Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Кудрявцева, О гомотопическом типе пространств функций Морса на поверхностях, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 1, 79–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7871>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 17:22:11

УДК 515.164.174+515.164.22+515.122.55

Е. А. Кудрявцева

О гомотопическом типе пространств функций Морса на поверхностях

Пусть M – гладкая замкнутая ориентируемая поверхность. Пусть F – пространство функций Морса на M с фиксированным количеством критических точек каждого индекса, причем не менее чем $\chi(M) + 1$ критических точек помечены различными метками (пронумерованы). Введено понятие косоуго цилиндрически-полиэдрального комплекса, обобщающее понятие полиэдрального комплекса. Определен косой цилиндрически-полиэдральный комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ (“комплекс оснащенных функций Морса”), ассоциированный с пространством F . В случае $M = S^2$ полиэдр $\tilde{\mathbb{K}}$ конечен; вычислена его эйлерова характеристика $\chi(\tilde{\mathbb{K}})$ и получены неравенства Морса для его чисел Бетти $\beta_j(\tilde{\mathbb{K}})$. Указана связь гомотопических типов полиэдра $\tilde{\mathbb{K}}$ и пространства F функций Морса, снабженного C^∞ -топологией.

Библиография: 51 название.

Ключевые слова: функции Морса, комплекс оснащенных функций Морса, полиэдральный комплекс, C^∞ -топология, универсальное пространство модулей.

DOI: 10.4213/sm7871

§ 1. Введение

Настоящая работа является продолжением работ [1]–[3].

Задача изучения гладких функций с “умеренными” особенностями на гладком многообразии M является классической. Изучение топологии пространства таких функций, как правило, состоит из двух частей:

- 1) сведение к комбинаторной задаче, т.е. построение комбинаторного объекта (например, конечномерного полиэдра), гомотопически эквивалентного изучаемому пространству функций;
- 2) решение полученной комбинаторной задачи (изучение топологии построенного полиэдра).

Одним из таких подходов является (параметрический) h -принцип М. Л. Громова [4], изучаемый, например, в работах [5], [6], [7; теорема 2.3], [8], [9] (см. также [1]). Однако 1-параметрический h -принцип не выполнен для пространств функций Морса на некоторых компактных многообразиях размерности, большей 5, как показано в работах [9], [8] (см. также [1; § 1]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00748-а), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1410.2012.1) и Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (грант № 14.740.11.0794).

Рассмотрим задачу о вычислении гомотопического типа пространства $F(M)$ функций Морса на компактном гладком многообразии M , например на окружности или на поверхности. Для пространства $F(S^1)$ функций Морса на окружности $M = S^1$ имеется следующий метод решения. Сопоставим каждой функции Морса $f \in F_r(S^1)$, имеющей ровно $2r$ критических точек, множество ее критических точек локальных минимумов (т.е. некоторую r -точечную конфигурацию на окружности M). Нетрудно доказываем, что построенное отображение $F_r(S^1) \rightarrow Q_r(S^1)$ сюръективно и является гомотопической эквивалентностью. Тем самым, описанный метод сводит задачу к изучению топологии конфигурационного пространства $Q_r(S^1)$, т.е. пространства r -точечных конфигураций на S^1 . Гомотопический тип последнего пространства легко находится и равен S^1 .

В настоящей работе изучается топология пространства $F = F(M)$ функций Морса на компактной двумерной ориентируемой поверхности M . Предлагаемый нами метод аналогичен “методу конфигурационных пространств”, описанному выше. А именно, в настоящей работе описывается построение комбинаторного объекта – комплекса $\tilde{\mathbb{K}} = \tilde{\mathbb{K}}(M)$ оснащенных функций Морса (определение 4.1 и теорема 4.2), аналогичного комплексу функций Морса $\tilde{K} = \tilde{K}(M)$ из работы [10]. Комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ является конечномерным косым цилиндрически-полиэдральным комплексом (см. определение 2.4), т.е. допускает разбиение на косые цилиндрические ручки (см. определение 2.3), аналогичные круглым ручкам и приклеенные друг к другу “регулярным” образом. При этом ручки находятся во взаимно однозначном соответствии с классами изотопности функций Морса из $F^1 \subset F$ (см. определения 1.1, (В) и 1.3), а подошва ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}$, отвечающей классу изотопности $[f]_{\text{isot}}$ функции f , содержится в объединении ручек $\mathbb{D}_{[g]_{\text{isot}}}$, отвечающих классам изотопности функций, полученных малыми возмущениями функции f . Важным свойством комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ является то, что в большинстве случаев (см. (4)) пространство F функций Морса на компактной связной ориентируемой поверхности M гомотопически эквивалентно полиэдру $R \times \tilde{\mathbb{K}}$:

$$F \sim R \times \tilde{\mathbb{K}}, \quad (1)$$

где $R = R(M)$ – одно из следующих многообразий: $\mathbb{R}P^3$, S^1 , $S^1 \times S^1$ и точка (см. (3)); а $\tilde{\mathbb{K}} = \tilde{\mathbb{K}}(M)$ – комплекс оснащенных функций Морса, построенный в настоящей работе (см. замечание 2.7). Тем самым, изучение топологии пространства F функций Морса сводится к комбинаторной задаче – изучению топологии полиэдра $\tilde{\mathbb{K}}$.

В некоторых случаях гомологии полиэдра $\tilde{\mathbb{K}}$ могут быть изучены методами теории Морса в силу естественного разложения полиэдра $\tilde{\mathbb{K}}$ на косые цилиндрические ручки. В качестве иллюстрации мы получаем обобщенные неравенства Морса для чисел Бетти пространства $\tilde{\mathbb{K}}$ и находим его эйлерову характеристику в случае, когда $M = S^2$ и у каждой функции $f \in F$ не менее трех критических точек помечены разными метками, т.е. занумерованы (см. следствие 2.8).

Наши комплексы $\tilde{K}$ и $\tilde{\mathbb{K}}$ функций Морса и оснащенных функций Морса аналогичны известным (абстрактным симплициальным флаговым) комплексам, рассматриваемым при изучении группы классов отображений поверхности M (см. [11]–[16]), кубическим комплексам (см. [17]) и обобщают граф разрезов

(см. [18]). В случае $M = S^1$ аналогичный комплекс $\widetilde{\mathbb{K}}$ состоит из одной точки и $R = S^1$.

Связные компоненты пространств функций Морса на поверхности изучались С. В. Матвеевым [18], Х. Цишангом, В. В. Шарко [19], Е. А. Кудрявцевой [18], С. И. Максименко [20], а также Ю. М. Бурманом [21], [22] (для пространств гладких функций без критических точек на открытых поверхностях) и Е. А. Кудрявцевой [10] (для пространств функций Морса с фиксированным множеством критических точек). В. А. Васильевым изучались кольца когомологий пространств $\mathbb{R}^n$ -значных функций с умеренными особенностями (т.е. функций, не имеющих “слишком сложных” критических точек) на любом гладком многообразии, причем морсовская особенность и особенность типа рождение-уничтожение пары критических точек не считались слишком сложными (см. работу [6] и ссылки в ней). Исследовалось количество классов эквивалентности (см. определение 1.3) простых функций Морса на прямой (см. [23]) и на поверхности (см. [24]–[28]), а также топология классов изотопности функций Морса на поверхности (см. [29]). В работах [30]–[39] функции Морса изучались в связи с задачей классификации (лиувиллевой, орбитальной) невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.

Перейдем к точным формулировкам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть M – гладкая (т.е. класса C^∞) компактная связная поверхность, край которой пуст или не пуст, $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$, где $\partial^+ M$ – объединение некоторых граничных окружностей M .

(А) Обозначим через $C^\infty(M)$ пространство гладких (т.е. класса C^∞) вещественнозначных функций f на M . Обозначим через $C^\infty(M, \partial^+ M, \partial^- M) \subset C^\infty(M)$ подпространство, состоящее из таких функций $f \in C^\infty(M)$, что все ее критические точки (т.е. такие точки $x \in M$, что $df|_x = 0$) принадлежат $\text{int } M$, а любая граничная точка $x \in \partial M$ имеет такую окрестность U в M , что $f(U \cap \partial M) = f(x)$, причем $\inf(f|_U) = f(x)$ при $x \in \partial^- M$ и $\sup(f|_U) = f(x)$ при $x \in \partial^+ M$.

(В) Функцию f на M назовем *функцией Морса на $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$* , если $f \in C^\infty(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ и все ее критические точки не вырождены (т.е. квадратичная форма в $T_x M$, заданная матрицей вторых частных производных f в критической точке x , не вырождена). Пусть

$$F := F_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

– пространство функций Морса f на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, имеющих ровно $p + q + r$ критических точек, из которых p точек локальных минимумов, q седловых точек и r точек локальных максимумов. Пусть $d^+, d^- \geq 0$ – числа граничных окружностей в $\partial^+ M$ и $\partial^- M$ соответственно. Будем предполагать, что выполнены неравенства Морса

$$\chi(M) = p - q + r, \quad p + d^+ > 0, \quad r + d^- > 0, \quad (2)$$

так как в противном случае $F = \emptyset$. Пространство F мы наделим C^∞ -топологией (см. [1; § 4, (а)]) и назовем его *пространством функций Морса на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$* . Обозначим через $F^1 \subset F$ подпространство в F ,

состоящее из таких функций Морса $f \in F$, что все локальные минимумы равны $f(\partial^- M) = -1$, а все локальные максимумы равны $f(\partial^+ M) = 1$.

(С) Обозначим через F^{num} (соответственно $F^{1,\text{num}}$) пространство, полученное из пространства F (соответственно из F^1) введением нумерации у некоторых из критических точек (называемых *отмеченными* критическими точками) функций Морса $f \in F$ (соответственно $f \in F^1$). Наделим его C^∞ -топологией, как в [1; § 4, (а)]. Если количество отмеченных критических точек локальных минимумов, максимумов и седловых точек равно $\hat{p}$, $\hat{r}$, $\hat{q}$ соответственно (где $0 \leq \hat{p} \leq p$, $0 \leq \hat{q} \leq q$, $0 \leq \hat{r} \leq r$), то имеем $C_p^{\hat{p}} C_q^{\hat{q}} C_r^{\hat{r}} \hat{p}! \hat{q}! \hat{r}!$ -листные накрытия $F^{\text{num}} \rightarrow F$ и $F^{1,\text{num}} \rightarrow F^1$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.2. Пусть $\mathcal{D}^\pm = \text{Diff}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ – группа всех (не обязательно сохраняющих ориентацию и компоненты края) диффеоморфизмов поверхности M , переводящих каждое множество $\partial^+ M$, $\partial^- M$ в себя. Пространство $\mathcal{D}^\pm$ наделим C^∞ -топологией (см. [1; § 4, (б)]). Пусть $\mathcal{D}^0 \subset \mathcal{D}^\pm$ – подгруппа, состоящая из всех диффеоморфизмов $h \in \mathcal{D}^\pm$, гомотопных id_M в классе гомеоморфизмов M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. (А) Две функции Морса $f, g \in F$ назовем *эквивалентными*, если найдутся такие диффеоморфизмы $h_1 \in \mathcal{D}^\pm$ и $h_2 \in \text{Diff}^+(\mathbb{R})$, что $f = h_2 \circ g \circ h_1$ (и h_1 сохраняет нумерацию критических точек, если $f, g \in F^{\text{num}}$), и запишем $f \sim g$. Класс эквивалентности функции f обозначим через $[f]$.

(В) Две функции Морса f и g назовем *изотопными*, если они эквивалентны и $h_1 \in \mathcal{D}^0$ (т.е. h_1 изотопен тождественному), и запишем $f \sim_{\text{isot}} g$. Множество всех функций из F^1 , изотопных функции f , обозначим через $[f]_{\text{isot}}$.

Классификация функций Морса из F с точностью до эквивалентности легко получается из классификации функций Морса с точностью до послойной эквивалентности (см. [36; гл. 2, теоремы 4 и 8]). Автором доказаны критерии (послойной) эквивалентности (соответственно изотопности) пары “возмущенных” функций Морса $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^\infty(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, полученных малыми возмущениями из пары (послойно) эквивалентных (соответственно изотопных) функций Морса $f, g \in F$ (см. § 3, этап 3 или [37; утверждение 1.1 и § 3]), и доказана классификация функций Морса с точностью до изотопности (см. [40; лемма 1 и теорема 2]).

В работе [1] введено понятие оснащенных функций Морса на компактной поверхности M и доказана гомотопическая эквивалентность пространства F функций Морса и пространства $\mathbb{F}$ оснащенных функций Морса на M . Также доказан аналог последнего утверждения для ограничений указанных гомотопических эквивалентностей на классы изотопности $[f]_{\text{isot}}$ (см. [1; теорема 2.5]). Последнее дает положительный ответ на вопрос, поставленный В. И. Арнольдом.

Статья имеет следующую структуру. В § 2 определяется более общее пространство функций Морса, вводится понятие косоуго цилиндрически-полиэдрального комплекса и формулируются основные результаты настоящей работы (теорема 2.6 и следствие 2.8). В § 3 описывается построение стандартной косоуго цилиндрической ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}}$, отвечающей классу изотопности $[f]_{\text{isot}}$ функции Морса $f \in F^1$, и изучаются отображения инцидентности между парами

ручек, отвечающими парам примыкающих друг к другу классов изотопности $[f]_{\text{isot}} \prec [g]_{\text{isot}}$ функций (определение 2.4, (D), леммы 3.1–3.5). В § 4 описывается построение комбинаторного объекта – комплекса $\mathbb{K}$ оснащенных функций Морса (и содержащего его многообразия $\widehat{\mathcal{M}}$) и доказывается, что он является косым цилиндрически-полиэдральным комплексом (теоремы 4.2, 4.3).

Автор выражает благодарность В. И. Арнольду, С. А. Мелихову, А. А. Ошемкову, Д. А. Пермякову, А. Т. Фоменко и Х. Ципангу за внимание к работе и полезные обсуждения.

§ 2. Точные формулировки основных результатов

Следующее пространство обобщает пространства $F_{p,q,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, F^{num} и состоит из функций Морса, у которых некоторые из отмеченных критических точек закреплены.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $0 \leq p^* \leq \widehat{p}$, $0 \leq q^* \leq \widehat{q}$, $0 \leq r^* \leq \widehat{r}$ (см. определение 1.1, (C)). Обозначим

$$(p', p''; q', q''; r', r'') := (\widehat{p} - p^*, p - \widehat{p}; \widehat{q} - q^*, q - \widehat{q}; \widehat{r} - r^*, r - \widehat{r}).$$

Для каждой функции $f \in F^{\text{num}}$ обозначим через $\mathcal{C}_{f,0}$, $\mathcal{C}_{f,1}$, $\mathcal{C}_{f,2}$ множества ее критических точек локальных минимумов, седловых критических точек и точек локальных максимумов соответственно, а через $\widehat{\mathcal{C}}_{f,\lambda} \subseteq \mathcal{C}_{f,\lambda}$, $\lambda = 0, 1, 2$, обозначим множества отмеченных критических точек. В каждом из множеств отмеченных (а потому занумерованных) критических точек рассмотрим подмножество, обозначаемое через $\mathcal{C}_{f,0}^*$, $\mathcal{C}_{f,1}^*$, $\mathcal{C}_{f,2}^*$ и состоящее из первых p^* , q^* , r^* точек соответственно. Фиксируем “базисную” функцию $f_* \in F^{\text{num}}$. Пусть

$$F := F_{p^*, p'; p'', q^*, q'; q'', r^*, r'; r''}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

– пространство функций Морса $f \in F^{\text{num}}$ на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ (см. определение 1.1, (B)) таких, что $\mathcal{C}_{f,\lambda}^* = \mathcal{C}_{f_*,\lambda}^*$ для любого $\lambda = 0, 1, 2$. Пространство F мы наделим C^∞ -топологией (см. [1; § 4]) и назовем его *обобщенным пространством функций Морса на поверхности* $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$. Определим подпространство $F^1 \subset F$, как в определении 1.1, (B).

Пространства F , F^{num} из определения 1.1 имеют вид

$$F = F_{0,0,p;0,0,q;0,0,r}(M, \partial^+ M, \partial^- M), \quad F^{\text{num}} = F_{0,\widehat{p},p'';0,\widehat{q},q'';0,\widehat{r},r''}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

соответственно. Из теоремы С. В. Матвеева (см. [18]) и ее обобщения в [18] для пространства F^{num} получаем следующее ее обобщение: любое обобщенное пространство $F = F_{p^*, p'; p'', q^*, q'; q'', r^*, r'; r''}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ функций Морса без закрепленных седловых точек (т.е. при $q^* = 0$) линейно связно.

Всюду в статье мы предполагаем, что поверхность M ориентирована. Случай неориентируемой поверхности M рассматривается, как и в [1; замечание 2.7].

Следующие группы диффеоморфизмов обобщают группы $\mathcal{D}^\pm$ и $\mathcal{D}^0$ (см. обозначение 1.2). Мы вводим их для изучения обобщенного пространства F функций Морса (и по-прежнему обозначаем через $\mathcal{D}^\pm$ и $\mathcal{D}^0$).

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.2. (А) Множества $\mathcal{C}_{f,0}^*$, $\mathcal{C}_{f,1}^*$, $\mathcal{C}_{f,2}^*$ фиксированных критических точек совпадают для разных функций $f \in F$, будем их обозначать через $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ соответственно; положим $\mathcal{C} := \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Обозначим через $\mathcal{D}^\pm = \text{Diff}(M, \partial^+ M, \partial^- M, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ группу всех (не обязательно сохраняющих ориентацию и компоненты края) диффеоморфизмов поверхности M , переводящих каждое множество $\partial^+ M$, $\partial^- M$, $\mathcal{C}_\lambda$ в себя, $0 \leq \lambda \leq 2$. Пространство $\mathcal{D}^\pm$ тоже наделим C^∞ -топологией (см. [1; § 4, (б)]). Если M ориентируема, обозначим через $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^\pm$ подгруппу сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов (с индуцированной топологией). Пусть $\mathcal{D}^0 = \text{Diff}^0(M, \mathcal{C}) \subset \mathcal{D}^\pm$ – подгруппа (с индуцированной топологией), состоящая из всех диффеоморфизмов $h \in \mathcal{D}^\pm$, гомотопных id_M в классе гомеоморфизмов пары $(M, \mathcal{C})$.

(В) Обозначим через $\bar{M}$ замкнутую поверхность, полученную из поверхности M стягиванием в точку каждой граничной окружности. Обозначим через $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}$ группу (называемую *группой Торелли*), состоящую из всех диффеоморфизмов $h \in \mathcal{D}$, переводящих в себя каждую компоненту края M и таких, что индуцированный гомеоморфизм $\bar{h}: \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ индуцирует тождественный автоморфизм группы гомологий $H_1(\bar{M})$. Имеем $\mathcal{D}^0 \subset \mathcal{T}$.

Из результатов К. Дж. Эрля и Дж. Иллса (мл.) [41], [42] следует, что для связной компактной ориентируемой гладкой поверхности M имеется гомотопическая эквивалентность

$$\mathcal{D}^0 \sim R_{\mathcal{D}^0}, \quad (3)$$

где $R_{\mathcal{D}^0}$ – одно из четырех многообразий, определяемое парой $(M, |\mathcal{C}|)$, а именно: $SO(3) = \mathbb{R}P^3$ (при $M = S^2$, $\mathcal{C} = \emptyset$), $SO(2) = S^1$ (при $0 \leq \chi(M) - |\mathcal{C}| \leq 1$ и $d^+ + d^- + |\mathcal{C}| > 0$), $T^2 = S^1 \times S^1$ (при $M = T^2$, $\mathcal{C} = \emptyset$) и точка (при $\chi(M) < |\mathcal{C}|$); см., например, [43], [41]. В частности, группа $\mathcal{D}^0$ линейно связна.

Косые цилиндрически-полиэдральные комплексы. Всюду в статье многогранники выпуклы и имеют размерность $\leq 2q$, а евклидовы многогранники – размерность $\leq q - 1$. Под *выпуклым многогранником* (соответственно *евклидовым выпуклым многогранником*) понимаем выпуклую оболочку конечного подмножества векторного пространства $\mathbb{R}^{2q}$ (соответственно евклидова пространства $\mathbb{E}^{q-1}$), а под *изоморфизмом* многогранников – биекцию между многогранниками, продолжающуюся до аффинного изоморфизма (соответственно до изометрии) объемлющих пространств.

Утолщенный цилиндр – это главное расслоение над выпуклым многогранником со структурной группой стандартный цилиндр $\mathbb{R}^c \times (S^1)^d$ (где прямые сомножители S^1 в разложении цилиндра не упорядочены), а *стандартная цилиндрическая ручка* – это прямое произведение евклидова выпуклого многогранника и утолщенного цилиндра. Уточним и обобщим эти понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. (А) *Утолщенным цилиндром* назовем прямое произведение $\mathbb{S} := (\mathbb{R}^c \times (S^1)^d) \times P$, где P – выпуклый многогранник, $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $c, d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Гомеоморфизм $h: \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_2$ между утолщенными цилиндрами назовем *допустимым*, если $c_1 = c_2 =: c$, $d_1 = d_2 =: d$, существуют биекции $\pi \in \Sigma_c$ и $\rho \in \Sigma_d$, изоморфизм многогранников $a: P_1 \rightarrow P_2$ и непрерывное отображение $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{c+d}): P_1 \rightarrow \mathbb{R}^c \times (S^1)^d$ такие, что для любого

$(x_1, \dots, x_c, \varphi_1, \dots, \varphi_d, u) \in \mathbb{S}_1$ выполнено

$$h(x_1, \dots, x_c, \varphi_1, \dots, \varphi_d, u) = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(c)}, \varphi_{\rho(1)}, \dots, \varphi_{\rho(d)}, 0) + (\delta_1(u), \dots, \delta_{c+d}(u), a(u)).$$

Автоморфизм $b: D \rightarrow D$ евклидова многогранника (т.е. изоморфизм на себя) назовем *допустимым*, если он тривиален или не имеет неподвижных вершин, а для любой грани $\tau \subset \partial D$ выполнено либо $b(\tau) = \tau$, либо $\tau \cap b(\tau) = \emptyset$.

(В) *Стандартной цилиндрической ручкой* назовем прямое произведение $D \times \mathbb{S}$ евклидова выпуклого многогранника D и утолщенного цилиндра $\mathbb{S}$ (см. (А)). Гомеоморфизм $D_1 \times \mathbb{S}_1 \rightarrow D_2 \times \mathbb{S}_2$ между стандартными цилиндрическими ручками назовем *изоморфизмом*, если он является прямым произведением изоморфизма $b: D_1 \rightarrow D_2$ евклидовых многогранников и допустимого гомеоморфизма $\mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_2$ утолщенных цилиндров (см. (А)).

Автоморфизм $D \times \mathbb{S} \rightarrow D \times \mathbb{S}$ стандартной цилиндрической ручки назовем *допустимым*, если либо он совпадает с тождественным, либо хотя бы один из следующих соответствующих объектов нетривиален: автоморфизмы многогранников $b: D \rightarrow D$, $a: P \rightarrow P$ и перестановки $\pi \in \Sigma_c$, $\rho \in \Sigma_d$; причем выполнены следующие условия. Автоморфизм $b: D \rightarrow D$ допустим (см. (А)) и выполнены следующие (не обязательные в общем случае, но выполненные для комплексов оснащенных функций Морса в случае (4)) дополнительные условия: перестановка $\pi \in \Sigma_c$ всегда тривиальна, в случае тривиальности автоморфизма $a: P \rightarrow P$ автоморфизм $b: D \rightarrow D$ тривиален, а в случае тривиальности b перестановка $\rho \in \Sigma_d$ и автоморфизм $a^2: P \rightarrow P$ тривиальны.

(С) *Стандартной косой цилиндрической ручкой* назовем пространство орбит $\mathbb{D}^{\text{st}} := (D \times \mathbb{S})/\Gamma$ свободного действия (автоматически конечной) группы Γ на стандартной цилиндрической ручке $D \times \mathbb{S}$ допустимыми автоморфизмами (см. (В)). Размерность k многогранника $D = D^k$ назовем *индексом* ручки $\mathbb{D} = \mathbb{D}^{\text{st}}$, подмножество $\partial \mathbb{D} := ((\partial D) \times \mathbb{S})/\Gamma \subset \mathbb{D}$ назовем ее *подошвой*, а дополнение $\mathring{\mathbb{D}} := \mathbb{D} \setminus \partial \mathbb{D}$ — *открытой стандартной (косой) цилиндрической ручкой*, отвечающей ручке $\mathbb{D}$. Для любой грани $D' \subset \partial D$ образ подмножества $D' \times \mathbb{S} \subset D \times \mathbb{S}$ при проекции $D \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{D}^{\text{st}}$ назовем *(косой) гранью* стандартной (косой) ручки $\mathbb{D}^{\text{st}}$. (Косая грань всегда является стандартной косой цилиндрической ручкой в силу допустимости автоморфизма $b: D \rightarrow D$ из (В); см. (А).) Гомеоморфизм $\mathbb{D}_1^{\text{st}} \rightarrow \mathbb{D}_2^{\text{st}}$ между стандартными косыми цилиндрическими ручками назовем *изоморфизмом*, если он поднимается до изоморфизма $D_1 \times \mathbb{S}_1 \rightarrow D_2 \times \mathbb{S}_2$ соответствующих стандартных цилиндрических ручек. Автоморфизм $\mathbb{D}^{\text{st}} \rightarrow \mathbb{D}^{\text{st}}$ стандартной косой цилиндрической ручки назовем *допустимым*, если он поднимается до допустимого автоморфизма $D \times \mathbb{S} \rightarrow D \times \mathbb{S}$ соответствующей стандартной цилиндрической ручки (см. (В)).

(D) Погружение $i: \mathbb{S}_1 \hookrightarrow \mathbb{S}_2$ между утолщенными цилиндрами $\mathbb{S}_j = (\mathbb{R}^{c_j} \times (S^1)^{d_j}) \times P_j$, $j = 1, 2$ (см. (А)), назовем *допустимым*, если существуют отображения

$$\pi: \{1, \dots, c_2 + d_2\} \rightarrow \{0, 1, \dots, c_1 + d_1\}, \quad \eta: \{1, \dots, c_1 + d_1\} \rightarrow \{1, -1\}$$

такие, что $\{1, \dots, c_1\} \subset \pi(\{1, \dots, c_2\}) \subset \{0, 1, \dots, c_1\}$, $\pi|_{\{1, \dots, c_2\} \cap \pi^{-1}\{1, \dots, c_1\}}$ инъективно, $\{c_1 + 1, \dots, c_1 + d_1\} \subset \pi(\{c_2 + 1, \dots, c_2 + d_2\})$, $\eta(\{1, \dots, c_1\}) = 1$, а также

существуют отображение $a: P_1 \rightarrow P_2$, продолжающееся до аффинного, и непрерывное отображение $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{c_2+d_2}): P_1 \rightarrow \mathbb{R}^{c_2} \times (S^1)^{d_2}$ такие, что

$$i(x_1, \dots, x_{c_1+d_1}, u) = (\eta(\pi(1)) x_{\pi(1)}, \dots, \eta(\pi(c_2 + d_2)) x_{\pi(c_2+d_2)}, 0) + (\delta_1(u), \dots, \delta_{c_2+d_2}(u), a(u))$$

для любого $(x_1, \dots, x_{c_1+d_1}, u) \in \mathbb{S}_1$, где последние d_j координат любой точки из $\mathbb{R}^{c_j} \times (S^1)^{d_j}$ рассматриваются по модулю 1 при $j = 1, 2$, $x_0 := 0$, $\eta(0) := 1$. Погружение $D_1 \times \mathbb{S}_1 \hookrightarrow D_2 \times \mathbb{S}_2$ между стандартными цилиндрическими ручками (см. (B)) назовем *допустимым*, если оно является прямым произведением изоморфизма $D_1 \rightarrow D_2$ евклидовых многогранников и допустимого погружения $\mathbb{S}_1 \hookrightarrow \mathbb{S}_2$ утолщенных цилиндров. Вложение $\mathbb{D}_1^{\text{st}} \hookrightarrow \mathbb{D}_2^{\text{st}}$ между стандартными *косыми* цилиндрическими ручками (см. (C)) назовем *мономорфизмом*, если оно поднимается до допустимого погружения $D_1 \times \mathbb{S}_1 \hookrightarrow D_2 \times \mathbb{S}_2$ соответствующих стандартных цилиндрических ручек.

Пусть X – топологическое пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. (A) Будем говорить, что на подмножестве $\mathbb{D} \subset X$ задана *структура (косой) цилиндрической ручки*, и называть это подмножество *(косой) цилиндрической ручкой*, если $\mathbb{D}$ замкнуто в X и фиксированы стандартная (косая) цилиндрическая ручка $\mathbb{D}^{\text{st}}$ с точностью до изоморфизма и гомеоморфизм $\varphi_{\mathbb{D}}: \mathbb{D}^{\text{st}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ (называемый *характеристическим отображением* (косой) ручки $\mathbb{D}$) с точностью до допустимых автоморфизмов стандартной (косой) ручки $\mathbb{D}^{\text{st}}$. Подмножество $\partial\mathbb{D} := \varphi_{\mathbb{D}}(\partial\mathbb{D}^{\text{st}})$ назовем *подошвой* (косой) ручки $\mathbb{D}$. Вложение $i: \mathbb{D}_1 \hookrightarrow \mathbb{D}_2$ между (косыми) цилиндрическими ручками назовем *мономорфизмом*, если вложение $\varphi_{\mathbb{D}_2}^{-1} \circ i \circ \varphi_{\mathbb{D}_1}$ соответствующих стандартных (косых) ручек является мономорфизмом.

(B) Пространство X назовем *(косым) цилиндрически-полиэдральным комплексом*, если фиксировано разбиение $X = \bigcup_{i=1}^n \mathring{\mathbb{D}}_i$, где $n \leq \infty$, на попарно непересекающиеся подмножества $\mathring{\mathbb{D}}_i$, называемые *открытыми (косыми) цилиндрическими ручками* разбиения, и для каждой открытой ручки $\mathring{\mathbb{D}}_i$ фиксирована структура (косой) цилиндрической ручки на ее замыкании $\mathbb{D}_i := \overline{\mathring{\mathbb{D}}_i}$, называемом *(косой) цилиндрической ручкой* разбиения, такая, что $\mathring{\mathbb{D}}_i = \mathbb{D}_i \setminus \partial\mathbb{D}_i$, причем выполнены следующие условия:

- с) для любой (косой) ручки $\mathbb{D}_i$ ограничение характеристического отображения $\varphi_{\mathbb{D}_i}: \mathbb{D}_i^{\text{st}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_i$ на произвольную (косую) грань $(\mathbb{D}_i^{\text{st}})' \subset \partial\mathbb{D}_i^{\text{st}}$ соответствующей стандартной (косой) ручки $\mathbb{D}_i^{\text{st}}$ является мономорфизмом $(\mathbb{D}_i^{\text{st}})' \hookrightarrow \mathbb{D}_j$ в некоторую (косую) ручку $\mathbb{D}_j$ (см. (A) и определение 2.3, (C), (D)), поэтому подошва $\partial\mathbb{D}_i$ любой (косой) ручки $\mathbb{D}_i$ индекса k содержится в объединении конечного числа (косых) ручек индекса $k - 1$;
- w) подмножество $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда для любой (косой) ручки $\mathbb{D}_i$ замкнуто пересечение $Y \cap \mathbb{D}_i$.

Максимальный индекс (косых) цилиндрических ручек (косого) цилиндрически-полиэдрального комплекса назовем *рангом* этого комплекса.

(C) Если для каждой (косой) цилиндрической ручки $\mathbb{D}_i \subset X$ выполнено $c = d = \dim P = 0$, получаем определение *строго полиэдрального комплекса*; см. [10]. (Определение полиэдрального комплекса имеется, например, в [44].)

(D) Пусть $\sigma, \tau \subset X$ – два непересекающихся подмножества топологического пространства X (например, две открытые клетки клеточного комплекса). Будем говорить, что σ *примыкает к* τ , и писать $\tau \prec \sigma$ (и $\bar{\tau} \prec \bar{\sigma}$), если $\tau \subset \partial\sigma := \bar{\sigma} \setminus \sigma$. Пишем $\tau \preceq \sigma$, если $\tau \prec \sigma$ или $\tau = \sigma$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.5. Для любой функции Морса $f \in F$ рассмотрим граф G_f в поверхности $\text{int}(M)$, полученный из графа $f^{-1}(f(\mathcal{C}_{f,1}))$ выкидыванием всех связных компонент, не содержащих седловых критических точек (см. определение 2.1). Этот граф имеет q вершин (являющихся седловыми точками $y \in \mathcal{C}_{f,1}$), степени всех вершин равны 4, а значит в графе $2q$ ребер. Если поверхность M ориентирована, то на ребрах графа G_f имеется естественная ориентация такая, что в любой (внутренней) точке ребра репер, составленный из положительно ориентированного касательного вектора к ребру и вектора $\text{grad } f$ (по отношению к какой-нибудь фиксированной римановой метрике), задает положительную ориентацию поверхности. Аналогично вводится ориентация на любой связной компоненте линии уровня $f^{-1}(a)$ функции f , не содержащей критическую точку, $a \in \mathbb{R}$.

Сформулируем основной результат настоящей работы, описывающий комбинаторный объект – комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса, ассоциированный с пространством F .

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть M – связная компактная ориентируемая гладкая поверхность с разбиением края $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$ на положительные и отрицательные граничные окружности. Рассмотрим обобщенные пространства $F = F_{p^*, p', p''; q^*, q', q''; r^*, r', r''}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ и $F^1 \subset F$ функций Морса на поверхности $(M, \partial^+ M, \partial^- M)$, у которых могут быть отмеченные критические точки, из которых некоторые точки могут быть закрепленными (см. определение 2.1). Предположим, что

$$\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} > \chi(M) \quad (4)$$

(т.е. количество отмеченных критических точек превосходит $\chi(M)$).

Тогда верны следующие утверждения.

(A) Имеется косой цилиндрически-полиэдральный комплекс

$$\tilde{\mathbb{K}} = \tilde{\mathbb{K}}_{p^* + d^-, p', p''; q^*, q', q''; r^* + d^+, r', r''}$$

(называемый комплексом оснащенных функций Морса) ранга $q - 1$ и размерности $\dim \tilde{\mathbb{K}} = 3q - 2$ при $q \geq 2$ и $\dim \tilde{\mathbb{K}} = 0$ при $q \leq 1$, косые цилиндрические ручки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с классами изотопности $[f]_{\text{isot}}$ функций Морса $f \in F^1$. Индекс ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}$, отвечающей классу изотопности $[f]_{\text{isot}}$, равен $q - s(f)$, где $s(f)$ – количество седловых критических значений функции f . Подошва $\partial \mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}$ ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}$ содержится в объединении ручек $\mathbb{D}_{[g]_{\text{isot}}}$ таких, что $[f]_{\text{isot}} \prec [g]_{\text{isot}}$.

(В) Дискретная группа $\mathcal{D}^\pm/\mathcal{D}^0$ действует на $\tilde{\mathbb{K}}$ автоморфизмами косоуго цилиндрически-полиэдрального комплекса, причем индуцированное действие на множестве ручек согласовано с естественным действием на множестве $F^1/\sim_{\text{isot}}$ классов изотопности функций. В частности, для любого класса изотопности $[f]_{\text{isot}}$ все ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}$, $h \in \mathcal{D}^\pm$, изоморфны одной и той же стандартной косоуго цилиндрической ручке $(D_{[f]} \times \mathbb{S}_{[f]})/\Gamma_{[f]}$ (см. определение 2.3, (В)). Имеется $\mathcal{D}^\pm/\mathcal{D}^0$ -эквивариантный гомеоморфизм полиэдра $\tilde{\mathbb{K}}$ на $\mathcal{D}^\pm/\mathcal{D}^0$ -инвариантное подмножество некоторого гладкого $3q$ -мерного многообразия $\tilde{\mathcal{M}}$ с плоской аффинной связностью, на котором группа $\mathcal{D}^\pm/\mathcal{D}^0$ действует диффеоморфизмами, сохраняющими связность.

(С) Для каждой ручки

$$\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}} \approx (D_{[f]} \times \mathbb{S}_{[f]})/\Gamma_{[f]} \approx (D_{[f]} \times (\mathbb{R}^{c([f])} \times (S^1)^{d([f])}) \times P_{[f]})/\Gamma_{[f]} \sim (S^1)^d/\Gamma_{[f]}$$

размерность $d = d([f])$ тора $(S^1)^d$ обладает свойствами (29), $c + d = n([f])$ (см. (18)) и $d \leq \min\{p' + p'' + r' + r'', t - 1\}$, где $t = t([f]) \leq q$ – количество связанных компонент графа G_f (см. обозначение 2.5). Если число фиксированных критических точек $p^* + q^* + r^* \leq \chi(M) + 1$, то $d = t - 1$, а при дополнительном условии $t = q$ выполнено $d = p' + p'' + r' + r''$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. Согласно [1] пространства F^1 , $\mathbb{F}^1$ суть сильные деформационные ретракты пространств F , $\mathbb{F}$ соответственно, а забывающие отображения $\mathbb{F} \rightarrow F$, $\mathbb{F}^1 \rightarrow F^1$ суть гомотопические эквивалентности, где $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ – пространства оснащенных функций Морса. Можно показать, что многообразие $\tilde{\mathcal{M}}$ из теоремы 2.6, (В) в действительности гомеоморфно $\mathbb{F}^1/\mathcal{D}^0$ (т.е. является универсальным пространством модулей оснащенных функций Морса), причем действие группы $\mathcal{D}^0$ на $\mathbb{F}^1$ свободно, проекция $\mathbb{F}^1 \rightarrow \mathbb{F}^1/\mathcal{D}^0$ является тривиальным расслоением со слоем $\mathcal{D}^0$ (см. [2]), а $\tilde{\mathbb{K}}$ есть сильный деформационный ретракт $\tilde{\mathcal{M}}$ (см. [3]). Отсюда и из (3) следует требуемая гомотопическая эквивалентность (1). Можно также показать, что ограничения указанных гомотопических эквивалентностей на любой класс $[f]_{\text{isot}}$ изотопности функций из F^1 или на любую косоуго ручку комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ являются гомотопическими эквивалентностями.

Пусть $\mathbb{k}$ – поле (например, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{Z}_p$). Для топологического пространства X рассмотрим числа Бетти $\beta_j(X) := \dim_{\mathbb{k}} H_j(X; \mathbb{k})$ и полином Пуанкаре $P(X, t) := \sum_{j=0}^{\infty} t^j \beta_j(X)$. Следующее утверждение выводится из теоремы 2.6 стандартными методами теории Морса (см., например, [45; § 45]).

СЛЕДСТВИЕ 2.8. (А) Если количество $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r}$ отмеченных критических точек превосходит $\chi(M)$, то $\beta_j(\tilde{\mathbb{K}}) = 0$ при любом $j \geq 3q - 2$.

(В) Пусть $\bar{M} = S^2$ (см. обозначение 2.2), $p^* + q^* + r^* \leq \chi(M) + 1 \leq \hat{p} + \hat{q} + \hat{r}$. Тогда $\mathcal{D} = \mathcal{D}^0$, комплекс $\mathbb{K} = \mathbb{K}$ является конечным, связным и компактным косоуго торически-полиэдральным комплексом ранга $q - 1$ и размерности $3q - 2$ или 0 (при $q \geq 2$ и $q \leq 1$ соответственно); числа Бетти $\beta_j = \beta_j(\mathbb{K})$ комплекса $\mathbb{K}$ удовлетворяют неравенствам Морса–Смейла

$$\beta_j - \beta_{j-1} + \beta_{j-2} - \beta_{j-3} + \cdots \leq q_j - q_{j-1} + q_{j-2} - q_{j-3} + \cdots, \quad j \geq 0,$$

где $Q(t) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j q_j := \sum_{[f]_{\text{isot}} \in F^1 / \sim_{\text{isot}}} t^{q-s(f)} P(\mathbb{D}_{[f]}, t)$. В частности, справедливы неравенства Морса

$$\chi(\mathbb{K}) = (-1)^{q-1} |\{[f]_{\text{isot}} \in F^1 / \sim_{\text{isot}} \mid s(f) = 1\}|, \quad \beta_j \leq q_j, \quad j \geq 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.9. Всюду в формулировках утверждений настоящей статьи рассматриваются произвольные обобщенные пространства функций Морса $F = F_{p^*, p', p''; q^*, q', q''; r^*, r', r''}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$ и F^1 , состоящие из функций Морса, у которых могут быть как отмеченные (пронумерованные), так и не отмеченные (не пронумерованные) критические точки. Однако в доказательствах иногда будем считать, что $F = F^{\text{num}}$ и $F^1 = F^{1, \text{num}}$ (см. определение 2.1), т.е. что все критические точки функций Морса $f \in F$ пронумерованы. Это не ограничивает общности, так как все отображения, построенные в настоящей статье, согласованы с перенумерациями тех критических точек, которые изначально не были отмечены (т.е. $\Sigma_{p''} \times \Sigma_{q''} \times \Sigma_{r''}$ -эquivариантны относительно действия группы $\Sigma_{p''} \times \Sigma_{q''} \times \Sigma_{r''}$ на пространстве F^{num} перенумерациями изначально не отмеченных критических точек). Как в определении 2.1 и обозначении 2.2, через

$$\mathcal{C}_f := \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,1} \cup \mathcal{C}_{f,2}, \quad \widehat{\mathcal{C}}_f := \widehat{\mathcal{C}}_{f,0} \cup \widehat{\mathcal{C}}_{f,1} \cup \widehat{\mathcal{C}}_{f,2}$$

обозначим множество всех критических точек (соответственно всех отмеченных критических точек) функции $f \in F$. Имеем включения $\mathcal{C} \subseteq \widehat{\mathcal{C}}_f \subseteq \mathcal{C}_f$ и $\mathcal{C}_\lambda \subseteq \widehat{\mathcal{C}}_{f,\lambda} \subseteq \mathcal{C}_{f,\lambda}$ множеств фиксированных критических точек, отмеченных критических точек и всех критических точек (соответственно индекса λ) функции f , $\lambda = 0, 1, 2$.

§ 3. Построение стандартных косых цилиндрических ручек $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}}$ и отображений инцидентности $\chi_{[f]_{\text{isot}}, [g]_{\text{isot}}}$

В этом параграфе предполагается, что выполнено условие (4) (т.е. количество $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r}$ отмеченных критических точек превосходит $\chi(M)$). Для каждого класса изотопности $[f]_{\text{isot}}$ функций Морса мы опишем построение стандартной косой цилиндрической ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}}$, а для каждой пары примыкающих классов изотопности – соответствующее отображение инцидентности. В § 4 будет приведено построение комплекса оснащенных функций Морса $\mathbb{K}$, полученного из описанных ручек при помощи описанных отображений инцидентности. Проведем построение в несколько этапов.

3.1. Построение многогранника $D_{[f]_{\text{isot}}}$ для класса изотопности $[f]_{\text{isot}}$.

Этап 1 (определение пермutoэдра $\mathcal{P}^{q-1}$ порядка q и описание его граней; см. [46]). *Пермutoэдр порядка q* – это выпуклый $(q-1)$ -мерный многогранник $\mathcal{P}^{q-1}$, вложенный в q -мерное пространство, вершины которого получены перестановками координат вектора $(1, \dots, q)$. Опишем его подробнее: пусть $e_1, \dots, e_q$ – стандартный базис $\mathbb{R}^q$, и пусть $\mathcal{P}^{q-1} \subset \mathbb{R}^q$ – выпуклая оболочка множества точек $P_\pi = \sum_{k=1}^q (k - \frac{q+1}{2}) e_{\pi_k}$, $\pi \in \Sigma_q$. Известно (см. [46]), что $\mathcal{P}^{q-1}$ есть $(q-1)$ -мерный выпуклый многогранник в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^{q-1} := (e_1 + \dots + e_q)^\perp$, имеющий ровно $q!$ вершин P_π , $\pi \in \Sigma_q$, причем его

$(q - s)$ -мерные грани находятся во взаимно однозначном соответствии с упорядоченными разбиениями $J = (J_1, \dots, J_s)$ множества $\{1, \dots, q\}$ на s непустых подмножеств $J_1, \dots, J_s$ (т.е. $\{1, \dots, q\} = J_1 \sqcup \dots \sqcup J_s$), $1 \leq s \leq q$. А именно, грань $\tau_J \subset \mathcal{P}^{q-1}$, отвечающая разбиению $J = (J_1, \dots, J_s)$, — это выпуклая оболочка множества точек $(\Sigma_{r_1} \times \Sigma_{r_2-r_1} \times \dots \times \Sigma_{r_s-r_{s-1}})(P_\pi)$, где числа $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_{s-1} < r_s = q$ и перестановка $\pi \in \Sigma_q$ однозначно определяются условиями

$$J_1 = \{\pi_1, \dots, \pi_{r_1}\}, \quad J_2 = \{\pi_{r_1+1}, \dots, \pi_{r_2}\}, \quad \dots, \quad J_s = \{\pi_{r_{s-1}+1}, \dots, \pi_{r_s}\} \quad (5)$$

и условиями $\pi_1 < \dots < \pi_{r_1}$, $\pi_{r_1+1} < \dots < \pi_{r_2}$, $\dots$, $\pi_{r_{s-1}+1} < \dots < \pi_{r_s}$. Здесь $\Sigma_{r_1} \times \Sigma_{r_2-r_1} \times \dots \times \Sigma_{r_s-r_{s-1}}$ — подгруппа группы Σ_q , отвечающая разбиению $\{1, \dots, q\} = \{1, \dots, r_1\} \sqcup \{r_1 + 1, \dots, r_2\} \sqcup \dots \sqcup \{r_{s-1} + 1, \dots, r_s\}$, и действие перестановки $\rho \in \Sigma_q$ на точке P_π дает точку $P_{\rho\pi}$, где $(\rho\pi)_i := \pi_{\rho_i}$, $1 \leq i \leq q$.

Упорядоченные разбиения $J = (J_1, \dots, J_s)$ множества $\{1, \dots, q\}$ можно рассматривать как отношения частичного порядка на множестве $\{1, \dots, q\}$. Если разбиение $\hat{J}$ получается из разбиения $J = (J_1, \dots, J_s)$ путем измельчения (т.е. разбиения некоторых множеств J_k на несколько подмножеств), будем писать $\hat{J} \prec J$. Из описания граней многогранника $\mathcal{P}^{q-1}$ следует, что условие $\hat{J} \prec J$ равносильно $\tau_{\hat{J}} \prec \tau_J$, т.е. примыканию граней (см. определение 2.4, (D)).

ЛЕММА 3.1 (о гранях пермutoэдра $\mathcal{P}^{q-1}$). Пусть фиксирована грань $\hat{\tau} \prec \mathcal{P}^{q-1}$. Для любой грани $\tau \prec \mathcal{P}^{q-1}$ такой, что $\hat{\tau} \prec \tau$, рассмотрим соответствующее разбиение $J = (J_1, \dots, J_s)$ и последовательность чисел $(|J_1|, \dots, |J_s|)$. Тогда сопоставление $\tau \mapsto (|J_1|, \dots, |J_s|)$ (для $\hat{\tau} \prec \tau \prec \mathcal{P}^{q-1}$) инъективно. В частности, любой автоморфизм пермutoэдра $\mathcal{P}^{q-1} \subset \mathbb{R}^q$, индуцированный перестановкой координатных осей, допустим (см. определение 2.3, (A)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{\tau} = \tau_{\hat{J}}$, $\hat{J} = (\hat{J}_1, \dots, \hat{J}_{\hat{s}})$. В силу $\hat{J} \prec J$ упорядоченное разбиение J получается из упорядоченного разбиения $\hat{J}$ путем объединения некоторых соседних подмножеств в одно подмножество, т.е. $J_k = \bigcup_{i=a_{k-1}+1}^{a_k} \hat{J}_i$, $1 \leq k \leq s$, для некоторых $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_s = \hat{s}$. Поэтому $|J_k| = \sum_{i=a_{k-1}+1}^{a_k} |\hat{J}_i|$. Отсюда следует, что по разбиению $\hat{J}$ и набору чисел $(|J_1|, \dots, |J_s|)$ последовательность $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_s = \hat{s}$, а потому и разбиение J определяются однозначно. Лемма доказана.

Этап 2. Для каждой функции Морса $f \in F$ рассмотрим множество $\mathcal{C}_{f,1} =: \{y_j\}_{j=1}^q \approx \{1, \dots, q\}$ ее седловых критических точек (см. замечание 2.9) и евклидово векторное пространство 0-коцепей

$$H_f^0 := C^0(\mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathcal{C}_{f,1}} \cong \mathbb{R}^q \quad (6)$$

со стандартной евклидовой метрикой. В этом векторном пространстве рассмотрим многогранник $\mathcal{P}_f^{q-1} \subset H_f^0$, являющийся образом многогранника $\mathcal{P}^{q-1} \subset \mathbb{R}^q$ при какой-либо биекции $\mathcal{C}_{f,1} \rightarrow \{1, \dots, q\}$. Рассмотрим “вычисляющую” 0-коцепь

$$c = c(f) := f|_{\mathcal{C}_{f,1}} = (c_1, \dots, c_q) \in H_f^0,$$

т.е. функцию $c: \mathcal{C}_{f,1} \rightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющую каждой седловой точке $y_j \in \mathcal{C}_{f,1}$ значение $c_j := f(y_j)$ функции f в этой точке, $1 \leq j \leq q$. Сопоставим 0-коцепи

$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_q)$ число $s(\mathbf{c}) := |\{c_1, \dots, c_q\}|$ различных седловых значений и упорядоченное разбиение $J = J(\mathbf{c}) = (J_1, \dots, J_s)$ множества седловых точек $\mathcal{C}_{f,1} \approx \{1, \dots, q\}$, определяемое свойствами (5) и $c_{\pi_1} = \dots = c_{\pi_{r_1}} < c_{\pi_{r_1}+1} = \dots = c_{\pi_{r_2}} < \dots < c_{\pi_{r_{s-1}+1}} = \dots = c_{\pi_{r_s}}$ (т.е. J — это отношение частичного порядка на множестве $\mathcal{C}_{f,1}$ седловых критических точек функции f , построенное по значениям функции $f|_{\mathcal{C}_{f,1}}$). Можно также рассматривать $J = J(\mathbf{c})$ как сюръекцию $\mathcal{C}_{f,1} \rightarrow \{1, \dots, s\}$, переводящую $y_{\pi_j} \mapsto k$ при $r_{k-1} < j \leq r_k$, $1 \leq j \leq q$.

В каждом классе эквивалентности $[f] \in F^1/\sim$ (соответственно классе изотопности $[f]_{\text{isot}} \in F^1/\sim_{\text{isot}}$) отметим ровно одну функцию Морса f этого класса так, чтобы любая функция $f \in F^1$, являющаяся отмеченной функцией класса эквивалентности $[f]$, являлась отмеченной функцией класса изотопности $[f]_{\text{isot}}$. Сопоставим классу изотопности $[f]_{\text{isot}}$ с отмеченной функцией f и разбиению $J(\mathbf{c}(f))$ грань

$$D_{[f]_{\text{isot}}} = D_f := \tau_{J(\mathbf{c}(f))} \subset \mathcal{P}_f^{q-1}.$$

Этап 3. Изучим взаимосвязь многогранников $D_{[f]_{\text{isot}}}, D_{[g]_{\text{isot}}}$ для примыкающих классов изотопности $[f]_{\text{isot}} \prec [g]_{\text{isot}}$. Для любой функции $f \in F$ и соответствующего q -мерного евклидова пространства $H_f^0 \cong \mathbb{R}^q$ (см. этап 2) выполнены следующие два свойства:

- 1) для любого вектора $\mathbf{c} \in H_f^0 \cong \mathbb{R}^q$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что:
 - (i) для любого $\mathbf{c}' \in H_f^0 \cong \mathbb{R}^q$ со свойством $|\mathbf{c}' - \mathbf{c}| < \varepsilon_0$ выполнено $J(\mathbf{c}') \preceq J(\mathbf{c})$;
 - (ii) для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и разбиения $\hat{J} \preceq J(\mathbf{c})$ существует $\mathbf{c}' \in \mathbb{R}^q$ со свойствами $|\mathbf{c}' - \mathbf{c}| < \varepsilon$ и $J(\mathbf{c}') = \hat{J}$;

2) согласно [37; утверждение 1.1 и § 3] любая (“невозмущенная”) функция $f \in F$ имеет столь малую окрестность $\mathbb{U}_f$ в F , что для любых (“возмущенных”) функций $\tilde{f}, \tilde{f}_1 \in \mathbb{U}_f$ равенства $[\tilde{f}h_{0,f,\tilde{f}}^{-1}]_{\text{isot}}^{\text{fix}} = [\tilde{f}_1h_{0,f,\tilde{f}_1}^{-1}]_{\text{isot}}^{\text{fix}}$ и $J((h_{0,f,\tilde{f}}^{-1})^{*0}(\mathbf{c}(\tilde{f}))) = J((h_{0,f,\tilde{f}_1}^{-1})^{*0}(\mathbf{c}(\tilde{f}_1)))$ равносильны, где через $h_{0,f,\tilde{f}} \in \mathcal{D}^0$ обозначен диффеоморфизм, близкий к тождественному, такой, что $h_{0,f,\tilde{f}}^{-1}(\mathcal{C}_f) = \mathcal{C}_{\tilde{f}}$, через $h_{0,f,\tilde{f}}^{*0}: H_f^0 \rightarrow H_{\tilde{f}}^0$ обозначен индуцированный изоморфизм групп 0-коцепей, а через $[\tilde{f}h_{0,f,\tilde{f}}^{-1}]_{\text{isot}}^{\text{fix}}$ обозначен класс изотопности функции $\tilde{f}h_{0,f,\tilde{f}}^{-1}$ с фиксированным множеством критических точек (при фиксированной функции f); в частности, при выполнении указанных равносильных равенств существует диффеоморфизм $h_{1;\tilde{f}h_{0,f,\tilde{f}}^{-1},\tilde{f}_1h_{0,f,\tilde{f}_1}^{-1}} \in \mathcal{D}^0$, гомотопный id_M в пространстве гомеоморфизмов пары $(M, \mathcal{C}_f)$ и переводящий линии уровня функции $\tilde{f}_1h_{0,f,\tilde{f}_1}^{-1}$ в линии уровня функции $\tilde{f}h_{0,f,\tilde{f}}^{-1}$ с сохранением направления роста.

В силу этих свойств для любой функции $f \in F^1$ имеется сюръекция $\delta[f]_{\text{isot}}$ множества всех граней $\tau' \prec \tau := \tau_{J(\mathbf{c}(f))}$ на множество всех классов изотопности $[g]_{\text{isot}} \succ [f]_{\text{isot}}$ (см. определение 2.4, (D)) такая, что $\delta[f]_{\text{isot}}: \tau' \mapsto \delta_{\tau'}[f]_{\text{isot}} := [\tilde{f}]_{\text{isot}}$ тогда и только тогда, когда

$$\tau' = \tau_{J((h_{0,f,\tilde{f}}^{-1})^{*0}(\mathbf{c}(\tilde{f})))} = \tau_{J((h_{f,\tau'}^{-1})^{*0}(\mathbf{c}(g)))}, \quad (7)$$

где $\tilde{f} \in \mathbb{U}_f$ и $h_{0;\tilde{f},\tilde{f}}$ такое, как в свойстве 2), g – отмеченная функция класса изотопности $[f]_{\text{isot}}$,

$$h_{f,\tau'} := h_{0;\tilde{f},\tilde{f}} h_{1;\tilde{f},g} \in \mathcal{D}^0, \quad h_{f,\tau'}^*: H_f^0 \rightarrow H_g^0, \quad (8)$$

$h_{f,\tau'}^*$ – индуцированный изоморфизм, а диффеоморфизм $h_{1;\tilde{f},g} \in \mathcal{D}^0$ переводит линии уровня функции g в линии уровня функции $\tilde{f}$ с сохранением направления роста (он существует ввиду изотопности функций $\tilde{f}, g$), откуда $\tilde{f} = h_2 g h_{1;\tilde{f},g}^{-1}$ для некоторого $h_2 \in \text{Diff}^+[-1, 1]$. Корректность определения сюръекции $\delta[f]_{\text{isot}}$, т.е. независимость класса изотопности $\delta_{\tau'}[f]_{\text{isot}} = [\tilde{f}]_{\text{isot}}$ от выбора функции $\tilde{f} \in \mathbb{U}_f$ с заданным значением $J((h_{0;\tilde{f},\tilde{f}}^{-1})^*(c(\tilde{f})))$, следует из свойства 2). Более того, если диффеоморфизм $\tilde{h}_{f,\tau'} = h_{0;\tilde{f},\tilde{f}} h_{1;\tilde{f},g}$ построен аналогично $h_{f,\tau'}$ с помощью некоторой функции $\tilde{f}_1 \in \mathbb{U}_f$ такой, что

$$J((h_{0;\tilde{f},\tilde{f}}^{-1})^*(c(\tilde{f}))) = J((h_{0;\tilde{f},\tilde{f}_1}^{-1})^*(c(\tilde{f}_1))),$$

то композиция $h_{f,\tau'}^{-1} h_{1;\tilde{f},\tilde{f}_1}^{-1} \tilde{h}_{f,\tau'}$ (см. свойство 2)) переводит линии уровня функции g в линии уровня функции g с сохранением направления роста, а потому в силу [40; лемма 1] принадлежит $(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g)(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g))$, откуда

$$h_{f,\tau'}^{-1} \tilde{h}_{f,\tau'} \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g)(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g)), \quad (9)$$

где через $\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g$ обозначена группа изотропии элемента g относительно естественного правого действия группы $\mathcal{D}^0$ на F^1 , а через $\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g) \subset \mathcal{D}^0$ обозначена группа диффеоморфизмов пары $(M, \mathcal{C}_g)$, гомотопных id_M в классе гомоморфизмов пары, где $\mathcal{C}_g$ – множество критических точек функции g .

Пусть $f \in F^1$ – отмеченная функция Морса класса изотопности $[f]_{\text{isot}}$. Для любой грани $\tau' \prec \tau_{J(c(f))} =: D[f]_{\text{isot}}$ обозначим через $g \in F^1$ отмеченную функцию класса изотопности $\delta_{\tau'}[f]_{\text{isot}}$ и фиксируем диффеоморфизм $h_{f,\tau'} \in \mathcal{D}^0$, как в (7) и (8). Тогда в силу равенств (7) и $(h_{f,\tau'}^{-1})^*(\tau_{J(c)}) = \tau_{J((h_{f,\tau'}^{-1})^*(c))}$ имеем изоморфизм граней

$$h_{f,\tau'}^*|_{\tau'}: \tau' \longrightarrow h_{f,\tau'}^*(\tau') = \tau_{J(c(g))} = D[g]_{\text{isot}}. \quad (10)$$

Из указанных в начале этапа свойств 1) и 2) мы также получаем, что из $[h]_{\text{isot}} \succ [g]_{\text{isot}} \succ [f]_{\text{isot}}$ следует $[h]_{\text{isot}} \succ [f]_{\text{isot}}$, и

$$\delta_{\tau''}[f]_{\text{isot}} = \delta_{h_{f,\tau'}^*(\tau'')} \delta_{\tau'}[f]_{\text{isot}} \quad \text{для любых граней } \tau'' \prec \tau' \prec \tau_{J(c(f))}. \quad (11)$$

Пусть $g, g_1 \in F^1$ – отмеченные функции классов изотопности $\delta_{\tau'}[f]_{\text{isot}}$, $\delta_{\tau''}[f]_{\text{isot}}$ соответственно, и пусть $\tilde{g} \in \mathbb{U}_g$ и $h_{f,\tau'}^*(\tau'') = \tau_{J((h_{0;\tilde{g},\tilde{g}}^{-1})^*(c(\tilde{g})))}$ (см. (7), (11)). Покажем, что выполнен следующий аналог соотношения транзитивности:

$$h_{f,\tau'}^{-1} h_{f,\tau'} h_{g,h_{f,\tau'}^*(\tau'')} \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g_1)(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_{g_1})), \quad (12)$$

где $\mathcal{C}_{g_1}$ – множество критических точек функции g_1 . Действительно, функция $\tilde{f}_1 := h_2 \tilde{g} h_{1;\tilde{f},g}^{-1} \in [g_1]_{\text{isot}}$ близка к функции $\tilde{f} = h_2 g h_{1;\tilde{f},g}^{-1}$ (а потому и к функции f); диффеоморфизм $h_{1;\tilde{f},g} h_{0;\tilde{g},\tilde{g}} h_{1;\tilde{f},g}^{-1}$ близок к id_M и переводит критические точки “возмущенной” функции $\tilde{f}_1$ в критические точки “невозмущенной”

функции $\tilde{f}$, а потому диффеоморфизм

$$\tilde{h}_{0;f,\tilde{f}_1} := h_{0;f,\tilde{f}} h_{1;\tilde{f},g} h_{0;g,\tilde{g}} h_{1;\tilde{f},g}^{-1} \in \mathcal{D}^0$$

близок к id_M и переводит критические точки “возмущенной” функции $\tilde{f}_1$ в критические точки “невозмущенной” функции f ; диффеоморфизм $h_{1;\tilde{f},g} \in \mathcal{D}^0$ переводит линии уровня функции $\tilde{g}$ в линии уровня функции $\tilde{f}_1$ с сохранением направления роста, а потому диффеоморфизм

$$\tilde{h}_{1;\tilde{f}_1,g_1} := h_{1;\tilde{f},g} h_{1;\tilde{g},g_1} \in \mathcal{D}^0$$

переводит линии уровня функции g_1 в линии уровня функции $\tilde{f}_1$ с сохранением направления роста. Отсюда

$$h_{f,\tau'} h_{g,h^{*0}_{f,\tau'}(\tau'')} = h_{0;f,\tilde{f}} h_{1;\tilde{f},g} h_{0;g,\tilde{g}} h_{1;\tilde{g},g_1} = \tilde{h}_{0;f,\tilde{f}_1} \tilde{h}_{1;\tilde{f}_1,g_1},$$

т.е. мы разложили диффеоморфизм $h_{f,\tau'} h_{g,h^{*0}_{f,\tau'}(\tau'')}$ в композицию, аналогичную разложению $h_{f,\tau''} = h_{0;f,\tilde{f}_1} h_{1;\tilde{f}_1,g_1}$; см. (8). В силу (9) это доказывает (12).

Если $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$, а τ', g такие, как выше, то в силу (7) выполнено $h^{*0}(\tau') = \tau_{J((h^{-1}_{0;f,\tilde{f}h})^{*0}(c(\tilde{f}h)))}$ и $\delta_{h^{*0}(\tau')}[f]_{\text{isot}} = [gh]_{\text{isot}} = [g]_{\text{isot}}$ (в силу $h \in \mathcal{D}^0$), откуда

$$h_{f,h^{*0}(\tau')} = h_{0;f,\tilde{f}h} h_{1;\tilde{f}h,g} = h_0 h^{-1} h_{0;f,\tilde{f}} h h^{-1} h_{1;\tilde{f},g} h_1 = h_0 h^{-1} h_{f,\tau'} h_1$$

для некоторых $h_0 \in \text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f)$ и $h_1 \in \mathcal{D}^0$ таких, что h_1 переводит линии уровня функции g в линии уровня функции g с сохранением направления роста, поэтому $h_1 \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g)(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g))$ в силу [40; лемма 1], откуда

$$h_{f,\tau'}^{-1} h h_{f,h^{*0}(\tau')} \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g)(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g)). \quad (13)$$

3.2. Построение утолщенного цилиндра $\mathbb{S}_{[f]_{\text{isot}}}$ для класса изотопности $[f]_{\text{isot}}$.

Этап 4. Пусть $f \in F^1$ – отмеченная функция Морса класса изотопности $[f]_{\text{isot}}$. По аналогии с пространством 0-коцепей $H_f^0 \cong \mathbb{R}^q$ (см. (6)) введем двойственные друг другу векторные пространства относительных 1-гомологий и относительных 1-когомологий над полем $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} H_{f,1} &:= H_1(M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}), \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2q}, \\ H_f^1 &:= H^1(M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}), \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{f,1}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2q}, \end{aligned} \quad (14)$$

где изоморфизм $H_f^1 \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{f,1}, \mathbb{R})$ индуцирован равенством $C^q(X, A; \mathbb{R}) = \text{Hom}(C_q(X)/C_q(A), \mathbb{R})$ для пары Борсука $(X, A) := (M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}), \mathcal{C}_{f,1})$ при $q = 1$ (см. [45; §§ 12.5, 15.2, 15.5]). Рассмотрим ориентированный граф $G_f \subset M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$ (см. обозначение 2.5). Этот граф имеет q вершин (являющихся седловыми точками $y_1, \dots, y_q \in \mathcal{C}_{f,1}$), степени всех вершин равны 4, а значит, в графе $2q$ ребер, которые обозначим $e_1, \dots, e_{2q}$. Обозначим относительный гомологический класс ориентированного ребра e_i через $[e_i] \in H_{f,1}$, $1 \leq i \leq 2q$.

Определим в векторном пространстве $H_f^1 \cong \mathbb{R}^{2q}$ выпуклые подмножества

$$U_{[f]_{\text{isot}}} \subset U_{[f]_{\text{isot}}}^\infty \subset H_f^1 \quad (15)$$

системами из $4q$ и $2q$ неравенств соответственно:

$$U_{[f]_{\text{isot}}} = U_f := \left\{ u \in H_f^1 \mid 1 \leq u([e_i]) \leq \frac{(2q-1)!!}{(2q-2s+1)!!}, 1 \leq i \leq 2q \right\}, \quad (16)$$

$$U_{[f]_{\text{isot}}}^\infty = U_f^\infty := \left\{ u \in H_f^1 \mid u([e_i]) > 0, 1 \leq i \leq 2q \right\}, \quad (17)$$

где $s = s(c(f)) := |f(\mathcal{C}_{f,1})|$ – количество седловых значений функции f .

Этап 5. Каждая связная компонента пространства $M \setminus G_f$ содержит не более одной критической точки функции f (а именно, точки минимума или максимума) и не более одной компоненты края ∂M и гомеоморфна либо открытому кругу (с одной критической точкой), либо полуоткрытому цилиндру $S^1 \times [-1, 0)$ или $S^1 \times (0, 1]$ (с одной компонентой края $S^1 \times \{\pm 1\} \subset \partial^\pm M$), либо “открытому цилиндру”

$$Z_\ell = Z_\ell(f) \approx S^1 \times (0, 1), \quad 1 \leq \ell \leq n = n(f), \quad (18)$$

которые вместе со своими замыканиями содержатся в $(\text{int } M) \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$, где $n = n(f)$ – количество открытых цилиндров. Сопоставим открытому цилиндру Z_ℓ его серединную окружность

$$\gamma_\ell = \gamma_\ell(f) = S^1 \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \subset Z_\ell = S^1 \times (0, 1) \quad (19)$$

и следующее линейное векторное поле v_ℓ на векторном пространстве H_f^1 . Значение $v_\ell(u) \in H_f^1$ поля v_ℓ в любой точке $u \in H_f^1$ – это относительный 1-коцикл, значение которого на любом относительном 1-цикле $a \in H_1(M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}), \mathcal{C}_{f,1}) \subset H_{f,1}$ определяется формулой

$$v_\ell(u)([a]) := \langle [\gamma_\ell], a \rangle u([\gamma_\ell]), \quad u \in H_f^1, \quad a \in H_1(M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}), \mathcal{C}_{f,1}), \quad (20)$$

где $\langle [\gamma_\ell], a \rangle$ – индекс пересечения цикла $[\gamma_\ell] \in H_1(M \setminus \mathcal{C}_f) \subset H_{f,1}$ и относительного цикла a , $1 \leq \ell \leq n$. Другими словами, линейное векторное поле v_ℓ на H_f^1 задается $\mathbb{R}$ -линейным оператором $H_f^1 \rightarrow H_f^1$, являющимся обратным образом при изоморфизме $H_f^1 \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{f,1}, \mathbb{R})$ $\mathbb{R}$ -линейного оператора $H_{f,1} \rightarrow H_{f,1}$, $a \mapsto \langle [\gamma_\ell], a \rangle [\gamma_\ell]$. На этапе 6 мы установим свойства векторных полей $v_1, \dots, v_n$. Определим диффеоморфизм

$$h_\ell := t_{\gamma_\ell} \in \text{stab}_{\mathcal{D}} f \subset \mathcal{D}, \quad 1 \leq \ell \leq n, \quad (21)$$

как *скручивание Дэна* t_{γ_ℓ} (см. [47]) вокруг окружности γ_ℓ (скручивание Дэна t_{γ_ℓ} совпадает с id_M вне открытого цилиндра Z_ℓ и получается с помощью разрезания поверхности вдоль окружности γ_ℓ , перекручивания одного конца разреза на 2π и склеивания). Диффеоморфизмы h_ℓ , $1 \leq \ell \leq n$, попарно коммутируют, так как их носители попарно не пересекаются. Рассмотрим порожденную ими абелеву группу

$$\Theta_{[f]_{\text{isot}}} = \Theta_f := \langle h_1, \dots, h_n \rangle \subset \text{stab}_{\mathcal{D}} f \subset \mathcal{D}.$$

Рассмотрим индуцированные автоморфизмы $h_\ell^* \in \text{Aut}(H_f^1)$, $1 \leq \ell \leq n$, и порожденную ими абелеву группу

$$\Theta_{[f]_{\text{isot}}}^* = \Theta_f = \langle h_1^*, \dots, h_n^* \rangle \subset \text{Aut}(H_f^1). \quad (22)$$

Нетрудно показать, что подгруппа $\Theta_f^* \subset \text{Aut}(H_f^1)$ изоморфна свободной абелевой группе ранга n и что автоморфизм h_ℓ^* совпадает с потоком $g_{v_\ell}^1 : H_f^1 \rightarrow H_f^1$ векторного поля v_ℓ за время 1, $1 \leq \ell \leq n$. Рассмотрим в группе $\Theta_f^* \cong \mathbb{Z}^n$ подгруппу $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^* \subset \Theta_f^*$ и рассмотрим пространства орбит

$$\mathbb{S}_{[f]_{\text{isot}}} = \mathbb{S}_f := U_f / (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*, \quad \mathbb{S}_{[f]_{\text{isot}}}^\infty = \mathbb{S}_f^\infty := U_f^\infty / (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*.$$

Рассуждения на следующих этапах проводятся для U_f , но верны и для U_f^∞ .

Этап 6. На этом этапе строится свободное действие цилиндра $\mathbb{R}^{n-d} \times (S^1)^d$ на пространстве $\mathbb{S}_f$, где $d = d([f])$ – ранг группы $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*$ (как свободной абелевой группы).

Построим явно базис векторного пространства $H_f^1 \cong \mathbb{R}^{2q}$. Если количество $n = n(f)$ открытых цилиндров $Z_\ell \subset M \setminus G_f$ (см. (18)) равно нулю, положим $\tilde{G}_f := G_f$. Если $n > 0$, будем выкидывать из графа G_f по одному (открытому) ребру, чтобы каждый раз количество связанных компонент дополнения графа в M , не пересекающихся с $(\partial M) \cup \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}$, уменьшалось на 1. Так как для графа G_f указанное количество равно n , то после выкидывания из него n ребер (для определенности $e_1, \dots, e_n$) с помощью указанного алгоритма их количество станет равным нулю и получится подграф с q вершинами и $2q - n$ ребрами $e_{n+1}, \dots, e_{2q}$. В каждом открытом цилиндре Z_ℓ проведем (открытое) ориентированное ребро $\tilde{e}_\ell$, гладко вложенное в этот цилиндр, с концами в седловых точках такое, что ограничение функции f на это ребро монотонно возрастает. Добавим к полученному подграфу n ориентированных ребер

$$\tilde{e}_\ell \subset Z_\ell, \quad 1 \leq \ell \leq n$$

(взамен выброшенных $e_1, \dots, e_n$). В результате получим граф $\tilde{G}_f \subset (\text{int } M) \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$ с $2q$ ребрами $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n, e_{n+1}, \dots, e_{2q}$ и q вершинами $y_1, \dots, y_q$. Так как дополнение графа $\tilde{G}_f$ в поверхности M состоит из открытых кругов (содержащих по одной точке минимума или максимума) и полуоткрытых цилиндров (содержащих по одной компоненте края M), то граф $\tilde{G}_f$ является сильным деформационным ретрактом поверхности $M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$. Следовательно, вложение $\tilde{G}_f \hookrightarrow M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$ индуцирует изоморфизмы $2q$ -мерных векторных пространств

$$H_1(\tilde{G}_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \cong H_{f,1}, \quad H^1(\tilde{G}_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \cong H_f^1.$$

Относительные классы гомологий $[\tilde{e}_1], \dots, [\tilde{e}_n], [e_{n+1}], \dots, [e_{2q}] \in H_1(\tilde{G}_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R})$ ориентированных ребер графа $\tilde{G}_f$ образуют базис векторного пространства $H_1(\tilde{G}_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \cong H_{f,1} \cong \mathbb{R}^{2q}$. Переход к двойственному базису дает базис $[\tilde{e}_1]^*, \dots, [\tilde{e}_n]^*, [e_{n+1}]^*, \dots, [e_{2q}]^*$ векторного пространства

$$H^1(\tilde{G}_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \cong H_f^1 \cong (H_{f,1})^* \cong \mathbb{R}^{2q}.$$

Пусть $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n, u'_{n+1}, \dots, u'_{2q}$ – координаты в H_f^1 по отношению к базису $[\tilde{e}_1]^*, \dots, [\tilde{e}_n]^*, [e_{n+1}]^*, \dots, [e_{2q}]^*$. Рассмотрим разложение

$$H_f^1 = \langle [\tilde{e}_1]^*, \dots, [\tilde{e}_n]^* \rangle \oplus \langle [e_{n+1}]^*, \dots, [e_{2q}]^* \rangle. \quad (23)$$

Представим любой относительный коцикл $u \in H_f^1$ как сумму $u = \tilde{u} + u'$ его проекций на подпространства в разложении (23). Нетрудно доказывается, что

$$\begin{aligned} [e_i] \in \langle [e_{n+1}], \dots, [e_{2q}] \rangle &= \text{Im}[H_1(G_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) \rightarrow H_{f,1}], \quad 1 \leq i \leq 2q, \\ \langle [\tilde{e}_\ell]^* \rangle_{\ell=1}^n &= \ker[H_f^1 \rightarrow H^1(G_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R})], \quad \langle [e_i]^* \rangle_{i=n+1}^{2q} \cong H^1(G_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (24)$$

Отсюда $u([e_i]) = u'([e_i])$, $1 \leq i \leq 2q$. Положим

$$U'_f := \left\{ u' \in \langle [e_i]^* \rangle_{i=n+1}^{2q} \mid 1 \leq u'([e_\ell]) \leq \frac{(2q-1)!!}{(2q-2s+1)!!}, 1 \leq \ell \leq 2q \right\} \quad (25)$$

(ср. (16)). Тогда $u \in U_f$ в том и только том случае, когда $u' \in U'_f$, причем U'_f – выпуклый многогранник. Поэтому справедливо разложение

$$U_f = \langle [\tilde{e}_1]^*, \dots, [\tilde{e}_n]^* \rangle \oplus U'_f, \quad \text{где } U'_f \subset \langle [e_{n+1}]^*, \dots, [e_{2q}]^* \rangle. \quad (26)$$

В базисе $[\tilde{e}_1]^*, \dots, [\tilde{e}_n]^*, [e_{n+1}]^*, \dots, [e_{2q}]^*$ пространства H_f^1 линейные векторные поля $v_1, \dots, v_n$ на H_f^1 имеют вид

$$v_\ell(u) = u([\gamma_\ell])[\tilde{e}_\ell]^* \in \langle [\tilde{e}_1]^*, \dots, [\tilde{e}_n]^* \rangle = \ker[H_f^1 \rightarrow H^1(G_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R})], \quad (27)$$

т.е. касательны каждой n -мерной плоскости $\langle [\tilde{e}_1]^*, \dots, [\tilde{e}_n]^* \rangle + u' \subset H_f^1$, $u' \in \langle [e_{n+1}]^*, \dots, [e_{2q}]^* \rangle$, и всюду на ней имеют постоянные коэффициенты в силу (24). Поэтому каждая такая n -мерная плоскость инвариантна относительно потоков векторных полей $v_1, \dots, v_n$ на H_f^1 и эти поля коммутируют. Так как при $u' \in U'_f$ эти векторные поля (с постоянными коэффициентами) линейно независимы в указанной плоскости, то их потоки $g_{v_1}^{t_1} \cdots g_{v_n}^{t_n}$ порождают свободное действие группы $\mathbb{R}^n$ на пространстве U_f (см. (26)), причем орбиты этого действия являются n -мерными плоскостями $\langle [\tilde{e}_1]^*, \dots, [\tilde{e}_n]^* \rangle + u' \subset U_f$, $u' \in U'_f$. Так как группа $\mathbb{R}^n$ действует свободно на U_f , то ее стандартная целочисленная решетка $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ тоже действует свободно на U_f . Так как действие ℓ -го базисного элемента решетки $\mathbb{Z}^n$ совпадает с ℓ -м базисным элементом $g_{v_\ell}^1 = h_\ell^1 \in \text{Aut}(H_f^1)$ группы $\Theta_f^* \cong \mathbb{Z}^n$ (см. (21), (22)), то действие группы $\Theta_f^* \subset \text{Aut}(H_f^1)$ на U_f свободно и коммутирует с действием $\mathbb{R}^n$ на U_f (заданным при помощи потоков векторных полей $v_1, \dots, v_n$). Поэтому действие группы $\mathbb{R}^n$ на U_f индуцирует корректно определенное свободное действие цилиндра $\mathbb{R}^n/Z^d \cong \mathbb{R}^{n-d} \times (S^1)^d$ на факторпространстве $\mathbb{S}_f = U_f/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*$, где $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^* \cong Z^d \subset \mathbb{Z}^n$ – подгруппа группы $\Theta_f^* \cong \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ и через $d = d([f])$ обозначен ее ранг (как ранг свободной абелевой группы).

Все рассуждения данного этапа верны для U_f^∞ , $(U'_f)^\infty$ вместо U_f , U'_f , где $(U'_f)^\infty$ определяется аналогично (25).

Этап 7. На этом этапе вводится на пространстве $\mathbb{S}_f$ структура утолщенного цилиндра (см. определение 2.3). Для этого мы построим специальные (криволинейные) координаты на выпуклом множестве $U_f \subset H_f^1$ и на утолщенном цилиндре $\mathbb{S}_f = U_f/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*$, в которых построенные выше свободные действия группы $\mathbb{R}^n$ на U_f и цилиндра $\mathbb{R}^n/Z^d \cong \mathbb{R}^{n-d} \times (S^1)^d$ на $\mathbb{S}_f$ “выпрямляются”.

Построим явно набор образующих группы $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^* \subset \Theta_f^* \subset \text{Aut}(H_f^1)$. Напомним, что набором свободных образующих группы $\Theta_f^* \cong \mathbb{Z}^n$ является набор автоморфизмов $h_1^*, \dots, h_n^* \in \text{Aut}(H_f^1)$, отвечающих открытым цилиндрам $Z_1, \dots, Z_n$, где $n = n(f)$ (см. (18)). Покажем, что после подходящей перенумерации цилиндров Z_ℓ (и отвечающих им автоморфизмов h_ℓ^*) подгруппа $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^* \subset \Theta_f^* \cong \mathbb{Z}^n$ раскладывается в прямое произведение подгрупп:

$$(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^* = \Theta_{f,0}^* \times \Theta_{f,1}^* \times \dots \times \Theta_{f,e}^*, \quad (28)$$

где

$$\Theta_{f,0}^* = \langle h_1^*, \dots, h_{\nu_0}^* \rangle,$$

$$\Theta_{f,k}^* = \langle (h_{\nu_{k-1}+1}^*)^{-1} h_{\nu_{k-1}+2}^*, (h_{\nu_{k-1}+2}^*)^{-1} h_{\nu_{k-1}+3}^*, \dots, (h_{\nu_k-1}^*)^{-1} h_{\nu_k}^* \rangle, \quad 1 \leq k \leq e,$$

а целые числа $0 \leq e \leq n$ и $0 = \nu_{-1} \leq \nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_e \leq n$ зависят от $[f]$. Отсюда следует, что ранг группы $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*$ равен

$$\text{rank}(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^* = d = \nu_e - e. \quad (29)$$

Из (29) нетрудно вывести, что он не превосходит числа $p' + p'' + r' + r''$ “плавающих” точек локальных минимумов и максимумов, а также получить остальные оценки для d из теоремы 2.6, (C).

Описание построения подгруппы $\Theta_{f,0} \subset \mathcal{D}^0 \cap \Theta_f$. Пусть (после подходящей перенумерации цилиндров $Z_1, \dots, Z_n$ в (18) и соответствующей перенумерации окружностей $\gamma_1, \dots, \gamma_n$) окружности $\gamma_\ell \subset M \setminus \mathcal{C}_f \subset M \setminus \mathcal{C}$, $1 \leq \ell \leq \nu_0$, — это все такие окружности множества $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, каждая из которых разбивает поверхность $M \setminus \mathcal{C}$ на две части (см. определение 2.1, обозначение 2.2, замечание 2.9), причем объединение одной из этих двух частей с окружностью γ_ℓ гомеоморфно либо кругу, либо проколотому кругу (т.е. кругу без одной внутренней точки), либо цилиндру $S^1 \times [0, 1]$. Рассмотрим скручивания Дэна $h_j \in \text{stab}_{\mathcal{D}} f$ вокруг этих окружностей, $1 \leq j \leq \nu_0$. Каждое такое скручивание Дэна принадлежит группе $\mathcal{D}^0$, т.е. компоненте связности тождественного диффеоморфизма id_M в $\text{Diff}(M, \mathcal{C})$. Значит, все элементы построенного подмножества $\{h_1, \dots, h_{\nu_0}\} \subset \{h_1, \dots, h_\ell\}$ принадлежат группе $\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f$. Определим подгруппу $\Theta_{f,0} \subset \Theta_f$ как порожденную диффеоморфизмами h_ℓ , $1 \leq \ell \leq \nu_0$.

Описание построения подгрупп $\Theta_{f,1}, \dots, \Theta_{f,e} \subset \mathcal{D}^0 \cap \Theta_f$. Рассмотрим объединение всех цилиндров в поверхности $M \setminus \mathcal{C}$, ограниченных парами различных окружностей из множества $\{\gamma_{\nu_0+1}, \dots, \gamma_n\}$ и не содержащих внутри себя других окружностей этого множества. Это объединение является либо несвязным объединением $e \geq 0$ цилиндров, либо тором (в этом случае $M = T^2$, $p^* = q^* = r^* = 0$ и $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} \geq 1$ в силу (4), т.е. все критические точки “плавают” и по крайней мере одна из них отмечена, а окружности $\gamma_{\nu_0+1}, \dots, \gamma_n$ попарно изотопны в торе M); в последнем случае положим $e = 1$, $\nu_1 = n$ и заменим указанное объединение цилиндров на один цилиндр, содержащий все окружности $\gamma_{\nu_0+1}, \dots, \gamma_n$ и ограниченный двумя из этих окружностей, причем этот цилиндр не содержит первую отмеченную критическую точку (эти условия определяют цилиндр однозначно). Пусть (после подходящей перенумерации цилиндров $Z_{\nu_0+1}, \dots, Z_n$ в (18) и соответствующей перенумерации окружностей $\gamma_{\nu_0+1}, \dots, \gamma_n$) окружности γ_ℓ , $\nu_{k-1} < \ell \leq \nu_k$, — это все окружности в k -м

из этих e цилиндров, причем можем и будем считать, что нумерация окружностей идет в порядке следования этих окружностей в k -м цилиндре, $1 \leq k \leq e$. Композиция $h_\ell^{-1} \circ h_{\ell+1}$ скручиваний Дэна h_ℓ и $h_{\ell+1}$, взятых в противоположных степенях, принадлежит группе $\mathcal{D}^0$ при $\nu_{k-1} < \ell < \nu_k$, $1 \leq k \leq e$. При $1 \leq k \leq e$ определим подгруппу $\Theta_{f,k} \subset \Theta_f$ как порожденную диффеоморфизмами $h_\ell^{-1} \circ h_{\ell+1}$, $\nu_{k-1} < \ell < \nu_k$.

Покажем, что группа $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*$ допускает разложение (28). Осталось показать, что $\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f \subseteq \Theta_{f,0} \times \Theta_{f,1} \times \cdots \times \Theta_{f,e}$. Дополним набор диффеоморфизмов $h_1, \dots, h_{\nu_0} \in \Theta_{f,0}$, $h_\ell^{-1} \circ h_{\ell+1} \in \Theta_{f,k}$, $\nu_{k-1} < \ell < \nu_k$, $1 \leq k \leq e$, до набора образующих группы $\Theta_f \cong \mathbb{Z}^n$ набором скручиваний Дэна h_i , $i \in A = A(f)$, где

$$A = A(f) := \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_e, \nu_e + 1, \nu_e + 2, \dots, n\} \subset \{1, \dots, n\}, \quad |A| = n - \nu_e + e.$$

Пусть некоторая композиция $h \in \Theta_f$ целых степеней диффеоморфизмов полученного набора образующих принадлежит группе $\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f$. Покажем, что показатель степени каждого из $|A| = n - \nu_e + e$ диффеоморфизмов h_i , $i \in A$, в этой композиции равен нулю. Произведение $\tilde{h}$ этих $n - \nu_e + e$ диффеоморфизмов в тех степенях, в которых они входят в композицию h , также является элементом группы $\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f$, так как отличается от исходной композиции h множением на элемент из подгруппы $\Theta_{f,0} \times \Theta_{f,1} \times \cdots \times \Theta_{f,e}$, содержащейся в $\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f$ по построению. Значит, $\tilde{h} \in \mathcal{D}^0 \cap \Theta_f \subset \mathcal{D}^0$. Так как окружности $\gamma_i \subset (\text{int } M) \setminus \mathcal{C}$, $i \in A$, попарно не пересекаются, никакая из них не ограничивает цилиндр или (проколотый или непроколотый) круг в $M \setminus \mathcal{C}$ и никакие две из них не ограничивают цилиндр в $M \setminus \mathcal{C}$, то скручивания Дэна h_i , $i \in A$, вокруг этих окружностей (рассматриваемые с точностью до гомотопии в пространстве непрерывных отображений пары $(M, \mathcal{C})$) порождают подгруппу группы $\text{Номео}^+(M, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) / \text{Номео}^0(M, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \cong \mathcal{D} / \mathcal{D}^0$ классов отображений, изоморфную свободной абелевой группе ранга $|A| = n - \nu_e + e$ (см., например, [48; лемма 2.1, (1)] или [49]). Поэтому показатели степеней всех диффеоморфизмов h_i , $i \in A$, равны нулю. Это завершает доказательство разложения (28).

Построим специальные (криволинейные) координаты в $U_f \subset U_f^\infty$, в которых свободное действие цилиндра $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^d \cong \mathbb{R}^{n-d} \times (S^1)^d$ (см. конец этапа 6) “выпрямляется”. Пусть нумерация цилиндров $Z_1, \dots, Z_n$ такая же, как в (28). Для любого $u' \in U_f'$ рассмотрим базис $v_1(u'), \dots, v_n(u')$ в плоскости $\langle [\tilde{e}_1]^*, \dots, [\tilde{e}_n]^* \rangle + u' \subset U_f$ и новый базис

$$\begin{aligned} \tilde{v}_i(u') &:= v_i(u'), & i \in A \cup \{1, \dots, \nu_0\}, \\ \tilde{v}_j(u') &:= v_j(u') - v_{j+1}(u'), & j \in B \setminus \{1, \dots, \nu_0\}, \end{aligned} \quad (30)$$

а также отвечающее этому базису разложение

$$\ker[H_f^1 \rightarrow H^1(G_f, \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R})] = \langle [\tilde{e}_\ell]^* \rangle_{\ell=1}^n = \langle \tilde{v}_i(u') \rangle_{i \in A} \oplus \langle \tilde{v}_j(u') \rangle_{j \in B},$$

где $B = B(f) := \{1, \dots, n\} \setminus A$. Тогда для каждого $u' \in U_f' \subset (U_f')^\infty$ любой коцикл $\tilde{u} = \sum_{\ell=1}^n \tilde{u}_j [\tilde{e}_j]^* \in \langle [\tilde{e}_\ell]^* \rangle_{\ell=1}^n$ имеет вид

$$\tilde{u} = \sum_{i \in A} x_i \tilde{v}_i(u') + \sum_{j \in B} \varphi_j \tilde{v}_j(u'),$$

где координаты x_i, φ_j ($i \in A, j \in B$) в n -мерной плоскости $\langle [\tilde{e}_1]^*, \dots, [\tilde{e}_n]^* \rangle + u'$ выражаются через координаты $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n, u'_{n+1}, \dots, u'_{2q}$ по формулам

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{\tilde{u}_i}{u'([\gamma_i])}, \quad \nu_e < i \leq n, & x_{\nu_k} &= \sum_{\ell=\nu_{k-1}+1}^{\nu_k} \frac{\tilde{u}_\ell}{u'([\gamma_\ell])}, \quad 1 \leq k \leq e, \\ \varphi_j &= \frac{\tilde{u}_j}{u'([\gamma_j])}, \quad 1 \leq j \leq \nu_0, & \varphi_j &= \sum_{\ell=\nu_{k-1}+1}^j \frac{\tilde{u}_\ell}{u'([\gamma_\ell])}, \quad \nu_{k-1} < j < \nu_k. \end{aligned} \quad (31)$$

Знаменатели в выражениях для x_i и φ_j положительны, так как $u' \in (U'_f)^\infty$. Таким образом, на множестве U_f^∞ мы ввели гладкие регулярные координаты $x_i \in \mathbb{R}, \varphi_j \bmod 1 \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ($i \in A, j \in B$), $(u'_{n+1}, \dots, u'_{2q}) \in U'_f$. В этих координатах векторные поля $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n$ имеют вид $\tilde{v}_i = \partial/\partial x_i, \tilde{v}_j = \partial/\partial \varphi_j$ ($i \in A, j \in B$), а множества U_f и $\mathbb{S}_f$ имеют вид

$$\begin{aligned} U_{[f]_{\text{isot}}} &= U_f \approx (\mathbb{R}^A \times \mathbb{R}^B) \times U'_f \approx (\mathbb{R}^{n-\nu_e+e} \times \mathbb{R}^{\nu_e-e}) \times U'_f = \mathbb{R}^n \times U'_f, \\ \mathbb{S}_{[f]_{\text{isot}}} &= \mathbb{S}_f \approx (\mathbb{R}^A \times (S^1)^B) \times U'_f \approx (\mathbb{R}^{n-\nu_e+e} \times (S^1)^{\nu_e-e}) \times U'_f. \end{aligned}$$

Поэтому действие группы $\Theta_f^* \cong \mathbb{Z}^n$ на U_f совпадает с целочисленными сдвигами вдоль координат x_i, φ_j ($i \in A, j \in B$), действие группы $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^* \cong \mathbb{Z}^{\nu_e-e}$ на U_f совпадает с целочисленными сдвигами вдоль координат $\varphi_j, j \in B$, а действие цилиндра $\mathbb{R}^A \times (S^1)^B \cong \mathbb{R}^{n-\nu_e+e} \times (S^1)^{\nu_e-e}$ на $\mathbb{S}_f$ совпадает с естественным действием цилиндра сдвигами по себе. Итак, мы ввели на $\mathbb{S}_f := U_f/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*$ структуру стандартного утолщенного цилиндра (см. определение 2.3).

Подмножества $U_f \subset U_f^\infty \subset H_f^1$ инвариантны относительно правого действия группы $(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^* \subset \text{Aut}(H_f^1)$ на H_f^1 , а подгруппа $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0$ нормальна в $\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$, где через $(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0$ обозначена подгруппа группы $\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$, состоящая из всех диффеоморфизмов поверхности M , сохраняющих функцию f и гомотопных id_M в классе гомеоморфизмов M , сохраняющих функцию f . Поэтому имеется индуцированное правое действие дискретной группы

$$\Gamma_{[f]_{\text{isot}}} = \Gamma_f := (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f) / ((\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0) \quad (32)$$

на пространствах орбит $\mathbb{S}_f = U_f/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*$ и $\mathbb{S}_f^\infty = U_f^\infty/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*$. Так как действие группы Θ_f на H_f^0 тривиально (поскольку не переставляет седловые критические точки), имеем также индуцированное правое действие группы Γ_f на многограннике D_f ; см. этап 2.

ЛЕММА 3.2. *Если выполнено условие (4), то индуцированное покомпонентное правое действие любого диффеоморфизма $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$ на прямом произведении*

$$D_f \times \mathbb{S}_f = \tau_{J(c(f))} \times (U_f/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*) \approx \tau_{J(c(f))} \times (\mathbb{R}^{A(f)} \times (S^1)^{B(f)} \times U'_f) \quad (33)$$

является допустимым автоморфизмом стандартной цилиндрической ручки (см. определение 2.3, (B)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности окружности $\gamma_\ell \subset Z_\ell$ определены условием $f(\gamma_\ell) = \frac{1}{2}(\sup f|_{Z_\ell} + \inf f|_{Z_\ell})$. Тогда любой диффеоморфизм

$h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$ индуцирует перестановку на множестве окружностей γ_ℓ , $1 \leq \ell \leq n = n(f)$. При этой перестановке каждая окружность $\gamma_{\nu_0+1}, \dots, \gamma_n$ переходит в себя (см. доказательство леммы 3.3, этап 1), т.е. переставляются только окружности γ_ℓ , $\ell \in \{1, \dots, \nu_0\} \subset B(f)$ (и отвечающие им векторные поля $\tilde{v}_\ell$), а соответствующая перестановка $\pi \in \Sigma_{|A(f)|}$ тривиальна (см. определение 2.3, (A)). Если тривиальны также соответствующие автоморфизмы многогранников $b: D_f \rightarrow D_f$, $a: U'_f \rightarrow U'_f$ и перестановка $\rho \in \Sigma_{|B(f)|}$, то h переводит в себя каждое седло, каждое ориентированное ребро графа G_f и каждую окружность γ_ℓ , а потому принадлежит $(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0$, откуда его действие на $D_f \times \mathbb{S}_f$ совпадает с тождественным отображением. Если автоморфизм многогранника $b: D_f \rightarrow D_f$ тривиален (что равносильно тому, что h переводит каждое седло в себя), то перестановка $\rho \in \Sigma_{|B(f)|}$ окружностей γ_ℓ тоже тривиальна, так как в противном случае h нетривиально действует на $H_1(\overline{M})$; тривиальность автоморфизма $a^2: U'_f \rightarrow U'_f$ следует из того, что h^2 переводит каждое ребро графа G_f в себя. Пусть теперь автоморфизм многогранника $a: U'_f \rightarrow U'_f$ тривиален. Покажем, что автоморфизм многогранника $b: D_f \rightarrow D_f$ тоже тривиален. Если количество седловых значений $s(f) > 1$, то U'_f является $(2q - n(f))$ -мерным многогранником, поэтому из тривиальности автоморфизма $a: U'_f \rightarrow U'_f$ следует, что h переводит в себя каждое ребро графа G_f , а потому и каждое седло, откуда $b: D_f \rightarrow D_f$ тривиален. Если $s(f) = 1$, то по лемме 3.3 ниже отображение h переводит в себя хотя бы одно ребро графа G_f (а потому и каждое его ребро в силу связности графа G_f , а потому и каждую седловую точку), откуда автоморфизм $b: D_f \rightarrow D_f$ тривиален. Так как автоморфизм $b: D_f \rightarrow D_f$ является ограничением автоморфизма многогранника $\mathcal{P}_f^{q-1}$, индуцированного перестановкой координатных осей, то по лемме 3.1 он допустим. Лемма 3.2 доказана.

Этап 8. Изучим взаимосвязь утолщенных цилиндров $\mathbb{S}_{[f]_{\text{isot}}}, \mathbb{S}_{[g]_{\text{isot}}}$ для прилегающих классов изотопности $[f]_{\text{isot}} \prec [g]_{\text{isot}}$ (см. определение 2.4, (D)). Пусть $f \in F^1$ – отмеченная функция Морса класса изотопности $[f]_{\text{isot}}$. Для любой грани $\tau' \prec \tau_{J(c(f))} =: D_{[f]_{\text{isot}}} = D_f$ обозначим через $g \in F^1$ отмеченную функцию класса изотопности $\delta_{\tau'}[f]_{\text{isot}}$ (см. (7)) и фиксируем диффеоморфизм $h_{f,\tau'} \in \mathcal{D}^0$, как в (7) и (8). Рассмотрим индуцированный изоморфизм

$$h_{f,\tau'}^*: H_f^1 \rightarrow H_g^1$$

векторных пространств, аналогичный изоморфизму $h_{f,\tau'}^*: H_f^0 \rightarrow H_g^0$ из (8). Докажем включения

$$h_{f,\tau'}^*(U_f) \subset U_g, \quad h_{f,\tau'}^*(U_f^\infty) \subset U_g^\infty. \quad (34)$$

Пусть, как и выше, $s = s(f)$ – количество седловых критических значений функции f и $k := q - s$ – размерность многогранника D_f (см. этапы 1 и 2). С учетом определения $U_f \subset U_f^\infty \subset H_f^1$ (см. (16), (17)) нам достаточно показать, что сопряженный к изоморфизму $h_{f,\tau'}^*$ изоморфизм

$$(h_{f,\tau'})_*: H_{g,1} = H_1(M \setminus (\mathcal{C}_{g,0} \cup \mathcal{C}_{g,2}), \mathcal{C}_{g,1}; \mathbb{R}) \rightarrow H_1(M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}), \mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) = H_{f,1}$$

переводит гомологический класс любого ориентированного ребра графа G_g в сумму гомологических классов некоторых ориентированных ребер графа G_f

(см. определение графа G_f в обозначении 2.5) и что количество этих ребер всегда $\leq 2k + 1$.

Обозначим через C_g связную компоненту графа G_g , в которой лежит рассматриваемое ребро графа G_g . Дополнение графа G_f в поверхности M распадается на открытые цилиндры $Z_\ell(f) \approx S^1 \times (0, 1)$, $1 \leq \ell \leq n = n([f])$, полуоткрытые цилиндры $S^1 \times [0, 1)$ и открытые круги, содержащие ровно одну критическую точку минимума или максимума функции f . Поэтому имеется ретракция

$$\varrho_f: M'_f := (M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})) \setminus \left(\bigcup_{\ell=1}^n \gamma_\ell(f) \right) \rightarrow G_f,$$

где $\gamma_\ell(f) = S^1 \times \{1/2\} \subset Z_\ell(f)$. Более точно, определим эту ретракцию так, чтобы она переводила любую точку поверхности M'_f в точку пересечения проходящей через нее интегральной траектории векторного поля $\text{grad } f|_{M'_f}$ (в смысле некоторой фиксированной римановой метрики ds_0^2 на M) с графом G_f . Без ограничения общности мы также будем считать, что функция $\tilde{f}$ и диффеоморфизм $h_{0,f,\tilde{f}}$ в определении диффеоморфизма $h_{f,\tau'}$ (см. (8)) строились так: фиксируем попарно не пересекающиеся круги вокруг седловых точек функции $f \in F^1$ и требуем, чтобы в каждом из них $\tilde{f} = f + \text{const}$, чтобы $h_{0,f,\tilde{f}} = \text{id}_M$ и чтобы функция $\tilde{f} \in F^1$ была получена при помощи C^2 -малого возмущения функции f . Тогда $h_{f,\tau'}(G_g) \subset M'_f$, причем отображение

$$p_{f,\tau'} := \varrho_f \circ h_{f,\tau'}|_{C_g}: C_g \rightarrow G_f \quad (35)$$

является погружением графов, переводит множество вершин на множество вершин согласно биекции $h_{f,\tau'}|_{\mathcal{C}_g}: \mathcal{C}_g \rightarrow \mathcal{C}_f$ и сохраняет ориентацию ребер. Отсюда следует, что $p_{f,\tau'}$ переводит любое ориентированное ребро графа G_g в ориентированный путь на графе G_f , ориентация которого согласована с ориентацией ребер графа G_f .

Осталось показать, что длина указанного пути на графе G_f (т.е. количество проходимых этим путем ребер графа G_f) не превосходит $2k + 1$. Пусть C_f – связная компонента графа G_f , в которой лежит рассматриваемый путь. Граф C_f имеет не более $k + 1$ вершин (так как число связных компонент графа G_f не меньше чем $s = q - k$), а потому он имеет не более $2k + 2$ ребер. Но наше ребро является собственным подграфом графа C_g , а потому наш путь является собственным подграфом графа $p_{f,\tau'}(C_g) \subset C_f$. Так как граф C_f имеет не более $2k + 2$ ребер, наш путь имеет не более $2k + 1$ ребер, что и требовалось. Это завершает доказательство включений (34).

Изоморфизм $h_{f,\tau'}^*: H_f^1 \xrightarrow{\cong} H_g^1$ индуцирует изоморфизм

$$\hat{h}_{f,\tau'}: \text{Aut}(H_f^1) \xrightarrow{\cong} \text{Aut}(H_g^1), \quad h^* \mapsto h_{f,\tau'}^* h^* (h_{f,\tau'}^*)^{-1}, \quad h^* \in \text{Aut}(H_f^1).$$

Рассмотрим вложение множеств окружностей $\{\gamma_\ell(f)\}_{\ell=1}^{n(f)} \hookrightarrow \{\gamma_m(g)\}_{m=1}^{n(g)}$, сопоставляющее окружности $\gamma_\ell(f)$ окружность $\gamma_{m(\ell)}(g)$ такую, что $h_{f,\tau'}^{-1}(\gamma_\ell(f)) \subset Z_{m(\ell)}(g)$. Тогда для каждого векторного поля $v_\ell(f)$ на H_f^1 (см. (20) и (27)) выполнено $(h_{f,\tau'}^*)_*(v_\ell(f)) = v_{m(\ell)}(g)$. Отсюда $\hat{h}_{f,\tau'}(\Theta_f^*) \subset \Theta_g^*$, а потому

$$\hat{h}_{f,\tau'}((\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*) \subset (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_g)^*.$$

Поэтому вложение $h_{f,\tau'}^*|_{U_f}: U_f \hookrightarrow U_g$ (см. (34)) индуцирует корректно определенное отображение пространств орбит

$$[h_{f,\tau'}^*|_{U_f}]: U_f/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^* \hookrightarrow U_g/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_g)^*, \quad (36)$$

являющееся погружением утолщенных цилиндров (так как группа Θ_f^* действует свободно и дискретно на U_f ; см. этапы 6 и 7).

Докажем, что погружение (36) утолщенных цилиндров является допустимым (см. определение 2.3, (D)). Из $(h_{f,\tau'}^*)_*(v_\ell(f)) = v_{m(\ell)}(g)$, $1 \leq \ell \leq n$, (30) и описания подгруппы $\Theta_{f,k} \subset \mathcal{D}^0 \cap \Theta_f$ (см. этап 7) следует, что при $\nu_{k-1}(f) < j < \nu_k(f)$, $1 \leq k \leq e(f)$, выполнено

$$\begin{aligned} (h_{f,\tau'}^*)_*(\tilde{v}_j(f)) &= (h_{f,\tau'}^*)_*(v_j(f) - v_{j+1}(f)) = v_{m(j)}(g) - v_{m(j+1)}(g) \\ &= (v_{m(j)}(g) - v_{m(j)+\eta_k}(g)) + (v_{m(j)+\eta_k}(g) - v_{m(j)+2\eta_k}(g)) + \cdots \\ &= \eta_k(\tilde{v}_{m(j)+(\eta_k-1)/2}(g) + \tilde{v}_{m(j)+(3\eta_k-1)/2}(g) + \cdots + \tilde{v}_{m(j+1)-(1+\eta_k)/2}(g)), \end{aligned}$$

где $\eta_k = \eta_k(f, g) := \text{sgn}(m(\nu_k - 1) - m(\nu_k))$. Отсюда следует, что при вложении $h_{f,\tau'}^*|_{U_f}: U_f \hookrightarrow U_g$ следующие коммутирующие векторные поля:

$$(a) \tilde{v}_i(f), \quad i \in A(f), \quad (b) \tilde{v}_j(f), \quad j \in B(f),$$

на U_f (потoki которых задают свободное действие группы $\mathbb{R}^{A(f)} \times \mathbb{R}^{B(f)}$ на U_f и свободное действие цилиндра $\mathbb{R}^{A(f)} \times (S^1)^{B(f)}$ на $U_f/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*$) переходят в следующие векторные поля на U_g :

- (a) $\tilde{v}_{m(i)}(g)$ (при $\nu_e(g) < m(i) \leq n(g)$) или $\tilde{v}_{m(i)}(g) + \tilde{v}_{m(i)+1}(g) + \cdots + \tilde{v}_{\nu_t(g)}$ (при $\nu_{t-1}(g) < m(i) \leq \nu_t(g)$, $1 \leq t \leq e(g)$);
- (b) $\tilde{v}_{m(j)}(g)$ (при $1 \leq j \leq \nu_0(f)$) или

$$\eta_k(\tilde{v}_{m(j)+(\eta_k-1)/2}(g) + \tilde{v}_{m(j)+(\eta_k-1)/2+\eta_k}(g) + \cdots + \tilde{v}_{m(j+1)-(1+\eta_k)/2}(g))$$

(при $\nu_{k-1}(f) < j < \nu_k(f)$, $1 \leq k \leq e(f)$);

причем каждое поле $\tilde{v}_m(g)$, $1 \leq m \leq n(g)$, входит в качестве слагаемого (с коэффициентом $\pm$) не более чем в одно из полей $(h_{f,\tau'}^*)_*(\tilde{v}_\ell(f))$, $1 \leq \ell \leq n(f)$.

Из описанного поведения векторных полей $\tilde{v}_\ell$, $1 \leq \ell \leq n$, при погружении (36) следует, что это погружение является допустимым погружением утолщенных цилиндров (см. определение 2.3, (D)).

3.3. Построение косой цилиндрической ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}}$ для класса изотопности $[f]_{\text{isot}}$.

Этап 9. Рассмотрим стандартную цилиндрическую ручку $D_{[f]_{\text{isot}}} \times \mathbb{S}_{[f]_{\text{isot}}} = D_f \times \mathbb{S}_f = \tau_{J(c(f))} \times (U_f/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*)$ и покомпонентное правое действие на ней дискретной группы

$$\Gamma_{[f]_{\text{isot}}} = \Gamma_f \cong \tilde{\Gamma}_f / (((\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0) / (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0),$$

где

$$\tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{isot}}} = \tilde{\Gamma}_f := (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f) / (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0, \quad (37)$$

допустимыми автоморфизмами (см. (32) и лемму 3.2). Покажем, что это действие (а также действие группы $\tilde{\Gamma}_f$ на U_f^∞) свободно. Докажем две леммы.

ЛЕММА 3.3. *Если выполнено условие (4), то для любого диффеоморфизма $h \in \text{stab}_{\mathcal{T}} f$ найдется ребро графа G_f (см. обозначения 2.2, (B) и 2.5), переходящее в себя при отображении h .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Пусть W_f – граф Кронрода-Риба функции f (см. [50], [51] или [18]), т.е. получен из поверхности M стягиванием в точку каждой связной компоненты линии уровня функции f . Обозначим через $p_f: M \rightarrow W_f$ естественную проекцию. Вершину графа W_f назовем *сферической*, если прообраз достаточно малой ее окрестности при отображении p_f гомеоморфен сфере с проколами. Вершину графа W_f назовем *граничной* (соответственно *отмеченной*), если ее прообраз при отображении p_f является компонентой края M (соответственно содержит отмеченную критическую точку функции f). Подграф графа W_f назовем $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -*неподвижным*, если при автоморфизме $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$ графа W_f , индуцированном любым диффеоморфизмом $h \in \text{stab}_{\mathcal{T}} f$, любая вершина и любое ребро этого подграфа переходят в себя. Обозначим через W'_f минимальный связный подграф графа W_f , содержащий каждый простой цикл графа W_f , каждую граничную вершину, каждую отмеченную вершину и каждую несферическую вершину. Он непуст и содержит неграничную вершину в силу (4). Покажем, что подграф W'_f является $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -неподвижным. Пусть $h \in \text{stab}_{\mathcal{T}} f$. Так как h сохраняет неподвижными все отмеченные критические точки функции f и переводит в себя каждую компоненту края, то все отмеченные вершины и все граничные вершины $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -неподвижны. В силу $h \in \mathcal{T}$ индуцированный автоморфизм гомологий $\bar{h}^* \in H_1(\bar{M})$ (см. обозначение 2.2, (B)) совпадает с тождественным, поэтому каждая несферическая вершина $v \in W_f$ является $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -неподвижной, а каждый простой цикл на графе W_f переходит в себя с сохранением ориентации при отображении $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$. Если пересечение двух простых циклов непусто и связно, то оно $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -неподвижно, поэтому такие циклы $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -неподвижны. Поэтому каждая связная компонента объединения простых циклов, не являющаяся простым циклом (или содержащая несферическую или отмеченную вершину), $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -неподвижна. Пусть $W''_f \subset W_f$ – объединение всех простых циклов, множества несферических вершин и множества отмеченных вершин графа W_f , и пусть простой путь в графе W_f соединяет две связные компоненты графа W''_f и пересекается с W''_f только в концах. Такой путь единствен (для фиксированной пары компонент), а потому $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -неподвижен (в силу $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$ -инвариантности подграфа W''_f). Отсюда следует $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -неподвижность подграфа W'_f .

Шаг 2. Пусть $M' \subset M$ – прообраз малой связной окрестности вершины $v \in W_f$ при отображении $p_f: M \rightarrow W_f$, обозначим $c := f(p_f^{-1}(v))$. Пусть $h \in \text{stab}_{\mathcal{T}} f$, $h(M') = M'$, и существует седловая критическая точка в M' , не являющаяся неподвижной при h . Пусть замкнутая поверхность $\bar{M}'$ получена из M' стягиванием в точку каждой компоненты края M' и $\bar{h}: \bar{M}' \rightarrow \bar{M}'$ – индуцированный гомеоморфизм. Без ограничения общности ограничение h на каждую h -инвариантную связную компоненту $\bar{M}' \setminus f^{-1}(c)$, гомеоморфную $(S^1 \times (c; c + \varepsilon]) / (S^1 \times \{c + \varepsilon\})$, является поворотом вокруг точки $S^1 \times \{c + \varepsilon\}$ (по отношению к естественным “полярным” координатам в $(S^1 \times (c; c + \varepsilon]) / (S^1 \times \{c + \varepsilon\})$),

откуда эта точка является единственной неподвижной точкой в данной компоненте. Так как $\bar{h}$ индуцирует тождественный автоморфизм гомологий $H_1(\bar{M}')$ (в силу $h \in \mathcal{T}$) и все его неподвижные точки имеют индекс $+1$, то по формуле Лефшеца количество неподвижных точек равно $\chi(\bar{M}')$.

Шаг 3. Вершину графа W_f назовем *сильно $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -инвариантной*, если ее степень в графе W_f больше 1 и при любом диффеоморфизме $h \in \text{stab}_{\mathcal{T}} f$ каждая вершина и каждое ребро графа $p_f^{-1}(v) \subset G_f$ переходят в себя. Докажем, что в W'_f существует сильно $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -инвариантная вершина. Если вершина $v \in W'_f$ не является сильно $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -инвариантной, то либо ее степень в W_f равна 1, либо найдется такой диффеоморфизм $h \in \text{stab}_{\mathcal{T}} f$, что количество неподвижных точек соответствующего индуцированного гомеоморфизма $\bar{h}: \bar{M}' \rightarrow \bar{M}'$ (см. шаг 2) согласно формуле Лефшеца равно $\chi(\bar{M}')$ и не меньше суммы $k_v + \deg_{W'_f} v$ числа k_v отмеченных критических точек в $p_f^{-1}(v)$ и степени $\deg_{W'_f} v$ вершины v в графе W'_f (т.е. $\chi(\bar{M}') \geq k_v + \deg_{W'_f} v \geq 0$), откуда вершина v является сферической и $k_v + \deg_{W'_f} v \leq 2$ (так как в противном случае $\chi(\bar{M}') = k_v + \deg_{W'_f} v = 0$, откуда $W'_f = \{v\}$, M – тор и все критические точки не отмечены, что противоречит (4)). Если все вершины графа W'_f не являются сильно $\text{stab}_{\mathcal{T}} f$ -инвариантными, то по доказанному выше каждая вершина $v \in W'_f$ сферическая и либо имеет степень 1 в W_f , либо имеет степень $\deg_{W'_f} v \leq 2 - k_v \leq 2$ в W'_f , откуда граф W'_f является простой ломаной, все его внутренние вершины не отмечены (так как $k_v = 0$ в случае $\deg_{W'_f} v = 2$), а сумма значений k_v для концевых вершин $v \in \partial W'_f$, не являющихся граничными, не превосходит $2 - d^+ - d^- = \chi(M)$ (так как $k_v \leq 1$ при $\deg_{W'_f} v = 1$ и $k_v \leq 2$ при $\deg_{W'_f} v = 0$), откуда общее количество отмеченных критических точек $\leq \chi(M)$, что противоречит (4). Лемма 3.3 доказана.

ЛЕММА 3.4. Пусть выполнено условие (4). Пусть функция Морса $f \in F^1$, класс относительных 1-когомологий $u \in U_f^\infty$, диффеоморфизм $h \in \text{stab}_{\mathcal{T}} f$ (см. обозначение 2.2, (B)) и мультискручивание Дэна $h_1 \in \Theta_f$ удовлетворяют условию $h^*(u) = h_1^*(u)$. Тогда $hh_1^{-1} \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0$; см. (32).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.3 найдется ребро графа G_f , переходящее в себя при отображении h . Пусть C_f – связная компонента графа G_f , содержащая это ребро, и пусть Z_ℓ – открытый цилиндр, одна из компонент границы которого (скажем, нижнее основание $\partial^- Z_\ell$) имеет общее ребро с графом C_f (см. (18)). Тогда любое ребро графа $C_f \cup \partial^- Z_\ell$ и цилиндр Z_ℓ тоже переходят в себя при отображении h . Так как пути $\tilde{e}_\ell, h_1(\tilde{e}_\ell) \subset \bar{Z}_\ell$ выходят из одной и той же точки (принадлежащей $\partial^- Z_\ell$), то 1-цепь $h(\tilde{e}_\ell) - h_1(\tilde{e}_\ell)$ гомологична некоторой линейной комбинации $\sum_{i=1}^{2q} \lambda_i e_i$ ориентированных ребер основания $\partial^+ Z_\ell$ с целыми коэффициентами, причем все коэффициенты λ_i либо неотрицательны, либо неположительны одновременно. Но

$$\sum_{i=1}^{2q} \lambda_i u([e_i]) = u([h(\tilde{e}_\ell)] - [h_1(\tilde{e}_\ell)]) = (h^*(u) - h_1^*(u))([\tilde{e}_\ell]) = 0$$

по предположению. Так как значение 1-коцикла $u \in U_f^\infty$ на каждом ориентированном ребре $e_1, \dots, e_{2q} \subset G_f$ положительно (см. (17)), то линейная комбинация

тривиальна. Значит, $[h(\tilde{e}_\ell)] = [h_1(\tilde{e}_\ell)]$, откуда $hh_1^{-1}|_{\overline{Z}_\ell}$ гомотопно $\text{id}_{\overline{Z}_\ell}$ в классе гомеоморфизмов, сохраняющих функцию $f|_{\overline{Z}_\ell}$ и переводящих вершины графа ∂Z_ℓ в себя. Эти рассуждения показывают (с использованием связности M), что $hh_1^{-1} \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0$. Лемма доказана.

В силу (32) и леммы 3.4 группа Γ_f действует свободно на утолщенном цилиндре $\mathbb{S}_f = U_f/(\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*$, поэтому она действует свободно на стандартной цилиндрической ручке $D_f \times \mathbb{S}_f$ допустимыми автоморфизмами (см. лемму 3.2), а потому конечна (см. определение 2.3, (B)). Значит, пространство орбит

$$\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}} = \mathbb{D}_f^{\text{st}} := (D_f \times \mathbb{S}_f)/\Gamma_f \approx (\tau_{J(c(f))} \times U_f)/\tilde{\Gamma}_f \quad (38)$$

является стандартной косой цилиндрической ручкой (см. (37) и определение 2.3, (C)).

Этап 10. Изучим взаимосвязь стандартных косых цилиндрических ручек $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}}, \mathbb{D}_{[g]_{\text{isot}}}^{\text{st}}$ для примыкающих классов изотопности $[f]_{\text{isot}} \prec [g]_{\text{isot}}$. Пусть $f \in F^1$ – отмеченная функция Морса класса изотопности $[f]_{\text{isot}}$. Для любой грани $\tau' \prec \tau_{J(c(f))} = D_{[f]_{\text{isot}}} = D_f$ обозначим через $g \in F^1$ отмеченную функцию класса изотопности $[g]_{\text{isot}} = \delta_{\tau'}[f]_{\text{isot}}$ (см. (7)). Рассмотрим погружение

$$\begin{aligned} h_{f,\tau'}^0|_{\tau'} \times [h_{f,\tau'}^*|_{U_f}]: \tau' \times \mathbb{S}_f \hookrightarrow D_g \times \mathbb{S}_g, \\ (\mathbf{c}, (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*(u)) \mapsto (h_{f,\tau'}^0(\mathbf{c}), (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_g)^* h_{f,\tau'}^*(u)), \end{aligned} \quad (39)$$

являющееся прямым произведением изометрии (10) евклидовых многогранников и допустимого погружения (36) утолщенных цилиндров, т.е. допустимым погружением стандартных цилиндрических ручек (см. определение 2.3, (D)). Рассмотрим орбиту грани $\tau' \subset \partial D_f$ при действии группы Γ_f (см. (37)) изометриями многогранника D_f и два объединения его граней:

$$\Gamma_f(\tau') := \bigcup_{h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f} h^0(\tau') \subseteq \bigcup_{\delta_{\tau'_1}[f]_{\text{isot}}=[g]_{\text{isot}}} \tau'_1 =: \partial_{[g]_{\text{isot}}} D_{[f]_{\text{isot}}} = \partial_g D_f; \quad (40)$$

см. (7). Включение в (40) следует из того, что $\delta_{h^0(\tau')}[f]_{\text{isot}} = [gh]_{\text{isot}} = [g]_{\text{isot}}$ в силу включения $h \in \mathcal{D}^0$. Итак, (допустимые) погружения, отвечающие этим граням, имеют одну и ту же область значений – стандартную цилиндрическую ручку $D_g \times \mathbb{S}_g$. Любые две такие грани либо совпадают, либо не пересекаются в силу леммы 3.1. Рассмотрим погружение, составленное из (допустимых) погружений этих граней:

$$(\partial_g D_f) \times \mathbb{S}_f \hookrightarrow D_g \times \mathbb{S}_g, \quad (\mathbf{c}, (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*(u)) \mapsto (h_{f,\tau'_1}^0(\mathbf{c}), (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_g)^* h_{f,\tau'_1}^*(u)),$$

где $(\mathbf{c}, u) \in \tau'_1 \times U_f$. Это отображение корректно определено (и является погружением), так как грани $\tau'_1 \in (\delta[f]_{\text{isot}})^{-1}([g]_{\text{isot}})$ попарно не пересекаются (см. выше). Оно переводит любую Γ_f -орбиту в некоторую Γ_g -орбиту, так как в силу (13) для любого $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$ точки $(\mathbf{c}, u) \in \tau'_1 \times U_f$ и $(h^0(\mathbf{c}), h^*(u)) \in (h^0(\tau'_1)) \times U_f$ переходят в элементы

$$(h_{f,\tau'_1}^0(\mathbf{c}), (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_g)^* h_{f,\tau'_1}^*(u))$$

и

$$(h_{f,h^0(\tau'_1)}^{*0} h^{*0}(\mathbf{c}), (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_g)^* h_{f,h^0(\tau'_1)}^* h^*(u)) = (h_1^{*0} h_{f,\tau'_1}^{*0}(\mathbf{c}), (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_g)^* h_1^* h_{f,\tau'_1}^*(u))$$

одной и той же Γ_g -орбиты, где $h_1 \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} g$. Поэтому это погружение индуцирует корректно определенное погружение пространств орбит:

$$\begin{aligned} \chi[f]_{\text{isot},[g]_{\text{isot}}} &= \chi_{f,g}: ((\partial_g D_f) \times \mathbb{S}_f)/\Gamma_f \hookrightarrow (D_g \times \mathbb{S}_g)/\Gamma_g, \\ \Gamma_f(\mathbf{c}, (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)^*(u)) &\mapsto \Gamma_g(h_{f,\tau'_1}^{*0}(\mathbf{c}), (\mathcal{D}^0 \cap \Theta_g)^* h_{f,\tau'_1}^*(u)), \quad (\mathbf{c}, u) \in \tau'_1 \times U_f, \end{aligned}$$

где $[g]_{\text{isot}} = \delta_{\tau'_1}[f]_{\text{isot}}$ (см. (7)). (Оно является погружением, так как группы Γ_f, Γ_g конечны и действуют свободно.) Рассмотрим его ограничение:

$$\begin{aligned} \chi[f]_{\text{isot},\tau'} &= \chi_{f,\tau'} := \chi_{f,g}|_{((\Gamma_f(\tau')) \times \mathbb{S}_f)/\Gamma_f}: ((\Gamma_f(\tau')) \times \mathbb{S}_f)/\Gamma_f \xrightarrow{(*)} (\tau' \times \mathbb{S}_f)/\Gamma_{f,\tau'} \\ &\approx (\tau' \times U_f)/\tilde{\Gamma}_{f,\tau'} \hookrightarrow \mathbb{D}_{[g]_{\text{isot}}}^{\text{st}} = \mathbb{D}_g^{\text{st}} = (D_g \times \mathbb{S}_g)/\Gamma_g \approx (D_g \times U_g)/\tilde{\Gamma}_g, \\ \tilde{\Gamma}_{f,\tau'}(\mathbf{c}, u) &\mapsto \tilde{\Gamma}_g(h_{f,\tau'}^{*0}(\mathbf{c}), h_{f,\tau'}^*(u)), \quad (\mathbf{c}, u) \in \tau' \times U_f, \\ \Gamma_{f,\tau'} &:= \tilde{\Gamma}_{f,\tau'} / (((\mathcal{D}^0 \cap \Theta_f)(\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0) / (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0), \quad \tilde{\Gamma}_{f,\tau'} := \text{stab}_{\tilde{\Gamma}_f} \tau', \end{aligned}$$

где гомеоморфизм $(*)$ следует из того, что при $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$ грани $\tau', h^{*0}(\tau')$ либо совпадают, либо не пересекаются (см. выше). Итак, областью определения погружения $\chi_{f,\tau'}$ является косая грань

$$\partial_{\tau'} \mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}} = \partial_{\tau'} \mathbb{D}_f^{\text{st}} := ((\Gamma_f(\tau')) \times \mathbb{S}_f)/\Gamma_f \quad (41)$$

стандартной косой цилиндрической ручки $\mathbb{D}_f^{\text{st}} = (D_f \times \mathbb{S}_f)/\Gamma_f$, т.е. образ грани $\tau' \times \mathbb{S}_f$ стандартной цилиндрической ручки $D_f \times \mathbb{S}_f$ при проекции $D_f \times \mathbb{S}_f \rightarrow \mathbb{D}_f^{\text{st}}$. А областью определения погружения $\chi_{f,g}$ является объединение попарно не пересекающихся косых граней ручки $\mathbb{D}_f^{\text{st}}$:

$$\partial_{[g]_{\text{isot}}} \mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}} = \partial_g \mathbb{D}_f^{\text{st}} := ((\partial_g D_f) \times \mathbb{S}_f)/\Gamma_f. \quad (42)$$

Подчеркнем, что $\partial_{\tau'} \mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}} = \partial_{\tau'_1} \mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}}$, $\chi_{f,\tau'} = \chi_{f,\tau'_1}$ для любой грани $\tau'_1 \in \Gamma_f(\tau')$.

Пусть $[f]_{\text{isot}} \prec [g]_{\text{isot}} \prec [g_1]_{\text{isot}}$, причем $[g]_{\text{isot}} = \delta_{\tau'}[f]_{\text{isot}}$, $[g_1]_{\text{isot}} = \delta_{\tau''}[f]_{\text{isot}}$ для некоторых граней $\tau'' \prec \tau' \prec \tau_{J(\mathbf{c})}$, и пусть f, g, g_1 – отмеченные функции своих классов изотопности. Из (12) и того, что группы $\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_{g_1})$ и $\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g_1$ действуют тривиально на косой ручке $\mathbb{D}_{g_1}^{\text{st}}$, получаем

$$\chi_{g,g_1} \circ \chi_{f,g}|_{\partial_{\tau''} \mathbb{D}_f^{\text{st}}} = \chi_{g,h_{f,\tau''}^{*0}} \circ \chi_{f,\tau'}|_{\partial_{\tau''} \mathbb{D}_f^{\text{st}}} = \chi_{f,\tau''} = \chi_{f,g_1}|_{\partial_{\tau''} \mathbb{D}_f^{\text{st}}}. \quad (43)$$

Покажем, что погружение $\chi_{f,g}$ является вложением, а потому $\chi_{f,\tau'}$ является мономорфизмом стандартных косых цилиндрических ручек (см. определение 2.3, (D)) ввиду допустимости погружения (39). Предположим, что $u_1, u_2 \in U_f^\infty$ и $h_{f,\tau'}^*(u_1) = h^* h_{f,\tau'_1}^*(u_2)$ для некоторых $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} g$ и $\tau'_1 \prec D_f$ таких, что $\delta_{\tau'_1}[f]_{\text{isot}} = \delta_{\tau'}[f]_{\text{isot}} = [g]_{\text{isot}}$. Покажем, что $u_1 \in \tilde{\Gamma}_f^*(u_2)$, где $\tilde{\Gamma}_f^* \subset \text{Aut}(H_f^1)$ – группа автоморфизмов относительных когомологий, индуцированная группой классов отображений $\tilde{\Gamma}_f = (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f) / (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)^0$. Имеем

$$\begin{aligned} u_1 &= (h_{f,\tau'}^*)^{-1} h^* h_{f,\tau'_1}^*(u_2) = (h_{f,\tau'_1} h h_{f,\tau'}^{-1})^*(u_2) = (h_{0;\tilde{f},\tilde{f}_1} h_{1;\tilde{f}_1,g} h h_{1;\tilde{f},g}^{-1} h_{0;\tilde{f},\tilde{f}}^{-1})^*(u_2) \\ &= (h_{0;\tilde{f},\tilde{f}_1} h_{1;\tilde{f}_1,\tilde{f}} h_{0;\tilde{f},\tilde{f}}^{-1})^*(u_2) = h_1^*(u_2), \end{aligned} \quad (44)$$

где “возмущенным” функциям $\tilde{f}$, $\tilde{f}_1$ отвечают грани τ' , τ'_1 по правилу (7), $h_{1;\tilde{f}_1,\tilde{f}} := h_{1;\tilde{f}_1,g} h h_{1;\tilde{f},g}^{-1}$, $h_1 := h_{0;\tilde{f},\tilde{f}_1} h_{1;\tilde{f}_1,\tilde{f}} h_{0;\tilde{f},\tilde{f}}^{-1}$. Так как диффеоморфизм $h_{1;\tilde{f}_1,\tilde{f}} \in \mathcal{D}^0$ переводит линии уровня функции $\tilde{f}$ в линии уровня функции $\tilde{f}_1$ с сохранением направления роста (в силу $h \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} g$), то $\tilde{f} = h_2 \tilde{f}_1 h_{1;\tilde{f}_1,\tilde{f}}$ для некоторого $h_2 \in \text{Diff}^+[-1, 1]$, откуда $\tilde{f} = h_2 \tilde{f}_1 (h_{0;\tilde{f},\tilde{f}_1}^{-1} h_1 h_{0;\tilde{f},\tilde{f}})$, т.е. диффеоморфизм $h_1 \in \mathcal{D}^0$ переводит линии уровня функции $\tilde{f}^* := \tilde{f} h_{0;\tilde{f},\tilde{f}}^{-1}$ в линии уровня функции $\tilde{f}_1^* := \tilde{f}_1 h_{0;\tilde{f},\tilde{f}_1}^{-1}$ с сохранением направления роста. Отсюда и из того, что обе “возмущенные” функции $\tilde{f}^*$, $\tilde{f}_1^*$ близки к f и имеют те же критические точки, что и “невозмущенная” функция f , следует, что $h_1 \in \text{Diff}(M, \mathcal{C}_{f,0}, \mathcal{C}_{f,1}, \mathcal{C}_{f,2})$. Осталось доказать, что $h_1 \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))$. Так как функции f , $f h_1$ имеют одни и те же множества $\mathcal{C}_{f,0}$, $\mathcal{C}_{f,1}$, $\mathcal{C}_{f,2}$ критических точек минимумов, седловых точек и точек максимумов, то согласно достаточному условию изотопности функций Морса (см. [40; лемма 1]) достаточно показать совпадение графов $G_{f h_1} = h_0(G_f)$ для некоторого диффеоморфизма $h_0 \in \text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f)$ (см. обозначение 2.5 и (12)), т.е. что графы G_f и $G_{f h_1}$ изотопны в поверхности $M' := M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$ относительно множества вершин $\mathcal{C}_{f,1}$. Так как $\tilde{f}^* = h_2 \tilde{f}_1^* h_1$, то

$$h_1(G_{\tilde{f}^*}) = G_{\tilde{f}_1^*}, \quad J(c(\tilde{f}_1^* h_1)) = J(c(\tilde{f}^*)) =: \hat{J}, \quad (45)$$

поэтому

$$J(c(f h_1)) = J(c(f)) =: J \quad (46)$$

(так как из того, что перестановка $h_1|_{\mathcal{C}_{f,1}}: \mathcal{C}_{f,1} \rightarrow \mathcal{C}_{f,1}$ седловых точек переводит отношение частичного порядка $J(c(f_1^*))$ на множестве $\mathcal{C}_{f,1}$ значениями одной “возмущенной” 0-коцепи $c(\tilde{f}_1^*) = \tilde{f}_1^*|_{\mathcal{C}_{f,1}} \in C^0(\mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R})$ в отношение частичного порядка $J(c(\tilde{f}^*))$ на множестве $\mathcal{C}_{f,1}$ значениями другой “возмущенной” 0-коцепи $c(\tilde{f}^*) = \tilde{f}^*|_{\mathcal{C}_{f,1}} \in C^0(\mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R})$, следует сохранение этой перестановкой “более слабого” отношения частичного порядка на $\mathcal{C}_{f,1}$ значениями “невозмущенной” 0-коцепи $c(f) = f|_{\mathcal{C}_{f,1}} \in C^0(\mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R})$). Обозначим $\mathcal{C}_{f,0,2} := \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2}$.

ЛЕММА 3.5. Пусть $f \in F^1$, $u \in U_f^\infty \subset H_f^1$, и пусть в обозначениях (7) возмущенной функции $\tilde{f}^* := \tilde{f} h_{0;\tilde{f},\tilde{f}}^{-1}$ отвечает грань $\tau' := \tau_{J(c(\tilde{f}^*))} \prec \tau_{J(c(f))}$. Тогда граф $G_f \subset M$ (см. обозначение 2.5) совпадает с точностью до диффеоморфизмов из $\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f)$ с некоторым графом $G := G_{M, \mathcal{C}_{f,0,2}, G_{\tilde{f}^*}, u, \hat{J}, J} \subset M$, рассматриваемым с точностью до диффеоморфизмов из $\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_{f,0,2} \cup V(G))$ и определяемым следующим набором данных:

- (i) поверхность M ;
- (ii) подмножество $\mathcal{C}_{f,0,2} := \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2} \subset M$;
- (iii) граф $G_{\tilde{f}^*} \subset M' := M \setminus \mathcal{C}_{f,0,2}$, рассматриваемый с точностью до диффеоморфизмов из $\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_{f,0,2} \cup V(G_{\tilde{f}^*}))$;
- (iv) класс относительных 1-когомологий $u \in U_f^\infty \subset H_f^1 = H^1(M', V(G_{\tilde{f}^*}); \mathbb{R})$;

- (v) два отношения частичного порядка $\hat{J} := J(\mathbf{c}(\tilde{f}^*)) \prec J := J(\mathbf{c}(f))$ на множестве $V(G_{\tilde{f}^*})$ вершин графа $G_{\tilde{f}^*}$, построенные при помощи значений функций $f, \tilde{f}^*$ на вершинах (соответственно), где через $V(G) \subset G$ обозначено множество вершин графа G .

Другими словами, если набор данных (i)–(v) построен указанным способом по паре “невозмущенной” и “возмущенной” функций $f, \tilde{f}^*$, имеющих одно и то же множество критических точек, то $G_f \in (\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G)$ для $G := G_{M, \mathcal{C}_f, 0, 2, G_{\tilde{f}^*}, u, \hat{J}, J}$ (т.е. графы G_f и G изотопны в поверхности M' относительно множества вершин $V(G_{\tilde{f}^*}) = V(G)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проведем доказательство в случае, когда $\tau := \tau_{\hat{J}}$ является гипергранью грани $\tau := \tau_J$. Обозначим “возмущенную” функцию через $\tilde{f}_1 := \tilde{f}^*$. Граф $G = G_{M, \mathcal{C}_f, 0, 2, G_{\tilde{f}_1}, u, \hat{J}, J} \subset M$ строится так. Поскольку $\tau' := \tau_{\hat{J}} \prec \tau := \tau_J$ – гипергрань, то ровно одно из седловых критических значений $c \in f(\mathcal{C}_{f,1})$ “невозмущенной” функции f распадается на два седловых критических значения $c^- < c^+$ “возмущенной” функции $\tilde{f}_1$. Пусть $Z_\ell \subset M \setminus G_{\tilde{f}_1}$ – такая связная компонента множества $M \setminus G_{\tilde{f}_1}$, что $\inf \tilde{f}_1|_{Z_\ell} = c^-$ и $\sup \tilde{f}_1|_{Z_\ell} = c^+$ (т.е. Z_ℓ является открытым цилиндром для функции $\tilde{f}_1$; см. (18)). Ориентированный граф $G \subset \overline{Z_\ell}$ назовем Z_ℓ -допустимым, если его множество вершин содержится в множестве вершин графа $G_{\tilde{f}_1}$, а внутренность каждого его ребра содержится в Z_ℓ ; Z_ℓ -допустимый односторонний ориентированный граф γ_0 с параметризацией $\gamma_0: [0, 1] \rightarrow \overline{Z_\ell}$ назовем (Z_ℓ, u) -минимальным, если

$$u([\gamma_0]) = \min\{u([\gamma]) \mid \gamma \in Z_\ell^{\text{adm}}, \gamma|_{[0, 1/2]} = \gamma_0|_{[0, 1/2]}, u([\gamma]) > 0\},$$

где через Z_ℓ^{adm} обозначено множество Z_ℓ -допустимых односторонних графов. Из включений $u \in U_f^\infty \subset U_{\tilde{f}_1}^\infty$ и определения подмножества $U_{\tilde{f}_1}^\infty \subset H_f^1$ следует, что указанный минимум достигается для любого Z_ℓ -допустимого одностороннего графа γ_0 , причем ровно на одном Z_ℓ -допустимом одностороннем графе с точностью до гомотопии в классе Z_ℓ -допустимых графов. Более того, имеется Z_ℓ -допустимый ориентированный граф $G_\ell \subset \overline{Z_\ell}$, каждое ребро которого является (Z_ℓ, u) -минимальным и который содержит в качестве ровно одного из своих ребер любой (Z_ℓ, u) -минимальный односторонний граф с точностью до гомотопии в классе Z_ℓ -допустимых графов. Причем граф G_ℓ с указанным свойством единствен с точностью до гомотопии в классе Z_ℓ -допустимых графов. Обозначим через $G \subset M$ граф, полученный из графа $G_{\tilde{f}_1}$ заменой подграфа ∂Z_ℓ соответствующим графом G_ℓ для каждой связной компоненты $Z_\ell \subset M \setminus G_{\tilde{f}_1}$ такой, что $Z_\ell \subset \tilde{f}_1^{-1}([c^-, c^+])$. Нетрудно показывается, что $G_f \in (\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G)$.

В общем случае имеются такие последовательности граней $\tau', \tau'', \dots, \tau^{(j-1)}$ грани $\tau =: \tau^{(j)}$ и соответствующих отношений частичного порядка $\hat{J} =: J', J'', \dots, J^{(j-1)}, J^{(j)} := J$, что $\tau^{(i-1)} = \tau_{J^{(i-1)}}$ является гипергранью грани $\tau^{(i)} = \tau_{J^{(i)}}$, $2 \leq i \leq j$. Пусть $\tilde{f}_j := f$ – невозмущенная функция и $\tilde{f}_i$ – возмущенная функция, которой отвечает грань $\tau^{(i)}$ по правилу (7), причем $\mathcal{C}_{\tilde{f}_i} = \mathcal{C}_f$, $1 \leq i \leq j-1$. Определим индуктивно по графу $G' := G_{\tilde{f}_1} = G_{\tilde{f}^*} \subset M$ графы $G^{(i+1)} := G_{M, \mathcal{C}_f, 0, 2, G^{(i)}, u, J^{(i)}, J^{(i+1)}}$ при $i = 1, 2, \dots, j-1$. Положим $G_{M, \mathcal{C}_f, 0, 2, G_{\tilde{f}_1}, u, \hat{J}, J} := G^{(j)}$.

Из доказанного выше следует (по индукции), что $G_{\tilde{f}_{i+1}} \in (\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G^{(i+1)})$ при $i = 1, 2, \dots, j-1$. В частности, $G_f = G_{\tilde{f}_j} \in (\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G^{(j)})$. Лемма 3.5 доказана.

Из леммы 3.5 в силу (44)–(46) следует, что

$$\begin{aligned} G_f &\in (\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G_{M, \mathcal{C}_f, 0, 2, G_{\tilde{f}^*}, u_1, \hat{J}, J}), \\ G_f &\in (\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G_{M, \mathcal{C}_f, 0, 2, G_{\tilde{f}_1^*}, u_2, J(c(\tilde{f}_1^*)), J}), \\ G_{fh_1} &\in (\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_{fh_1}))(G_{M, h_1^{-1}(\mathcal{C}_{f, 0, 2}), h_1^{-1}(G_{\tilde{f}_1^*}), h_1^*(u_2), J(c(\tilde{f}_1^* h_1)), J(c(fh_1))}) \\ &= (\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G_{M, \mathcal{C}_f, 0, 2, G_{\tilde{f}^*}, u_1, \hat{J}, J}) = (\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G_f), \end{aligned}$$

т.е. следует требуемое включение $G_{fh_1} \in (\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))(G_f)$. Таким образом, $h_1 \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} f)(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_f))$, откуда $u_1 \in \tilde{\Gamma}_f^*(u_2)$, а значит, отображение $\chi_{f, g}$ является вложением.

§ 4. Построение комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса

В данном параграфе строится косой цилиндрически-полиэдральный комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ (см. определение 2.4, (B)), удовлетворяющий условиям теоремы 2.6. Мы получим комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ из стандартных косых цилиндрических ручек, описанных в § 3, путем приклеивания друг к другу по построенным там отображениям инцидентности. Конструкция, приведенная в данном параграфе, является обобщением конструкции из [10; § 5], где были построены (при дополнительном ограничении $p = p^*$, $q = q^*$, $r = r^*$, т.е. когда все критические точки фиксированы) более простые комплексы $\tilde{K}$ и K (комплексы функций Морса), являющиеся строго полиэдральными комплексами (см. определение 2.4, (C)).

Пусть $f_* \in F^1$ – базисная функция Морса (см. определение 2.1, (A)). В каждом классе изотопности $[f]_{\text{isot}}$ рассмотрим отмеченную функцию $f \in [f]_{\text{isot}}$ этого класса с множествами критических точек $\mathcal{C}_{f, \lambda} = \mathcal{C}_{f_*, \lambda}$, $\lambda = 0, 1, 2$ (см. § 3, этап 2), тогда $H_f^0 = H_{f_*}^0$, $H_f^1 = H_{f_*}^1$. Рассмотрим топологическое пространство

$$(F^1 / \sim_{\text{isot}})^{\text{diskr}} \times \mathcal{P}_{f_*}^{q-1} \times H_{f_*}^1 \approx (F^1 / \sim_{\text{isot}})^{\text{diskr}} \times \mathcal{P}^{q-1} \times \mathbb{R}^{2q},$$

где $(F^1 / \sim_{\text{isot}})^{\text{diskr}} := F^1 / \sim_{\text{isot}}$ с дискретной топологией, а многогранник $\mathcal{P}_{f_*}^{q-1} \approx \mathcal{P}^{q-1}$ и векторное пространство $H_{f_*}^1 \approx \mathbb{R}^{2q}$ определены, как и в § 3, этапы 1, 4 и (14). Рассмотрим в этом топологическом пространстве подпространство

$$\tilde{\mathbb{X}} := \bigcup_{[f]_{\text{isot}} \in F^1 / \sim_{\text{isot}}} \{[f]_{\text{isot}}\} \times D_{[f]_{\text{isot}}} \times U_{[f]_{\text{isot}}} \quad (47)$$

с индуцированной топологией (см. § 3, этап 2 и (16)).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Введем комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ оснащенных функций Морса. Рассмотрим факторпространство $\tilde{\mathbb{K}} := (\tilde{\mathbb{X}} / \sim) / \sim_{\text{glue}}$ с фактортопологией, где отношения эквивалентности $\sim$ и $\sim_{\text{glue}}$ на пространствах $\tilde{\mathbb{X}}$ и $\tilde{\mathbb{Y}} := \tilde{\mathbb{X}} / \sim$ порождены следующими отношениями соответственно.

Отношение $\sim$ на $\tilde{\mathbb{X}}$; стандартная косая цилиндрическая ручка $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}}$. Для каждого класса изотопности $[f]_{\text{isot}}$ рассмотрим проекцию $D_{[f]_{\text{isot}}} \times U_{[f]_{\text{isot}}} \rightarrow (D_{[f]_{\text{isot}}} \times U_{[f]_{\text{isot}}})/\tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{isot}}} = \mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}}$ на стандартную косую цилиндрическую ручку $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}}$ индекса $k = \dim D_{[f]_{\text{isot}}}$ (см. § 3, этап 9), рассмотрим проекцию $\{[f]_{\text{isot}}\} \times D_{[f]_{\text{isot}}} \times U_{[f]_{\text{isot}}} \rightarrow \{[f]_{\text{isot}}\} \times \mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}} =: \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}$, являющуюся прямым произведением отображения $\{[f]_{\text{isot}}\} \rightarrow \{[f]_{\text{isot}}\}$ и этой проекции, и точки множества $\{[f]_{\text{isot}}\} \times D_{[f]_{\text{isot}}} \times U_{[f]_{\text{isot}}}$ назовем $\sim$ -эквивалентными, если их образы в $\mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}$ при последней проекции совпадают; тогда $\tilde{\mathbb{Y}} := \tilde{\mathbb{X}}/\sim = \bigcup_{[f]_{\text{isot}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}$.

Отношение $\sim_{\text{glue}}$ на $\tilde{\mathbb{Y}}$; отображения инцидентности. Для каждой пары примыкающих классов $[f]_{\text{isot}} \prec [g]_{\text{isot}}$ рассмотрим вложение $\chi_{[f]_{\text{isot}}, [g]_{\text{isot}}}: \partial_{[g]_{\text{isot}}} \mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}} \hookrightarrow \mathbb{D}_{[g]_{\text{isot}}}^{\text{st}}$, называемое *отображением инцидентности* (см. § 3, этапы 3 и 10), где $\partial_{[g]_{\text{isot}}} \mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}}$ содержится в подошве $\partial \mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}}$ стандартной косой цилиндрической ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}}$ и является объединением ее попарно непесекающихся косых граней $\partial_{\tau'} \mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}} \subset \partial \mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}}$ (см. (41), (42)). Рассмотрим индуцированное вложение $\partial_{[g]_{\text{isot}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}} := \{[f]_{\text{isot}}\} \times (\partial_{[g]_{\text{isot}}} \mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}}) \hookrightarrow \mathbf{v}_{[g]_{\text{isot}}}$ (которое тоже обозначим через $\chi_{[f]_{\text{isot}}, [g]_{\text{isot}}}$). Назовем любую точку множества $\partial_{[g]_{\text{isot}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}} \subset \tilde{\mathbb{Y}}$ и ее образ в $\mathbf{v}_{[g]_{\text{isot}}} \subset \tilde{\mathbb{Y}}$ при данном вложении $\sim_{\text{glue}}$ -эквивалентными.

Пусть $p_Y: \tilde{\mathbb{Y}} \rightarrow \tilde{\mathbb{K}}$ – каноническая проекция. Рассмотрим подмножество $\tilde{\mathbb{Y}} := \bigcup_{[f]_{\text{isot}}} \dot{\mathbf{v}}_{[f]_{\text{isot}}} \subset \tilde{\mathbb{Y}}$, где $\dot{\mathbf{v}}_{[f]_{\text{isot}}} := \{[f]_{\text{isot}}\} \times \dot{\mathbb{D}}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}}$ (см. определение 2.3, (C)). Обозначим $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}} := p_Y(\mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}})$, $\dot{\mathbb{D}}_{[f]_{\text{isot}}} := p_Y(\dot{\mathbf{v}}_{[f]_{\text{isot}}})$, $\partial \mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}} := p_Y(\partial \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}})$, $\partial_{\tau'} \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}} := \{[f]_{\text{isot}}\} \times (\partial_{\tau'} \mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}})$ и через $\dot{\partial}_{[g]_{\text{isot}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}$ обозначим объединение открытых (косых) граней $\{[f]_{\text{isot}}\} \times (((\tau') \times \mathbb{S}_{[f]_{\text{isot}}})/\Gamma_{[f]_{\text{isot}}})$ стандартной (косой) цилиндрической ручки $\mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}$ таких, что $\tau' \prec D_{[f]_{\text{isot}}}$ и $\delta_{\tau'}[f]_{\text{isot}} = [g]_{\text{isot}}$.

ТЕОРЕМА 4.2. *Пространство $\tilde{\mathbb{K}} = \tilde{\mathbb{Y}}/\sim_{\text{glue}}$ обладает структурой косого цилиндрически-полиэдрального комплекса ранга $q-1$ с косыми цилиндрическими ручками $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}} = p_Y(\mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}) \subset \tilde{\mathbb{K}}$, $[f]_{\text{isot}} \in F^1/\sim_{\text{isot}}$. При этом для любого класса изотопности $[f]_{\text{isot}}$ отображение $\varphi_{[f]_{\text{isot}}} := p_Y|_{\dot{\mathbf{v}}_{[f]_{\text{isot}}}}: \dot{\mathbf{v}}_{[f]_{\text{isot}}} \rightarrow \tilde{\mathbb{K}}$ является характеристическим отображением ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}$ (откуда отображение $p_Y|_{\tilde{\mathbb{Y}}}: \tilde{\mathbb{Y}} \rightarrow \tilde{\mathbb{K}}$ биективно) и выполнено*

$$\partial \mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}} \subset \bigcup_{[g]_{\text{isot}} \succ [f]_{\text{isot}}} \mathbb{D}_{[g]_{\text{isot}}}, \quad \mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}} \cap \dot{\mathbb{D}}_{[g]_{\text{isot}}} = \varphi_{[f]_{\text{isot}}}(\dot{\partial}_{[g]_{\text{isot}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}), \quad (48)$$

$$\varphi_{[g]_{\text{isot}}} \circ \chi_{[f]_{\text{isot}}, [g]_{\text{isot}}} = \varphi_{[f]_{\text{isot}}}|_{\partial_{[g]_{\text{isot}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}} \quad \text{для любых } [f]_{\text{isot}} \prec [g]_{\text{isot}}. \quad (49)$$

Дискретная группа $\mathcal{D}^{\pm}/\mathcal{D}^0$ действует на $\tilde{\mathbb{K}}$ справа автоморфизмами косого цилиндрически-полиэдрального комплекса, причем индуцированное действие на множестве ручек согласовано с естественным действием на множестве $F^1/\sim_{\text{isot}}$ классов изотопности функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. При любом $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим подмножества

$$\tilde{\mathbb{Y}}^{(k)} := \bigcup_{\dim D_{[f]_{\text{isot}}} \leq k} \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}} \subset \tilde{\mathbb{Y}} = \tilde{\mathbb{X}}/\sim, \quad \dot{\tilde{\mathbb{Y}}}^{(k)} := \bigcup_{\dim D_{[f]_{\text{isot}}} \leq k} \dot{\mathbf{v}}_{[f]_{\text{isot}}} \subset \dot{\tilde{\mathbb{Y}}}^{(k)}$$

с индуцированной топологией и $\tilde{\mathbb{K}}^{(k)} := \tilde{\mathbb{Y}}^{(k)} / \sim_{\text{glue}}$ с фактортопологией. Докажем лемму (индукцией по k) для пространств $\tilde{\mathbb{Y}}^{(k)}$, $\tilde{\mathbb{K}}^{(k)}$, $\overset{\circ}{\mathbb{Y}}^{(k)} \subset \tilde{\mathbb{Y}}^{(k)}$ и проекции $p_{Y,k} := p_Y|_{\tilde{\mathbb{Y}}^{(k)}} : \tilde{\mathbb{Y}}^{(k)} \rightarrow \tilde{\mathbb{K}}^{(k)}$. При $k < 0$ доказывать нечего, так как $\tilde{\mathbb{K}}^{(k)} = \emptyset$.

Пусть $k \geq 1$ и доказываемое утверждение верно для $\tilde{\mathbb{Y}}^{(k-1)}$, $\tilde{\mathbb{K}}^{(k-1)}$. Покажем, что для каждого $[f]_{\text{isot}}$ такого, что $\text{ind } \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}} = k$, имеется (“приклеивающее”) отображение $\varphi'_{[f]_{\text{isot}}} : \partial \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}} \rightarrow \tilde{\mathbb{K}}^{(k-1)}$ подшвы $\partial \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}$ косой цилиндрической ручки $\mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}$ такое, что $\varphi'_{[f]_{\text{isot}}}|_{\partial_{[g]_{\text{isot}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}} = p_{Y,k-1} \circ \chi_{[f]_{\text{isot}},[g]_{\text{isot}}}$ для любого $[g]_{\text{isot}} \succ [f]_{\text{isot}}$ (а потому $\text{ind } \mathbf{v}_{[g]_{\text{isot}}} < k$); см. (42) и (41). Действительно, это отображение однозначно, так как для любых $[g_1]_{\text{isot}} \succ [g]_{\text{isot}} \succ [f]_{\text{isot}}$ и $\tau'' \prec D_{[f]_{\text{isot}}}$ таких, что $\delta_{\tau''}[f]_{\text{isot}} = [g_1]_{\text{isot}}$, выполнено

$$\begin{aligned} p_{Y,k-1} \circ \chi_{[f]_{\text{isot}},[g_1]_{\text{isot}}}|_{\partial_{\tau''} \mathbf{v}_f} &= p_{Y,k-1} \circ \chi_{[g]_{\text{isot}},[g_1]_{\text{isot}}} \circ \chi_{[f]_{\text{isot}},[g]_{\text{isot}}}|_{\partial_{\tau''} \mathbf{v}_f} \\ &= p_{Y,k-1} \circ \chi_{[f]_{\text{isot}},[g]_{\text{isot}}}|_{\partial_{\tau''} \mathbf{v}_f} \end{aligned}$$

в силу (43) и (49) для $\tilde{\mathbb{Y}}^{(k-1)}$, $\tilde{\mathbb{K}}^{(k-1)}$. Отображение $\varphi'_{[f]_{\text{isot}}}$ непрерывно, так как его область определения является конечным (в силу (7)) объединением замкнутых подмножеств $\partial_{[g]_{\text{isot}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}$ таких, что $[g]_{\text{isot}} \succ [f]_{\text{isot}}$, и его ограничение на такое подмножество есть композиция $p_{Y,k-1} \circ \chi_{[f]_{\text{isot}},[g]_{\text{isot}}}$ непрерывных отображений. Отображение $\varphi'_{[f]_{\text{isot}}}$ инъективно, так как его ограничение $\varphi'_{[f]_{\text{isot}}}|_{\partial_{[g]_{\text{isot}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}} = p_{Y,k-1} \circ \chi_{[f]_{\text{isot}},[g]_{\text{isot}}}|_{\partial_{[g]_{\text{isot}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}}$ на объединение открытых граней, отвечающих классу $[g]_{\text{isot}} \succ [f]_{\text{isot}}$, является композицией вложений $\chi_{[f]_{\text{isot}},[g]_{\text{isot}}}|_{\partial_{[g]_{\text{isot}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}}$ и $p_{Y,k-1}|_{\mathbf{v}_{[g]_{\text{isot}}}}$ (в силу § 3, этап 10, и биективности $p_{Y,k-1}|_{\overset{\circ}{\mathbb{Y}}^{(k-1)}}$), а образы таких ограничений содержатся в открытых ручках $p_{Y,k-1} \circ \chi_{[f]_{\text{isot}},[g]_{\text{isot}}}(\partial_{[g]_{\text{isot}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}) \subset p_{Y,k-1}(\mathbf{v}_{[g]_{\text{isot}}})$, которые попарно не пересекаются (для разных классов $[g]_{\text{isot}}$) в силу биективности $p_{Y,k-1}|_{\overset{\circ}{\mathbb{Y}}^{(k-1)}}$.

Отображение топологических пространств назовем *хорошим*, если оно переводит любое замкнутое подмножество в замкнутое подмножество. Отображение $\varphi'_{[f]_{\text{isot}}}$ является хорошим, так как его ограничение на каждую косую грань $\partial_{\tau'} \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}} \subset \partial_{[g]_{\text{isot}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}$ (для $\tau' \prec D_{[f]_{\text{isot}}}$, $\delta_{\tau'}[f]_{\text{isot}} = [g]_{\text{isot}}$) есть композиция $p_{Y,k-1}|_{\mathbf{v}_{[g]_{\text{isot}}}} \circ \chi_{[f]_{\text{isot}},\tau'}$ (автоматически хорошего; см. определение 2.3) мономорфизма $\chi_{[f]_{\text{isot}},\tau'}$ косых цилиндрических ручек (см. § 3, этап 10) и (автоматически хорошего) характеристического отображения $p_{Y,k-1}|_{\mathbf{v}_{[g]_{\text{isot}}}}$ косой ручки $p_{Y,k-1}(\mathbf{v}_{[g]_{\text{isot}}}) \subset \tilde{\mathbb{K}}^{(k-1)}$ (по предположению индукции), а каждая косая грань замкнута и их конечное число. Отсюда следует, что $\tilde{\mathbb{K}}^{(k)}$ гомеоморфно пространству (с фактортопологией), полученному из $\tilde{\mathbb{K}}^{(k-1)}$ приклеиванием косых цилиндрических ручек $\mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}$ индекса k при помощи инъективных непрерывных хороших отображений $\varphi'_{[f]_{\text{isot}}} : \partial \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}} \rightarrow \tilde{\mathbb{K}}^{(k-1)}$ их подшвы, а потому $\tilde{\mathbb{K}}^{(k)}$ удовлетворяет условию w) из определения 2.4, (В). Поэтому $\tilde{\mathbb{K}}^{(k)}$ обладает свойствами (48) и (49), отображение $p_{Y,k}|_{\mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}}$ является инъективным, непрерывным и хорошим, а потому задает структуру косой цилиндрической ручки на $p_{Y,k}(\mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}})$ и является характеристическим отображением этой ручки. Пространство $\tilde{\mathbb{K}}^{(k)}$ с полученным разбиением на косые цилиндрические ручки $p_{Y,k}(\mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}})$ удовлетворяет условию с) из определения 2.4, (В), так как ограничение характеристического отображения $p_{Y,k}|_{\mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}}$ любой ручки $\mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}$

индекса k на каждую свою косую грань $\partial_{\tau'} \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}$ есть композиция

$$\begin{aligned} p_{Y,k}|_{\partial_{\tau'} \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}} &= i_{k-1} \circ \varphi'_{[f]_{\text{isot}}}|_{\partial_{\tau'} \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}} = i_{k-1} \circ p_{Y,k-1} \circ \chi_{[f]_{\text{isot}},\tau'} \\ &= p_{Y,k}|_{\mathbf{v}_{[g]_{\text{isot}}}} \circ \chi_{[f]_{\text{isot}},\tau'} \end{aligned}$$

мономорфизма $\chi_{[f]_{\text{isot}},\tau'}$ стандартных косых цилиндрических ручек и характеристического отображения $p_{Y,k}|_{\mathbf{v}_{[g]_{\text{isot}}}}$ косой цилиндрической ручки $p_{Y,k}(\mathbf{v}_{[g]_{\text{isot}}})$, где $i_{k-1}: \widetilde{\mathbb{K}}^{(k-1)} \hookrightarrow \widetilde{\mathbb{K}}^{(k)}$ – отображение включения. Значит, $\widetilde{\mathbb{K}}^{(k)}$ является косым цилиндрически-полиэдральным комплексом ранга k , что завершает доказательство индукционного перехода.

Шаг 2. Определим (естественное) правое действие $\rho_Y: (\mathcal{D}^\pm/\mathcal{D}^0) \times \widetilde{\mathbb{Y}} \rightarrow \widetilde{\mathbb{Y}}$ дискретной группы $\mathcal{D}^\pm/\mathcal{D}^0$ на пространстве $\widetilde{\mathbb{Y}}$ формулой

$$\begin{aligned} (h\mathcal{D}^0, [f]_{\text{isot}}, \widetilde{\Gamma}_{[f]_{\text{isot}}}(\mathbf{c}, u)) \\ \mapsto ([fh]_{\text{isot}}, \widetilde{\Gamma}_{[fh]_{\text{isot}}}(h_{1;[f]_{\text{isot}},[fh]_{\text{isot}}}^{*0}(\mathbf{c}), \eta h_{1;[f]_{\text{isot}},[fh]_{\text{isot}}}^*(u))) \end{aligned}$$

при любых $h \in \mathcal{D}^\pm$, $([f]_{\text{isot}}, \mathbf{c}, u) \in \widetilde{\mathbb{X}}$ (см. § 3, конец этапа 9), где $h_{1;[f]_{\text{isot}},[fh]_{\text{isot}}} \in h\mathcal{D}^0 \subset \mathcal{D}^\pm$ – диффеоморфизм, переводящий линии уровня отмеченной функции класса изотопности $[fh]_{\text{isot}}$ в линии уровня отмеченной функции класса изотопности $[f]_{\text{isot}}$ с сохранением направления роста; знак $\eta \in \{1, -1\}$ показывает, сохраняет ли h ориентацию (т.е. $\eta = 1$ или $\eta = -1$ в зависимости от $h \in \mathcal{D}$ или $h \in \mathcal{D}^\pm \setminus \mathcal{D}$). Имеем $\rho_Y((\mathcal{D}^\pm/\mathcal{D}^0) \times \widetilde{\mathbb{Y}}) \subseteq \widetilde{\mathbb{Y}}$ в силу (16) и обозначения 2.5. Отображение ρ_Y задает действие, так как в силу [40; лемма 1] для любых $h_1, h_2 \in \mathcal{D}^\pm$

$$h_{1;[f]_{\text{isot}},[fh_1h_2]_{\text{isot}}}^{-1} h_{1;[f]_{\text{isot}},[fh_1]_{\text{isot}}} h_{1;[fh_1]_{\text{isot}},[fh_1h_2]_{\text{isot}}} \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g)(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g))$$

и действие групп $\text{stab}_g \mathcal{D}^0$ и $\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_g)$ на косой цилиндрической ручке $\mathbb{D}_{[g]_{\text{isot}}}^{\text{st}}$ тривиально (см. (38), (37)), где g – отмеченная функция класса изотопности $[fh_1h_2]_{\text{isot}}$. Для любых $[f]_{\text{isot}} \prec [g]_{\text{isot}}$ (а потому $[fh]_{\text{isot}} \prec [gh]_{\text{isot}}$ для любого $h \in \mathcal{D}^\pm$) определим отображение инцидентности

$$\chi_{[f],[g]}: \bigcup_{h \in \mathcal{D}^\pm} (\partial_{[gh]_{\text{isot}}} \mathbf{v}_{[fh]_{\text{isot}}}) \rightarrow \bigcup_{h \in \mathcal{D}^\pm} \mathbf{v}_{[gh]_{\text{isot}}}$$

правилом

$$\chi_{[f],[g]}|_{\partial_{[gh]_{\text{isot}}} \mathbf{v}_{[fh]_{\text{isot}}}} := \chi_{[fh]_{\text{isot}},[gh]_{\text{isot}}}: \partial_{[gh]_{\text{isot}}} \mathbf{v}_{[fh]_{\text{isot}}} \rightarrow \mathbf{v}_{[gh]_{\text{isot}}}$$

для любого $h \in \mathcal{D}^\pm$. Отображение $\chi_{[f],[g]}$ определено корректно, так как для любых $[f]_{\text{isot}}$ и $h_1 \in \text{stab}_{\mathcal{D}^0} f$ подмножества $\partial_{[g]_{\text{isot}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}$, $\partial_{[gh_1]_{\text{isot}}} \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}} \subset \partial \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}$ либо совпадают (откуда $[g]_{\text{isot}} = [gh_1]_{\text{isot}}$), либо не пересекаются в силу леммы 3.1 (см. § 3, этап 10). Отображение $\chi_{[f],[g]}$ является $(\mathcal{D}^\pm/\mathcal{D}^0)$ -эквивариантным (т.е. $\chi_{[f],[g]} \circ \rho_Y(h, \cdot) = \rho_Y(h, \chi_{[f],[g]}(\cdot))$ для любого $h \in \mathcal{D}^\pm$), так как в силу (9) выполнено

$$h^{-1} h_{[f]_{\text{isot}},\tau'}^{-1} h h_{[fh]_{\text{isot}},h_{1;[f]_{\text{isot}},[fh]_{\text{isot}}}^*}(\tau') \in (\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g_1)(\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_{g_1}))$$

и действия групп $\text{stab}_{\mathcal{D}^0} g_1$ и $\text{Diff}^0(M, \mathcal{C}_{g_1})$ на стандартной косой цилиндрической ручке $\mathbb{D}_{[g_1]_{\text{isot}}}^{\text{st}}$ тривиальны, где $\tau' \prec D_{[f]_{\text{isot}}}$, $\delta_{\tau'}[f]_{\text{isot}} = [g]_{\text{isot}}$, g_1 – отмеченная функция класса изотопности $[gh]_{\text{isot}}$, $h \in \mathcal{D}^{\pm}$. Поэтому правое действие ρ_Y индуцирует правое действие $\rho^*: (\mathcal{D}^{\pm}/\mathcal{D}^0) \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ автоморфизмами косого цилиндрически-полиэдрального комплекса такое, что $\rho^*(h\mathcal{D}^0, p_Y(y)) := p_Y \circ \rho_Y(h\mathcal{D}^0, y)$ для любых $h \in \mathcal{D}^{\pm}$, $y \in \tilde{Y}$.

В частности, действие $\rho^*(h\mathcal{D}^0, \cdot)$ любого элемента $h\mathcal{D}^0 \in \mathcal{D}^{\pm}/\mathcal{D}^0$ на комплексе $\mathbb{K}$ индуцирует изоморфизм $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}} \rightarrow \mathbb{D}_{[fh]_{\text{isot}}}$ косых цилиндрических ручек $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}, \mathbb{D}_{[fh]_{\text{isot}}} \subset \mathbb{K}$ для любой функции $f \in F$. Поэтому эти ручки изоморфны одной и той же стандартной ручке $(D_{f_0} \times \mathbb{S}_{f_0})/\Gamma_{f_0}$, где f_0 – отмеченная функция класса эквивалентности $[f] = [fh]$. Теорема 4.2 полностью доказана.

Определим гладкое многообразие $\tilde{\mathcal{M}}$ по аналогии с определением 4.1. А именно, рассмотрим в евклидовом пространстве $H_f^0 = \mathbb{R}^{\mathcal{C}_{f,1}} \cong \mathbb{R}^q$ открытый куб $(-1, 1)^{\mathcal{C}_{f,1}} \cong (-1, 1)^q$ и для любой грани $\tau = \tau_J \subset \mathcal{D}_f^{q-1}$ рассмотрим ее внутренность $\dot{\tau}$ и обозначим через $(\dot{\tau})^*$ множество таких 0-коцпей $\mathbf{c}' \in (-1, 1)^{\mathcal{C}_{f,1}} \subset H_f^0 \cong \mathbb{R}^q$, что $J(\mathbf{c}') = J$ (см. §3, этап 1), а через τ^* обозначим множество таких 0-коцпей $\mathbf{c}' \in (-1, 1)^{\mathcal{C}_{f,1}} \cong (-1, 1)^q$, что $J(\mathbf{c}') \preceq J$. Назовем $(\dot{\tau})^*$ *стратом*, а τ^* – *звездой* этого страта (отвечающими грани τ). Тогда звезда τ^* открыта в H_f^0 ,

$$(\dot{\tau})^* \subseteq \tau^*, \quad \tau \subset \tau^*, \quad (50)$$

страт $(\dot{\tau})^*$ есть выпуклое открытое подмножество некоторого $|f(\mathcal{C}_{f,1})|$ -мерного линейного подпространства в H_f^0 , грань τ есть выпуклый $(q - |f(\mathcal{C}_{f,1})|)$ -мерный многогранник, причем грань τ и страт $(\dot{\tau})^*$ пересекаются трансверсально в барицентре грани τ , являющемся внутренней точкой каждого из них. Положим $D_{[f]_{\text{isot}}}^* := \tau_{J(\mathbf{c}(f))}^*$, $(\dot{D}_{[f]_{\text{isot}}})^* := (\dot{\tau}_{J(\mathbf{c}(f))})^*$. Рассмотрим в пространстве $(F^1/\sim_{\text{isot}})^{\text{diskr}} \times (-1, 1)^{\mathcal{C}_{f,1}} \times H_{f_*}^1$ подпространства

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{X}}^{\infty,*} &:= \bigcup_{[f]_{\text{isot}} \in F^1/\sim_{\text{isot}}} \{[f]_{\text{isot}}\} \times D_{[f]_{\text{isot}}}^* \times U_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty}, \\ \tilde{\mathbb{X}}^{\infty,0*} &:= \bigcup_{[f]_{\text{isot}} \in F^1/\sim_{\text{isot}}} \{[f]_{\text{isot}}\} \times (\dot{D}_{[f]_{\text{isot}}})^* \times U_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty}, \end{aligned}$$

где $U_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty}$ определено, как и в (17). Имеем включения $\tilde{\mathbb{X}} \subset \tilde{\mathbb{X}}^{\infty,*}$, $\tilde{\mathbb{X}}^{\infty,0*} \subset \tilde{\mathbb{X}}^{\infty,*}$.

Как в определении 4.1, определим отношение эквивалентности $\sim$ на $\tilde{\mathbb{X}}^{\infty,*}$ с помощью покомпонентного действия на $D_{[f]_{\text{isot}}}^* \times U_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty}$ дискретной группы $\tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{isot}}}$ (см. §3, этап 9). Определим “окрестность” стандартной ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}}$:

$$\begin{aligned} (\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty,*})^{\text{st}} &:= (D_{[f]_{\text{isot}}}^* \times U_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty})/\tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{isot}}} \approx (D_{[f]_{\text{isot}}}^* \times \mathbb{S}_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty})/\Gamma_{[f]_{\text{isot}}}, \\ \mathbf{v}_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty,*} &:= \{[f]_{\text{isot}}\} \times (\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty,*})^{\text{st}} \subset \tilde{Y}^{\infty,*} := \tilde{\mathbb{X}}^{\infty,*}/\sim. \end{aligned}$$

Определим отношение эквивалентности $\sim_{\text{glue}}$ на $\tilde{Y}^{\infty,*} := \tilde{\mathbb{X}}^{\infty,*}/\sim$ с помощью вложений $\chi_{[f]_{\text{isot}},[g]_{\text{isot}}}^{\infty,*} : \partial_{[g]_{\text{isot}}}(\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty,*})^{\text{st}} \hookrightarrow (\mathbb{D}_{[g]_{\text{isot}}}^{\infty,*})^{\text{st}}$, определяемых теми же формулами, что и вложения $\chi_{[f]_{\text{isot}},[g]_{\text{isot}}} : \partial_{[g]_{\text{isot}}} \mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\text{st}} \hookrightarrow \mathbb{D}_{[g]_{\text{isot}}}^{\text{st}}$ (см. §3, этап 10).

Рассмотрим пространства

$$\tilde{Y}^{\infty,*} := \tilde{X}^{\infty,*} / \sim, \quad \tilde{Y}^{\infty,*} := \tilde{X}^{\infty,*} / \sim, \quad \tilde{\mathcal{M}} := \tilde{Y}^{\infty,*} / \sim_{\text{glue}}$$

с фактортопологией; тогда $\tilde{\mathbb{K}} \subset \tilde{\mathcal{M}}$. Пусть

$$p_X: \tilde{X}^{\infty,*} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}, \quad p_Y: \tilde{Y}^{\infty,*} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$$

– канонические проекции. Рассмотрим “окрестность” $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty,*} := p_Y(v_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty,*})$ ко-сой цилиндрической ручки $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}} \subset \tilde{\mathbb{K}}$ в $\tilde{\mathcal{M}}$.

Так как $\tilde{X}^{\infty,*}$ – гладкое открытое $3q$ -мерное многообразие с естественной плоской аффинной связностью и каждая группа $\tilde{\Gamma}_{[f]_{\text{isot}}}$ действует на нем диффеоморфизмами, сохраняющими связность, то $\tilde{Y}^{\infty,*}$ тоже является гладким открытым $3q$ -мерным многообразием с плоской аффинной связностью.

ТЕОРЕМА 4.3. *Пространство $\tilde{\mathcal{M}} := \tilde{Y}^{\infty,*} / \sim_{\text{glue}}$ обладает структурой гладкого $3q$ -мерного многообразия и естественной плоской аффинной связностью, гладкой относительно этой структуры. При этом для каждого класса изотопности $[f]_{\text{isot}}$ выполнены следующие условия:*

- (i) *подмножество $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty,*} = p_Y(v_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty,*}) \subset \tilde{\mathcal{M}}$ открыто, где $p_Y: \tilde{Y}^{\infty,*} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ – проекция;*
- (ii) *отображение $p_Y|_{v_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty,*}}: v_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty,*} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ является гладким регулярным вложением гладких $3q$ -мерных многообразий, сохраняющим аффинную связность.*

Отображение $p_Y|_{\tilde{Y}^{\infty,}}: \tilde{Y}^{\infty,*} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ биективно. Дискретная группа $\mathcal{D}^{\pm} / \mathcal{D}^0$ и группа $\text{Diff}^+[-1, 1]$ действуют на $\tilde{\mathcal{M}}$ справа и слева (соответственно) диффеоморфизмами, сохраняющими аффинную связность и области $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty,*}$, причем индуцированные действия на множестве этих областей согласованы с естественными действиями на множестве $F^1 / \sim_{\text{isot}}$ классов изотопности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству теоремы 4.2 доказательство проводится индукцией, а именно, доказываемся однозначность, непрерывность и инъективность соответствующих приклеивающих отображений, а также биективность отображения $p_Y|_{\tilde{Y}^{\infty,*}}: \tilde{Y}^{\infty,*} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$. Так как каждое приклеивающее отображение $(\varphi_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty,*})'$ определено на открытом подмножестве открытого подмножества $v_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty,*} \subset \tilde{Y}^{\infty,*}$ и является непрерывным и инъективным отображением $3q$ -мерных многообразий, то $\mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty,*}$ открыто в $\tilde{\mathcal{M}}$ и $p_Y|_{v_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty,*}}: v_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty,*} \rightarrow \mathbb{D}_{[f]_{\text{isot}}}^{\infty,*} \subset \tilde{\mathcal{M}}$ является гомеоморфизмом (в индуцированной топологии). В частности, каждая точка пространства $\tilde{\mathcal{M}}$ обладает окрестностью, гомеоморфной $\mathbb{R}^{3q}$. Так как пространство $\tilde{\mathcal{M}}$ хаусдорфово (см. ниже), а все отображения $\chi_{[f]_{\text{isot}}, [g]_{\text{isot}}}^{\infty,*}$ (а потому и все приклеивающие отображения) являются гладкими и сохраняют плоскую аффинную связность, то $\tilde{\mathcal{M}}$ является гладким $3q$ -мерным многообразием с естественной плоской аффинной связностью.

Осталось доказать, что пространство $\tilde{\mathcal{M}}$ хаусдорфово. Рассмотрим естественное непрерывное “вычисляющее” отображение

$$\text{Ev}^*: \tilde{X}^{\infty,*} \rightarrow \mathbb{R}^q / \Sigma_q, \quad ([f]_{\text{isot}}, c, u) \mapsto \Sigma_q c,$$

где группа перестановок Σ_q действует на любом наборе $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{\mathcal{C}_{f,1}} \cong \mathbb{R}^q$ перестановками компонент. Легко проверяется, что оно индуцирует (автоматически непрерывное) отображение $\widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}^q / \Sigma_q$, которое тоже будем обозначать через Ev^* . Пусть $m_1, m_2 \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Если $\text{Ev}^*(m_1) \neq \text{Ev}^*(m_2)$, то точки m_1, m_2 обладают непересекающимися окрестностями в силу хаусдорфовости $\mathbb{R}^q / \Sigma_q$ и непрерывности Ev^* . Пусть $\text{Ev}^*(m_1) = \text{Ev}^*(m_2)$ и $m_i \in \mathbb{D}_{[f_i]_{\text{isot}}}^{\infty,*}$, $i = 1, 2$. Если $[f_1]_{\text{isot}} \neq [f_2]_{\text{isot}}$, то в силу леммы 3.1 не существует класса изотопности $[g]_{\text{isot}}$ такого, что $[g]_{\text{isot}} \succ [f_i]_{\text{isot}}$, $i = 1, 2$, а потому образы приклеивающих отображений $(\varphi_{[f_i]_{\text{isot}}}^{\infty,*})'$, $i = 1, 2$, имеют пустое пересечение, откуда окрестности $\mathbb{D}_{[f_i]_{\text{isot}}}^{\infty,*}$ точек m_i , $i = 1, 2$, в $\widetilde{\mathcal{M}}$ имеют пустое пересечение. Если $[f_1]_{\text{isot}} = [f_2]_{\text{isot}}$ и $m_1 \neq m_2$, то точки $m_1, m_2 \in \mathbb{D}_{[f_1]_{\text{isot}}}^{\infty,*}$ обладают непересекающимися окрестностями в силу открытости $\mathbb{D}_{[f_1]_{\text{isot}}}^{\infty,*}$, хаусдорфовости стандартного пространства $(\mathbb{D}_{[f_1]_{\text{isot}}}^{\infty,*})^{\text{st}}$ и гомеоморфности $\mathbb{D}_{[f_1]_{\text{isot}}}^{\infty,*} \approx \mathbf{v}_{[f_1]_{\text{isot}}}^{\infty,*} \approx (\mathbb{D}_{[f_1]_{\text{isot}}}^{\infty,*})^{\text{st}}$ (см. выше). Таким образом, пространство $\widetilde{\mathcal{M}}$ является хаусдорфовым. Теорема 4.3 доказана.

Теоремы 4.2 и 4.3 доказывают основную теорему 2.6, (A), (B). Утверждение (C) теоремы 2.6 нетрудно выводится из (29) и явного описания (28) набора образующих свободной абелевой группы $\mathscr{D}^0 \cap \Theta_f$ (см. § 3, этап 7).

Список литературы

- [1] Е. А. Кудрявцева, Д. А. Пермяков, “Оснащенные функции Морса на поверхностях”, *Матем. сб.*, **201**:4 (2010), 33–98; англ. пер.: Е. А. Kudryavtseva, D. A. Permyakov, “Framed Morse functions on surfaces”, *Sb. Math.*, **201**:4 (2010), 501–567.
- [2] Е. А. Кудрявцева, “Топология пространств функций Морса на поверхностях”, *Матем. заметки*, **92**:2 (2012), 241–261; англ. пер.: Е. А. Kudryavtseva, “The topology of spaces of Morse functions on surfaces”, *Math. Notes*, **92**:2 (2012), 219–236.
- [3] Е. А. Кудрявцева, “Специальные оснащенные функции Морса на поверхностях”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **67**:4 (2012), 14–20; англ. пер.: Е. А. Kudryavtseva, “Special framed Morse functions on surfaces”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **67**:4 (2012), 151–157.
- [4] М. Л. Громов, *Дифференциальные соотношения с частными производными*, Мир, М., 1990; пер. с англ.: M. Gromov, *Partial differential relations*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **9**, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [5] К. Igusa, “Higher singularities of smooth functions are unnecessary”, *Ann. of Math.* (2), **119**:1 (1984), 1–58.
- [6] В. А. Васильев, “Топология пространств функций без сложных особенностей”, *Функц. анализ и его прил.*, **23**:4 (1989), 24–36; англ. пер.: V. A. Vasil'ev, “Topology of spaces of functions without compound singularities”, *Funct. Anal. Appl.*, **23**:4 (1989), 277–286.
- [7] J. M. Franks, *Homology and dynamical systems*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **49**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1982.
- [8] А. Е. Хатчер, “Higher simple homotopy theory”, *Ann. of Math.* (2), **102**:1 (1975), 101–137.
- [9] A. Chenciner, F. Laudenbach, “Morse 2-jet space and h -principle”, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, **40**:4 (2009), 455–463.

- [10] Е. А. Кудрявцева, “Связные компоненты пространств функций Морса с фиксированными критическими точками”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **67**:1 (2012), 3–12; англ. пер.: Е. А. Kudryavtseva, “Connected components of spaces of Morse functions with fixed critical points”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **67**:1 (2012), 1–10.
- [11] B. Farb, N. V. Ivanov, “The Torelli geometry and its applications: research announcement”, *Math. Res. Lett.*, **12**:2–3 (2005), 293–301.
- [12] W. J. Harvey, “Geometric structure of surface mapping class groups”, *Homological group theory* (Durham, 1977), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **36**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979, 255–269.
- [13] J. L. Harer, “The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface”, *Invent. Math.*, **84**:1 (1986), 157–176.
- [14] N. V. Ivanov, “Automorphisms of complexes of curves and of Teichmüller spaces”, *Progress in knot theory and related topics*, Travaux en Cours, **56**, Hermann, Paris, 1997, 113–120.
- [15] A. Hatcher, W. Thurston, “A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface”, *Topology*, **19**:3 (1980), 221–237.
- [16] D. Margalit, “Automorphisms of the pants complex”, *Duke Math. J.*, **121**:3 (2004), 457–479.
- [17] S. Matveev, M. Polyak, “Cubic complexes and finite type invariants”, *Invariants of knots and 3-manifolds* (Kyoto, 2001), Geom. Topol. Monogr., **4**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002, 215–233.
- [18] Е. А. Кудрявцева, “Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты”, *Матем. сб.*, **190**:3 (1999), 29–88; англ. пер.: Е. А. Kudryavtseva, “Realization of smooth functions on surfaces as height functions”, *Sb. Math.*, **190**:3 (1999), 349–405.
- [19] В. В. Шарко, “Функции на поверхностях, I”, *Некоторые проблемы современной математики*, Наукова думка, Киев, 1998, 408–434.
- [20] S. Maksymenko, “Path-components of Morse mappings spaces of surfaces”, *Comment. Math. Helv.*, **80**:3 (2005), 655–690.
- [21] Yu. Burman, “Morse theory for functions of two variables without critical points”, *Funct. Differ. Equ.*, **3**:1–2 (1995), 31–43.
- [22] Yu. M. Burman, “Triangulations of surfaces with boundary and the homotopy principle for functions without critical points”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **17**:3 (1999), 221–238.
- [23] В. И. Арнольд, “Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера”, *УМН*, **47**:1 (1992), 3–45; англ. пер.: V. I. Arnol'd, “The calculus of snakes and the combinatorics of Bernoulli, Euler and Springer numbers of Coxeter groups”, *Russian Math. Surveys*, **47**:1 (1992), 1–51.
- [24] В. И. Арнольд, “Топологическая классификация комплексных тригонометрических многочленов и комбинаторика графов с одинаковым числом вершин и ребер”, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:1 (1996), 1–17; англ. пер.: V. I. Arnol'd, “Topological classification of trigonometric polynomials and combinatorics of graphs with an equal number of vertices and edges”, *Funct. Anal. Appl.*, **30**:1 (1996), 1–14.
- [25] E. V. Kulinich, “On topologically equivalent Morse functions on surfaces”, *Methods Funct. Anal. Topology*, **4**:1 (1998), 59–64.
- [26] V. I. Arnold, “Smooth functions statistics”, *Funct. Anal. Other Math.*, **1**:2 (2006), 111–118.
- [27] V. I. Arnold, “Topological classification of Morse functions and generalisations of Hilbert’s 16-th problem”, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **10**:3 (2007), 227–236.

- [28] В. И. Арнольд, “Топологическая классификация многочленов Морса”, *Дифференциальные уравнения и топология*. I, Тр. МИАН, **268**, МАИК, М., 2010, 40–55; англ. пер.: V. I. Arnol'd, “Topological classification of Morse polynomials”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **268** (2010), 32–48.
- [29] S. Maksymenko, “Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **29**:3 (2006), 241–285.
- [30] А. Т. Фоменко, “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем”, *Докл. АН СССР*, **287**:5 (1986), 1071–1075; англ. пер.: A. T. Fomenko, “Morse theory of integrable Hamiltonian systems”, *Soviet Math. Dokl.*, **33**:2 (1986), 502–506.
- [31] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, “Изоэнергетические поверхности гамильтоновых систем, перечисление трехмерных многообразий в порядке возрастания их сложности и вычисление объемов замкнутых гиперболических многообразий”, *УМН*, **43**:1 (1988), 5–22; англ. пер.: S. V. Matveev, A. T. Fomenko, “Constant energy surfaces of Hamiltonian systems, enumeration of three-dimensional manifolds in increasing order of complexity, and computation of volumes of closed hyperbolic manifolds”, *Russian Math. Surveys*, **43**:1 (1988), 3–24.
- [32] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, В. В. Шарко, “Круглые функции Морса и изоэнергетические поверхности интегрируемых гамильтоновых систем”, *Матем. сб.*, **135**(177):3 (1988), 325–345; англ. пер.: S. V. Matveev, A. T. Fomenko, V. V. Sharko, “Round Morse functions and isoenergy surfaces of integrable Hamiltonian systems”, *Math. USSR-Sb.*, **63**:2 (1989), 319–336.
- [33] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, “Теория типа Морса для интегрируемых гамильтоновых систем с ручными интегралами”, *Матем. заметки*, **43**:5 (1988), 663–671; англ. пер.: S. V. Matveev, A. T. Fomenko, “Morse-type theory for integrable Hamiltonian systems with tame integrals”, *Math. Notes*, **43**:5 (1988), 382–386.
- [34] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:3 (1990), 546–575; англ. пер.: A. T. Fomenko, Kh. Tsishang, “A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom”, *Math. USSR-Izv.*, **36**:3 (1991), 567–596.
- [35] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, “Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. I, II”, *Матем. сб.*, **185**:4 (1994), 27–80; **185**:5 (1994), 27–78; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, “Orbital equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. A classification theorem. I, II”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **81**:2 (1995), 421–465; **82**:1 (1995), 21–63.
- [36] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем*, Наука, М., 1997.
- [37] Е. А. Кудрявцева, “Устойчивые топологические и гладкие инварианты сопряженности гамильтоновых систем на поверхностях”, *Топологические методы в теории гамильтоновых систем*, Факториал, М., 1998, 147–202.
- [38] Е. А. Кудрявцева, “Устойчивые инварианты сопряженности гамильтоновых систем на двумерных поверхностях”, *Докл. РАН*, **361**:3 (1998), 314–317; англ. пер.: E. A. Kudryavtseva, “Stable conjugation invariants of Hamiltonian systems on two-dimensional surfaces”, *Dokl. Math.*, **58**:1 (1998), 67–70.
- [39] Ю. А. Браилов, Е. А. Кудрявцева, “Устойчивая топологическая несопряженность гамильтоновых систем на двумерных поверхностях”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1999, № 2, 20–27; англ. пер.: Yu. A. Brailov, E. A. Kudryavtseva, “Stable topological non-conjugacy of Hamiltonian systems on two-dimensional surfaces”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **54**:2 (1999), 20–27.
- [40] Е. А. Кудрявцева, “Равномерная лемма Морса и критерий изотопности функций Морса на поверхностях”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2009, № 4,

- 13–22; англ. пер.: Е. А. Kudryavtseva, “Uniform Morse lemma and isotopy criterion for Morse functions on surfaces”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **64**:4 (2009), 150–158.
- [41] C. J. Earle, J. Eells, “The diffeomorphism group of a compact Riemann surface”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:4 (1967), 557–559.
- [42] C. J. Earle, J. Eells, “A fibre bundle description of Teichmüller theory”, *J. Differential Geometry*, **3** (1969), 19–43.
- [43] S. Smale, “Diffeomorphisms of the 2-sphere”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10**:4 (1959), 621–626.
- [44] M. R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren Math. Wiss., **319**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [45] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, *Курс гомотопической топологии*, Наука, М., 1989.
- [46] G. M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Grad. Texts in Math., **152**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1995.
- [47] M. Dehn, “Die Gruppe der Abbildungsklassen”, *Acta Math.*, **69**:1 (1938), 135–206.
- [48] J. S. Birman, A. Lubotzky, J. McCarthy, “Abelian and solvable subgroups of the mapping class groups”, *Duke Math. J.*, **50**:4 (1983), 1107–1120.
- [49] Д. А. Пермяков, “Абелевы подгруппы группы диффеоморфизмов, порожденные скручиваниями Дэна”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2013, № 1, 26–32.
- [50] G. Reeb, “Sur les points singuliers d’une forme de Pfaff complètement intégrable ou d’une fonction numérique”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **222** (1946), 847–849.
- [51] А. С. Кронрод, “О функциях двух переменных”, *УМН*, **5**:1 (1950), 24–134.

Е. А. Кудрявцева (Е. А. Kudryavtseva)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ekudr@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию

30.03.2011 и 19.12.2011