1)}) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{h(\zeta)} - \sqrt{h(z)}}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\sqrt{h(\zeta)}}, \quad (13)$$

т.е. в этом случае при $\zeta = z$ дифференциал особенности не имеет.

§3. Краевая задача Римана

1. Пусть, как и всюду в настоящей работе, функция $\rho \neq 0$ и голоморфна на S (т.е. ρ – допустимый вес). Рассмотрим на $\mathfrak{R}$ следующую краевую задачу Римана.

ЗАДАЧА ($\mathcal{R}$). При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ найти (кусочно) мероморфную функцию $\Psi \in \mathcal{M}(\mathfrak{R} \setminus \mathcal{L})$ такую, что: дивизор $(\Psi) = \mathbf{z}_n + (n-1)\infty^{(2)} - n\infty^{(1)}$, $\mathbf{z}_n \notin \mathcal{L}$, и выполнено граничное условие $\rho(\zeta)\Psi(\zeta+) = \Psi(\zeta-)$, $\zeta \in \mathcal{L}$.

Отметим, что этими условиями функция Ψ определяется однозначно с точностью до мультипликативной постоянной, которую мы зафиксируем позднее. Как обычно [14]–[16], асимптотическое поведение функций остатка R_n (4) и ортогональных полиномов Q_n описывается в терминах функций $\Psi(z^{(1)})$ и $\Psi(z^{(2)})$ следующим образом. Если $\{\mathbf{z}_n, n \in \Lambda\} \in \mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$ для некоторой подпоследовательности $\Lambda \subset \mathbb{N}$, то при подходящей нормировке $Q_n(z) \approx \Psi(z^{(1)})$, $R_n(z) \approx \Psi(z^{(2)})/w(z)$ для $n \in \Lambda$ равномерно внутри D . Существование решения краевой задачи вида ($\mathcal{R}$) для случая гиперэллиптической поверхности произвольного рода $g \in \mathbb{N}$ исследовалось автором в [14] (см. также [15] и [16]). Для полноты изложения приведем коротко схему рассуждений [14] для нужного нам случая $g = 1$. Одновременно, как и в [14], мы получим явный вид решения задачи в терминах абелевых интегралов, который будет использован нами в дальнейшем.

Следуя [14], покажем, что существование решения задачи ($\mathcal{R}$) эквивалентно разрешимости следующей проблемы обращения Якоби (см. (6)):

$$\int_{\infty^{(1)}}^{\mathbf{z}_n} d\Omega_1(\zeta) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_1^+(\zeta) - (n-1)\tau_1(\infty) - (n-1)\omega_1(\infty)B_1 \quad (14)$$

при условии, что $\mathbf{z}_n \in \mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$.

2. Итак, пусть Ψ – решение задачи ($\mathcal{R}$) и $z_n = \pi(\mathbf{z}_n) \in D \setminus \{\infty\}$. Для функции $v(z) := \Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)})$, $z \in D$, имеем: $v^+(\zeta) = v^-(\zeta)$ при $\zeta \in S$ и дивизор $(v)_D = z_n - \infty$. Тем самым, v – некоторый полином первой степени: $v(z) = c_n(z - z_n)$ (v – “полиномиальный параметр” задачи). В дальнейших рассуждениях этого параграфа нам удобно положить $c_n = 1$; тем самым, сохранив прежние обозначения, имеем: $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) = z - z_n$. Случай $z_n = \infty$ будет разобран отдельно.

Рассмотрим a -нормированные (мероморфные) абелевы дифференциалы третьего рода $d\Omega(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; \mathbf{z})$ и $d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z})$. Непосредственно из явного представления (8) для таких абелевых дифференциалов вытекает, что

$$\begin{aligned} d\Omega(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; \mathbf{z}) &= -\frac{1}{2} \frac{w(\mathbf{z}) + w(\mathbf{z}_n)}{z - z_n} \frac{dz}{w(\mathbf{z})} - \frac{z + c}{2} \frac{dz}{w(\mathbf{z})}, \\ d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) &= -\frac{z + d}{w(\mathbf{z})} dz. \end{aligned} \quad (15)$$

Нетрудно видеть, что при $\mathbf{z} = z^{(1)}$ или $\mathbf{z} = z^{(2)}$ в многосвязных областях $D^{(1)}$ и соответственно $D^{(2)}$ эти дифференциалы имеют периоды, кратные $2\pi i$. Следовательно, абелевы интегралы

$$\Omega(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; \mathbf{z}) = \int_{e_3}^{\mathbf{z}} d\Omega(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; \zeta), \quad \Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) = \int_{e_3}^{\mathbf{z}} d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \zeta),$$

где интегрирование ведется по кривой, целиком лежащей или в области $D^{(1)}$, или в области $D^{(2)}$, однозначны по модулю $2\pi i$. Тем самым, функции

$$F_1(\mathbf{z}) = \exp\{\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z})\} \quad \text{и} \quad F_2(\mathbf{z}) = \exp\{\Omega(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; \mathbf{z})\} \quad (16)$$

— однозначные (кусочно) мероморфные функции при $\mathbf{z} \in \mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$, для дивизоров которых имеем $(F_1) = \infty^{(1)} - \infty^{(2)}$, $(F_2) = \infty^{(1)} - \mathbf{z}_n$; кроме того, $F_1(e_3) = F_2(e_3) = 1$. Таким образом, функция $F_3(\mathbf{z}) = F_1^{n-1}(\mathbf{z})F_2(\mathbf{z})$ мероморфна в $\mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$ и дивизор $(F_3) = -(\Psi)$. Следовательно, функция $F(\mathbf{z}) = \Psi(\mathbf{z})F_3(\mathbf{z}) = \Psi(\mathbf{z})F_1^{n-1}(\mathbf{z})F_2(\mathbf{z})$ голоморфна и не имеет нулей в $\mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$.

Предположим теперь, что $\mathbf{z} = z^{(1)}$, и найдем явное представление функции $\Psi(z^{(1)})$.

Непосредственно из представления (15) вытекает, что выполняются следующие краевые условия при $\zeta \in S$:

$$\begin{aligned} d\Omega^+(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \zeta) + d\Omega^-(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \zeta) &= 0, \\ d\Omega^+(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; \zeta) + d\Omega^-(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; \zeta) &= -\frac{d\zeta}{\zeta - z_n}. \end{aligned}$$

Тем самым, для функций F_1 и F_2 имеем:

$$F_1^+(\zeta)F_1^-(\zeta) = c_{1,j}, \quad F_2^+(\zeta)F_2^-(\zeta) = \frac{c_{2,j}}{\zeta - z_n} \quad \text{при} \quad \zeta \in S_j.$$

Так как $F_1(e_3) = F_2(e_3) = 1$, то $c_{1,2} = 1$, $c_{2,2} = e_3 - z_n$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \int_{e_3}^{\zeta} d\Omega^+(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; t) + d\Omega^-(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; t) &= 0, \quad \zeta \in S_2, \\ \int_{e_3}^{\zeta} d\Omega^+(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; t) + d\Omega^-(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; t) \\ &= -\oint_{\mathbf{b}_1} d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \zeta) = -B'_1, \quad \zeta \in S_1, \end{aligned}$$

где B'_1 — b -период дифференциала $d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \zeta)$. Следовательно, $F_1^+(\zeta)F_1^-(\zeta) = 1$ при $\zeta \in S_2$ и $F_1^+(\zeta)F_1^-(\zeta) = e^{-B'_1}$ при $\zeta \in S_1$.

Аналогично, для дифференциала $d\Omega^+(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; \zeta)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{e_3}^{\zeta} d\Omega^+(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; t) + d\Omega^-(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; t) &= \log \frac{e_3 - z_n}{\zeta - z_n}, \quad \zeta \in S_2, \\ \int_{e_3}^{\zeta} d\Omega^+(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; t) + d\Omega^-(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; t) \\ &= -\oint_{\mathbf{b}_1} d\Omega(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; \zeta) + \log \frac{e_3 - z_n}{\zeta - z_n} = -B''_1 + \log \frac{e_3 - z_n}{\zeta - z_n}, \quad \zeta \in S_1, \end{aligned}$$

где $B_1'' - b$ -период дифференциала $d\Omega(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; \zeta)$. Следовательно, $F_2^+(\zeta)F_2^-(\zeta) = \frac{e_3 - z_n}{\zeta - z_n}$ при $\zeta \in S_2$ и $F_2^+(\zeta)F_2^-(\zeta) = e^{-B_1''} \frac{e_3 - z_n}{\zeta - z_n}$ при $\zeta \in S_1$.

Тем самым, для функции $F_3 = F_1^{n-1}F_2$ получаем

$$F_3^+(\zeta)F_3^-(\zeta) = \frac{C_1}{\zeta - z_n}, \quad \zeta \in S_1, \quad F_3^+(\zeta)F_3^-(\zeta) = \frac{C_2}{\zeta - z_n}, \quad \zeta \in S_2,$$

где

$$C_1 = (e_3 - z_n) \exp \left\{ - \oint_{\mathbf{b}_1} d\Omega(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; \zeta) + (n-1)d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \zeta) \right\}, \quad (17)$$

$$C_2 = e_3 - z_n.$$

3. Запишем теперь граничное условие $\rho(\zeta)\Psi(\zeta+) = \Psi(\zeta-)$, $\zeta \in \mathcal{L}$, в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho(\zeta)\Psi^+(\zeta^{(1)}) &= \Psi^-(\zeta^{(2)}), \quad \zeta \in S, \\ \rho(\zeta)\Psi^-(\zeta^{(1)}) &= \Psi^+(\zeta^{(2)}), \quad \zeta \in S. \end{aligned}$$

Но $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) = z - z_n$ при $z \in D$. Поэтому получаем

$$\begin{aligned} \Psi^+(\zeta^{(1)})\Psi^-(\zeta^{(1)}) &= \frac{\zeta - z_n}{\rho(\zeta)}, \quad \zeta \in S, \\ \Psi^+(\zeta^{(2)})\Psi^-(\zeta^{(2)}) &= (\zeta - z_n)\rho(\zeta), \quad \zeta \in S. \end{aligned}$$

Положим $f_1(z) := F(z^{(1)}) = \Psi(z^{(1)})F_3(z^{(1)})$. Тогда функция $f_1(z)$ голоморфна и отлична от нуля в области D и для нее выполняются следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} f_1^+(\zeta)f_1^-(\zeta) &= \Psi^+(\zeta^{(1)})\Psi^-(\zeta^{(1)})F_3^+(z^{(1)})F_3^-(z^{(1)}) \\ &= \frac{\zeta - z_n}{\rho(\zeta)} \frac{C_j}{\zeta - z_n} = \frac{C_j}{\rho(z)}, \quad \zeta \in S_j, \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

где постоянные C_1 и C_2 заданы соотношениями (17). Функция $v(z) = \log f_1(z)$ определена при всех $z \in D$, но, вообще говоря, многозначна в D . Так как $f_1(z)$ однозначна в D , то многозначность $v(z)$ связана только с приращением аргумента $f_1(z)$ при обходе вокруг S_1 и S_2 . Так как $\oint_{\mathbf{a}_1} d\Omega_1 = 1$, то при некотором $k \in \mathbb{Z}$ функция $u(z) = v(z) + 2\pi i k \Omega_1(z)$ — однозначная голоморфная функция в двусвязной области D . Запишем краевые условия для $u(\zeta)$ при $\zeta \in S$:

$$u^+(\zeta) + u^-(\zeta) = -\log \rho(\zeta) + c_j + 2\pi i n_j + 2\pi i k (\Omega_1^+(\zeta) + \Omega_1^-(\zeta)), \quad \zeta \in S_j, \quad j = 1, 2.$$

Но

$$\Omega_1^+(\zeta) + \Omega_1^-(\zeta) = -B_1, \quad \zeta \in S_1, \quad \Omega_1^+(\zeta) + \Omega_1^-(\zeta) = 0, \quad \zeta \in S_2.$$

Следовательно, имеем

$$u^+(\zeta) + u^-(\zeta) = \begin{cases} -\log \rho(\zeta) + c_1 + 2\pi i n_1 - 2\pi i k B_1, & \zeta \in S_1, \\ -\log \rho(\zeta) + c_2 + 2\pi i n_2, & \zeta \in S_2. \end{cases}$$

В таком случае для функции $u_0(z) = u(z)/w(z)$, голоморфной в D и имеющей в точке $z = \infty$ нуль второго порядка, получаем следующие краевые условия:

$$u_0^+(\zeta) - u_0^-(\zeta) = \begin{cases} -\frac{\log \rho(\zeta)}{w^+(\zeta)} + \frac{c_1}{w^+(\zeta)} + \frac{2\pi i n_1}{w^+(\zeta)} - \frac{2\pi i k B_1}{w^+(\zeta)}, & \zeta \in S_1, \\ -\frac{\log \rho(\zeta)}{w^+(\zeta)} + \frac{c_2}{w^+(\zeta)} + \frac{2\pi i n_2}{w^+(\zeta)}, & \zeta \in S_2. \end{cases} \quad (18)$$

Таким образом, функция $u_0(z)$ восстанавливается по своим краевым условиям (18) на S интегралом типа Коши, а нужная кратность нуля в точке $z = \infty$ обеспечивается равенством нулю коэффициента при $1/z$ в разложении этой функции в ряд Лорана в точке $z = \infty$. Нетрудно видеть, что это равенство принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(\zeta) d\zeta}{w^+(\zeta)} = \frac{c_1 + 2\pi i n_1 - 2\pi i k B_1}{2\pi i} \int_{S_1} \frac{d\zeta}{w^+(\zeta)} + \frac{c_2 + 2\pi i n_2}{2\pi i} \int_{S_2} \frac{d\zeta}{w^+(\zeta)}.$$

Перейдем в последнем равенстве от дифференциала $d\zeta/w(\zeta)$ к a -нормированному дифференциалу $d\Omega_1$ и воспользуемся очевидными соотношениями

$$\int_{S_1} d\Omega_1^+(\zeta) = \frac{1}{2} \oint_{\mathbf{a}_1} d\Omega_1(\zeta) = \frac{1}{2}, \quad \int_{S_2} d\Omega_1^+(\zeta) = -\frac{1}{2}.$$

Тогда получим

$$\frac{1}{\pi i} \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_1^+(\zeta) = \frac{c_1 - c_2}{2\pi i} + (n_1 - n_2) - k B_1 \equiv \frac{c_1 - c_2}{2\pi i}, \quad (19)$$

где

$$c_1 - c_2 = - \oint_{\mathbf{b}_1} d\Omega(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; \zeta) + (n-1) d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \zeta). \quad (20)$$

Воспользуемся теперь соотношением Римана (9) из § 2:

$$\int_{\mathbf{b}_1} d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \zeta) = -2\pi i \int_{\mathbf{z}_1}^{\mathbf{z}_2} d\Omega_1(\zeta).$$

Тогда из (20) получаем

$$c_1 - c_2 = 2\pi i \left\{ \int_{\infty^{(1)}}^{\mathbf{z}_n} d\Omega_1(\zeta) + (n-1) \int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_1(\zeta) \right\}. \quad (21)$$

Следовательно, соотношение (19) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\pi i} \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_1^+(\zeta) = \int_{\infty^{(1)}}^{\mathbf{z}_n} d\Omega_1(\zeta) + (n-1) \int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_1(\zeta) \pmod{\text{периодов}}$$

или

$$\int_{\infty^{(1)}}^{\mathbf{z}_n} d\Omega_1(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_1^+(\zeta) - (n-1) \int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_1(\zeta) \pmod{\text{периодов}} \quad (22)$$

(последняя формула эквивалентна (15) из работы [14], если сделать замену переменных $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{z}^*$).

Как мы уже упоминали в § 2 (см. (7)), справедливо соотношение

$$dG(\mathbf{z}) + 2\pi i \omega_1(\infty) d\Omega_1(\mathbf{z}) + d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) = 0.$$

Действительно, слева в этом соотношении стоит голоморфный абелев дифференциал, нетрудно проверить, что его a -период равен нулю. Следовательно, и сам дифференциал равен нулю тождественно. Вычисляя теперь (нулевой) b -период этого дифференциала и используя соотношение Римана, получаем:

$$\int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_1(\zeta) = \tau_1(\infty) + \omega_1(\infty) B_1, \quad (23)$$

где, как и ранее, интегрирование ведется по пути, целиком лежащему в $\tilde{\mathfrak{A}}$. В итоге, соотношение (22) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \int_{\infty^{(1)}}^{\mathbf{z}_n} d\Omega_1(\zeta) &\equiv \frac{1}{\pi i} \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_1^+(\zeta) - (n-1)\tau_1(\infty) - (n-1)\omega_1(\infty)B_1 \\ &\equiv \frac{1}{\pi i} \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_1^+(\zeta) - \{(n-1)\tau_1(\infty)\} - \{(n-1)\omega_1(\infty)\}B_1; \end{aligned}$$

здесь $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа. Нетрудно видеть, что проведенные рассуждения обратимы. Таким образом, эквивалентность существования решения задачи ($\mathcal{R}$) и разрешимости проблемы обращения Якоби (14) доказана.

4. Продолжим вывод явной формулы для функции $\Psi(\mathbf{z})$. Преобразуем граничные условия (18) для функции $u_0(z)$ к следующему виду:

$$u_0^+(\zeta) - u_0^-(\zeta) = \begin{cases} -\frac{\log \rho(\zeta)}{w^+(\zeta)} + \frac{c_2}{w^+(\zeta)} + \frac{2\pi i n_2}{w^+(\zeta)} \\ \quad + \frac{c_1 - c_2}{w^+(\zeta)} + \frac{2\pi i(n_1 - n_2)}{w^+(\zeta)} - \frac{2\pi i k B_1}{w^+(\zeta)}, & \zeta \in S_1, \\ -\frac{\log \rho(\zeta)}{w^+(\zeta)} + \frac{c_2}{w^+(\zeta)} + \frac{2\pi i n_2}{w^+(\zeta)}, & \zeta \in S_2. \end{cases}$$

Пользуясь соотношением (19), продолжим эти преобразования так:

$$u_0^+(\zeta) - u_0^-(\zeta) = \begin{cases} -\frac{\log \rho(\zeta)}{w^+(\zeta)} + \frac{c_2}{w^+(\zeta)} + \frac{2\pi i n_2}{w^+(\zeta)} + 2 \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_1^+(\zeta), & \zeta \in S_1, \\ -\frac{\log \rho(\zeta)}{w^+(\zeta)} + \frac{c_2}{w^+(\zeta)} + \frac{2\pi i n_2}{w^+(\zeta)}, & \zeta \in S_2. \end{cases} \quad (24)$$

Непосредственно из (24) получаем следующее представление для функции $u_0(z)$:

$$u_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)w^+(\zeta)} + \frac{c_2}{2w(z)} + \frac{\pi i n_2}{w(z)} - \lambda(z),$$

где

$$\lambda(z) = \frac{\lambda_1}{2\pi i} \int_{S_1} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)w^+(\zeta)}, \quad \lambda_1 = 2 \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_1^+,$$

$e^{c_2} = C_2 = e_3 - z_n$. Отсюда получаем

$$u(z) = w(z)u_0(z) = \frac{w(z)}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)w^+(\zeta)} + \frac{c_2}{2} + \pi i n_2 - \lambda(z)w(z).$$

Так как $v(z) = u(z) - 2\pi i k \Omega_1(z)$, то для функции $f_1(z)$ имеем:

$$f_1(z) = e^{v(z)} = \exp \left\{ \frac{w(z)}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)w^+(\zeta)} + \frac{c_2}{2} + \pi i n_2 - \lambda(z)w(z) - 2\pi i k \Omega_1(z) \right\}, \quad (25)$$

где $e^{c_2/2} = \sqrt{e_3 - z_n}$. Отметим, что нормировкой $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) = (z - z_n)$ функция Ψ определяется однозначно с точностью до сомножителя ± 1 , этому факту соответствует величина $\exp\{\pi i n_2\}$ в представлении (25). Тем самым, в дальнейшем мы можем считать, что $n_2 = 0$. Наконец, проанализируем поведение величины k в (19). Из (19), (21) и (23) получаем соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_1^+(\zeta) &= \int_{\infty^{(1)}}^{z_n} d\Omega_1(\zeta) + (n-1)\tau_1(\infty) + (n-1)\omega_1(\infty)B_1 \\ &+ (n_1 - n_2) - kB_1. \end{aligned} \quad (26)$$

Это — точное равенство при условии, что интегрирование ведется по путям, целиком лежащим в рассеченной римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Функция $\text{Im } \Omega_1(z)$ однозначна в $\tilde{\mathfrak{R}}$, а значит, величина $\text{Im} \int_{\infty^{(1)}}^{z_n} d\Omega_1(\zeta)$ равномерно ограничена при $z_n \in \mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$. Учитывая, что $\text{Im } B_1 > 0$, из (26) получаем следующее представление для числа $k = k(n) \in \mathbb{Z}$: $k = (n-1)\omega_1(\infty) + \alpha_n$, где величина $\alpha_n \in \mathbb{R}$ и равномерно ограничена по $n \in \mathbb{N}$.

Проинтегрируем теперь (тождественно нулевой) дифференциал, стоящий в левой части формулы (7), по пути, ведущему от точки e_3 до произвольной точки

$\mathbf{z} \in \mathfrak{R}$ и лежащему в рассеченной римановой поверхности $\tilde{\mathfrak{R}}$. Получим равенство

$$\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) = -G(\mathbf{z}) - 2\pi i \omega_1(\infty) \Omega_1(\mathbf{z}). \quad (27)$$

Напомним, что $f_1(z) = F(z^{(1)}) = \Psi(z^{(1)})F_3(z^{(1)})$, где $F_3 = F_1^{n-1}F_2$, а функции F_1 и F_2 заданы в (16). Учитывая (16) и (27), получаем из (25) следующее представление для функции $\Psi(z^{(1)})$, справедливое при условии, что $z_n \in D \setminus \infty$:

$$\begin{aligned} \Psi(z^{(1)}) &= e^{(n-1)G(z)} e^{-\Omega(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; z^{(1)})} \\ &\times \exp \left\{ \frac{w(z)}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)w^+(\zeta)} + \frac{c_2}{2} + \lambda(z)w(z) \right\} e^{-2\pi i \alpha_n \Omega_1(z^{(1)})} \\ &= \Phi^{n-1}(z) e^{\Omega(\mathbf{z}_n, \infty^{(1)}; z^{(1)})} \\ &\times \exp \left\{ \frac{w(z)}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)w^+(\zeta)} + \frac{c_2}{2} + \lambda(z)w(z) \right\} e^{-2\pi i \alpha_n \Omega_1(z^{(1)})}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\Phi(z) = e^{G(z)}$ – (многозначная) отображающая функция.

Аналогичным образом получаем следующее представление для $\Psi(z^{(2)})$:

$$\begin{aligned} \Psi(z^{(2)}) &= \Phi^{-(n-1)}(z) e^{\Omega(\mathbf{z}_n, \infty^{(1)}; z^{(2)})} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{w(z)}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)w^+(\zeta)} + \frac{c_2}{2} - \lambda(z)w(z) \right\} e^{-2\pi i \alpha_n \Omega_1(z^{(2)})}. \end{aligned} \quad (29)$$

Подведем итог. Мы показали, что при условии $\mathbf{z}_n \in \mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$, $z_n = \pi(\mathbf{z}_n) \neq \infty$, существование решения задачи $(\mathcal{R})$ эквивалентно тому, что $\mathbf{z}_n$ является решением проблемы обращения Якоби (14) (и удовлетворяет тому же условию $\mathbf{z}_n \in \mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$), и одновременно нашли явное представление (28)–(29) функции $\Psi(\mathbf{z})$ при нормировке $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) = (z - z_n)$ и условии $\mathbf{z}_n \in \mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$, $z_n \neq \infty$. На самом деле, поскольку нас в дальнейшем будет интересовать асимптотическое поведение функции Ψ при $n \rightarrow \infty$, вышесказанное означает, что получено нужное нам представление решения задачи $(\mathcal{R})$ для тех $n \in \mathbb{N}$, при которых $\{z_n\} \in D$.

5. Рассмотрим теперь случай, когда $\{z_n, n \in \Lambda\} \subset U(\infty)$, где $U(\infty) \Subset D$ – некоторая окрестность бесконечно удаленной точки $z = \infty$. Нетрудно видеть, что если для функции Ψ ввести другую нормировку $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) = (1 - z/z_n)$, то с небольшими изменениями все предыдущие рассуждения сохранятся (например, вместо соотношения $e^{c_2} = e_3 - z_n$ получим $e^{c_2} = 1 - e_3/z_n$).

Наконец, разберем случай, когда решение $\mathbf{z}_n$ проблемы обращения Якоби (14) принадлежит кривой $\mathcal{L}$. Заметим, что формулы, стоящие в правых частях (28) и (29), имеют смысл и при $\mathbf{z}_n \in \mathcal{L}$. Поэтому в таком случае под функцией $\Psi(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$, мы и будем понимать правые части (28) и (29).

§ 4. Асимптотика решения интегрального уравнения Наттолла

1. В этом параграфе мы выведем стандартным образом [14]–[16] *сингулярное интегральное уравнение Наттолла* (ср. с [17], где подобное уравнение получено несколько иным методом в классическом случае $g = 0$ и $S = [-1, 1]$) для некоторой функции, мероморфной на $\Re \setminus \mathcal{L}$ и связанной с функциями Ψ , R_n и Q_n (см. (31)), и покажем, что асимптотика свободных нулей R_n и блуждающих нулей Q_n (т.е. блуждающих полюсов аппроксимаций Паде $[n/n]_{\hat{\rho}}$) полностью определяется поведением $\mathbf{z}_n$ – решения проблемы обращения Якоби (14), а асимптотика самих этих функций R_n и Q_n – асимптотическим поведением функции $\Psi(\mathbf{z})$ (которая, очевидно, зависит от n , см. (28)–(29)).

Непосредственно из определения функции остатка (4) и представления (25) получаем, что

$$R_n^+(\zeta) - R_n^-(\zeta) = -\frac{Q_n(\zeta)\rho(\zeta)}{w^+(\zeta)}, \quad \zeta \in S \setminus \{e_1, \dots, e_4\}. \quad (30)$$

Определим мероморфную на $\Re \setminus \mathcal{L}$ функцию $F(\mathbf{z})$ следующим образом:

$$F(\mathbf{z}) = \Psi(\mathbf{z}) \cdot \begin{cases} R_n(z)w(z), & \mathbf{z} \in D^{(1)}, \\ -Q_n(z), & \mathbf{z} \in D^{(2)}, \end{cases} \quad (31)$$

где функция $\Psi(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \Re \setminus \mathcal{L}$, определена в (28)–(29). Тогда из (30) вытекает, что для скачка F на $\mathcal{L}$ имеем:

$$F(\zeta+) - F(\zeta-) = \chi(\zeta-) \frac{1}{\rho(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathcal{L},$$

где функция $\chi(\mathbf{z}) = -\Psi(\mathbf{z})R_n(z)w(z) = \Psi(\mathbf{z})R_n(z)w(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(2)}$, мероморфна на втором листе. В соответствии с (12) интегральная формула типа Коши для функции F принимает следующий вид:

$$F(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \chi(\zeta-) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\mathbf{z}; \zeta) + p_n(z), \quad \mathbf{z} \notin \mathcal{L}, \quad \deg p_n \leq 1. \quad (32)$$

Рассмотрим эту формулу для $\mathbf{z} \in D^{(1)}$. Так как функция $\rho(\zeta)$ голоморфна на каждой связной компоненте S_j компакта S , то $\rho(\zeta)$ голоморфна на каждой кривой $\mathcal{L}_j$. Поэтому контур $\mathcal{L}$ можно, не меняя значения интеграла (32), покомпонентно продеформировать в близкий контур $L^{(2)}$, также состоящий из двух компонент и целиком расположенный на втором листе $D^{(2)}$ в некоторой окрестности $\mathcal{L}$, в которой голоморфна и отлична от нуля функция $\rho(\zeta)$ (напомним, что функция $\chi(\zeta)$ определена и голоморфна на всем втором листе $D^{(2)}$). Полученная интегральная формула задает голоморфное продолжение функции $F(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(1)}$, через контур $\mathcal{L}$ на второй лист римановой поверхности вплоть до контура $L^{(2)}$ (отметим, что для $\mathbf{z} \in D^{(2)}$ это продолжение не совпадает с функцией $F(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(2)}$, определенной выше). Таким образом, получаем для $z \in D$:

$$F(z^{(1)}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^{(2)}} \chi(\zeta^{(2)}) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(z^{(1)}; \zeta^{(2)}) + p_n(z).$$

Непосредственно из определения функций $F(\mathbf{z})$ и $\chi(\mathbf{z}) = \chi(z^{(2)})$ с учетом тождества $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) = C_n(z - z_n)$, где, как мы договорились ранее, $C_n = 1$ или $C_n = -1/z_n$ в зависимости от нормировки, для $\mathbf{z} \in D^{(2)}$ имеем:

$$\begin{aligned}\chi(\mathbf{z}) &= \chi(z^{(2)}) = R_n(\zeta)w(\zeta^{(2)})\Psi(\zeta^{(2)}) = -R_n(\zeta)w(\zeta^{(1)})\Psi(\zeta^{(1)})\frac{\Psi(\zeta^{(2)})}{\Psi(\zeta^{(1)})} \\ &= -\Psi(\zeta^{(1)})R_n(\zeta)w(\zeta^{(1)})\frac{\Psi(\zeta^{(1)})\Psi(\zeta^{(2)})}{\Psi^2(\zeta^{(1)})} = -F(\zeta^{(1)})\frac{C_n(\zeta - \zeta_n)}{\Psi^2(\zeta^{(1)})}.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что операция инволюции $\mathbf{z}^* = (z, \mp w)$ при $\mathbf{z} = (z, \pm w)$ обладает следующими свойствами: $w(\zeta^*) = -w(\zeta)$, $d\Omega(\mathbf{z}, \zeta^*) = d\Omega(\mathbf{z}^*, \zeta)$. Тогда $d\Omega(z^{(1)}, \zeta^{(2)}) = d\Omega(z^{(2)}, \zeta^{(1)})$ и с учетом сохранения относительно области $D^{(1)}$ ориентации кривых интегрирования интегральное представление для $F_1(z) := F(z^{(1)}) = \Psi(z^{(1)})R_n(z)w(z^{(1)})$ и $z \in D$ преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned}F_1(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^{(1)}} F(\zeta^{(1)}) \frac{C_n(\zeta - z_n)}{\Psi^2(\zeta^{(1)})} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(z^{(2)}; \zeta^{(1)}) + p_n(z) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} F(\zeta^{(1)+}) \frac{C_n(\zeta - z_n)}{\Psi^2(\zeta^{(1)+})} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(z^{(2)}; \zeta^{(1)+}) + p_n(z).\end{aligned}\quad (33)$$

Аналогично, для $F_2(z) := F(z^{(2)}) = -\Psi(z^{(2)})Q_n(z)$ при $z \in D$ имеем:

$$F_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} F(\zeta^{(1)+}) \frac{C_n(\zeta - z_n)}{\Psi^2(\zeta^{(1)+})} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(z^{(1)}; \zeta^{(1)+}) + p_n(z)\quad (34)$$

(ср. (33)–(34) с формулой (3.9) из [17], где рассмотрен классический случай $g = 0$, $S = [-1, 1]$). Подчеркнем, что эти представления справедливы в общем случае – при любом расположении точки $\mathbf{z}_n$ на $\mathfrak{R}$. Действительно, при $\mathbf{z}_n \notin \mathcal{L}$ функции, стоящие под знаком интеграла в (33)–(34), голоморфны на $\mathcal{L}$, так как функция Ψ не обращается в нуль на $\mathcal{L}$. Если же $\mathbf{z}_n$ лежит на кривой $\mathcal{L}$, то двукратный нуль в знаменателе, происходящий от функции Ψ^2 , компенсируется нулем функции $F(\mathbf{z})$ на $\mathcal{L}$ в точке $\mathbf{z}_n$ и нулем полинома $C_n(z - z_n)$. Формулы (33)–(34) лежат в основе наших последующих рассуждений.

Поясним, какого рода информацию мы собираемся из них извлечь. Предположим, например, что по некоторой подпоследовательности $\Lambda \subset \mathbb{N}$ имеем: $\{\mathbf{z}_n, n \in \Lambda\} \in \mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$, т.е. $\{z_n, n \in \Lambda\} \in D$. Тогда для $n \in \Lambda$ из (33)–(34) мы получим, что $\deg p_n = 1$ и нуль p_n асимптотически близок к z_n при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$. Пусть $\Lambda = \Lambda_1 \sqcup \Lambda_2$ так, что $\mathbf{z}_n \in D^{(1)}$ при $n \in \Lambda_1$ и $\mathbf{z}_n \in D^{(2)}$ при $n \in \Lambda_2$. Тогда для $n \in \Lambda_1$ функция $F_2(z) := F(z^{(2)})$ имеет нуль, асимптотически близкий к нулю полинома p_n . Так как $\mathbf{z}_n \in D^{(1)}$, то нулем функции F_2 может быть только нуль полинома Q_n . Следовательно, для $n \in \Lambda_1$ полином Q_n имеет блуждающий нуль, асимптотически близкий к z_n . Аналогично, при $n \in \Lambda_2$ функция $F_1(z) := F(z^{(1)})$ имеет нуль, асимптотически близкий к нулю полинома p_n . Так как $\mathbf{z}_n \in D^{(2)}$, то нулем функции F_1 может быть только свободный нуль функции остатка R_n . Следовательно, для $n \in \Lambda_2$ функция остатка R_n имеет свободный нуль, асимптотически близкий к z_n . В частности, если точки $\{\mathbf{z}_n, n \in \mathbb{N}\}$ всюду плотны на $\mathfrak{R}$, то как блуждающие полюсы аппроксимации Паде $[n/n]_{\hat{\rho}}$, так и свободные нули функции остатка R_n всюду плотны в $\overline{\mathcal{C}}$.

2. Изложим теперь приведенные выше соображения более формально и в полной общности, не ограничиваясь каким-либо частным случаем в поведении точки z_n на римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Подчеркнем, что цель наших исследований – доказать, что асимптотическое поведение z_n как нуля функции Ψ *полностью определяет* асимптотическое поведение других возможных нулей этой функции (вне кривой $\mathcal{L}$), которыми, как легко увидеть из (31), могут быть лишь нули функции остатка R_n или ортогонального полинома Q_n .

Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $D_\varepsilon = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : g(z, \infty) > \varepsilon\}$, $S_\varepsilon = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : g(z, \infty) < \varepsilon\}$ – окрестность компакта S , $L(\varepsilon) = \partial D_\varepsilon = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : g(z, \infty) = \varepsilon\}$, $D_0 = D$, $S_0 = S$. Так как $\rho \neq 0$ и голоморфна на S , то $\rho \neq 0$ и голоморфна в S_{ε_0} при некотором $\varepsilon_0 > 0$. В дальнейшем мы рассматриваем только $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и некоторую последовательность $\{\varepsilon_n\}$ такую, что $\varepsilon_n \in (\varepsilon/3, 2\varepsilon/3)$ и

$$\max_{z \in L(\varepsilon_n)} |p_n(z)| = O\left(\min_{z \in L(\varepsilon_n)} |p_n(z)|\right), \quad \max_{z \in L(\varepsilon_n)} |z - z_n| = O\left(\min_{z \in L(\varepsilon_n)} |z - z_n|\right) \quad (35)$$

при $n \rightarrow \infty$; тем самым, $z_n \notin L(\varepsilon_n)$ и $p_n(z) \neq 0$ при $z \in L(\varepsilon_n)$. Так как функция $F_1(z) := F(z^{(1)})$ голоморфна в $D \setminus \{\infty\}$ и дифференциал $d\Omega(z^{(2)}, \zeta^{(1)})$ не имеет особенностей при $z, \zeta \in D$ (см. (13)), то в (33) для $z \in D$ мы можем заменить контур интегрирования $\mathcal{L} \subset \mathfrak{R}$ на контур $L(\varepsilon_n)$:

$$F_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L(\varepsilon_n)} F_1(\zeta) \frac{C_n(\zeta - z_n)}{\Psi^2(\zeta^{(1)})} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(z^{(2)}; \zeta^{(1)}) + p_n(z). \quad (36)$$

Эта формула справедлива в том числе и для $z \in L(\varepsilon_n) = \partial D_{\varepsilon_n}$. В таком случае, учитывая найденное ранее представление для функции Ψ и выбор величин ε_n (см. (35)), получаем, что равномерно по $z \in L(\varepsilon_n)$ выполняется следующее соотношение:

$$|F_1(z) - p_n(z)| = o(1) \cdot \max_{\zeta \in L(\varepsilon_n)} |F_1(\zeta)| = o(1) \cdot M_n, \quad (37)$$

где $M_n = \max_{\zeta \in L(\varepsilon_n)} |F_1(\zeta)|$, $o(1) = O(q^n)$, $q = q_n = e^{-2\varepsilon_n} < 1$. Нетрудно видеть, что из (37) вытекает соотношение

$$m_n := \max_{z \in L(\varepsilon_n)} |p_n(z)| = M_n(1 + o(1)).$$

Тем самым, из (37) с учетом (35) получаем

$$|F_1(z) - p_n(z)| = o(1) \cdot m_n = o(1) \cdot \min_{z \in L(\varepsilon_n)} |p_n(z)| < |p_n(z)|, \quad z \in L(\varepsilon_n).$$

Отметим, что непосредственно отсюда по теореме Руше уже вытекает, что для функций F_1 и p_n разность числа их нулей и полюсов в области D_{ε_n} одинакова. Однако только лишь этого результата для дальнейшего анализа нам не достаточно. Пусть $t = 3\varepsilon/4$,

$$m_n(t) = \max_{z \in L(t)} |p_n(z)|, \quad M_n(t) = \max_{z \in L(t)} |F_1(z)|.$$

Так как p_n — полином степени ≤ 1 , то $m_n < m_n(t)$. Аналитическая функция $(F_1(z) - p_n(z))/\Phi(z)$ многозначна в D , но имеет однозначный модуль (здесь и далее $\Phi(z) = e^{G(z)}$ — отображающая функция). Поэтому к ней применим принцип максимума модуля. Следовательно,

$$\max_{z \in L(t)} \left| \frac{F_1(z) - p_n(z)}{\Phi(z)} \right| \leq \max_{z \in L(\varepsilon_n)} \left| \frac{F_1(z) - p_n(z)}{\Phi(z)} \right| = O(1) \cdot \max_{z \in L(\varepsilon_n)} |F_1(z) - p_n(z)|.$$

Тем самым,

$$\max_{z \in L(t)} |F_1(z) - p_n(z)| = o(1) \cdot m_n = o(1) \cdot m_n(t). \quad (38)$$

Отсюда легко вытекает, что $M_n(t) = m_n(t)(1 + o(1))$.

Заменяем теперь в (34) для $F_2(z) := F(z^{(2)})$ контур интегрирования $\mathcal{L} \subset \mathfrak{R}$ на контур $L(\varepsilon_n) \subset D$ и рассмотрим эту формулу для $z \in L(t)$ (напомним, что $t = 3\varepsilon/4 > 2\varepsilon/3 > \varepsilon_n$):

$$F_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L(\varepsilon_n)} F_1(\zeta) \frac{C_n(\zeta - z_n)}{\Psi^2(\zeta^{(1)})} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(z^{(1)}; \zeta^{(1)}) + p_n(z), \quad z \in L(t).$$

Тогда, учитывая выбор параметра t и полученные выше соотношения между M_n , m_n и $m_n(t)$, имеем

$$\max_{z \in L(t)} |F_2(z) - p_n(z)| = o(1) \cdot M_n = o(1) \cdot m_n = o(1) \cdot m_n(t). \quad (39)$$

Введем теперь *новую нормировку*: положим $m_n(t) = 1$ и сохраним прежние обозначения для остальных величин. Тогда из (38) и (39) для многозначных аналитических в D функций $F_1(z)/\Phi(z)$, $F_2(z)/\Phi(z)$ и $p_n(z)/\Phi(z)$, имеющих в D однозначные модули, получаем

$$\left| \frac{F_1(z)}{\Phi(z)} - \frac{p_n(z)}{\Phi(z)} \right| = o(1) \quad \text{равномерно по } z \in \overline{D}_t, \quad (40)$$

$$\left| \frac{F_2(z)}{\Phi(z)} - \frac{p_n(z)}{\Phi(z)} \right| = o(1) \quad \text{равномерно по } z \in \overline{D}_t \quad (41)$$

(предполагается, что в левых частях (40) и (41) выбирается одна и та же ветвь многозначной функции Φ). Рассмотрим последовательность функций $\{p_n/\Phi\}$. По принципу максимума модуля для аналитических функций с однозначным модулем имеем: $|p_n(z)/\Phi(z)| \leq e^{-t}$ при $z \in \overline{D}_t$ равномерно по n (здесь мы учли новую нормировку $m_n(t) = 1$). С другой стороны, применяя принцип максимума модуля к полиномам p_n в области S_τ при произвольном $\tau > t$, получаем: $\max_{z \in L_\tau} |p_n(z)| > m_n(t) = 1$. Тем самым, функция, тождественно равная нулю, не является предельной точкой последовательности $\{p_n/\Phi\}$ (в топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах области D_t). Следовательно, если мы применим к последовательностям функций F_1/Φ , F_2/Φ и p_n/Φ теорему Гурвица, то в силу соотношений (40) и (41) получим, что асимптотическое поведение нулей этих функций, расположенных в области D_t , одинаково. Так как

$|\Phi(z)| \neq 0$ в D и любая однозначная в окрестности точки $z = \infty$ ветвь Φ имеет полюс первого порядка в точке $z = \infty$, то асимптотическое поведение нулей и полюсов функций F_1 , F_2 и p_n , расположенных в области D_t , также одинаково. Поскольку $\deg p_n \leq 1$, то отсюда, в частности, сразу следует, что функции F_1 и F_2 имеют в D_t не более, чем по одному нулю.

Сделаем теперь дальнейшие выводы из того, что функции F_1 и F_2 имеют асимптотически одинаковое поведение нулей в D_t . Из явного вида (31) функции $F(z)$ немедленно вытекает, что единственный возможный нуль функции F_1 — это или точка z_n при $\mathbf{z}_n = z_n^{(1)}$, или нуль функции остатка R_n при $\mathbf{z}_n = z_n^{(2)}$, а единственный возможный нуль функции F_2 — это или точка z_n при $\mathbf{z}_n = z_n^{(2)}$, или нуль полинома Q_n при $\mathbf{z}_n = z_n^{(1)}$. Таким образом, так как $t = 3\varepsilon/4$, а $\varepsilon > 0$ произвольно, то всякая последовательность $\{\mathbf{z}_n, n \in \Lambda\} \in \mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$ решений проблемы обращения Якоби (14) порождает или последовательность нулей $\{z_n, n \in \Lambda_1\}$ функции F_1 и асимптотически близкую к ней последовательность блуждающих нулей полиномов Q_n — нулей функции F_2 , или последовательность нулей $\{z_n, n \in \Lambda_2\}$ функции F_2 и асимптотически близкую к ней последовательность свободных нулей функции остатка R_n — нулей функции F_1 . Соответственно получаем, что в первом случае при $n \in \Lambda_1$ полином Q_n имеет ровно один блуждающий нуль в D_t , асимптотически близкий к z_n при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda_1$. Аналогично, во втором случае при $n \in \Lambda_2$ функция остатка R_n имеет ровно один свободный нуль в D_t , асимптотически близкий к z_n при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda_2$.

Наконец, рассмотрим случай, когда $\{\mathbf{z}_n, n \in \Lambda\}' \subset \mathcal{L}$, т.е. все предельные точки последовательности $\{\mathbf{z}_n, n \in \Lambda\}$ принадлежат $\mathcal{L}$. Покажем, что тогда для достаточно больших $n \in \Lambda$ ни R_n , ни Q_n не имеют нулей в D_ε ни при каком $\varepsilon > 0$. Действительно, так как функции F_1 и F_2 имеют асимптотически одинаковое распределение нулей в D_ε при любом $\varepsilon > 0$, а все $z_n \in S_\varepsilon$ при достаточно большом $n \in \Lambda$, то при таких n нули функций F_1 и F_2 в D_ε — это соответственно нули R_n и Q_n . Следовательно, в рассматриваемом случае свободный нуль R_n и блуждающий нуль Q_n могут появляться в D_ε только одновременно и при этом они асимптотически близки друг к другу при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$. Таким образом, мы можем ограничиться анализом ситуации, когда $\zeta_n \rightarrow a \notin S$, где ζ_n — свободный нуль функции R_n . Покажем, что эта ситуация противоречит тому, что $\{z_n, n \in \Lambda\}' \subset S$. Действительно, как обычно, выберем в представлении (33) для функции $F_1(z)$ в качестве $L^{(1)}$ кривую $L(\varepsilon) = \{z : g(z, \infty) = \varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, и запишем это представление для $z \in D$ в следующем виде:

$$F_1(z^{(1)}) := F_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L(\varepsilon)} F_1(\zeta) \frac{C_n(\zeta - z_n)}{\Psi^2(\zeta)} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(z^{(2)}; \zeta^{(1)}) + p_n(z).$$

Тем самым, для $\mathbf{z} \in D^{(1)}$

$$F_1(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L(\varepsilon)} F_1(\zeta) \frac{C_n(\zeta - z_n)}{\Psi^2(\zeta)} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\mathbf{z}^*; \zeta^{(1)}) + p_n(z). \quad (42)$$

Как уже отмечалось, в силу свойств дифференциала $d\Omega(\mathbf{z}; \zeta)$ правая часть этого равенства голоморфно продолжается по $\mathbf{z}$ на $D^{(2)}$ вплоть до кривой $L^{(2)}(\varepsilon)$, лежащей на втором листе $D^{(2)}$ “над” кривой $L(\varepsilon) = L^{(1)}(\varepsilon)$. Тем самым, функция

$F_1(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(1)}$, голоморфно продолжается на второй лист $D^{(2)}$ вплоть до кривой $L^{(2)}(\varepsilon)$ (это продолжение, вообще говоря, не совпадает с функцией $F(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(2)}$). С учетом определения функции $F_1(z) := F(z^{(1)})$ получаем, что на второй лист голоморфно продолжается произведение $\Psi(z^{(1)})R_n(z)w(z)$, $z \in D$. Обратимся теперь к краевым условиям на функцию Ψ : $\rho(\zeta)\Psi(\zeta+) = \Psi(\zeta-)$, $\zeta \in \mathcal{L}$. Функция ρ голоморфна и отлична от нуля в некоторой окрестности S . Поэтому, заменив в этих краевых условиях кривую $\mathcal{L}$ на кривую $L^{(2)}(\varepsilon)$ при произвольном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, мы, как легко увидеть, получим краевую задачу, решением которой является та же самая функция Ψ (это видно и непосредственно из явных формул (28)–(29)). Таким образом, функция $\Psi(z^{(1)})$, $z \in D$, голоморфно продолжается на второй лист вплоть до кривой $L^{(2)}(\varepsilon)$. Так как $\{\mathbf{z}_n, n \in \Lambda\}' \subset \mathcal{L}$, то для достаточно больших $n \in \Lambda$ это продолжение функции Ψ , а следовательно, функции F_1 , имеет нуль в точке $\mathbf{z} = \mathbf{z}_n$. Рассуждения, опирающиеся на принцип максимума модуля и теорему Гурвица для области $D^{(1)} \sqcup \mathcal{L} \sqcup S_\varepsilon^{(2)}$ (отметим, что функция Φ также аналитически продолжается в эту область), вполне аналогичные приведенным выше, показывают, что и в этой ситуации единственный нуль полинома p_n должен быть асимптотически близок к точке $z_n = \pi(\mathbf{z}_n)$. Но нуль полинома p_n асимптотически близок к точке ζ_n и $\zeta_n \rightarrow a \notin S$. Получили противоречие. Следовательно, ни свободный нуль R_n , ни нули Q_n не имеют предельных точек вне S .

3. В заключение этого параграфа исследуем асимптотическое поведение функции остатка и знаменателя аппроксимаций Паде для функции

$$f(z) = \sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)} - z^2 + \frac{e_1 + \cdots + e_4}{2}z, \quad (43)$$

$f \in \mathcal{H}(\infty)$, рассмотренной Дюма. Так как изучаемый в настоящей работе класс функций $\widehat{\rho}$ вида (3) при условии, что $\rho \neq 0$, не содержит функции (43), то формально этот случай надо рассмотреть отдельно. На самом деле, как уже отмечалось во введении, изложенный здесь метод исследования сильной асимптотики функций остатка и ортогональных полиномов, основанный на свойствах решения краевой задачи Римана и сингулярном интегральном уравнении Наттолла, применим и в классе функций вида

$$\frac{1}{\pi i} \int_S \frac{\rho(\zeta)P(\zeta)}{\sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)}} \frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

где $P \in \mathbb{C}[z]$ и делит полином $(z - e_1) \cdots (z - e_4)$. Для того чтобы убедиться в этом, надо в приведенных выше рассуждениях заменить функцию $w(z)$ на $w(z)/P(z)$. Однако для конкретной функции (43) доказательство может быть получено достаточно просто. Действительно, функция остатка $R_n(z) = R_n(z; f)$ мероморфна на эллиптической римановой поверхности $\mathfrak{R}$ и для ее дивизора имеем $(R_n) = \zeta_n + (n+1)\infty^{(1)} - (n+2)\infty^{(2)}$, при этом возможно $\zeta_n = \infty^{(1)}$ или $\zeta_n = \infty^{(2)}$ (см. [22; § 6, лемма 6.1]). Функция $\Psi(\mathbf{z}) = R_n(\mathbf{z}^*)$ также мероморфна на $\mathfrak{R}$ и имеет дивизор $(\Psi) = \mathbf{z}_n + (n+1)\infty^{(2)} - (n+2)\infty^{(1)}$, где $\mathbf{z}_n = \zeta_n^*$. Тем самым, $\Psi(z) = R_n(\mathbf{z}^*)$ – решение краевой задачи $(\mathcal{R})$ при $\rho \equiv 1$ и замене индекса n на $n+2$.

Следовательно, для функций $\Psi(z^{(1)}) = R_n(z^{(2)})$ и $\Psi(z^{(2)}) = R_n(z^{(1)})$ имеют место представления (28)–(29), а точка $\mathbf{z}_n$ удовлетворяет проблеме обращения Якоби

$$\int_{\infty^{(1)}}^{\mathbf{z}_n} d\Omega_1(\zeta) \equiv -(n+1)\tau_1(\infty) - (n+1)\omega_1(\infty)B_1.$$

Если теперь предположить, что числа $\tau_1(\infty)$, $\omega_1(\infty)$ и 1 рационально независимы, то по теореме Кронекера [23; гл. VIII, § 5] правая часть последнего равенства всюду плотна в многообразии Якоби, значит, точки $\{\mathbf{z}_n, n \in \mathbb{N}\}$ всюду плотны на $\mathfrak{R}$. Следовательно, точки $\{z_n^{(1)}, n \in \Lambda : \mathbf{z}_n = z_n^{(1)}\}$ всюду плотны на первом листе $D^{(1)}$. Отсюда уже легко вытекает утверждение, сформулированное во введении: *точки, в которых диагональные аппроксимации Паде, построенные по функции f , интерполируют функцию $\tilde{f}$ – другую ветвь функции f , всюду плотны в $\overline{\mathbb{C}}$* . С учетом сказанного асимптотические свойства полиномов $Q_n(z) = Q_n(z; f)$ вытекают непосредственно из представления $2Q_n(z)w(z) = R_n(z^{(1)}) - R_n(z^{(2)})$.

§ 5. Асимптотика решения проблемы обращения Якоби

1. Итак, мы показали, что асимптотическое поведение свободного нуля функции остатка R_n и блуждающего нуля ортогонального полинома Q_n полностью определяется асимптотическим поведением на эллиптической римановой поверхности $\mathfrak{R}$ точки $\mathbf{z}_n$ – решения проблемы обращения Якоби

$$\int_{\infty^{(1)}}^{\mathbf{z}_n} d\Omega_1(\zeta) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_1^+(\zeta) - (n-1)\tau_1(\infty) - (n-1)\omega_1(\infty)B_1. \quad (44)$$

Изучим это асимптотическое поведение $\mathbf{z}_n$ в зависимости от арифметических свойств чисел $\tau_1(\infty)$ и $\omega_1(\infty)$.

Рассмотрим на многообразии Якоби $\text{Jac } \mathfrak{R} = \mathbb{C}/\{n + mB_1\} = \Pi$ прямую $L = \{v = v(t) : v(t) = x(t) + y(t)B_1\}$, заданную параметрически следующим образом:

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha + t\tau_1(\infty) \pmod{1}, \\ y(t) &= \beta + t\omega_1(\infty) \pmod{1}, \end{aligned} \quad (45)$$

где, как уже отмечалось, $2\pi i\tau_1(\infty)$ и $-2\pi i\omega_1(\infty)$ – периоды комплексной функции Грина $G(z, \infty)$, $\alpha, \beta \in [0, 1)$ – некоторые “начальные” условия (ср. [16; § 1, п. 2]). Наша ближайшая цель – изучить расположение прямой L на Π , соответствующей кривой Γ на римановой поверхности $\mathfrak{R}$, и, в конечном счете, расположение кривой $\pi \Gamma^{(1)}$ на $\overline{\mathbb{C}}$: точки $\mathbf{z}_n$ – это нули функции Ψ , и, как было показано в предыдущем параграфе, их асимптотическое поведение полностью характеризует асимптотическое поведение других возможных нулей функции $F(\mathbf{z})$, определенной в (31). Непосредственно из (31) и результатов предыдущего параграфа вытекает, что если по некоторой подпоследовательности Λ точки $\mathbf{z}_n = z_n^{(1)} \in D^{(1)}$, т.е. лежат на первом листе, то асимптотическое поведение единственного блуждающего нуля полинома Q_n совпадает с поведением точки $z_n = \pi(\mathbf{z}_n)$.

Поведение соответствующих $v(t) \in \Pi$ точек $\mathbf{z}(t)$ на $\mathfrak{R}$ описывается уравнением

$$v = \int_{\infty^{(1)}}^{\mathbf{z}} d\Omega_1(\zeta),$$

которое может быть решено явно в терминах якобиевых тета-функций. Как будет показано в этом параграфе, асимптотическое поведение точки $\mathbf{z}_n$ на $\mathfrak{R}$, а следовательно, как было показано в предыдущем параграфе, блуждающего полюса и свободной точки интерполяции аппроксимации Паде $[n/n]_{\hat{\rho}}$ зависит от расположения прямой L на Π и расположения целочисленных точек $L^0 = \{x(n) + y(n)B_1, n \in \mathbb{N}\}$ на L . В свою очередь, эти интересующие нас свойства L и L^0 полностью определяются арифметическими свойствами чисел $\tau_1(\infty)$ и $\omega_1(\infty)$.

Нетрудно видеть, что справедливо следующее утверждение относительно расположения L на Π и соответствующих кривых Γ на $\mathfrak{R}$ и $\pi\Gamma^{(1)}$ в $\overline{\mathbb{C}}$.

ЛЕММА 1. *Расположение прямой L и кривых Γ и $\pi\Gamma^{(1)}$ полностью определяется арифметическими свойствами чисел $\tau_1(\infty)$ и $\omega_1(\infty)$ следующим образом.*

1°. Если число $\tau_1(\infty)/\omega_1(\infty) \in \mathbb{Q}$, то:

- (1) прямая L состоит из конечного числа параллельных отрезков в Π ;
- (2) кривая Γ замкнута в $\mathfrak{R}$;
- (3) кривая $\pi\Gamma^{(1)}$ состоит из конечного числа непересекающихся дуг в $\overline{\mathbb{C}}$, соединяющих дуги S_1 и S_2 или охватывающих их.

2°. Если число $\tau_1(\infty)/\omega_1(\infty) \notin \mathbb{Q}$, то:

- (1) прямая L всюду плотна в Π ;
- (2) кривая Γ всюду плотна на $\mathfrak{R}$;
- (3) кривая $\pi\Gamma^{(1)}$ всюду плотна в $\overline{\mathbb{C}}$.

Нас, в конечном итоге, интересует множество предельных точек для $L^0 = \{x(n) + y(n)B_1, n \in \mathbb{N}\}$. В следующих утверждениях приводятся результаты о строении этого множества также в зависимости от арифметических свойств чисел $\tau_1(\infty)$ и $\omega_1(\infty)$.

ЛЕММА 2. *Пусть число $\tau_1(\infty)/\omega_1(\infty) \in \mathbb{Q}$. Тогда*

- 1°. если $\omega_1(\infty) \in \mathbb{Q}$, то множество L^0 конечно;
- 2°. если $\omega_1(\infty) \notin \mathbb{Q}$, то множество L^0 всюду плотно на L .

ЛЕММА 3. *Пусть число $\tau_1(\infty)/\omega_1(\infty) \notin \mathbb{Q}$. Тогда*

- 1°. если числа $\omega_1(\infty)$, $\tau_1(\infty)$ и 1 рационально независимы, то каждая точка Π – предельная точка для L^0 ;
- 2°. если числа $\omega_1(\infty)$, $\tau_1(\infty)$ и 1 рационально зависимы, то множество предельных точек для L^0 состоит из конечного числа параллельных отрезков в Π .

Аналогичные утверждения справедливы для множества Γ^0 на $\mathfrak{R}$ и $\pi(\Gamma^{(1)})^0$ в $\overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство леммы 1 следует непосредственно из формул (45) параметрического задания кривой L .

Пункты 1° и 2° леммы 2 доказываются без труда. Действительно, при условии 1° множество L^0 состоит из конечного числа точек, при условии 2° множество L^0 всюду плотно на прямой L , которая состоит из конечного числа отрезков.

Случай 1° леммы 3 также прост для анализа: из условий леммы 3 вытекает, что L всюду плотна в Π , а каждая точка L — предельная точка для L^0 .

Таким образом, остается доказать п. 2° леммы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО П. 2° ЛЕММЫ 3. Итак, надо рассмотреть случай, когда числа $\omega_1(\infty)$, $\tau_1(\infty)$ и 1 рационально зависимы, т.е. при некоторых $n_1, m_1, l_1 \in \mathbb{Z}$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, $n_1\Delta_1 + m_1\omega_1 + l_1 = 0$, но $\tau_1(\infty)/\omega_1(\infty) \notin \mathbb{Q}$. Непосредственно отсюда вытекает, что $l_1 \neq 0$.

1) Рассмотрим первый случай, когда $\tau_1(\infty), \omega_1(\infty) \notin \mathbb{Q}$. При этом условии имеем $n_1, m_1 \neq 0$. Таким образом,

$$\Delta_1 = r_1\omega_1 + r_2, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$

В таком случае параметрическое представление (45) для $L = \{v(t) = x(t) + y(t)B_1\}$ принимает вид

$$\begin{aligned} x(t) &= tr_1\omega_1 + tr_2 + \alpha \pmod{1}, \\ y(t) &= t\omega_1 + \beta \pmod{1}, \quad \omega_1 \notin \mathbb{Q}, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Соответственно для L^0 имеем:

$$\begin{aligned} x(n) &= nr_1\omega_1 + nr_2 + \alpha \pmod{1}, \\ y(n) &= n\omega_1 + \beta \pmod{1}. \end{aligned} \tag{46}$$

Отметим, что так как $\omega_1 \notin \mathbb{Q}$, то и x -координаты $\{x(n)\}$, и y -координаты $\{y(n)\}$ всюду плотны на отрезке $[0, 1]$, кроме того, эти координаты рационально зависимы между собой.

Пусть r — дробная часть r_2 , $r \in \mathbb{Q}$, $r \in [0, 1)$. Положим $r = p/q$, где $p, q \in \mathbb{N}$ и p, q взаимно просты: $(p, q) = 1$. Тогда система (46) принимает вид

$$\begin{aligned} x(n) &= nr_1\omega_1 + nr + \alpha \pmod{1}, \\ y(n) &= n\omega_1 + \beta \pmod{1}. \end{aligned}$$

Положим $\Lambda_k = \{n \in \mathbb{N} : n = k \pmod{q}\}$, $k = 0, 1, \dots, q-1$. Тогда, как нетрудно видеть, $\mathbb{N} = \bigsqcup_{k=0}^{q'-1} \Lambda_k$, где $q' \leq q$; при этом если числа p и q простые, то $q' = q$. Для $n \in \Lambda_k$ уравнения (46) принимают вид

$$\begin{aligned} x_k(n) &= nr_1\omega_1 + \frac{pk}{q} + \alpha \pmod{1}, \\ y_k(n) &= n\omega_1 + \beta \pmod{1}. \end{aligned}$$

Определим теперь прямые $M_k \subset \Pi$, $k \in \{0, \dots, q' - 1\}$, параметрическим представлением

$$\begin{aligned} x_k(t) &= t\tau_1\omega_1 + \frac{pk}{q} + \alpha \pmod{1}, \\ y_k(t) &= t\omega_1 + \beta \pmod{1}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Очевидно, что каждая прямая M_k состоит из конечного числа параллельных отрезков в Π , а соответствующая кривая $\tilde{\Gamma}_k$ замкнута в $\mathfrak{A}$. Между собой множества M_k не пересекаются. Так как $\omega_1 \notin \mathbb{Q}$, то целочисленные точки $M_k^0 = \{x_k(n) + y_k(n)B_1, n \in \mathbb{N}\}$ всюду плотны на M_k , т.е. $(M_k^0)' = M_k$ (каждая точка M_k — предельная предельная точка для M_k^0). Таким образом, множество предельных точек для $L^0 = \{x(n) + y(n)B_1, n \in \mathbb{N}\}$ состоит в точности из q' непересекающихся прямых M_k : $(L^0)' = \bigsqcup_{k=0}^{q'-1} M_k$.

2) Рассмотрим второй случай, когда $\tau_1(\infty) \in \mathbb{Q}$. При этом условии имеем: $\omega_1(\infty) \notin \mathbb{Q}$, $n_1 \neq 0$, $m_1 = 0$. Если теперь в параметрическом представлении (45) положим $t = n$, то получим

$$\begin{aligned} x(n) &= \alpha + n\tau_1(\infty) \pmod{1}, \\ y(n) &= \beta + n\omega_1(\infty) \pmod{1}. \end{aligned} \tag{47}$$

Так как $\tau_1(\infty) \in \mathbb{Q}$, то величина $x(n)$ принимает лишь конечное число, скажем m , различных значений. Тем самым, существуют ровно m различных прямых $L_1, \dots, L_m$, параллельных оси y , таких, что $\mathbb{N} = \bigsqcup_{j=1}^m \Lambda_j$ и точка $(x(n), y(n)) \in L_j$ при $n \in \Lambda_j$. Так как $\omega_1(\infty) \notin \mathbb{Q}$, то для каждого $j = 1, \dots, m$ множество $\{y(n), n \in \Lambda_j\}$ всюду плотно на отрезке $[0, 1]$. Тем самым, для каждого $j = 1, \dots, m$ множество точек $\{(x(n), y(n)), n \in \Lambda_j\}$ всюду плотно на прямой L_j . Наконец, множество точек $\{(x(n), y(n)), n \in \mathbb{N}\}$ всюду плотно на объединении прямых $\bigsqcup_{j=1}^m L_j$. Отметим, что, как легко увидеть, каждая из соответствующих L_j кривых $\pi\Gamma_j^{(1)}$ соединяет S_1 с S_2 .

3) Рассмотрим третий случай, когда $\omega_1(\infty) \in \mathbb{Q}$. При этом условии имеем: $\tau_1(\infty) \notin \mathbb{Q}$, $n_1 = 0$, $m_1 \neq 0$. Как и ранее, при $t = n$ параметрическое представление (45) принимает вид (47). Так как $\omega_1(\infty) \in \mathbb{Q}$, то величина $y(n)$ принимает лишь конечное число, скажем k , различных значений. Тем самым, существуют ровно k различных прямых $M_1, \dots, M_k$, параллельных оси x , таких, что $\mathbb{N} = \bigsqcup_{j=1}^k \Lambda_j$ и точка $(x(n), y(n)) \in M_j$ при $n \in \Lambda_j$. Так как $\tau_1(\infty) \notin \mathbb{Q}$, то для каждого $j = 1, \dots, k$ множество $\{x(n), n \in \Lambda_j\}$ всюду плотно на отрезке $[0, 1]$. Тем самым, для каждого $j = 1, \dots, k$ множество точек $\{(x(n), y(n)), n \in \Lambda_j\}$ всюду плотно на прямой M_j . Наконец, множество $\{(x(n), y(n)), n \in \mathbb{N}\}$ всюду плотно на объединении прямых $\bigsqcup_{j=1}^k M_j$. Как легко увидеть, если при некотором j соответствующая M_j кривая $\Gamma_j \subset \mathfrak{A}$ лежит на первом листе, т.е. $\Gamma_j = \Gamma_j^{(1)}$, то $\pi\Gamma_j^{(1)}$ охватывает S_1 (и S_2).

Пункт 1° леммы 3 доказан.

Таким образом, в зависимости от арифметических свойств чисел $\omega_1(\infty)$ и $\tau_1(\infty)$ множество предельных точек для множества целочисленных точек $L^0 = \{x(n) + y(n)B_1, n \in \mathbb{N}\}$ в Π — это или конечное множество, или объединение конечного

числа параллельных отрезков, или все многообразие Якоби $\mathfrak{J} \text{ас } \mathfrak{P} = \Pi$. Непосредственно отсюда вытекает соответствующее утверждение для кривой Γ на $\mathfrak{X}$ и, в итоге, нужное нам утверждение о расположении в $\overline{\mathbb{C}}$ кривой $\pi \Gamma^{(1)}$ и расположении на этой кривой множества целочисленных точек $\pi (\Gamma^{(1)})^0$: множество предельных точек для $\pi (\Gamma^{(1)})^0$ — это или конечное множество, или объединение конечного числа непересекающихся дуг, или вся плоскость $\overline{\mathbb{C}}$.

В заключение приведем несколько рисунков (см. рис. 1–4), демонстрирующих поведение полюсов и нулей диагональных аппроксимаций Паде $[n/n]_f$ для функции f вида (3) в случае комплексно-сопряженных пар точек $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$ и $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, при некоторых значениях углов φ и ψ . Отметим, что все необходимые для этого вычисления проводились с точностью в 40 значащих цифр с помощью программы, написанной на языке FORTRAN и выполняемой под операционной системой LINUX.

Рис. 1. Полюсы (“черные” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[60/60]_f$ для эллиптической функции $f(z) = \sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)} - z^2 + z(e_1 + \cdots + e_4)/2$ в случае $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi = \pi/5$, $\psi = 4\pi/5$. Расположение полюсов и нулей соответствует аналитическим дугам S_1 и S_2 , образующим компакт минимальной емкости. Хорошо видно, что эти полюсы и нули фактически перемежаются

Рис. 2. Полюсы (“черные” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[46/46]_f, \dots, [60/60]_f$ для эллиптической функции $f(z) = \sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)} - z^2 + z(e_1 + \cdots + e_4)/2$ в случае $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi = \pi/5$, $\psi = 4\pi/5$. В левой части расположены 5 блуждающих полюсов аппроксимаций Паде, соответствующих $n = 46, 48, 50, 52, 54$

Рис. 3. Полюсы (“черные” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[60/60]_f$ для эллиптической функции $f(z) = \sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)} - z^2 + z(e_1 + \cdots + e_4)/2$ в случае $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi = \pi/3$, $\psi = 0.899\pi$. Расположение полюсов и нулей соответствует аналитическим дугам S_1 и S_2 , образующим компакт минимальной емкости. Хорошо видно, что эти полюсы и нули фактически перемежаются

Рис. 4. Полюсы (“черные” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[46/46]_f, \dots, [60/60]_f$ для эллиптической функции $f(z) = \sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)} - z^2 + z(e_1 + \cdots + e_4)/2$ в случае $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi = \pi/3$, $\psi = 0.899\pi$. В этом случае блуждающие полюсы аппроксимаций Паде, расположенные в левой части, оказываются очень близки друг к другу

Список литературы

1. Чебышёв П. Л. О непрерывных дробях // Ученые записки Имп. академии наук. 1855. Т. III. С. 636–664. (Полное собрание сочинений. Т. II. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948. С. 103–126.)
2. Марков А. А. Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues // Acta Math. 1895. V. 19. P. 93–104. (Два доказательства сходимости некоторых непрерывных дробей // Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.: Гостехиздат, 1948. С. 106–119.)
3. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
4. Ахиезер Н. И. Об ортогональных многочленах на нескольких интервалах // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134. №1. С. 9–12.
5. Ахиезер Н. И., Томчук Ю. Я. К теории ортогональных многочленов на нескольких интервалах // Докл. АН СССР. 1961. Т. 138. №4. С. 743–746.
6. Dumas S. Sur le développement des fonctions elliptiques en fractions continues. Thesis. Zürich, 1908.
7. Никитин Е. М. О сходимости диагональных аппроксимаций Паде для некоторых функций // Матем. сб. 1976. Т. 101 (143). №2. С. 280–292.
8. Stahl H. Orthogonal polynomials with complex valued weight function. I, II // Constr. Approx. 1986. V. 2. P. 225–240; 241–251.
9. Nuttall J. Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials // J. Approx. Theory. 1984. V. 42. P. 299–386.
10. Stahl H. Extremal domains associated with an analytic function. I, II // Complex Variables Theory Appl. 1985. V. 4. P. 311–324; 325–338.
11. Stahl H. Structure of extremal domains associated with an analytic function // Complex Variables Theory Appl. 1985. V. 4. P. 339–354.
12. Бернштейн С. Н. О многочленах, ортогональных в конечном интервале. Харьков: ОНТИ, 1937.
13. Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
14. Суетин С. П. О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций // Матем. сб. 2000. Т. 191. №9. С. 81–114.
15. Суетин С. П. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда // УМН. 2002. Т. 57. №1. С. 45–142.
16. Суетин С. П. Об асимптотических свойствах полюсов диагональных аппроксимаций Паде для некоторых обобщений марковских функций // Матем. сб. 2002. Т. 193. №12. С. 81–114.
17. Nuttall J. Padé polynomial asymptotics from a singular integral equation // Constr. Approx. 1990. V. 6. №2. P. 157–166.
18. Зверович Э. И. Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях // УМН. 1971. Т. 26. №1. С. 113–180.
19. Дубровин Б. А. Тэта-функции и нелинейные уравнения // УМН. 1981. Т. 36. №2. С. 11–80.
20. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. М.: ИЛ, 1960.
21. Форстер О. Римановы поверхности. М.: Мир, 1980.
22. Stahl H. Diagonal Padé approximants to hyperelliptic functions // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6). Spec. Iss. 1996. P. 121–193.
23. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: suetin@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
12.03.2003