Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Аржанцев, М. Г. Зайденберг, К. Г. Куюмжиян,
Многообразия флагов, торические многообразия и над-
стройки: три примера бесконечной транзитивности, *Ма-
тем. сб.*, 2012, том 203, номер 7, 3–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7876>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 04:44:50

УДК 512.745

И. В. Аржанцев, М. Г. Зайденберг, К. Г. Куюмжиян

Многообразия флагов, торические многообразия и надстройки: три примера бесконечной транзитивности

Будем говорить, что группа G действует на множестве X бесконечно транзитивно, если для любого $m \in \mathbb{N}$ диагональное действие группы G транзитивно на $X^m \setminus \Delta$, где $X^m \setminus \Delta$ – дополнение к объединению диагоналей в m -й декартовой степени множества X . Описываются три класса аффинных алгебраических многообразий, для которых группа автоморфизмов действует на множестве гладких точек бесконечно транзитивно. Первый класс образуют нормальные конусы над многообразиями флагов, второй – невырожденные торические многообразия, третий – итерированные надстройки над аффинными многообразиями с бесконечно транзитивной группой автоморфизмов описанного типа.

Библиография: 42 названия.

Ключевые слова: аффинное алгебраическое многообразие, автоморфизм, бесконечная транзитивность, дифференцирование.

Введение

Все рассматриваемые алгебраические многообразия предполагаются приведенными и неприводимыми. Если не оговорено противное, основное поле $\mathbb{k}$ считается алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики.

Эффективное действие аддитивной группы $G_a(\mathbb{k})$ на алгебраическом многообразии X определяет однопараметрическую унипотентную подгруппу в группе автоморфизмов $\text{Aut}(X)$. Обозначим через $\text{SAut}(X)$ подгруппу группы $\text{Aut}(X)$, порожденную всеми однопараметрическими унипотентными подгруппами. В дальнейшем нам потребуются следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Пусть X – алгебраическое многообразие над полем $\mathbb{k}$. Будем говорить, что точка $x \in X$ является *гибкой*, если касательное пространство $T_x X$ порождено касательными векторами к орбитам $H.x$ однопараметрических унипотентных подгрупп $H \subseteq \text{Aut}(X)$. Назовем многообразие X *гибким*, если все гладкие точки $x \in X_{\text{reg}}$ являются гибкими.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.2. Действие группы G на множестве A называется *m -транзитивным*, если для любых двух наборов попарно различных точек $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ из A найдется такой элемент $g \in G$, что $g(a_i) = b_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$. Действие, являющееся m -транзитивным для всех $m \in \mathbb{N}$, будем называть *бесконечно транзитивным*.

Первый автор поддержан грантом Пьера Делиня, первый и третий авторы поддержаны фондом Дмитрия Зимина “Династия”, третий автор частично поддержан Лабораторией алгебраической геометрии НИУ ВШЭ, Правительством РФ (договор № 11.G34.31.0023), EADS Foundation Chair in Mathematics и Русско-французской лабораторией Понселе (UMI 2615 CNRS). Основная часть работы была выполнена во время визита первого автора в Институт Фурье, г. Гренобль.

Ясно, что при $m > \dim G$ связная группа Ли G не может действовать на многообразии m -транзитивно. Более того, следующая теорема показывает, что такая группа не может действовать на гладком односвязном многообразии даже 4-транзитивно.

ТЕОРЕМА 0.1 (см. [1; теоремы 5, 6]). *Не существует 3-транзитивных действий вещественной группы Ли G на односвязном некомпактном многообразии, а 2-транзитивные действия существуют только на евклидовых пространствах $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$. Не существует 4-транзитивных действий группы Ли G на компактном односвязном многообразии, а 3-транзитивные действия существуют только на сферах S^n при $n \geq 2$.*

Дальнейшие результаты о 2- и 3-транзитивных действиях групп Ли можно найти в работах [2] и [3]. В работе [4] изучается свойство “типичной транзитивности” для действий алгебраических групп G , т.е. наличие открытой по Зарискому орбиты в декартовых степенях данного алгебраического G -многообразия.

В то же время хорошо известно, что полная группа автоморфизмов аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ над полем $\mathbb{k}$ при $n \geq 2$ действует на $\mathbb{A}^n$ бесконечно транзитивно (аналитическую версию и обобщение этого утверждения см. в [5] и [6]). Этот эффект имеет место и для гиперповерхностей X в $\mathbb{A}^{n+1}$, заданных уравнением $uv - f(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$, где $n \geq 3$ и $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_{n-1}]$ – непостоянный многочлен (см. [7; §5]). Мы называем такое многообразие X *надстройкой* над $Y = \mathbb{A}^{n-1}$. В аналитической категории близкие факты были получены в рамках теории Андерсена–Лемперта–Варолина (см. [6], [8], а также [9]–[12]). В частности, обсуждается бесконечная транзитивность на гладких аффинных многообразиях некоторых подгрупп биголоморфных преобразований, порожденных полными регулярными векторными полями (см. обзор [13], в особенности § 2, (В) и замечание 2.2).

Следуя [7; §5], ниже мы изучаем аффинные алгебраические многообразия X , для которых группа специальных автоморфизмов $\text{SAut}(X)$ действует бесконечно транзитивно на множестве гладких точек X_{reg} . Среди прочего мы показываем, что это свойство сохраняется при переходе к надстройке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.3. Назовем *надстройкой* над аффинным многообразием Y гиперповерхность $X \subseteq Y \times \mathbb{A}^2$, заданную уравнением $uv - f(y) = 0$, где $\mathbb{A}^2 = \text{Spec } \mathbb{k}[u, v]$ и $f \in \mathbb{k}[Y]$ отлично от константы. В частности, $\dim X = 1 + \dim Y$.

Сформулируем основные результаты работы. Будем называть аффинное многообразие *невыврожденным*, если каждая обратимая регулярная функция на нем постоянна.

ТЕОРЕМА 0.2. 1. *Рассмотрим многообразие флагов G/P , где G – полупростая алгебраическая группа и P – параболическая подгруппа в G . Тогда любой нормальный аффинный конус X над G/P является гибким и группа $\text{SAut}(X)$ действует на множестве гладких точек X_{reg} бесконечно транзитивно.*

2. *Аналогичное утверждение справедливо для невыврожденного аффинного торического многообразия X размерности не ниже 2.*

3. *Предположим, что аффинное многообразие X является гибким и либо $X = \mathbb{A}^1$, либо $\dim X \geq 2$ и группа специальных автоморфизмов $\text{SAut}(X)$ действует на X_{reg} бесконечно транзитивно. Тогда все итерированные надстройки над X также обладают свойствами гибкости и бесконечной транзитивности для группы специальных автоморфизмов.*

Соответствующие части теоремы 0.2 доказываются в § 1–§ 3.

Гладкие компактные вещественные алгебраические поверхности с бесконечно транзитивными группами автоморфизмов были классифицированы в работах [14]–[17]. В теореме 3.3 мы распространяем часть 3 теоремы 0.2 на вещественные алгебраические многообразия при некоторых дополнительных ограничениях. Эти ограничения удалось ослабить в недавней работе [18]. В частном случае надстройки над аффинной прямой полученный результат справедлив над произвольным полем нулевой характеристики (см. теорему 3.1).

Напомним (см. [19; § 9]), что инвариант Макар-Лиманова $ML(X)$ аффинного многообразия X – это пересечение ядер всех локально нильпотентных дифференцирований алгебры $\mathbb{k}[X]$, или, другими словами, подалгебра в $\mathbb{k}[X]$, состоящая из функций, инвариантных относительно всех однопараметрических унитарных подгрупп в $\text{Aut}(X)$. Из этого определения непосредственно следует, что $ML(X) = \mathbb{k}[X]^{\text{SAut}(X)}$. Поэтому инвариант Макар-Лиманова многообразия X тривиален (т.е. $ML(X) = \mathbb{k}$), если группа специальных автоморфизмов $\text{SAut}(X)$ действует на X с плотной открытой орбитой (ср. [20]). В частности, это выполняется для многообразий всех трех видов из теоремы 0.2 (для первых двух из них см. также [20], [21; 3.16] и [22]). С другой стороны, если X гибко, то инвариант $ML(X)$ тривиален. Действительно, если $f \in \mathbb{k}[X]^{\text{SAut}(X)}$, то дифференциал df равен нулю вдоль орбит всех унитарных подгрупп, поэтому он равен нулю в касательном пространстве к любой гибкой точке X_{reg} . Так как X гибкое, функция f является константой.

Интересно прояснить связь между гибкостью и бесконечной транзитивностью. Хотя аффинная прямая $X = \mathbb{A}^1$ является гибкой, аффинная группа $\text{Aut}(\mathbb{A}^1)$ всего лишь 2-транзитивна. Тем не менее можно предположить, что в высших размерностях для многообразий над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль транзитивность группы $\text{SAut}(X)$ влечет гибкость многообразия X , а гибкость X влечет бесконечную транзитивность $\text{SAut}(X)$. После того как настоящая работа появилась в качестве препринта, эта гипотеза была доказана в [23]. Кроме того в нашем препринте мы предлагали охарактеризовать те аффинные многообразия, на которых группа $\text{SAut}(X)$ действует бесконечно транзитивно на открытом по Зарискому подмножестве. Это также сделано в [23] (см. теорему 2.2 и предложение 5.1) в терминах полевого инварианта Макар-Лиманова $FML(X)$, введенного А. Льендо (см. [24]). В работе [25] доказана гибкость для аффинных конусов над поверхностями дель Пеццо степеней 4 и 5, из чего следует бесконечная транзитивность действия группы $\text{SAut}(X)$ на этих многообразиях.

Авторы благодарны Д. Н. Ахиезеру, Ш. Калиману и А. Льендо за полезные обсуждения и важные библиографические ссылки. Авторы рады возможности поблагодарить Институт Фурье за гостеприимство и замечательные условия для работы.

§ 1. Аффинные конусы над многообразиями флагов

Пусть G – связная односвязная полупростая алгебраическая группа над полем $\mathbb{k}$. Рассмотрим неприводимое представление $V(\lambda)$ группы G со старшим весом λ и старшим вектором $v_0 \in V(\lambda)$. Обозначим через Y замкнутую G -орбиту

точки $[v_0]$ в ассоциированном проективном представлении,

$$Y = G[v_0] \subseteq \mathbb{P}(V(\lambda)),$$

а через

$$X = \text{AffCone}(Y) = \overline{Gv_0} = Gv_0 \cup \{0\}$$

– аффинный конус над Y . Отметим, что в терминологии работы [26] такие конусы называются *HV-многообразиями*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Каждое проективное вложение $\varphi: G/P \xrightarrow{\cong} Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ с проективно нормальным образом Y , где $P \subseteq G$ – параболическая подгруппа, может быть построено таким способом. В самом деле, поскольку Y проективно нормально, оно также линейно нормально, т.е. $\varphi = \varphi|_D$, где дивизор $D \in \text{Pic}(G/P)$ очень обилен. Поэтому $D \sim \sum_{i=1}^s a_i D_i$, где $D_1, \dots, D_s$ – дивизориальные циклы Шуберта на G/P , и $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_i > 0$ для всех $i = 1, \dots, s$. Тогда $V(\lambda) = H^0(G/P, \mathcal{O}_{G/P}(D))^*$ – простой G -модуль со старшим весом $\lambda = \sum_{i=1}^s a_i \omega_i$, где $\omega_1, \dots, \omega_s$ – фундаментальные веса, и $Y = G[v_0]$ для вектора старшего веса v_0 (см. [27; теорема 5]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Напомним, что *концом* в смысле Фрейден탈ля топологического многообразия M называется класс эквивалентности убывающих последовательностей связных открытых подмножеств в M , границы которых компактны и пересечение дополнений к которым пусто. Пусть X – аффинный конус, введенный выше, и пусть $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. Тогда однородное пространство $X \setminus \{0\}$ имеет два конца. Предположим, что G – связная группа Ли и $H \subseteq G$ – замкнутая связная подгруппа. Как показал А. Борель (см. [1; теорема 2]), однородное пространство G/H имеет не более двух концов. Д. Н. Ахиезер в [28] доказал¹, что если G – комплексная линейная алгебраическая группа и $H \subseteq G$ – алгебраическая подгруппа (не обязательно связная), то G/H имеет два конца в точности тогда, когда H является ядром нетривиального характера $\chi: P \rightarrow G_m(\mathbb{C})$, где P – параболическая подгруппа в G и $G_m(\mathbb{C})$ – мультипликативная группа поля комплексных чисел. Однородное расслоение $G/H \rightarrow G/P$ реализует G/H как главное $G_m(\mathbb{C})$ -расслоение над однородным проективным многообразием² G/P . Далее, G/H допускает проективное пополнение двумя непересекающимися дивизорами E_0 и E_∞ , где $E_0 \cong E_\infty \cong G/P$, и $\tilde{X} := G/H \cup E_0 \rightarrow G/P$ определяет линейное расслоение L над G/P . Его нулевое сечение E_0 стягиваемо тогда и только тогда, когда двойственное линейное расслоение L^{-1} обильно, а значит, и очень обильно. В последнем случае стягивание E_0 приводит к аффинному конусу X над образом $Y = \varphi|_{L^{-1}}(G/P) \subseteq \mathbb{P}^n$. При $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ любой аффинный конус X из теоремы 1.1 реализуется посредством этой конструкции, причем $H \subseteq P$ – это стабилизатор гладкой точки на конусе X , $\tilde{X}$ – раздутие конуса X в вершине и E_0 – исключительный дивизор.

Следующий результат влечет утверждение 1 теоремы 0.2.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть X – аффинный конус над многообразием флагов G/P в некотором вложении $G/P \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ с проективно нормальным образом. Тогда

¹См. также [29] и [30], где получен комплексно-аналитический аналог в контексте комплексных групп Ли.

²Вообще говоря, ни пара (G, P) , ни пара (G, H) не определяются многообразием флагов G/P однозначно.

многообразие X является гибким и группа $\mathrm{SAut}(X)$ действует на $X \setminus \{0\}$ t -транзитивно для любого $t \in \mathbb{N}$.

Гибкость вытекает из следующего общего наблюдения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Если полупростая линейная алгебраическая группа G действует на аффинном многообразии X и это действие транзитивно на X_{reg} , то X является гибким.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа G действует на X с открытой орбитой $X_{\mathrm{reg}} = G.x_0$. Орбитное отображение $\varphi: G \rightarrow X$, $g \mapsto g.x_0$, определяет сюръекцию $d\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow T_{x_0}X$, где $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Достаточно показать, что $\mathfrak{g}$ порождено над $\mathbb{k}$ нильпотентными элементами. Рассмотрим разложение $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^k \mathfrak{g}_i$ в сумму простых идеалов. Пусть $\mathfrak{h}$ – линейная оболочка множества нильпотентных элементов в $\mathfrak{g}$. Это ad -подмодуль в $\mathfrak{g}$ и, значит, идеал в $\mathfrak{g}$. Тем самым, $\mathfrak{h}$ совпадает с прямой суммой некоторых из простых идеалов $\mathfrak{g}_i$. Однако каждый простой идеал $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, \dots, k$, содержит ненулевой нильпотентный элемент. Значит, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$, что и требовалось доказать.

В условиях теоремы 1.1 $X_{\mathrm{reg}} = X$, если $X \cong \mathbb{A}^n$, и $X_{\mathrm{reg}} = X \setminus \{0\}$ в противном случае. В любом случае группа G действует на $X \setminus \{0\}$ транзитивно (см. [26; теорема 1]). Тем самым, гибкость многообразия X следует из предложения 1.1.

Для доказательства бесконечной транзитивности нам потребуются некоторые предварительные сведения.

Пусть $P \subseteq G$ – стабилизатор прямой $\langle v_0 \rangle \subseteq V(\lambda)$, $B = TB_u \subseteq P$ – подгруппа Бореля в G с максимальным тором T и унитарным радикалом B_u и $\mathbb{X}(T)$ – решетка характеров тора T . Рассмотрим весовое разложение

$$V(\lambda) = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{X}(T)} V(\lambda)_\nu = \langle v_0 \rangle \oplus H(\lambda),$$

где $\langle v_0 \rangle = V(\lambda)_\lambda$, а $H(\lambda) \subseteq V(\lambda)$ – гиперплоскость, заданная как

$$H(\lambda) = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{X}(T) \setminus \{\lambda\}} V(\lambda)_\nu.$$

Координатная функция $l_\lambda \in V(\lambda)^*$, отвечающая первой проекции $p_1: v \mapsto l_\lambda(v)v_0$, определяет нетривиальный характер подгруппы P .

Пусть $B^- = TB_u^-$ – подгруппа Бореля в G , противоположная к $B = B^+$. Многообразие флагов G/P содержит открытую B^- -орбиту (открытую клетку Шуберта), изоморфную аффинному пространству $\mathbb{A}^n$, где $n = \dim G/P$. Ее дополнение совпадает с объединением дивизориальных циклов Шуберта $D_1, D_2, \dots, D_s$ (см. [31; с. 22–24]).

Орбитный морфизм $G \rightarrow \mathbb{P}(V(\lambda))$, $g \mapsto g.[v_0]$, отображает G/P на подмногообразии $Y \subseteq \mathbb{P}(V(\lambda))$. Пусть $\omega_\lambda \subseteq Y$ – образ открытой клетки Шуберта при этом вложении. Согласно [27; теорема 2] гиперплоскость

$$\mathcal{H}(\lambda) = \mathbb{P}(H(\lambda)) = l_\lambda^{-1}(0) \subseteq \mathbb{P}(V(\lambda))$$

содержит объединение дивизоров Шуберта $\bigcup_{i=1}^s D_i$. В частности, получаем $\omega_\lambda = Y \setminus \mathcal{H}(\lambda)$.

Пусть $\sigma: \hat{X} \rightarrow X$ – раздутие конуса X в вершине 0. Исключительный дивизор $E \subseteq \hat{X}$ изоморфен Y . Более того, естественное отображение $\pi: X \setminus \{0\} \rightarrow Y$

соответствует проекции $p: \widehat{X} \rightarrow Y$ линейного расслоения $\mathcal{O}_Y(-1)$ на Y , для которого E является нулевым сечением. Поскольку $\omega_\lambda \cong \mathbb{A}^n$, ограничение $\mathcal{O}_Y(-1)$ на ω_λ тривиально. Тем самым, открытое подмножество

$$\Omega_\lambda := \pi^{-1}(\omega_\lambda) = X \setminus H(\lambda) \subseteq X \setminus \{0\} \cong \widehat{X} \setminus E$$

изоморфно $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}_*^1$, где $\mathbb{A}_*^1 = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$.

Для любого $c \in \mathbb{A}_*^1$ обратимая функция $l_\lambda(\cdot, c)$ постоянна на аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$. Поэтому на Ω_λ , изоморфном $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}_*^1$, получаем $l_\lambda = az^k$ для некоторого $a \in G_m(\mathbb{k})$, где z — координата на $\mathbb{A}_*^1$. Здесь $k = 1$, поскольку l_λ является координатой на $\langle v_0 \rangle$. Также можно считать, что $a = 1$, и, значит, $l_\lambda|_{\Omega_\lambda}: \Omega_\lambda \rightarrow \mathbb{A}_*^1$ совпадает со второй проекцией.

Для доказательства бесконечной транзитивности действия группы $\text{SAut}(X)$ на $X \setminus \{0\}$ в условиях теоремы 1.1 докажем вначале бесконечную транзитивность действия группы $\text{SAut}(X)$ на каждом гиперплоском сечении $\Omega_\lambda(c_0) := l_\lambda^{-1}(c_0) \subseteq X$, где $c_0 \neq 0$ (ср. [7; лемма 5.6]). Более точно, для каждого набора $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{k}$ попарно различных точек, отличных от c_0 , рассмотрим подгруппу $\text{Stab}_{c_1, \dots, c_k}^\lambda \subseteq \text{SAut}(X)$ всех автоморфизмов, стабилизирующих поточечно подмногообразия $\Omega_\lambda(c_i)$ для всех $i = 1, \dots, k$ и оставляющих инвариантной функцию l_λ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *В данных обозначениях для любого $n \geq 2$ и любого $m \in \mathbb{N}$ группа $\text{Stab}_{c_1, \dots, c_k}^\lambda$ действует на $\Omega_\lambda(c_0) \cong \mathbb{A}^n$ m -транзитивно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два набора попарно различных точек $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ и $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_m$ в $\Omega_\lambda(c_0)$. Для любого $n \geq 2$ группа $\text{SAut}(\mathbb{A}^n)$ действует на $\mathbb{A}^n$ m -транзитивно (см., например, [7; лемма 5.5]). Поскольку $\Omega_\lambda(c_0) \cong \mathbb{A}^n$, существует автоморфизм $g \in \text{SAut}(\Omega_\lambda(c_0))$, отображающий $(Q_1, Q_2, \dots, Q_m)$ в $(Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_m)$. По определению $g = \delta_1(1)\delta_2(1)\dots\delta_s(1)$ для некоторых однопараметрических унитарных подгрупп $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s \subseteq \text{SAut}(\Omega_\lambda(c_0))$. Пусть $\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_s$ — соответствующие локально нильпотентные дифференцирования³ (сокращенно ЛНД) алгебры $\mathbb{k}[\Omega_\lambda(c_0)]$. Вначале продолжим их до ЛНД $\bar{\partial}_1, \bar{\partial}_2, \dots, \bar{\partial}_s$ алгебры $\mathbb{k}[\Omega_\lambda] \cong \mathbb{k}[\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}_*^1]$, положив $\bar{\partial}_i(l_\lambda) = 0$.

Напомним, что Ω_λ является главным открытым по Зарискому подмножеством в X , задаваемым функцией l_λ . В частности, для любого $i = 1, \dots, s$ имеем $\bar{\partial}_i: \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}[X][1/l_\lambda]$. Поскольку алгебра $\mathbb{k}[X]$ конечно порожденная, найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $(l_\lambda)^N \bar{\partial}_i$ является ЛНД алгебры $\mathbb{k}[X]$ для всех $i = 1, \dots, s$ (ср. [21; утверждение 3.5]).

Пусть $q[z] \in \mathbb{k}[z]$ — многочлен, для которого $q(c_0) = 1$, элементы $c_1, \dots, c_k$ являются простыми корнями и корень $z = 0$ имеет кратность N (напомним, что $c_0 \neq 0$). Тогда для любого $i = 1, \dots, s$ ЛНД $q(l_\lambda)\bar{\partial}_i$ алгебры $\mathbb{k}[X]$ таково, что соответствующая однопараметрическая подгруппа в $\text{Stab}_{c_1, \dots, c_k}^\lambda$ продолжает подгруппу δ_i . Тем самым, g продолжается до элемента группы $\text{Stab}_{c_1, \dots, c_k}^\lambda$ и требуемое утверждение доказано.

Рассмотрим экстремальный вес μ простого G -модуля $V(\lambda)$, отличный от λ . Вес μ определяет параболическую подгруппу P' , сопряженную с P , линейную форму $l_\mu \in V(\lambda)^*$ и главное открытое по Зарискому подмножество $\Omega_\mu = \{l_\mu \neq 0\}$ в X , где $X \setminus \Omega_\mu = H(\mu) := l_\mu^{-1}(0)$.

³Дифференцирование ∂ кольца A называется *локально нильпотентным*, если для любого $a \in A$ справедливо $\partial^n a = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 1.1. *Для любого множества из m попарно различных точек $Q_1, Q_2, \dots, Q_m \in X \setminus \{0\}$ найдется такое $g \in \text{SAut}(X)$, что $g(Q_i) \in \Omega_\mu$ для всех $i = 1, \dots, m$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку группа G полупроста, она содержится в $\text{SAut}(X)$ (см. [20; лемма 1.1]). Ясно, что $G_i := \{g \in G \mid g(Q_i) \in H(\mu)\}$, $i = 1, \dots, m$, являются собственными замкнутыми подмножествами в G . Значит, утверждение леммы выполнено для любого $g \in G \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_m)$.

ЛЕММА 1.2. *Для любого $c \neq 0$ ограничение $l_\lambda|_{\Omega_\mu(c)}$ не является константой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если бы ограничение $l_\lambda|_{\Omega_\mu(c)}$ было константой, скажем, равной b , то конус X содержался бы в гиперплоскости $bl_\mu - cl_\lambda = 0$ в $V(\lambda)$, что приводит к противоречию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Если $n = \dim G/P = 1$ (и, тем самым, $G/P \cong \mathbb{P}^1$), то X – нормальная аффинная торическая поверхность, или, иными словами, конус Веронезе. Бесконечная транзитивность следует в этом случае из теоремы 2.1, которую мы докажем в § 2.

Далее считаем, что $n \geq 2$. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и набор попарно различных точек $Q_{10}, Q_{20}, \dots, Q_{m0} \in \Omega_\lambda(1)$. Покажем, что для любого набора попарно различных точек $Q_1, Q_2, \dots, Q_m \in X \setminus \{0\}$ найдется такое $\psi \in \text{SAut}(X)$, что $\psi(Q_1) = Q_{10}, \dots, \psi(Q_m) = Q_{m0}$.

По лемме 1.1 можно считать, что $Q_i \in \Omega_\mu$ для всех $i = 1, \dots, m$. Разобьем множество $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_m\}$ на подмножества в соответствии со значениями $l_\mu(Q_i)$:

$$\{Q_1, Q_2, \dots, Q_m\} = \bigsqcup_{j=1}^k M_j, \quad M_j = \{Q_i \mid Q_i \in \Omega_\mu(c_j)\},$$

где $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{A}_*^1$ попарно различны. Из леммы 1.2 следует, что каждое пересечение $\Omega_\lambda(1) \cap \Omega_\mu(c_i)$ содержит бесконечно много точек. Действуя подгруппами $\text{Stab}_{c_1, \dots, \widehat{c_i}, \dots, c_k}^\mu \subseteq \text{SAut}(X)$ (см. предложение 1.2), мы можем последовательно отобразить подмножества M_i , $i = 1, \dots, k$, в аффинное гиперплоское сечение $\Omega_\lambda(1)$. Получившийся набор из m точек можно отобразить далее в стандартный набор $(Q_{10}, Q_{20}, \dots, Q_{m0})$, полагая $c_0 = 1$, $k = 0$ и используя автоморфизм из предложения 1.2. Это завершает доказательство теоремы.

§ 2. Автоморфизмы аффинных торических многообразий

Как и выше, основное поле $\mathbb{k}$ алгебраически замкнуто и имеет характеристику нуль. В этом параграфе рассматривается аффинное торическое многообразие X над $\mathbb{k}$ с эффективным действием тора T . Мы предполагаем, что X является невырожденным, т.е. обратимыми регулярными функциями на X являются только константы, или, что эквивалентно, $X \not\cong Y \times \mathbb{A}_*^1$, где $\mathbb{A}_*^1 = \text{Spec } \mathbb{k}[t, t^{-1}] \cong G_m(\mathbb{k})$.

Следующий результат составляет часть 2 теоремы 0.2.

ТЕОРЕМА 2.1. *Каждое невырожденное аффинное торическое многообразие X размерности $n \geq 1$ является гибким. Если $n \geq 2$, то для любого $m \in \mathbb{N}$*

группа $\mathrm{SAut}(X)$ действует на множестве гладких точек X_{reg} многообразия X m -транзитивно.

Заметим, что X является гибким, если $\mathrm{Aut}(X)$ действует на X_{reg} транзитивно и хотя бы одна гладкая точка на X является гибкой. Оба этих условия будут проверены ниже. Сначала напомним необходимые сведения об аффинных торических многообразиях.

1. *Порождающие на лучах.* Пусть N – решетка однопараметрических подгрупп тора $\mathbb{T}$, $M = \mathbb{X}(\mathbb{T})$ – двойственная к ней решетка характеров и $\langle \cdot, \cdot \rangle: N \times M \rightarrow \mathbb{Z}$ – каноническое спаривание. Пусть χ^m обозначает характер тора $\mathbb{T}$, отвечающий точке $m \in M$. При этом $\chi^m \chi^{m'} = \chi^{m+m'}$, так что групповую алгебру

$$\mathbb{k}[M] = \bigoplus_{m \in M} \mathbb{k}\chi^m$$

можно отождествить с алгеброй $\mathbb{k}[\mathbb{T}]$ регулярных функций на торе $\mathbb{T}$. Обозначим через $\mathbb{T}.x_0$ открытую $\mathbb{T}$ -орбиту на X . Поскольку орбитное отображение $\mathbb{T} \rightarrow X$, $t \mapsto t.x_0$, доминантно, мы можем отождествить $\mathbb{k}[X]$ с подалгеброй в $\mathbb{k}[M]$. Более точно, найдется такой выпуклый полиэдральный конус $\sigma^\vee \subseteq M_{\mathbb{Q}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, что $\mathbb{k}[X]$ совпадает с полугрупповой алгеброй полугруппы $\sigma^\vee \cap M$, т.е.

$$\mathbb{k}[X] = \bigoplus_{m \in \sigma^\vee \cap M} \mathbb{k}\chi^m \quad (2.1)$$

(подробности см. в [32]). Двойственный конус σ к конусу $\sigma^\vee$ является острым конусом в $N_{\mathbb{Q}}$ полной размерности. Пусть $\Xi = \{\rho_1, \dots, \rho_r\}$ – множество порождающих на лучах, т.е. множество примитивных векторов на одномерных гранях конуса σ . С каждым вектором $\rho \in \Xi$ связана однопараметрическая подгруппа R_ρ тора $\mathbb{T}$.

2. *Соответствие между орбитами и гранями* (см. [33; § 3.2]). Имеются естественные взаимно однозначные соответствия $\delta \xrightarrow{1 \div 1} \tau \xleftarrow{1 \div 1} O_\tau$ между гранями δ конуса σ , двойственными гранями⁴ $\tau = \delta^\perp$ конуса $\sigma^\vee$ и $\mathbb{T}$ -орбитами O_τ на X , при которых $\dim O_\tau = \dim \tau = \dim \sigma - \dim \delta$. В частности, единственная $\mathbb{T}$ -неподвижная точка на X соответствует вершине конуса $\sigma^\vee$, а открытая $\mathbb{T}$ -орбита – самому конусу $\sigma^\vee$. Эти соответствия сохраняют включения: $\mathbb{T}$ -орбита O_μ содержится в замыкании $\overline{O_\tau}$ тогда и только тогда, когда $\mu \subseteq \tau$, или, равносильно, $\mu^\perp \supseteq \tau^\perp$ (см. [33; § 3.2]).

Каждая грань $\tau \subseteq \sigma^\vee$ определяет разложение

$$\mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[\overline{O_\tau}] \oplus I(\overline{O_\tau}),$$

где $\mathbb{k}[\overline{O_\tau}] = \bigoplus_{m \in \tau \cap M} \mathbb{k}\chi^m$, а

$$I(\overline{O_\tau}) = \bigoplus_{m \in (\sigma^\vee \setminus \tau) \cap M} \mathbb{k}\chi^m \quad (2.2)$$

является идеалом подмногообразия $\overline{O_\tau}$ в $\mathbb{k}[X]$.

Стабилизатор $\mathbb{T}_p = \mathrm{Stab}_{\mathbb{T}}(p)$ любой точки $p \in X$ связан, т.е. $\mathbb{T}_p \subseteq \mathbb{T}$ является подтором. Далее, $\mathbb{T}_p \subseteq \mathbb{T}_q$ в точности тогда, когда $\mathbb{T}.q \subseteq \overline{\mathbb{T}.p}$, и $\overline{\mathbb{T}.p} = X^{\mathbb{T}_p}$, где X^G обозначает, как обычно, множество неподвижных точек действия группы G на X .

⁴Для упрощения грань $\delta^\perp \cap \sigma^\vee$ мы обозначаем просто как $\delta^\perp$.

3. Корни и ассоциированные однопараметрические подгруппы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 (см. [34]). *Корень* конуса σ – это такой вектор $e \in M$, что для некоторого i , где $1 \leq i \leq r$ и $r = \text{card } \Xi$, выполнены соотношения

$$\langle \rho_i, e \rangle = -1, \quad \langle \rho_j, e \rangle \geq 0 \quad \forall j \neq i. \quad (2.3)$$

Обозначим через $\mathcal{R}(\sigma)$ множество всех корней конуса σ . Имеется взаимно однозначное соответствие $e \xleftrightarrow{1 \div 1} H_e$ между корнями конуса σ и однопараметрическими унитарными подгруппами в $\text{Aut}(X)$, нормализуемыми действующим тором (см. [22] и [34]). Положим $\rho_e := \rho_i$. Корень $e \in \mathcal{R}(\sigma)$ определяет ЛНД ∂_e на M -градуированной алгебре $\mathbb{k}[X]$, заданное как

$$\partial_e(\chi^m) = \langle \rho_e, m \rangle \chi^{m+e}. \quad (2.4)$$

Его ядро является (конечно порожденной) однородной подалгеброй в $\mathbb{k}[X]$ (см. [22]):

$$\ker \partial_e = \bigoplus_{m \in \rho_e^\perp \cap M} \mathbb{k} \chi^m, \quad (2.5)$$

где $\rho_e^\perp = \{m \in \sigma^\vee \cap M, \langle \rho_e, m \rangle = 0\}$ – гипергрань (т.е. грань коразмерности 1) конуса $\sigma^\vee$, ортогональная ρ_e .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 (см. [19], [22]). Корни e и e' , для которых $\rho_e = \rho_{e'}$, называются *эквивалентными*; будем записывать $e \sim e'$. Корни e и e' эквивалентны тогда и только тогда, когда $\ker \partial_e = \ker \partial_{e'}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Нумерация порождающих на лучах $\Xi = \{\rho_1, \dots, \rho_r\}$ определяет разбиение

$$\mathcal{R}(\sigma) = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{R}_i,$$

где $\mathcal{R}_i = \{e \in \mathcal{R}(\sigma) \mid \rho_e = \rho_i\}$ непусты. В самом деле, рассмотрим гипергрань τ_i конуса $\sigma^\vee$, ортогональную лучу, порожденному ρ_i . Для любого v из относительной внутренней $\text{Int}_{\text{rel}}(\tau_i)$ неравенство $\langle \rho_j, m \rangle > 0$ выполнено при всех $j \neq i$. Предположим, что $e_0 \in M$ таково, что $\langle \rho_i, e_0 \rangle = -1$ и что $v_0 \in \text{Int}_{\text{rel}}(\tau_i) \cap M$. Положив $e = e_0 + k v_0$ для $k \gg 1$, мы получим $\langle \rho_j, e \rangle > 0$ для всех $j \neq i$ и $\langle \rho_i, e \rangle = -1$. Тем самым, $e \in \mathcal{R}_i$.

В качестве примера рассмотрим аффинную плоскость $X = \mathbb{A}^2$ со стандартным действием двумерного тора. Здесь конусы σ и $\sigma^\vee$ совпадают с положительными квадрантами. Множество $\mathcal{R}(\sigma)$ состоит из двух классов эквивалентности

$$\mathcal{R}_1 = \{(x, -1) \mid x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}, \quad \mathcal{R}_2 = \{(-1, y) \mid y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

4. *Однопараметрические группы автоморфизмов.* Дифференцирование ∂_e порождает однопараметрическую унитарную подгруппу $H_e = \lambda_e(G_a(\mathbb{k})) \subseteq \text{Aut}(X)$, где $\lambda_e: t \mapsto \exp(t\partial_e)$. Алгебра инвариантов $\mathbb{k}[X]^{H_e}$ совпадает с $\ker \partial_e$. Вложение $\mathbb{k}[X]^{H_e} \subseteq \mathbb{k}[X]$ индуцирует морфизм $\pi: X \rightarrow Z = \text{Spec } \mathbb{k}[X]^{H_e}$, типичными слоями которого являются одномерные H_e -орбиты, изоморфные прямой $\mathbb{A}^1$ (см. [35; теоремы 2.3 и 3.3]). Тор $\mathbb{T}$ нормализует подгруппу H_e . В частности, $\mathbb{T}$ оставляет инвариантным множество неподвижных точек X^{H_e} .

Пусть $R_e = R_{\rho_e} \subseteq \mathbb{T}$ – одномерный подтор, соответствующий вектору $\rho_e \in N$. Действие R_e на градуированной алгебре $\mathbb{k}[X]$ при подходящей параметризации $\rho_e: G_m(\mathbb{k}) \ni t \mapsto \rho_e(t) \in R_e$ задается как

$$t \cdot \chi^m = t^{\langle \rho_e, m \rangle} \chi^m, \quad t \in G_m(\mathbb{k}). \quad (2.6)$$

В частности, $\mathbb{k}[X]^{R_e} = \mathbb{k}[X]^{H_e}$. Поэтому морфизм $\pi: X \rightarrow Z$ совпадает с морфизмом факторизации $X \rightarrow X//R_e$ и типичные H_e -орбиты совпадают с замыканиями типичных R_e -орбит. Предложение 2.1 ниже показывает, что это утверждение справедливо для любой одномерной H_e -орбиты⁵.

Имеется разложение

$$\mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[X]^{R_e} \oplus \bigoplus_{m \in \sigma^\vee \cap M \setminus \rho_e^\perp} \mathbb{k}\chi^m = \mathbb{k}[X]^{R_e} \oplus I(D_e), \quad (2.7)$$

где $D_e := X^{R_e} \cong Z$. Дивизор D_e совпадает с множеством предельных точек действия R_e на X . Тем самым, каждая одномерная R_e -орбита имеет предельную точку на D_e . Следующая простая лемма дополняет картину.

ЛЕММА 2.1. Пусть τ – грань конуса $\sigma^\vee$, $\mathcal{O}_\tau$ – соответствующая орбита, $\mathbb{T}_\tau$ – стабилизатор точки в $\mathcal{O}_\tau$ и Ξ_τ – множество порождающих на лучах двойственной грани $\tau^\perp \subseteq \sigma$. Тогда выполнены следующие условия.

а) Замыкание орбиты $\overline{\mathcal{O}_\tau}$ инвариантно относительно H_e тогда и только тогда, когда

$$m + e \in \sigma^\vee \setminus \tau \quad \forall m \in (\sigma^\vee \setminus \tau) \cap M: \langle \rho_e, m \rangle > 0. \quad (2.8)$$

б) Замыкание $\overline{\mathcal{O}_\tau}$ является $H_{e'}$ -инвариантным для любого корня $e' \sim e$ конуса σ , если выполнено любое из следующих эквивалентных условий:

- (i) $\rho_e \notin \Xi_\tau$;
- (ii) $\overline{\mathcal{O}_\tau} \not\subseteq D_e$;
- (iii) $R_e \not\subseteq \mathbb{T}_\tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Согласно (2.4) идеал $I(\overline{\mathcal{O}_\tau})$ является ∂_e -инвариантным тогда и только тогда, когда

$$\chi^{m+e} \in I(\overline{\mathcal{O}_\tau}) \quad \forall \chi^m \in I(\overline{\mathcal{O}_\tau}): \langle \rho_e, m \rangle > 0, \quad (2.9)$$

что равносильно (2.8) (см. (2.2)). Это доказывает условие а).

б) Для $m \in M$ выполнено

$$m \in \sigma^\vee \setminus \tau \iff \langle \rho, m \rangle \geq 0 \quad \forall \rho \in \Xi \text{ и } \exists \rho \in \Xi_\tau: \langle \rho, m \rangle > 0.$$

Для любого $\rho \neq \rho_e$ имеем $\langle \rho, m + e \rangle \geq \langle \rho, m \rangle$. Поэтому из (i) следует (2.8).

Имеем $\overline{\mathcal{O}_\tau} = X^{\mathbb{T}_\tau}$ и $D_e = X^{R_e} = \overline{\mathcal{O}_{\rho_e^\perp}}$, где $\rho_e^\perp = (\mathbb{R}_+ \rho_e)^\perp$. Таким образом, эквивалентность (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii) следует из соответствия между орбитами и гранями.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если $\overline{\mathcal{O}_\tau}$ не является H_e -инвариантным, то $\rho_e \in \Xi_\tau$. Обратное в общем случае неверно. Например, рассмотрим $X = \mathbb{A}^2$ со стандартным действием двумерного тора. Здесь $\Xi = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Пусть $\tau = \{0\}$ и

⁵Если X – поверхность, то каждый слой морфизма π изоморфен $\mathbb{A}^1$ и совпадает с замыканием R_e -орбиты (см. параболический случай в [36]). В то же время для трехмерного аффинного торического многообразия X вырожденные слои π могут оказаться двумерными.

$e = (0, -1)$, $e' = (a, -1) \sim e$, где $a > 0$ и $\rho_e = (0, 1)$. Тогда (2.8) выполнено для $H_{e'}$, но не для H_e . Тем самым, $\rho_e \in \Xi_\tau$ и $\mathbb{T}$ -неподвижная точка $\overline{\mathcal{O}_\tau} = \{(0, 0)\}$ является $H_{e'}$ -неподвижной, но не H_e -неподвижной. Можно также построить пример, в котором $\dim X = 4$ и замыкание $\overline{\mathcal{O}_\tau}$ является $H_{e'}$ -инвариантным для любого корня $e' \sim e$, в то время как эквивалентные условия (i)–(iii) не выполнены.

Для доказательства бесконечной транзитивности нам понадобится более точная информация о действии однопараметрических групп автоморфизмов на торических многообразиях; см. предложение 2.1 и леммы 2.2, 2.3 ниже.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $e \in \mathcal{R}(\sigma)$ и $H_e \subseteq \text{SAut}(X)$ – ассоциированная однопараметрическая унипотентная подгруппа. Тогда выполнено следующее.

- а) Для любой точки $x \in X \setminus X^{H_e}$ орбита $H_e.x$ пересекает в точности две $\mathbb{T}$ -орбиты $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ на X , причем $\dim \mathcal{O}_1 = 1 + \dim \mathcal{O}_2$.
- б) Пересечение $\mathcal{O}_2 \cap H_e.x$ состоит из единственной точки, тогда как

$$\mathcal{O}_1 \cap H_e.x = R_e.y \quad \forall y \in \mathcal{O}_1 \cap H_e.x.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Поскольку число $\mathbb{T}$ -орбит на X конечно, найдется $\mathbb{T}$ -орбита $\mathcal{O}_1$, для которой пересечение $\mathcal{O}_1 \cap H_e.x$ открыто по Зарискому в $H_e.x$. Тогда $H_e.x \subseteq \overline{\mathcal{O}_1}$. Найдется другая $\mathbb{T}$ -орбита $\mathcal{O}_2$, пересекающая $H_e.x$. В самом деле, если $H_e.x \cong \mathbb{A}^1$ содержится в единственной $\mathbb{T}$ -орбите $\mathcal{O}_1$, то обратимые регулярные функции разделяют точки на $\mathcal{O}_1$, а значит, и на $H_e.x$, противоречие. Поскольку $\mathcal{O}_2$ пересекает $\overline{\mathcal{O}_1}$, мы получаем $\mathcal{O}_2 \subseteq \overline{\mathcal{O}_1}$ и $\dim \mathcal{O}_2 < \dim \mathcal{O}_1$.

Мы знаем, что тор $\mathbb{T}$ нормализует унипотентную подгруппу H_e , а значит, элементы $\mathbb{T}$ отображают H_e -орбиты в H_e -орбиты. В частности, для любой точки $q \in H_e.x$ стабилизатор $\mathbb{T}_q$ сохраняет орбиту $H_e.x$. Все точки $q \in \mathcal{O}_1 \cap H_e.x$ имеют одинаковые стабилизаторы. Поскольку $H_e.x \subseteq \overline{\mathcal{O}_1} = X^{\mathbb{T}_q}$, этот стабилизатор действует на $H_e.x$ тривиально. Поэтому $\mathbb{T}_r \supseteq \mathbb{T}_q$ для любой точки $r \in H_e.x$, и $\mathbb{T}_r = \mathbb{T}_q$ тогда и только тогда, когда $r \in \mathcal{O}_1 \cap H_e.x$.

Зафиксируем точку $p \in \mathcal{O}_2 \cap H_e.x$. Если $\mathbb{T}_p \subseteq \mathbb{T}_q$, то $\mathbb{T}_p = \mathbb{T}_q$ и $\dim \mathcal{O}_2 = \dim \mathcal{O}_1$, противоречие. Следовательно, стабилизатор $\mathbb{T}_p$ действует на $H_e.x$ с двумя орбитами, т.е. $H_e.x = \mathbb{T}_p.q \cup \{p\}$, где $q \in H_e.x \setminus \{p\}$. Из наличия точной последовательности

$$1 \rightarrow \mathbb{T}_q \rightarrow \mathbb{T}_p \rightarrow G_m(\mathbb{k}) \rightarrow 1$$

следует, что $\dim \mathbb{T}_p = 1 + \dim \mathbb{T}_q$. Наконец, $H_e.x \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$, $\dim \mathcal{O}_1 = 1 + \dim \mathcal{O}_2$, как и утверждается в а).

б) Можно считать, что $\mathcal{O}_1 = \mathbb{T}.x$. Поскольку $H_e.x \subseteq \overline{\mathcal{O}_1}$ и тор $\mathbb{T}$ нормализует подгруппу H_e , мы получаем $H_e(\mathcal{O}_1) \subseteq \overline{\mathcal{O}_1}$. Тем самым, $\overline{\mathcal{O}_1}$ является H_e -инвариантным. С другой стороны, поскольку $H_e.p = H_e.x \not\subseteq \mathcal{O}_2$, замыкание $\overline{\mathcal{O}_2}$ не является H_e -инвариантным. В частности, лемма 2.1 влечет $\rho_e \in \Xi_{\tau_2}$, где τ_i – грань конуса $\sigma^\vee$, отвечающая $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{\tau_i}$, $i = 1, 2$. По той же лемме $R_e \subseteq \mathbb{T}_{\tau_2} = \mathbb{T}_p$. Покажем, что $R_e \not\subseteq \mathbb{T}_{\tau_1} = \mathbb{T}_q$, где $q \in H_e.x \setminus \{p\}$. Применяя вновь лемму 2.1, мы получаем, что (2.8) выполнено для $\tau = \tau_1$, но не для $\tau = \tau_2$. Поскольку $\tau_2 \subseteq \tau_1$, условие (2.8) не выполнено для некоторого $m \in \tau_1 \setminus \tau_2$. Последнее возможно только при $\rho_e \in \tau_2^\perp \setminus \tau_1^\perp$. Лемма 2.1 влечет $R_e \not\subseteq \mathbb{T}_{\tau_1} = \mathbb{T}_q$. Наконец, одномерная орбита $\mathbb{T}_p.q$ совпадает с $R_e.q$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Будем говорить, что пара $\mathbb{T}$ -орбит $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ на X является H_e -связанной, если $H_e \cdot x \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ для некоторого $x \in X \setminus X^{H_e}$. Предложение 2.1 показывает, что для такой пары (с точностью до перестановки) $\mathcal{O}_2 \subseteq \overline{\mathcal{O}_1}$ и $\dim \mathcal{O}_2 = 1 + \dim \mathcal{O}_1$. Как и выше, мы можем выбрать точку x на орбите $\mathcal{O}_2$. Поскольку тор нормализует подгруппу H_e , любая точка на $\mathcal{O}_2$ может выступать в качестве точки x из нашего определения.

ПРИМЕР 2.1. Если $e \in \mathcal{R}(\sigma)$, то дифференцирование ∂_e , как в (2.4), продолжается до ЛНД большей градуированной алгебры

$$A(\rho_e) = \bigoplus_{m \in M, \langle \rho_e, m \rangle \geq 0} \mathbb{k}\chi^m.$$

В самом деле, положив $k = \langle \rho_e, m \rangle \geq 0$, мы получим $\langle \rho_e, m + ke \rangle = 0$ и, значит, $\partial_e^k(\chi^m) \in \ker \partial_e$. Это гарантирует наличие $\mathbb{T}$ - и H_e -инвариантного открытого подмножества

$$U = \operatorname{Spec} A(\rho_e) \cong (\mathbb{A}_*^1)^{n-1} \times \mathbb{A}^1 \subseteq X,$$

где $n = \dim X$, $\mathbb{A}_*^1 = \operatorname{Spec} \mathbb{k}[t, t^{-1}]$, $\mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec} \mathbb{k}[u]$ и $u = \chi^{-e}$, причем H_e действует сдвигами вдоль второго множителя. Единственными $\mathbb{T}$ -орбитами в U являются открытая орбита $\mathcal{O}_1 = \{u \neq 0\}$, которая отвечает вершине конуса σ , и орбита коразмерности 1 $\mathcal{O}_2 = \{u = 0\}$, отвечающая лучу $\mathbb{k}\rho_e$. Нетрудно показать, что пара $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ является H_e -связанной.

Из предложения 2.1 и его доказательства мы получаем следующий критерий H_e -связанности.

ЛЕММА 2.2. Пусть $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ – пара $\mathbb{T}$ -орбит на X с $\mathcal{O}_2 \subseteq \overline{\mathcal{O}_1}$, где $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{\sigma_i^\perp}$ для грани σ_i конуса σ , $i = 1, 2$. Для данного корня $e \in \mathcal{R}(\sigma)$ пара $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ является H_e -связанной тогда и только тогда, когда $e|_{\sigma_2} \leq 0$ и σ_1 – гипергрань конуса σ_2 , заданная уравнением $\langle v, e \rangle = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В процессе доказательства предложения 2.1, b) мы установили, что пара $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ является H_e -связанной тогда и только тогда, когда замыкание $\overline{\mathcal{O}_1}$ является H_e -инвариантным, $\overline{\mathcal{O}_2}$ не инвариантно относительно H_e и $\dim \mathcal{O}_1 = 1 + \dim \mathcal{O}_2$. Более того, если пара $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ является H_e -связанной, то $\sigma_2^\perp$ – гипергрань конуса $\sigma_1^\perp$ (а σ_1 – гипергрань σ_2), и существует такое $m_0 \in \sigma_1^\perp \setminus \sigma_2^\perp$, что

$$\langle \rho_e, m_0 \rangle > 0, \quad m_0 + e \in \sigma_2^\perp.$$

Поскольку $\langle \rho_i, e \rangle \geq 0$ для любого $\rho_i \neq \rho_e$, мы заключаем, что $\sigma_2 = \operatorname{Cone}(\sigma_1, \rho_e)$. Кроме того, $e|_{\sigma_1} = 0$, поскольку $e = m_0 + e - m_0 \in \operatorname{span} \sigma_1^\perp$. Тем самым, $e|_{\sigma_2} \leq 0$ и σ_1 выделяется в σ_2 уравнением $\langle v, e \rangle = 0$.

Обратно, предположим, что $e|_{\sigma_2} \leq 0$ и σ_1 задано в σ_2 уравнением $\langle v, e \rangle = 0$. Для любого $m \in \sigma^\vee \setminus \sigma_1^\perp$ такого, что $\langle \rho_e, m \rangle > 0$, выполнено условие $m + e \notin \sigma_1^\perp$. В самом деле, $e|_{\sigma_1} = 0$ и $e \in \sigma_1^\perp$. Значит, условие (2.8) выполнено для $\sigma_1^\perp$. Далее, $\langle \rho_e, m' \rangle > 0$ для любого $m' \in \sigma_1^\perp \setminus \sigma_2^\perp$. Отсюда следует, что

$$m_0 := m' + (\langle \rho_e, m' \rangle - 1) \cdot e \in \sigma_1^\perp \setminus \sigma_2^\perp, \quad m_0 + e \in \sigma_2^\perp.$$

В самом деле, $\langle \rho_e, m_0 \rangle = 1$ и $\langle \rho_e, m_0 + e \rangle = 0$, тогда как $\langle \rho_i, m_0 \rangle \geq 0$ и $\langle \rho_i, m_0 + e \rangle \geq 0$ для любого $\rho_i \neq \rho_e$. Поэтому (2.8) выполнено для $\sigma_1^\perp$, но не для $\sigma_2^\perp$. Следовательно, пара $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ является H_e -связанной.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Пусть даны однопараметрическая подгруппа $R \subseteq \mathbb{T}$ и точка $x \in X \setminus X^R$. Замыкание орбиты $\overline{R.x}$ совпадает с H_e -орбитой тогда и только тогда, когда $\overline{R.x}$ покрыто парой H_e -связанных $\mathbb{T}$ -орбит. Например, для $X = \mathbb{A}^2$ со стандартным действием двумерного тора и подгруппой скалярных матриц в качестве $R \subseteq \mathbb{T}$ последнее условие выполнено только для точек $x \neq 0$ на одной из координатных осей.

ЛЕММА 2.3. Для любой точки⁶ $x \in X_{\text{reg}} \setminus \mathcal{O}_{\sigma^\vee}$ найдется такой корень $e \in \mathcal{R}(\sigma)$, что

$$\dim \mathbb{T}.y > \dim \mathbb{T}.x$$

для типичной точки $y \in H_e.x$. В частности, пара $(\mathbb{T}.y, \mathbb{T}.x)$ является H_e -связанной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $x \notin \mathcal{O}_{\sigma^\vee}$, найдется собственная грань, скажем, $\sigma_2 \subseteq \sigma$, для которой $\mathbb{T}.x = \mathcal{O}_{\sigma_2^\perp}$. Поскольку точка $x \in X$ гладкая, порождающие на ребрах $\rho_1, \dots, \rho_s$ конуса σ_2 образуют базис примитивной подрешетки $N' \subseteq N$ (см. [32; § 2.1]). Пусть σ_1 – гипергрань конуса σ_2 , порожденная $\rho_2, \dots, \rho_s$. Используя вновь соответствие между орбитами и гранями, получаем, что $\mathcal{O}_{\sigma_2^\perp} \subseteq \mathcal{O}_{\sigma_1^\perp}$ и $\dim \mathcal{O}_{\sigma_1^\perp} = 1 + \dim \mathcal{O}_{\sigma_2^\perp}$. Покажем, что пара $(\mathcal{O}_{\sigma_1^\perp}, \mathcal{O}_{\sigma_2^\perp})$ является H_e -связанной для некоторого корня $e \in \mathcal{R}(\sigma)$, удовлетворяющего условиям леммы 2.2.

Выберем такую гиперплоскость $L \subseteq N_{\mathbb{Q}}$, касающуюся σ , что $\sigma_2 = \sigma \cap L$. Мы получим разложение $N = N' \oplus N'' \oplus N'''$, где $N \cap L = N' \oplus N''$ и $N''' \cong \mathbb{Z}$. Рассмотрим линейную форму e_1 на N' , определенную условиями

$$\langle \rho_1, e_1 \rangle = -1, \quad \langle \rho_2, e_1 \rangle = \dots = \langle \rho_s, e_1 \rangle = 0.$$

Пусть e_2 – ненулевая линейная форма на N''' . Продолжая e_1 и e_2 на всю решетку N нулем на дополнительных подрешетках, мы получаем линейную форму $e = e_1 + e_2$ на N . Умножая e_2 на подходящее целое число, мы можем считать, что $\langle \rho_j, e \rangle > 0$ для любого $\rho_j \notin \sigma_2$. Тогда e – такой корень конуса σ , что $\rho_e = \rho_1$, и условие леммы 2.2 для e выполнено. По лемме 2.2 пара $(\mathcal{O}_{\sigma_1^\perp}, \mathcal{O}_{\sigma_2^\perp})$ является H_e -связанной, как и утверждалось. Поскольку $\mathbb{T}.x = \mathcal{O}_{\sigma_2^\perp}$ и тор $\mathbb{T}$ нормализует подгруппу H_e , требуемое утверждение следует из предложения 2.1 и наблюдения из определения 2.3.

Итак, мы располагаем всем необходимым для доказательства бесконечной транзитивности в теореме 2.1. Это доказательство проводится в несколько этапов; см. ниже леммы 2.4–2.9.

ЛЕММА 2.4. Для любого набора $Q_1, \dots, Q_m \in X_{\text{reg}}$ из m попарно различных точек найдется такой автоморфизм $\phi \in \text{SAut}(X)$, что образы $\phi(Q_1), \dots, \phi(Q_m)$ содержатся в открытой $\mathbb{T}$ -орбите.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$d(Q_1, \dots, Q_m) = \dim \mathbb{T}.Q_1 + \dots + \dim \mathbb{T}.Q_m$$

и будем считать, что $\dim \mathbb{T}.Q_i < \dim X$ для некоторого i . Согласно лемме 2.3 найдется такой корень $e \in \mathcal{R}(\sigma)$, что $\dim \mathbb{T}.P_i > \dim \mathbb{T}.Q_i$ для типичной точки $P_i \in H_e.Q_i$. Зафиксируем изоморфизм $\lambda_e: G_a(\mathbb{k}) \xrightarrow{\cong} H_e$. Имеется конечное множество значений $t \in G_a(\mathbb{k})$, для которых $\dim \mathbb{T}.(\lambda_e(t).Q_j) < \dim \mathbb{T}.Q_j$ при

⁶Напомним, что $\mathcal{O}_{\sigma^\vee}$ – открытая $\mathbb{T}$ -орбита в X .

некотором $j \neq i$. Поэтому для типичного $t \in G_a(\mathbb{k})$ получаем

$$d(\lambda_e(t).Q_1, \dots, \lambda_e(t).Q_m) > d(Q_1, \dots, Q_m).$$

Теперь требуемое утверждение легко проверяется по индукции.

С этого момента будем предполагать, что точки $Q_1, \dots, Q_m$ содержатся в открытой $\mathbb{T}$ -орбите $\mathbb{T}.x_0$. Зафиксируем максимальное линейно независимое подмножество порождающих на лучах $\{\rho_1, \dots, \rho_n\} =: \Xi^{(0)} \subseteq \Xi$, где $n = \dim X$. Для каждого $i = 1, \dots, n$ выберем изоморфизм $\rho_i: G_m(\mathbb{k}) \xrightarrow{\cong} R_{\rho_i}$, который обозначим той же буквой, что и порождающий элемент. Напомним, что для корня $e \in \mathcal{R}(\sigma)$ вложение $\mathbb{k}[X]^{H_e} \subseteq \mathbb{k}[X]$ индуцирует морфизм $\tau: X \rightarrow Z$, где $Z = \operatorname{Spec} \mathbb{k}[X]^{H_e}$.

ЛЕММА 2.5. Пусть $\rho_i \in \Xi^{(0)}$ и $e \in \mathcal{R}(\sigma)$ – корень, для которого $\rho_e = \rho_i$. Тогда для любого конечного набора $\mathcal{T}_0, \dots, \mathcal{T}_k$ попарно различных R_e -орбит в $\mathbb{T}.x_0$ найдется регулярный инвариант $q \in \mathbb{k}[X]^{H_e}$, который тождественно равен 1 на $\mathcal{T}_0$ и обращается в нуль на $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Морфизм факторизации $\tau: X \rightarrow Z$ разделяет типичные H_e -орбиты (см. [35; теоремы 2.3 и 3.3]). Поскольку тор $\mathbb{T}$ нормализует подгруппу H_e , имеется такое $\mathbb{T}$ -действие на Z , что морфизм τ является $\mathbb{T}$ -эквивариантным. В частности, для любого $x \in \mathbb{T}.x_0$ слой τ , проходящий через точку x , составляет одну H_e -орбиту. В соответствии с предложением 2.1 R_e -орбиты $\mathcal{T}_0, \dots, \mathcal{T}_k$ совпадают с пересечениями соответствующих H_e -орбит и открытой орбиты $\mathbb{T}.x_0$. Поэтому для каждого $j = 1, \dots, k$ найдется инвариант $q_j \in \mathbb{k}[X]^{H_e}$, который обращается в нуль на $\mathcal{T}_j$ и равен константе 1 на $\mathcal{T}_0$. Легко видеть, что произведение $q = q_1 \cdots q_k \in \mathbb{k}[X]^{H_e}$ обладает искомыми свойствами.

В обозначениях леммы 2.5 пусть $\operatorname{Stab}_{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k}(\mathcal{T}_0) \subseteq \operatorname{SAut}(X)$ – подгруппа всех преобразований, которые стабилизируют поточечно орбиты $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k$ и оставляют инвариантным замыкание $\overline{\mathcal{T}_0}$ в X .

ЛЕММА 2.6. Существует однопараметрическая унитарная подгруппа $H \subseteq \operatorname{Stab}_{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k}(\mathcal{T}_0)$, действующая на $\overline{\mathcal{T}_0}$ транзитивно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и ранее, пусть $e \in \mathcal{R}(\sigma)$ – корень, для которого $\rho_e = \rho_i$, и q – регулярный H_e -инвариант из леммы 2.5. Локально нильпотентное дифференцирование $q\partial_e \in \operatorname{Der} \mathbb{k}[X]$ определяет однопараметрическую унитарную подгруппу $H \subseteq \operatorname{Stab}_{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k}(\mathcal{T}_0)$. Ясно, что ограничение $H|_{\mathcal{T}_0} = H_e|_{\mathcal{T}_0}$ действует на $\overline{\mathcal{T}_0} \cong \mathbb{A}^1$ сдвигами и поэтому транзитивно.

В оставшейся части доказательства теоремы 2.1 используются следующие обозначения. Пусть $\Xi^{(0)} = \{\rho_1, \dots, \rho_n\}$ – базис в $N_{\mathbb{Q}}$, составленный из порождающих на лучах. Рассмотрим гомоморфизм $\theta: G_m(\mathbb{k})^n \rightarrow \mathbb{T}$ из стандартного n -мерного тора в $\mathbb{T}$, заданный как

$$\theta: (t_1, \dots, t_n) \longmapsto (\rho_1(t_1) \cdots \rho_n(t_n)). \quad (2.10)$$

Легко видеть, что θ сюръективен, а его ядро $\Theta = \ker(\theta)$ – это конечная подгруппа в $G_m(\mathbb{k})^n$. Рассмотрим также индуцированный сюръективный морфизм из $G_m(\mathbb{k})^n$ на открытую орбиту $\mathbb{T}.x_0$. В частности, для m попарно различных точек $Q_1, \dots, Q_m \in \mathbb{T}.x_0$ можно записать

$$Q_j = \theta(t_{1,j}, \dots, t_{n,j}).x_0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.11)$$

где точка $(t_{1,j}, \dots, t_{n,j}) \in G_m(\mathbb{k})^n$ определяется по Q_j с точностью до покомпонентного действия подгруппы Θ на $G_m(\mathbb{k})^n$:

$$\vartheta.(t_1, \dots, t_n) = (\vartheta_1 t_1, \dots, \vartheta_n t_n), \quad \text{где } \vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) \in \Theta. \quad (2.12)$$

Для $\kappa = \text{ord } \Theta$ из теоремы Лагранжа следует, что $\vartheta_i^\kappa = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Зафиксируем стандартный набор из m точек на $\mathbb{T}.x_0$:

$$Q_{j0} = \theta(j, \dots, j).x_0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.13)$$

Поскольку $\text{Char}(\mathbb{k}) = 0$ и $\bar{\mathbb{k}} = \mathbb{k}$, эти точки попарно различны. Остается найти такой автоморфизм $\varphi \in \text{SAut}(X)$, что $\varphi(Q_j) = Q_{j0}$ для каждого $j = 1, \dots, m$. Для этого воспользуемся леммами 2.7 и 2.8 (см. ниже).

Будем говорить, что $t, t' \in G_m(\mathbb{k})$ κ -эквивалентны, если $t' = \varepsilon t$, где $\varepsilon \in G_m(\mathbb{k})$ – корень степени κ из единицы.

ЛЕММА 2.7. а) Для любых попарно различных элементов $t_1, \dots, t_n \in G_m(\mathbb{k})$ множество таких элементов $a \in \mathbb{k}$, что $t_i + a$ и $t_j + a$ являются κ -эквивалентными для некоторых $i \neq j$, конечно.

б) Зафиксируем $s \in \{1, \dots, n\}$. Если точки Q_i и Q_j принадлежат одной R_s -орбите, то их r -е координаты $t_{i,r}$ и $t_{j,r}$ κ -эквивалентны для всех $r \neq s$.

с) Предположим, что точки $Q_{j_1}, \dots, Q_{j_l}$ лежат на одной R_s -орбите $\mathcal{T}^{(s)}$. Тогда их образы при типичном сдвиге вдоль прямой $\overline{\mathcal{T}^{(s)}} \cong \mathbb{A}^1$ лежат на попарно различных R_r -орбитах для всех $r \neq s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть ε – корень степени κ из единицы. Тогда линейное соотношение

$$t_i + a = \varepsilon(t_j + a)$$

выполнено не более чем для одного значения a . Это доказывает п. а).

Пункт б) имеет место, поскольку R_s -действие на X , поднятое посредством (2.10), изменяет только компоненту $t_{i,s}$ точки Q_i в (2.11), тогда как Θ -действие на $G_m(\mathbb{k})^n$ заменяет значение $t_{i,r}$ ($r \neq s$) на κ -эквивалентное.

Пункт с) немедленно следует из а) и б), поскольку для $i \neq j$ пересечение любых R_i - и R_j -орбит не более чем конечно.

ЛЕММА 2.8. В использованных выше обозначениях найдется такое $\psi \in \text{SAut}(X)$, что точки $\psi(Q_1), \dots, \psi(Q_m)$ лежат в различных R_1 -орбитах на $\mathbb{T}.x_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По нашему предположению $n \geq 2$, поэтому на X определено действие группы R_2 . Пусть $\mathcal{T}_0^{(2)}, \dots, \mathcal{T}_k^{(2)}$ – различные R_2 -орбиты, проходящие через точки $Q_1, \dots, Q_m$ таким образом, что этот набор распадается на $k+1$ попарно непересекающихся поднаборов. Мы можем считать, что поднабор, лежащий на $\mathcal{T}_0^{(2)}$ – это $Q_1, \dots, Q_l$. Применяя лемму 2.6 к $\rho_e = \rho_2$, мы найдем однопараметрическую унипотентную подгруппу $H \subseteq \text{Stab}_{\mathcal{T}_1^{(2)}, \dots, \mathcal{T}_k^{(2)}}(\mathcal{T}_0^{(2)})$,

действующую сдвигами вдоль $\overline{\mathcal{T}_0^{(2)}} \cong \mathbb{A}^1$. По лемме 2.7 образы $Q_1, \dots, Q_l$ при типичном сдвиге лежат в разных R_r -орбитах для всех $r \neq 2$, тогда как остальные точки Q_j , $j > l$, остаются неподвижными. Применяя такую же процедуру последовательно к другим поднаборам, мы получим в итоге такой автоморфизм $\psi \in \text{SAut}(X)$, что точки $\psi(Q_1), \dots, \psi(Q_m)$ лежат в разных R_r -орбитах для всех $r \neq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Начнем с утверждения о бесконечной транзитивности. По лемме 2.8 мы можем считать, что орбиты $\mathcal{T}_j^{(1)} = R_1 \cdot Q_j$, $j = 1, \dots, m$, попарно различны. Лемма 2.6 показывает, что можно изменить компоненту $t_{1,j}$ точки Q_j произвольно, оставляя неизменными другие компоненты и другие точки из нашего набора. Добьемся того, чтобы $t_{1,j} = j$ для всех $j = 1, \dots, m$. После этого для любого $l \geq 2$ орбиты $R_l \cdot Q_1, \dots, R_l \cdot Q_m$ будут попарно различны. Вновь применяя лемму 2.6 к каждой R_l -орбите для $l = 2, \dots, n$, мы получаем стандартный набор $Q_1^{(0)}, \dots, Q_m^{(0)}$, как в (2.13), с $t_{l,j} = j$ для всех $j = 1, \dots, m$, $l = 1, \dots, n$. Это доказывает бесконечную транзитивность в теореме 2.1.

Утверждение о гибкости сформулируем в виде отдельной леммы.

ЛЕММА 2.9. *Любое невырожденное аффинное торическое многообразие X является гибким.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\dim X = 1$, то $X \cong \mathbb{A}^1$, и утверждение леммы очевидно. Далее считаем, что $\dim X \geq 2$. Мы уже знаем, что группа $\mathrm{SAut}(X)$ действует на X_{reg} (бесконечно) транзитивно. Поэтому достаточно найти на X_{reg} одну гибкую точку. Покажем, что точка x_0 в открытой $\mathbb{T}$ -орбите является гибкой. Рассмотрим действие стандартного тора $G_m(\mathbb{k})^n$ на X , индуцированное $\mathbb{T}$ -действием на X посредством (2.10). Стабилизатор $\mathrm{Stab}(x_0) \subseteq G_m(\mathbb{k})^n$ конечен и касательное отображение $T_g G_m(\mathbb{k})^n \rightarrow T_{x_0} X$ в каждой точке $g \in \mathrm{Stab}(x_0)$ сюръективно. Поэтому касательные векторы в x_0 к орбитам $R_i \cdot x_0$, $i = 1, \dots, n$, порождают касательное пространство $T_{x_0} X$. Замечание 2.1 показывает, что для каждого $i = 1, \dots, n$ найдется такой корень $e_i \in \mathcal{R}(\sigma)$, что $\rho_i = \rho_{e_i}$. Поскольку точка x_0 не может быть неподвижной относительно однопараметрической подгруппы H_{e_i} , из предложения 2.1 вытекает, что $H_{e_i} \cdot x_0 = \overline{R_i \cdot x_0}$. При подходящей параметризации этих двух орбит их векторы скоростей в x_0 совпадут. Поэтому $T_{x_0} X$ порождается касательными векторами к орбитам $H_{e_i} \cdot x_0$, $i = 1, \dots, n$, что и означает, что точка x_0 является гибкой на X .

Доказательство теоремы 2.1 завершено.

ПРИМЕР 2.2. Рассмотрим особую аффинную торическую поверхность $X_{d,e} = \mathbb{A}^2/G_d$, где d и e – взаимно простые целые числа, $0 < e < d$, и G_d обозначает циклическую группу, порожденную первообразным корнем ζ степени d из единицы, которая действует на $\mathbb{A}^2$ как $\zeta \cdot (x, y) = (\zeta x, \zeta^e y)$. Известно (см. [36]–[38]), что для $e \geq 2$ множество гладких точек $(X_{d,e})_{\mathrm{reg}} = X_{d,e} \setminus \{0\}$ не является однородным пространством аффинной алгебраической группы. Однако $X_{d,e} \setminus \{0\}$ однородно относительно действия бесконечномерной группы $\mathrm{SAut}(X_{d,e})$.

§ 3. Аффинные надстройки

В этом параграфе мы доказываем часть 3 теоремы 0.2. Напомним следующие необходимые понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $X^{(0)}$ – аффинное многообразие. Будем называть *цилиндром* над $X^{(0)}$ произведение $X^{(0)} \times \mathbb{A}^1$. Если задана непостоянная регулярная функция $f_1 \in \mathbb{k}[X^{(0)}]$, то рассмотрим новое аффинное многообразие

$$X^{(1)} = \mathrm{Susp}(X^{(0)}, f_1) := \{f_1(x) - uv = 0\} \subseteq X^{(0)} \times \mathbb{A}^2,$$

$X^{(i)}$ является гибким и группа $\text{SAut}(X^{(i)})$ действует на $X_{\text{reg}}^{(i)}$ m -транзитивно для всех $m \in \mathbb{N}$.

Бесконечная транзитивность в теоремах 3.1–3.3 доказывается в пп. 3.1–3.3 соответственно. Гибкость во всех трех случаях проверяется в п. 3.4.

3.1. Надстройки над прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО БЕСКОНЕЧНОЙ ТРАНЗИТИВНОСТИ В ТЕОРЕМЕ 3.1. (Рассуждения совершенно элементарны и опираются на явную формулу из работы [39].) Можно считать, что $d = \deg f \geq 2$. Согласно работе⁷ [39] в нашем случае группа специальных автоморфизмов $\text{SAut}(X)$ содержит коммутативные подгруппы G_u и G_v , порожденные унитарными подгруппами

$$H_u(q): (x, u, v) \mapsto \left(x + tq(u), u, v + \frac{f(x + tq(u)) - f(x)}{u} \right), \quad (3.2)$$

$$H_v(q): (x, u, v) \mapsto \left(x + tq(v), u + \frac{f(x + tq(v)) - f(x)}{v}, v \right) \quad (3.3)$$

соответственно, где $q(z) \in \mathbb{k}[z]$, $q(0) = 0$ и $t \in \mathbb{k}$. Очевидно, что $u \in \mathbb{k}[X]^{G_u}$ и $v \in \mathbb{k}[X]^{G_v}$. Мы утверждаем, что подгруппа $G = \langle G_u, G_v \rangle \subseteq \text{SAut}(X)$ действует на X_{reg} m -транзитивно при всех $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, для любого заданного набора попарно различных точек из X_{reg}

$$Q_1 = (x_1, u_1, v_1), \quad \dots, \quad Q_m = (x_m, u_m, v_m)$$

мы хотим найти автоморфизм $\phi \in G$, переводящий этот набор в стандартный набор

$$Q_i^{(0)} = (x_i^{(0)}, u_i^{(0)}, v_i^{(0)}), \quad i = 1, \dots, m,$$

выбранный таким образом, что все $v_i^{(0)}$ отличны от нуля и попарно различны.

Шаг 1. Действуя при помощи подгруппы G_u , можно перевести исходный набор в такой набор, что $v_i \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, m$. Действительно, так как $f^{(d)}(x)$ – ненулевая постоянная и либо $f'(x) \neq 0$, либо $u \neq 0$, то многочлен

$$\frac{f(x + tu) - f(x)}{u} = \frac{f'(x)}{1!}t + \dots + \frac{f^{(d)}(x)}{d!}u^{d-1}t^d \in \mathbb{k}[x, u][t]$$

отличен от константы. Так как точка $Q_s \in X$ гладкая, равенства $u_s = 0$, $v_s = 0$, $f'(x_s) = 0$ не могут выполняться одновременно. Поэтому действие автоморфизма (3.2) с $q = z$ и достаточно общим значением параметра t не меняет координату $v_s = 0$, но при этом оставляет ненулевыми те v_i , которые уже были ненулевыми. Отсюда вытекает требуемое утверждение.

Шаг 2. С этого момента будем считать, что $v_i \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, m$. Тогда, действуя группой G_v , мы можем перевести исходный набор в такой, для которого все u_i , $i = 1, \dots, m$, отличны от нуля и попарно различны. Действительно, пусть

$$F(Q_i, q, t) = \frac{f'(x_i)}{1!} \frac{q(v_i)}{v_i} t + \dots + \frac{f^{(d)}(x_i)}{d!} \frac{q(v_i)^d}{v_i} t^d \in \mathbb{k}[t].$$

⁷См. также [40]–[42].

Получаем, что $(x_i, v_i) \neq (x_j, v_j)$ для всех $i \neq j$, так как $(x_i, u_i, v_i) \neq (x_j, u_j, v_j)$, где $u_i = f(x_i)/v_i$ и $u_j = f(x_j)/v_j$. Если $v_i = v_j$, то $f^{(d-1)}(x_i) \neq f^{(d-1)}(x_j)$, так как линейная функция $f^{(d-1)}(x)$ является ненулевой. Поэтому для подходящего $q \in \mathbb{k}[z]$, удовлетворяющего условию $q(v_i) \neq 0$ для всех i , многочлены $F(Q_i, q, t)$ и $F(Q_j, q, t)$ различны при всех $i \neq j$. Применяя автоморфизм $H_v(q)$ из (3.3) с достаточно общим t , получаем требуемое.

Шаг 3. Далее можно считать, что все координаты u_j отличны от нуля и попарно различны. Покажем, что при помощи группы G_u можно перевести исходный набор точек в набор со стандартными значениями $v_s^{(0)}$, $s = 1, \dots, m$. Для этого мы строим автоморфизм, оставляющий неподвижными все точки, кроме Q_i , и переводящий Q_i в новую точку Q'_i , для которой $v'_i = v_i^{(0)}$. А именно, зафиксируем многочлен $q(z)$, для которого $q(0) = 0$, $q(u_i) \neq 0$ и $q(u_j) = 0$ при всех $j \neq i$. Из условий, наложенных на $f(x)$, следует, что у уравнения $f(x) = u_i(v_i^{(0)} - v_i) + f(x_i)$ есть корень $x = a_i$, где $a_i \in \mathbb{k}$. Применяя $H_u(q)$ в (3.2) для $t = (a_i - x_i)/q(u_i)$, получаем требуемое.

Шаг 4. Теперь можно считать, что $v_i = v_i^{(0)}$ для всех i . Достаточно при помощи группы G_v добиться того, чтобы для всех i значения координат x_i были равны $x_i^{(0)}$. Действительно, в этом случае $u_i = f(x_i)/v_i = f(x_i^{(0)})/v_i^{(0)} = u_i^{(0)}$. Далее применим $H_u(q)$, как и в (3.3), полагая $t = 1$ и выбирая многочлен q таким образом, что $q(0) = 0$ и $q(v_i^{(0)}) = x_i^{(0)} - x_i$ для всех i . Это завершает доказательство.

3.2. Бесконечная транзитивность в высших размерностях. Достаточно доказать теоремы 3.2, 3.3 при $l = 1$. Прежде чем переходить к собственно доказательствам, установим в леммах 3.1–3.3 некоторые полезные элементарные свойства надстроек. В леммах 3.1–3.4 мы предполагаем, что основное поле $\mathbb{k}$ имеет характеристику нуль.

ЛЕММА 3.1. *Если многообразие $X^{(0)}$ неприводимо, то и надстройка $X^{(1)} = \text{Susp}(X^{(0)}, f)$ также неприводима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая от противного, предположим, что найдутся такие ненулевые функции

$$F_1, F_2 \in \mathbb{k}[X^{(1)}] = \mathbb{k}[X^{(0)}][u, v]/(uv - f), \quad \text{что} \quad F_1 F_2 = 0.$$

Можно считать, что мы выбрали F_1 и F_2 так, что $\deg_{u,v}(F_1) + \deg_{u,v}(F_2)$ минимально, а также что ни один моном в F_i не содержит произведение uv , иначе мы могли бы заменить это произведение на f согласно определению 3.1. Если переменная u входит и в F_1 , и в F_2 , то $\deg_u(F_1 F_2) > 0$, так как старший по u член ни с чем не сократится. С точностью до перестановки u и v мы можем считать, что в многочлен F_1 не входит переменная v , а в многочлен F_2 не входит переменная u . Запишем

$$F_1 = \sum_{i=0}^k a_i u^i, \quad F_2 = \sum_{j=0}^l b_j v^j,$$

где $a_i, b_j \in \mathbb{k}[X^{(0)}]$, а значение $k + l$ минимально возможное.

Если $k = l = 0$, то $F_1, F_2 \in \mathbb{k}[X^{(0)}]$ являются делителями нуля, что противоречит неприводимости $X^{(0)}$. Поэтому $k + l > 0$.

Если $a_0 = b_0 = 0$, то мы можем уменьшить общую степень $k + l$, вынося за скобки u и v . Это противоречит предположению о минимальности. Поэтому можно считать, что $a_0 \neq 0$. Тогда в произведение $F_1 F_2$ должен входить ненулевой член $a_0 b_l v^l$, что вновь приводит к противоречию. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\pi: X^{(1)} \rightarrow X^{(0)}$ – ограничение проекции $X^{(0)} \times \mathbb{A}^2 \rightarrow X^{(0)}$ на $X^{(1)}$. Тогда $\pi(X_{\text{reg}}^{(1)}) = X_{\text{reg}}^{(0)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что идеал подмногообразия $X^{(0)} \subseteq \mathbb{A}^s$ порождается функциями $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_s]$. Точка $P \in X^{(0)}$ является гладкой тогда и только тогда, когда ранг якобиана

$$D_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_s} \end{pmatrix}$$

в точке P достигает своего максимального значения $s - \dim X^{(0)}$. Аналогичная матрица для $X^{(1)}$ имеет вид

$$D_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_s} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_s} & 0 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_s} & -v & -u \end{pmatrix}.$$

Очевидно, в любой точке $\text{rk } D_1 \leq 1 + \text{rk } D_0$. Так как $\dim X^{(1)} = 1 + \dim X^{(0)}$, все гладкие точки многообразия $X^{(1)}$ отображаются под действием π в гладкие точки $X^{(0)}$. С другой стороны, пусть M – квадратная подматрица D_0 , а $P \in X_{\text{reg}}^{(0)}$ – такая точка, что ранг $M(P)$ равен $r = s - \dim X^{(0)}$, т.е. рангу матрицы D_0 . Расширим M до квадратной подматрицы M' ранга $r + 1$: добавим последнюю строку и один из дополнительных столбцов D_1 таким образом, чтобы $\text{rk } M'(P, u, v) = 1 + \text{rk } M(P) = r + 1$ для некоторых $(u, v) \neq (0, 0)$, где $(P, u, v) \in X^{(1)}$. Тогда $(P, u, v) \in X_{\text{reg}}^{(1)}$. Из этого следует утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Пусть A – аффинная алгебра. Напомним (см. [7]), что *аффинной модификацией* A с центром (I, v) , где $I \subseteq A$ – идеал, а $v \in I$ не является делителем нуля, называется факторалгебра $A[It]/(1 - vt)$, где

$$A[It] = A \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} (It)^n \cong A \oplus I \oplus I^2 \oplus \cdots = \text{Bl}_I(A)$$

– алгебра Рисса, ассоциированная с парой (A, I) , и t – формальная переменная.

Геометрически многообразие $\text{Spec}(A[It]/(1 - vt))$ можно получить из $X = \text{Spec } A$ следующим образом. Надо раздуть X с центром в I , а затем удалить из $\text{Bl}_I(X)$ собственный прообраз дивизора нулей $V(v)$ в X . Полученное многообразие снова будет аффинным. (Заметим, что собственный прообраз D пересекает исключительный дивизор E , так как $v \in I$; детали можно найти в [7; § 1].)

Согласно [7; пример 1.4 и § 5] надстройка $X^{(1)} = \text{Susp}(X^{(0)}, f)$ может быть получена как аффинная модификация $X^{(0)} \times \mathbb{A}^1$ (где $\mathbb{A}^1 = \text{Spec } \mathbb{k}[v]$) с центром $(I_1 = (v, f), v)$ вдоль дивизора $v = 0$. Меняя ролями v и u , получаем, что многообразие $X^{(1)}$ является также аффинной модификацией $X^{(0)} \times \mathbb{A}^1$, где на сей раз $\mathbb{A}^1 = \text{Spec } \mathbb{k}[u]$, с центром $(I_2 = (u, f), u)$ вдоль дивизора $u = 0$. Исключительные дивизоры этих двух модификаций ($v = 0$ и $u = 0$ соответственно) оба изоморфны $X^{(0)} \times \mathbb{A}^1$, но различны как подмногообразия в $X^{(1)}$. Для произвольного $c \in \mathbb{k}$ будем обозначать через $U_c = \{u = c\}$ и $V_c = \{v = c\}$ гиперповерхности уровня в $X^{(1)}$, часто используемые в дальнейшем.

В [7; § 2] указан способ, позволяющий поднять произвольное ЛНД ∂ на аффинную модификацию в том случае, когда ∂ сохраняет центр модификации. В лемме 3.3 (см. ниже) мы конкретизируем этот метод для частного случая аффинных надстроек.

Пусть дано ЛНД δ_0 аффинной области целостности A_0 и многочлен $q \in \mathbb{k}[z]$, для которого $q(0) = 0$. Тогда можно определить новое ЛНД $\delta' = \delta'(\delta_0, q)$ на $A' = A_0 \otimes \mathbb{k}[v]$, где v – новая переменная, следующим образом. Сначала продолжим δ_0 на A' , полагая $\delta_0(v) = 0$, а затем домножим δ_0 на элемент $q(v) \in \ker \delta_0$. Предположим, что A_0 порождается $x_1, x_2, \dots, x_s$. Тогда δ' записывается в координатах как

$$\delta'(x_i) = q(v)\delta_0(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad \delta'(v) = 0. \quad (3.4)$$

Теперь рассмотрим еще одну независимую переменную u и ненулевой элемент $f \in A_0$. Рассмотрим алгебру регулярных функций A_1 на надстройке над A_0 :

$$A_1 = (A_0 \otimes \mathbb{k}[u, v]) / (uv - f).$$

ЛЕММА 3.3. *В тех же обозначениях, что и выше, любое ЛНД $\delta' \in \text{Der } A'$ может быть преобразовано в ЛНД $\delta_1 = \delta_1(\delta_0, q) \in \text{Der } A_1$, если положить*

$$\delta_1(x_i) = \delta'(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad \delta_1(u) = \frac{q(v)}{v}\delta_0(f), \quad \delta_1(v) = \delta'(v) = 0. \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим, что эти формулы поднимают δ' до $\delta_1 = \delta_1(\delta_0, q) \in \text{Der}(A_0 \otimes \mathbb{k}[u, v])$, где δ_1 сохраняет идеал $(uv - f)$. Благодаря выбору q получаем, что $q(v)/v \in \mathbb{k}[v]$, и дифференцирование δ_1 корректно определено на образующих алгебры $A_0 \otimes \mathbb{k}[u, v]$. Легко видеть, что δ_1 локально нильпотентно. Непосредственное вычисление показывает, что $\delta_1(uv - f) = 0$. Поэтому δ_1 опускается до ЛНД факторалгебры A_1 . Это последнее ЛНД мы также обозначаем через δ_1 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть G_v – подгруппа группы специальных автоморфизмов $\text{SAut}(X^{(1)})$, порожденная всеми однопараметрическими унипотентными подгруппами

$$H_v(\delta_0, q) = \exp(t\delta_1), \quad \text{где } t \in \mathbb{k}_+, \quad \delta_1 = \delta_1(\delta_0, q),$$

причем δ_0 и $q(t)$ определены, как выше⁸. Меняя v и u ролями, мы получаем вторую подгруппу $G_u \subseteq \mathrm{SAut}(X^{(1)})$. При этом $u \in \mathbb{k}[X^{(1)}]^{G_u}$ и $v \in \mathbb{k}[X^{(1)}]^{G_v}$. Покажем, что подгруппа $G \subseteq \mathrm{SAut}(X^{(1)})$, порожденная G_u и G_v , действует бесконечно транзитивно на $X_{\mathrm{reg}}^{(1)}$.

Зафиксируем k попарно различных чисел $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{k}$. Пусть $\mathrm{Stab}_{c_1 \dots c_k}^v$ – подгруппа группы G_v , оставляющая неподвижными все точки каждой гиперповерхности $V_{c_s} \subseteq X^{(1)}$, $s = 1, \dots, k$.

ЛЕММА 3.4. *Предположим, что группа $\mathrm{SAut}(X^{(0)})$ действует на $X_{\mathrm{reg}}^{(0)}$ m -транзитивно. Тогда для любых попарно различных чисел $c_0, c_1, \dots, c_k \in G_m(\mathbb{k})$ группа $\mathrm{Stab}_{c_1 \dots c_k}^v$ действует на $V_{c_0} \cap X_{\mathrm{reg}}^{(1)}$ m -транзитивно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два набора из m различных точек $P'_1, \dots, P'_m$ и $Q'_1, \dots, Q'_m$ в $V_{c_0} \cap X_{\mathrm{reg}}^{(1)}$. Пусть $P_1, \dots, P_m$ и $Q_1, \dots, Q_m$ – их проекции на $X^{(0)}$ под действием π . Заметим, что гиперповерхность $V_{c_0} \subseteq X^{(1)}$ под действием π отображается изоморфно на $X^{(0)}$. При этом по лемме 3.2 известно, что $\pi(V_{c_0} \cap X_{\mathrm{reg}}^{(1)}) \subseteq X_{\mathrm{reg}}^{(0)}$. Точка $P' \in V_{c_0}$ может быть записана как $P' = (P, u, c_0)$, где $P = \pi(P') \in X^{(0)}$ и $u = u(P') = f(P)/c_0$. Поэтому у любой гладкой точки на $X^{(0)}$ есть прообраз на $X_{\mathrm{reg}}^{(1)}$. Следовательно, мы имеем изоморфизм $X^{(0)} \xrightarrow{\cong} V_{c_0}$, переводящий P в P' .

Так как в силу наших предположений группа $\mathrm{SAut}(X^{(0)})$ действует на $X_{\mathrm{reg}}^{(0)}$ m -транзитивно, существует автоморфизм $\psi_0 \in \mathrm{SAut}(X^{(0)})$, который переводит упорядоченный набор $(P_1, \dots, P_m)$ в $(Q_1, \dots, Q_m)$. Этот автоморфизм может быть записан как произведение

$$\psi_0 = \prod_{i=1}^k \exp(\delta_0^{(i)})$$

для некоторых ЛНД $\delta_0^{(1)}, \dots, \delta_0^{(k)} \in \mathrm{Der} \mathbb{k}[X^{(0)}]$.

Полагая $q = \alpha z(z - c_1) \cdots (z - c_k)$, где $\alpha \in G_m(\mathbb{k})$ таково, что $q(c_0) = 1$, по лемме 3.3 мы можем поднять ЛНД $\delta_0^{(i)}$ до ЛНД

$$\delta_1^{(i)} = \delta_1^{(i)}(\delta_0^{(i)}, q) \in \mathrm{Der} \mathbb{k}[X^{(1)}], \quad i = 1, \dots, k.$$

Поэтому ψ_0 может быть поднят до автоморфизма

$$\psi_1 = \prod_{i=1}^k \exp(\delta_1^{(i)}) \in G_v \subseteq \mathrm{SAut}(X^{(1)}).$$

Применив (3.4), можно легко установить, что все действия на $X^{(1)}$ соответствующих однопараметрических унитарных подгрупп $H_v(\delta_0^{(i)}, q)$ ограничиваются до исходных действий на $V_{c_0} \cong X^{(0)}$. Поэтому автоморфизм $\psi_1|_{V_{c_0}} = \psi_0$ переводит $(P'_1, \dots, P'_m)$ в $(Q'_1, \dots, Q'_m)$. Благодаря подходящему выбору $q(z)$ этот автоморфизм оставляет неподвижными все точки остальных гиперповерхностей V_{c_s} . Лемма доказана.

⁸Заметим, что для $X^{(0)} = \mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec} \mathbb{k}[z]$ и $\delta_0 = d/dz$ мы получим $H_v(\delta_0, q) = H_v(q)$ согласно (3.3).

ЛЕММА 3.5. Пусть $\mathbb{k}$ – алгебраически замкнутое поле характеристики нуля. Предположим, как и выше, что группа $\mathrm{SAut}(X^{(0)})$ действует на $X_{\mathrm{reg}}^{(0)}$ m -транзитивно. Тогда для любого набора попарно различных точек $Q'_1, \dots, Q'_m \in X_{\mathrm{reg}}^{(1)}$ существует такой автоморфизм $\varphi \in \mathrm{SAut}(X^{(1)})$, что $\varphi(Q'_i) \notin U_0 \cup V_0$ при всех $i = 1, 2, \dots, m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем называть точку $Q'_i = (Q_i, u_i, v_i) \in X^{(1)}$ гиперболической, если $u_i v_i \neq 0$, т.е. если $Q'_i \notin U_0 \cup V_0$. Мы хотим показать, что при помощи элемента группы специальных автоморфизмов можно перевести исходный набор в такой набор, в котором все точки будут гиперболическими. Предположим, что $Q'_1, \dots, Q'_l$ уже гиперболические, а Q'_{l+1} – нет, $l \geq 0$. Достаточно доказать, что можно отобразить Q'_{l+1} в точку, лежащую вне $U_0 \cup V_0$, не нарушая гиперболическости точек $Q'_1, \dots, Q'_l$, и воспользоваться индукцией. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $u_{l+1} = 0, v_{l+1} \neq 0$.

Случай 2: $u_{l+1} = v_{l+1} = 0$.

Мы утверждаем, что существует автоморфизм $\varphi \in \mathrm{SAut}(X^{(1)})$, оставляющий $Q'_1, \dots, Q'_l$ гиперболическими и такой, что в случае 1 точка $\varphi(Q'_{l+1})$ становится тоже гиперболической, а в случае 2 эта точка удовлетворяет условиям случая 1.

В случае 1 разобьем $Q'_1, \dots, Q'_{l+1}$ на группы $M_0, \dots, M_k$ в соответствии со значениями координаты v : $Q'_i \in M_j \iff v_i = c_j$, где $c_j \neq 0$. Предположим, что $M_0 = \{Q'_{i_1}, \dots, Q'_{i_r}, Q'_{l+1}\}$, где $i_k \leq l$ для всех $k = 1, \dots, r$. Мы можем выбрать новую точку Q''_{l+1} , где $Q''_{l+1} \in (V_{c_0} \cap X_{\mathrm{reg}}^{(1)}) \setminus U_0$. Действительно, так как $c_0 = v_{l+1} \neq 0$, то $V_{c_0} \cong X^{(0)}$. По предположению теоремы 3.2 $\dim X^{(0)} \geq 2$, поэтому $\dim((V_{c_0} \cap X_{\mathrm{reg}}^{(1)}) \setminus U_0) = \dim X^{(0)} \geq 2$.

По лемме 3.4 подгруппа $\mathrm{Stab}_{c_1, \dots, c_k}^v \subseteq G_v$ действует на $V_{c_0} \cap X_{\mathrm{reg}}^{(1)}$ $(r+1)$ -транзитивно. Поэтому можно перевести набор $(Q'_{i_1}, \dots, Q'_{i_r}, Q'_{l+1})$ в набор $(Q'_{i_1}, \dots, Q'_{i_r}, Q''_{l+1})$, оставляя неподвижными остальные точки из $M_1 \cup \dots \cup M_k$. Это доказывает утверждение в случае 1.

В случае 2 точка $Q'_{l+1} = (Q_{l+1}, 0, 0)$ лежит в $X_{\mathrm{reg}}^{(1)}$. Из леммы 3.2 и ее доказательства следует, что $Q_{l+1} = \pi(Q'_{l+1}) \in X_{\mathrm{reg}}^{(0)}$ и $df(Q_{l+1}) \neq 0$ в касательном пространстве $T_{Q_{l+1}}^* X^{(0)}$. Так как многообразие $X^{(0)}$ является гибким, найдется такое ЛНД $\partial_0 \in \mathrm{Der} \mathbb{k}[X^{(0)}]$, что $\partial_0(f)(Q_{l+1}) \neq 0$. Полагая $q(v) = v(v - v_1)(v - v_2) \cdots (v - v_l) \in \mathbb{k}[v]$ и выбирая множество образующих $x_1, \dots, x_s$ алгебры $\mathbb{k}[X^{(0)}]$, мы можем аналогично (3.5) поднять ∂_0 до $\partial_1 \in \mathrm{Der} \mathbb{k}[X^{(1)}]$ по формулам

$$\partial_1(x_i) = q(v)\partial_0(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad \partial_1(u) = \frac{q(v)}{v}\partial_0(f), \quad \partial_1(v) = 0. \quad (3.6)$$

Согласно нашему выбору $\partial_1(u)(Q'_{l+1}) \neq 0$. Поэтому действие соответствующей однопараметрической подгруппы $H_v(\partial_0, q) = \exp(t\partial_1)$ отображает точку Q'_{l+1} в точку вне U_0 . Тем самым, орбита $H_v(\partial_0, q) \cdot Q'_{l+1}$ может пересекаться с гиперповерхностью $U_0 \subseteq X^{(1)}$ лишь в конечном числе точек. Аналогично для всех $j = 1, 2, \dots, l$ орбита $H_v(\partial_0, q) \cdot Q'_j \not\subseteq U_0$ пересекается с U_0 лишь в конечном числе точек. Полагая $\varphi = \exp(t_0\partial_1) \in H_v(\partial_0, q) \subseteq G_v$, мы заключаем, что для почти всех значений параметра $t_0 \in \mathbb{k}$ образы $\varphi(Q'_j)$ лежат вне U_0 для

всех $j = 1, 2, \dots, l + 1$. Так как группа $H_v(\partial_0, q)$ сохраняет значение координаты v , точки $\varphi(Q'_1), \dots, \varphi(Q'_l)$ по-прежнему гиперболические. Переставляя⁹ u и v , мы заключаем, что для нового набора $\varphi(Q'_1), \dots, \varphi(Q'_l), \varphi(Q'_{l+1})$ выполняются предположения случая 1, что и требовалось.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО БЕСКОНЕЧНОЙ ТРАНЗИТИВНОСТИ В ТЕОРЕМЕ 3.2. Если $X^{(0)} = \mathbb{A}^1$, то утверждение следует из теоремы 3.1. Пусть теперь $\dim X^{(0)} \geq 2$. Чтобы показать, что действие группы $\text{SAut}(X^{(1)})$ на $X_{\text{reg}}^{(1)}$ является m -транзитивным для всех $m \in \mathbb{N}$, зафиксируем стандартный набор из m попарно различных точек $P'_1, \dots, P'_m \in U_1 \cap X_{\text{reg}}^{(1)}$. Достаточно показать, что можно перевести набор попарно различных точек $Q'_1, \dots, Q'_m \in X_{\text{reg}}^{(1)}$ в $P'_1, \dots, P'_m$ при помощи автоморфизма $\psi \in \text{SAut}(X^{(1)})$. По лемме 3.5 можно считать, что $Q'_i \notin U_0 \cup V_0$ для всех $i = 1, \dots, m$. Аналогично доказательству леммы 3.5 разобьем набор $Q'_1, \dots, Q'_m$ на группы $M_1, \dots, M_k$ в соответствии со значениями координаты v .

По нашему предположению многообразие $X^{(0)}$ является гибким. Следовательно, каждый обратимый элемент в $\mathbb{k}[X^{(0)}]$ является константой. Так как f непостоянна, то $f(X^{(0)}) = \mathbb{k}$. В частности, $U_c \cap V_d \neq \emptyset$ для любых $c, d \in \mathbb{k}$. Так как $\dim X^{(1)} = 1 + \dim X^{(0)} \geq 3$, то пересечение $U_c \cap V_d$ имеет положительную размерность, поэтому оно бесконечно.

Действуя подгруппами $\text{Stab}_{c_1 \dots c_i \dots c_l}^v \subseteq G_v$, по лемме 3.4 мы можем отобразить M_i в $U_1 \cap V_{c_i} \cap X_{\text{reg}}^{(1)}$, не изменяя положения остальных точек из $\bigcup_{j \neq i} M_j$. Поэтому можно предполагать, что $Q'_1, \dots, Q'_m \in U_1 \cap X_{\text{reg}}$. Снова применяя лемму 3.4 с переставленными u и v , $k = 0$ и $c_0 = 1$, т.е. действуя подгруппой G_u , мы можем отобразить полученный на предыдущем шаге набор в стандартный набор $P'_1, \dots, P'_m$. Это завершает доказательство.

3.3. Надстройки над вещественными многообразиями. В этом пункте мы доказываем теорему 3.3. Нам потребуется следующая элементарная лемма.

ЛЕММА 3.6. Пусть Y – гладкое связное вещественное многообразие размерности 2 или более. Тогда для любой непрерывной функции $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ множество уровня $f^{-1}(c)$ бесконечно для всех $c \in \text{Int } f(Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы следует, что $\text{Int } f(Y) \subseteq \mathbb{R}$ является открытым интервалом. Выберем две точки $y_1, y_2 \in Y$ так, чтобы $f(y_1) = c_1 < c$ и $f(y_2) = c_2 > c$. Их можно соединить в Y гладким путем l . Тогда у l есть окрестность U , диффеоморфная цилиндру $\Delta \times I$, где $I = [0, 1]$, а Δ – шар размерности $\dim \Delta = \dim Y - 1 \geq 1$. Поэтому существует непрерывное семейство путей в U , соединяющих y_1 и y_2 , при этом любые два пути пересекаются только в начале y_1 и в конце y_2 . Так как гиперповерхность $f^{-1}(c)$ разделяет Y на две части, все пути из y_1 в y_2 пересекают эту гиперповерхность. В частности, $f^{-1}(c)$ бесконечно.

Доказательство теоремы 3.3 в целом совпадает с доказательством теоремы 3.2. Поэтому мы укажем лишь необходимые изменения.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 3.3. Предположение о том, что поле $\mathbb{k}$ алгебраически замкнуто, использовалось в доказательстве теоремы 3.2 только в двух местах. А именно, в доказательствах леммы 3.5 и бесконечной

⁹Это не было сделано ранее, чтобы сохранить обозначения.

транзитивности в теореме 3.2 мы пользовались тем, что при выполнении всех предположений множества уровня $(V_{c_k} \cap X_{\text{reg}}^{(1)}) \setminus U_0$ и $U_1 \cap V_{c_i} \cap X_{\text{reg}}^{(1)}$ имеют положительную размерность и поэтому бесконечны. Для $\mathbb{k} = \mathbb{k}$ их бесконечность следует из теоремы Крулля и подсчета размерностей. В случае $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ это же следует из леммы 3.6. Действительно, в этих обозначениях для любого $c_i \neq 0$ ограничения

$$\pi: V_{c_i} \cap X_{\text{reg}}^{(1)} = (V_{c_i})_{\text{reg}} \rightarrow X_{\text{reg}}^{(0)}, \quad \pi: U_1 \cap V_{c_i} \cap X_{\text{reg}}^{(1)} \rightarrow f^{-1}(c_i) \cap X_{\text{reg}}^{(0)}$$

являются изоморфизмами. При выполнении предположений теоремы 3.3 гладкое вещественное многообразие $X_{\text{reg}}^{(0)}$ имеет размерность хотя бы 2 и связно. Поскольку $f(X_{\text{reg}}^{(0)}) = \mathbb{R}$, по лемме 3.6 множество уровня $f^{-1}(c_i) \cap X_{\text{reg}}^{(0)}$ бесконечно. Так как $c_k \neq 0$, множество $(V_{c_k} \cap X_{\text{reg}}^{(1)}) \setminus U_0 \supseteq U_1 \cap V_{c_k} \cap X_{\text{reg}}^{(1)}$ тоже бесконечно.

Оказывается, многообразие $X_{\text{reg}}^{(1)}$ тоже связно. Поэтому по индукции то же самое рассуждение можно применить к итерированной надстройке $X^{(i)}$ над $X^{(0)}$, $i = 1, \dots, l$.

3.4. Гибкость. Чтобы завершить доказательства теорем 3.1–3.3, достаточно проверить гибкость $X^{(1)}$.

ЛЕММА 3.7. *При выполнении предположений любой из теорем 3.1–3.3 многообразие $X^{(1)}$ является гибким.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже знаем, что группа $\text{SAut}(X^{(1)})$ действует на $X_{\text{reg}}^{(1)}$ транзитивно. Поэтому аналогично доказательству леммы 2.9 достаточно указать одну гибкую точку $P' = (P, u, v) \in X_{\text{reg}}^{(1)}$.

Поскольку функция $f \in \mathbb{k}[X^{(0)}]$ непостоянна, $df(P) \neq 0$ в некоторой точке $P \in X_{\text{reg}}^{(0)}$, для которой $f(P) \neq 0$. По предположению $X^{(0)}$ гибкое. Поэтому существуют такие ЛНД $\partial_0^{(1)}, \dots, \partial_0^{(n)} \in \text{Der } \mathbb{k}[X^{(0)}]$, где $n = \dim X^{(0)}$, что соответствующие векторные поля $\xi_1, \dots, \xi_n$ порождают касательное пространство $T_P X^{(0)}$, т.е.

$$\text{rk} \begin{pmatrix} \xi_1(P) \\ \dots \\ \xi_n(P) \end{pmatrix} = n.$$

Следовательно, $\partial_0^{(i)}(f)(P) \neq 0$ хотя бы для одного индекса $i \in \{1, \dots, n\}$.

Пусть $P' = (P, u_0, v_0) \in X_{\text{reg}}^{(1)}$ – такая точка, что $\pi(P') = P$. Так как $u_0 v_0 = f(P) \neq 0$, точка P' гиперболическая. Полагая в лемме 3.3 $q(v) = v$, получаем ЛНД

$$\partial_1^{(1)}, \dots, \partial_1^{(n)} \in \text{Der } \mathbb{k}[X^{(1)}], \quad \text{где} \quad \partial_1^{(j)} = \partial_1^{(j)}(\partial_0^{(j)}, v).$$

Меняя ролями u и v и полагая $j = i$, получаем еще одно ЛНД

$$\partial_2^{(i)} = \partial_2^{(i)}(\partial_0^{(i)}, u) \in \text{Der } \mathbb{k}[X^{(1)}].$$

Покажем, что соответствующие $n + 1$ векторных полей порождают касательное пространство $T_{P'} X^{(1)}$ в точке P' , что и требуется. Можно рассматривать $\partial_1^{(1)}, \dots, \partial_1^{(n)}, \partial_2^{(i)}$ как ЛНД в $\text{Der } \mathbb{k}[X^{(0)}][u, v]$, сохраняющие идеал $(uv - f)$, т.е. такие, что соответствующие векторные поля касательны к гиперповерхности

$$X^{(1)} = \{uv - f(P) = 0\} \subseteq X^{(0)} \times \mathbb{A}^2.$$

Значения этих векторных полей в точке $P' \in X_{\text{reg}}^{(1)}$ образуют матрицу размера $(n+1) \times (n+2)$

$$E = \begin{pmatrix} v_0 \xi_1(P) & \partial_0^{(1)}(f)(P) & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ v_0 \xi_n(P) & \partial_0^{(n)}(f)(P) & 0 \\ u_0 \xi_i(P) & 0 & \partial_0^{(i)}(f)(P) \end{pmatrix}.$$

Первые n строк матрицы E линейно независимы, а последняя строка линейно независима с предыдущими, поскольку $\partial_0^{(i)}(f)(P) \neq 0$. Следовательно, $\text{rk}(E) = n+1 = \dim X^{(1)}$. Поэтому данные локально нильпотентные векторные поля действительно порождают касательное пространство $T_{P'} X^{(1)}$ в точке P' .

Это завершает доказательства теорем 3.1–3.3.

Список литературы

- [1] A. Borel, “Les bouts des espaces homogènes de groupes de Lie”, *Ann. of Math.* (2), **58**:3 (1953), 443–457.
- [2] J. Tits, “Sur certaines classes d’espaces homogènes de groupes de Lie”, *Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém. Coll. in 8°*, **29**:3 (1955).
- [3] L. Kramer, “Two-transitive Lie groups”, *J. Reine Angew. Math.*, **563** (2003), 83–113.
- [4] V. L. Popov, “Generically multiple transitive algebraic group actions”, *Algebraic groups and homogeneous spaces* (Mumbai, India, 2004), Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2007, 481–523.
- [5] J.-P. Rosay, W. Rudin, “Holomorphic maps from $\mathbb{C}^n$ to $\mathbb{C}^n$ ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **310**:1 (1988), 47–86.
- [6] E. Andersén, L. Lempert, “On the group of holomorphic automorphisms of $\mathbb{C}^n$ ”, *Invent. Math.*, **110**:1 (1992), 371–388.
- [7] Sh. Kaliman, M. Zaidenberg, “Affine modifications and affine hypersurfaces with a very transitive automorphism group”, *Transform. Groups*, **4**:1 (1999), 53–95.
- [8] D. Varolin, “The density property for complex manifolds and geometric structures. II”, *Internat. J. Math.*, **11**:6 (2000), 837–847.
- [9] J.-P. Rosay, “Automorphisms of $\mathbb{C}^n$, a survey of Andersén–Lempert theory and applications”, *Complex geometric analysis in Pohang* (Pohang, Korea, 1997), Contemp. Math., **222**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 131–145.
- [10] F. Forstneric, “Interpolation by holomorphic automorphisms and embeddings in $\mathbb{C}^n$ ”, *J. Geom. Anal.*, **9**:1 (1999), 93–117.
- [11] Á. Tóth, D. Varolin, “Holomorphic diffeomorphisms of semisimple homogeneous spaces”, *Compos. Math.*, **142**:5 (2006), 1308–1326.
- [12] S. Kaliman, F. Kutzschebauch, “Density property for hypersurfaces $UV = P(\overline{X})$ ”, *Math. Z.*, **258**:1 (2008), 115–131.
- [13] S. Kaliman, F. Kutzschebauch, “On the present state of the Andersén–Lempert theory”, *Affine algebraic geometry: The Russell Festschrift* (Montreal, QC, Canada, 2009), CRM Proc. Lecture Notes, **54**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, 85–122.
- [14] I. Biswas, J. Huisman, “Rational real algebraic models of topological surfaces”, *Doc. Math.*, **12** (2007), 549–567.
- [15] J. Huisman, F. Mangolte, “The group of automorphisms of a real rational surface is n -transitive”, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **41**:3 (2009), 563–568.

- [16] J. Blanc, F. Mangolte, “Geometrically rational real conic bundles and very transitive actions”, *Compos. Math.*, **147**:1 (2011), 161–187.
- [17] J. Huisman, F. Mangolte, “Automorphisms of real rational surfaces and weighted blow-up singularities”, *Manuscripta Math.*, **132**:1–2 (2010), 1–17.
- [18] K. Kuyumzhiyan, F. Mangolte, “Infinitely transitive actions on real affine suspensions”, *J. Pure Appl. Algebra.*, **216**:10 (2012), 2106–2112.
- [19] G. Freudenburg, “Algebraic theory of locally nilpotent derivations”, *Invariant theory and algebraic transformation groups*, v. VII, Encyclopaedia Math. Sci., **136**, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [20] V. L. Popov, “On the Makar–Limanov, Derksen invariants, and finite automorphism groups of algebraic varieties”, *Affine algebraic geometry*, CRM Proc. Lecture Notes, **54**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, 289–311.
- [21] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, M. Zaidenberg, “Group actions on affine cones”, *Affine algebraic geometry*, CRM Proc. Lecture Notes, **54**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, 123–164.
- [22] A. Liendo, “Affine $\mathbb{T}$ -varieties of complexity one and locally nilpotent derivations”, *Transform. Groups*, **15**:2 (2010), 389–425.
- [23] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg, *Flexible varieties and automorphism groups*, arXiv:1011.5375.
- [24] A. Liendo, “ G_a -actions of fiber type on affine $\mathbb{T}$ -varieties”, *J. Algebra*, **324**:12 (2010), 3653–3665.
- [25] A. Perepechko, *Flexibility of affine cones over del Pezzo surfaces of degree 4 and 5*, arXiv:1108.5841; *Функц. анализ и его прил.* (в печати).
- [26] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, “Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **36**:4 (1972), 749–764; англ. пер.: È. B. Vinberg, V. L. Popov, “On a class of quasihomogeneous affine varieties”, *Math. USSR-Izv.*, **6**:4 (1972), 743–758.
- [27] В. Л. Попов, “Группы Пикара однородных пространств линейных алгебраических групп и одномерные однородные векторные расслоения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:2 (1974), 294–322; англ. пер.: V. L. Popov, “Picard groups of homogeneous spaces of linear algebraic groups and one-dimensional homogeneous vector bundles”, *Math. USSR-Izv.*, **8**:2 (1974), 301–327.
- [28] Д. Н. Ахизер, “Плотные орбиты с двумя концами”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:2 (1977), 308–324; англ. пер.: D. N. Ahiezer, “Dense orbits with two ends”, *Math. USSR-Izv.*, **11**:2 (1977), 293–307.
- [29] A. T. Huckleberry, E. Oeljeklaus, “A characterization of complex homogeneous cones”, *Math. Z.*, **170**:2 (1980), 181–194.
- [30] F. Lescure, “Élargissement du groupe d’automorphismes pour des variétés quasi-homogènes”, *Math. Ann.*, **261**:4 (1982), 455–462.
- [31] V. Lakshmibai, K. N. Raghavan, *Standard monomial theory. Invariant theoretic approach*, Encyclopaedia Math. Sci., **137**, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [32] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Ann. of Math. Stud., **131**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [33] D. A. Cox, J. B. Little, H. Schenck, *Toric varieties*, Grad. Stud. Math., **124**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
- [34] M. Demazure, “Sous-groupes algebriques de rang maximum du groupe de Cremona”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **3**:4 (1970), 507–588.
- [35] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, “Теория инвариантов”, *Алгебраическая геометрия – 4*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **55**, ВИНТИ, М., 1989, 137–309; англ. пер.: V. L. Popov, E. B. Vinberg, “Linear algebraic groups, invariant theory”, *Algebraic geometry. IV*, Encyclopaedia Math. Sci., **55**, Springer-Verlag, Berlin, 1994, 123–278.

- [36] H. Flenner, M. Zaidenberg, “Locally nilpotent derivations on affine surfaces with a $\mathbb{C}^*$ -action”, *Osaka J. Math.*, **42**:4 (2005), 931–974.
- [37] М. Х. Гизатуллин, “Аффинные поверхности, квазиоднородные относительно алгебраической группы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:4 (1971), 738–753; англ. пер.: M. H. Gizatullin, “Affine surfaces which are quasihomogeneous with respect to an algebraic group”, *Math. USSR-Izv.*, **5**:4 (1971), 754–769.
- [38] В. Л. Попов, “Классификация аффинных алгебраических поверхностей, квазиоднородных относительно алгебраической группы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **37**:5 (1973), 1038–1055; англ. пер.: V. L. Popov, “Classification of affine algebraic surfaces that are quasihomogeneous with respect to an algebraic group”, *Math. USSR-Izv.*, **7**:5 (1973), 1039–1056.
- [39] L. Makar-Limanov, “On groups of automorphisms of a class of surfaces”, *Israel J. Math.*, **69**:2 (1990), 250–256.
- [40] L. Makar-Limanov, “Locally nilpotent derivations on the surface $xy = p(z)$ ”, *Proceedings of the third international algebra conference* (Tainan, Taiwan, 2002), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003, 215–219.
- [41] D. Daigle, “On locally nilpotent derivations of $k[X_1, X_2, Y]/(\varphi(Y) - X_1 X_2)$ ”, *J. Pure Appl. Algebra*, **181**:2–3 (2003), 181–208.
- [42] H. Flenner, S. Kaliman, M. Zaidenberg, “Uniqueness of $\mathbb{C}^*$ - and $\mathbb{C}_+$ -actions on Gizatullin surfaces”, *Transform. Groups*, **13**:2 (2008), 305–354.

И. В. Аржанцев (I. V. Arzhantsev)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: arjantse@mccme.ru

Поступила в редакцию

07.04.2011 и 24.01.2012

М. Г. Зайденберг (M. G. Zaidenberg)

University of Grenoble 1 – Joseph Fourier, France
E-mail: Mikhail.Zaidenberg@ujf-grenoble.fr

К. Г. Куюмжиян (K. G. Kuyumzhiyan)

Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений,
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Москва
E-mail: karina@mccme.ru