Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Брайчев, Наименьший тип целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными корнями заданных усредненных плотностей, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 7, 31–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7879>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 05:12:47

УДК 517.547.2

Г. Г. Брайчев

Наименьший тип целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными корнями заданных усредненных плотностей

Решена задача о наименьшем типе при порядке $\rho \in (0, 1)$ целых функций, все корни которых лежат на одном луче и имеют заданные верхнюю и нижнюю усредненные ρ -плотности. Проведено полное исследование полученной величины экстремального типа, включающее описание ее асимптотического поведения.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: экстремальный тип целой функции, верхняя и нижняя усредненные плотности нулей.

§ 1. Введение

Одна из основных задач настоящей работы состоит в нахождении наименьшего возможного значения типа целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями на одном луче заданной верхней усредненной ρ -плотности. Предложенный в статье подход связан с решением более общей экстремальной задачи, в которой учитываются и верхняя, и нижняя усредненные ρ -плотности нулей. Работа является непосредственным продолжением исследований, начатых в [1]–[3].

Введем определения, необходимые для точной постановки задачи. Пусть $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ – стремящаяся к бесконечности последовательность комплексных чисел, выписанная в порядке неубывания модулей, и $\rho > 0$. Будем считать для простоты, что $0 \notin \Lambda$, поскольку отсутствие точки $\lambda = 0$ в последовательности Λ не влияет ни на одну из рассматриваемых в статье асимптотических характеристик. Усредненной считающей функцией последовательности Λ называют величину

$$N_{\Lambda}(r) := \int_0^r \frac{n_{\Lambda}(t)}{t} dt,$$

где $n_{\Lambda}(t) = \sum_{|\lambda_n| \leq t} 1$ – считающая функция (с учетом кратностей) последовательности Λ . Верхняя усредненная плотность при показателе ρ (усредненная ρ -плотность) последовательности Λ определяется равенством $\overline{\Delta}_{\rho}^*(\Lambda) := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} (N_{\Lambda}(r)/r^{\rho})$. Тип целой функции $f(z)$ при порядке ρ (коротко: ρ -тип) будем обозначать $\sigma_{\rho}(f)$. По определению этой величины

$$\sigma_{\rho}(f) := \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} R^{-\rho} \ln \max_{|z|=R} |f(z)|.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00225а).

Всюду далее в работе, если не оговорено иное, рассматривается случай $\rho \in (0, 1)$. Хорошо известны следующие точные “классические” оценки (см., например, [4]–[6]):

$$\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \leq \sigma_\rho(f) \leq \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} \cdot \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda). \quad (1.1)$$

Оценка сверху в (1.1) достигается в случае, когда все нули функции расположены на одном луче и для них в определении усредненной верхней ρ -плотности существует обычный предел (такие последовательности называют измеримыми). Оценка же снизу в (1.1) достигается на довольно сложно устроенной последовательности, аргументы которой в определенном смысле равномерно распределены на $[0, 2\pi]$ (см. [4; гл. 4, § 1]).

Отметим еще, что верхняя усредненная ρ -плотность последовательности как количественная характеристика скорости стремления ее элементов к бесконечности стала завоевывать признание во многом благодаря появлению простой, но неуклучшаемой оценки снизу в (1.1), справедливой, кстати, при любом $\rho > 0$ и вытекающей из формулы Йенсена.

Возникает естественный вопрос, поставленный А. Ю. Поповым: насколько уточняется левое неравенство в (1.1), если корни целой функции лежат на одном луче? Ответ на этот вопрос не только принципиален для внутреннего развития теории целых функций, но и представляет интерес в проблеме нахождения радиуса полноты систем экспонент (см. [7]–[10]).

Дадим точную формулировку проблемы. Зафиксируем два числа $\rho \in (0, 1)$, $\beta^* > 0$ и поставим, следуя [1], экстремальную задачу: найти точную нижнюю грань

$$s^*(\beta^*, \rho) := \inf\{\sigma_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^*\}. \quad (1.2)$$

Первым шагом к нахождению величины $s^*(\beta^*, \rho)$ послужила следующая решенная в 2005 г. А. Ю. Поповым (см. [1]) задача, в которой фиксируется не усредненная, а обычная верхняя ρ -плотность последовательностей Λ , определяемая равенством $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) := \lim_{r \rightarrow +\infty} (n_\Lambda(r)/r^\rho)$. Требуется вычислить

$$s(\beta, \rho) := \inf\{\sigma_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\}. \quad (1.3)$$

ТЕОРЕМА А (см. [1]). При любых $\rho \in (0, 1)$ и $\beta > 0$ справедливо равенство

$$s(\beta, \rho) = \beta C(\rho),$$

где $C(\rho) = \max_{a>0} (\ln(1+a)/a^\rho)$. Нижняя грань $s(\beta, \rho)$ достигается на некоторой возрастающей последовательности положительных чисел.

Следующий шаг к решению задачи (1.2) был сделан в совместной работе автора и В. Б. Шерстюкова [2]. В ней дан ответ на поставленный А. Ю. Поповым вопрос о нахождении следующей экстремальной величины, учитывающей кроме верхней еще и нижнюю ρ -плотность $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) := \lim_{r \rightarrow +\infty} (n_\Lambda(r)/r^\rho)$ последовательностей Λ :

$$s(\alpha, \beta, \rho) := \inf\{\sigma_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\}. \quad (1.4)$$

ТЕОРЕМА В (см. [2]). Для произвольного $\rho \in (0, 1)$ и любых чисел $\alpha \geq 0$ и $\beta > 0$ ($\alpha \leq \beta$) имеет место равенство

$$s(\alpha, \beta, \rho) = \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\rho} + \max_{a>0} \int_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^a \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau.$$

Нижняя грань $s(\alpha, \beta, \rho)$ достигается на некоторой возрастающей последовательности $\hat{\Lambda} \subset \mathbb{R}_+$, у которой $\underline{\Delta}_\rho(\hat{\Lambda}) = \alpha$ и $\overline{\Delta}_\rho(\hat{\Lambda}) = \beta$.

Заметим, что из этой теоремы при $\alpha = 0$ следует утверждение теоремы А. После этого замечания естественно сформулировать общую экстремальную задачу, в постановке которой фиксируются границы изменения усредненных плотностей, как верхней $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda)$, так и нижней $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) := \lim_{r \rightarrow +\infty} (N_\Lambda(r)/r^\rho)$. Задача состоит в нахождении точной нижней грани

$$s^*(\alpha^*, \beta^*, \rho) := \inf \{ \sigma_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \geq \alpha^*, \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^* \}. \quad (1.5)$$

Нетрудно видеть, что эта экстремальная задача при $\alpha^* = 0$ содержит в себе задачу (1.2), именно $s^*(0, \beta^*, \rho) = s^*(\beta^*, \rho)$. Решение задачи (1.5) и определяет дальнейшее содержание работы.

Из теорем А и В видно, насколько сильно усложняется ответ в экстремальной задаче (1.3) при введении в нее ограничения на нижнюю плотность последовательностей нулей целых функций (задача (1.4)). Как показало проведенное исследование, переход от обычных плотностей к усредненным в свою очередь увеличивает сложность задачи и вызывает появление корней некоторого трансцендентного уравнения, зависящего от обеих усредненных плотностей. Последнее обстоятельство обнаружилось не сразу. Первоначально задача (1.2) была решена автором и В. Б. Шерстюковым в подклассе целых функций, выделяемом условием равенства нулю “дискретной”, усредненной ρ -плотности корней Λ , определяемой формулой

$$\tilde{\Delta}_\rho(\Lambda) := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{N_\Lambda(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho}.$$

ТЕОРЕМА С (см. [11]). При любых $\rho \in (0, 1)$ и $\beta^* > 0$ справедливо равенство

$$\tilde{s}(\beta^*, \rho) := \inf \{ \sigma_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \tilde{\Delta}_\rho(\Lambda) = 0, \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^* \} = C(\rho)\rho\beta^*.$$

Нижняя грань $\tilde{s}(\beta^*, \rho)$ достигается на экстремальной последовательности из теоремы А и $C(\rho)$ – функция из этой теоремы.

Позже, привлекая развитую автором теорию роста выпуклых функций (см. [12]), удалось осуществить следующее принципиальное продвижение. При фиксированных $\rho \in (0, 1)$, $\beta^* > 0$ и $\alpha^* \in [0, \beta^*]$ была найдена величина

$$\tilde{s}(\alpha^*, \beta^*, \rho) := \inf \{ \sigma_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \tilde{\Delta}_\rho(\Lambda) = \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \geq \alpha^*, \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^* \}.$$

ТЕОРЕМА D (см. [3]). Для произвольного $\rho \in (0, 1)$ и любых чисел $\alpha^* \geq 0$ и $\beta^* > 0$ ($\alpha^* \leq \beta^*$) справедливо равенство

$$\tilde{s}(\alpha^*, \beta^*, \rho) = \rho \left(\frac{\pi \alpha^*}{\sin \pi \rho} + \max_{b > 0} \int_{b(a_1/a_2)^{1/\rho}}^b \frac{a_2 \beta^* b^{-\rho} - \alpha^* \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \right), \quad (1.6)$$

в котором $a_1 = a_1(\alpha^*, \beta^*)$ и $a_2 = a_2(\alpha^*, \beta^*)$, $a_1 \leq 1 \leq a_2$, – корни уравнения

$$a \ln \frac{e}{a} = \frac{\alpha^*}{\beta^*}. \quad (1.7)$$

Величина $\tilde{s}(\alpha^*, \beta^*, \rho)$ достигается для некоторой целой функции с нулями $\Lambda_f = \tilde{\Lambda}$ такими, что $\tilde{\Delta}_\rho(\tilde{\Lambda}) = \underline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \alpha^*$ и $\overline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \beta^*$.

Учитывая доказанное в [3] равенство

$$\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_\Lambda(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho} =: \underline{\Delta}_\rho(\Lambda),$$

видим, что теорема D дает ответ к задаче (1.5) в подклассе целых функций с дискретно измеримыми последовательностями нулей, т.е. такими $\Lambda_f = \Lambda$, для которых $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda)$. Снятие последнего ограничения потребовало внесения существенных изменений в метод доказательства теоремы D. При этом выяснилось, что отказ от дополнительного требования дискретной измеримости последовательности нулей не меняет величины экстремального типа, найденной в теореме D. Доказательство такого общего результата (теорема 1) составляет центральную часть работы. Эта теорема, представляя и самостоятельный интерес, позволяет получить решение первоначально поставленной экстремальной задачи (1.2).

ТЕОРЕМА 1. *При заданных $\rho \in (0, 1)$, $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0, \beta^*]$ экстремальная величина (1.5) вычисляется по формуле*

$$s^*(\alpha^*, \beta^*, \rho) = \rho \left(\frac{\pi \alpha^*}{\sin \pi \rho} + \max_{a > 0} \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \right), \quad (1.8)$$

где по-прежнему a_1 и a_2 – корни уравнения (1.7). Точная нижняя грань $s^*(\alpha^*, \beta^*, \rho)$ достигается на экстремальной функции с нулями $\Lambda_f = \tilde{\Lambda}$ из теоремы D.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как будет показано в § 3, максимум в формуле (1.8) при любых $\rho \in (0, 1)$ и $0 \leq \alpha^* < \beta^* < +\infty$ действительно достигается, причем в единственной точке. Поэтому в дальнейшем при работе с величиной $s^*(\alpha^*, \beta^*, \rho)$ пишем максимум вместо супремума.

Появление в теоремах D и 1 корней уравнения (1.7) не является случайным. Корни подобных уравнений возникают в теоремах тауберова типа при исследовании сравнительного роста выпуклых функций и их производных (см. [12; гл. 2, § 2]). В частности, справедливы следующие точные оценки, связывающие обычные плотности последовательности Λ с ее усредненными плотностями:

$$\rho a_1 \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \leq \underline{\Delta}_\rho(\Lambda), \quad \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \leq \rho a_2 \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda),$$

где, как и раньше, a_1 и a_2 – корни уравнения $a \ln(e/a) = \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda)/\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda)$. Как показано в [3], знаки равенств в этих соотношениях одновременно достигаются для дискретно измеримых последовательностей.

Теперь мы можем из теоремы 1 извлечь центральный результат статьи, дающий решение задачи (1.2).

ТЕОРЕМА 2. *При фиксированных $\rho \in (0, 1)$ и $\beta^* > 0$ экстремальная величина (1.2) находится по формуле*

$$s^*(\beta^*, \rho) = C(\rho) \rho e \beta^*.$$

Можно показать, что экстремальная последовательность из теоремы A является экстремальной не только в теореме C, но и в общей задаче (1.2) для

целых функций с произвольными (не обязательно дискретно измеримыми) последовательностями положительных нулей.

Итак, привлекая теорему 2, можно указать для класса всех целых функций с положительными нулями заданной усредненной верхней ρ -плотности $\beta^* > 0$ неулучшаемые неравенства для типа при порядке $\rho \in (0, 1)$:

$$C(\rho)\rho e\beta^* \leq \sigma_\rho(f) \leq \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho}\beta^*.$$

Из непрерывной же зависимости $s^*(\alpha^*, \beta^*, \rho)$ от параметра α^* , вытекающей из формулы (1.8) теоремы 1, следует более сильное утверждение: *любое значение из отрезка $[C(\rho)\rho e\beta^*, \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho}\beta^*]$ является ρ -типом некоторой функции из указанного класса.*

В каждой из приведенных экстремальных задач ответ дается с помощью неэлементарных функций. В [1] А. Ю. Попов провел подробное исследование функции $C(\rho)$. Им доказаны следующие факты:

$$\begin{aligned} C(\rho) &> \frac{1}{\rho e}, \quad \rho \in (0, 1), \\ C(\rho) &= \frac{1}{\rho e} + e^{-1-1/\rho} + O\left(\frac{1}{\rho}e^{-2/\rho}\right), \quad \rho \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В работе [2] приведены двусторонние оценки и изучено асимптотическое поведение при $\rho \rightarrow +0$ экстремальной величины из теоремы В. В частности, полагая

$$\frac{\alpha}{\beta} =: k, \quad C(k, \rho) := \frac{\pi k}{\sin \pi \rho} + \max_{a>0} \int_{ak^{1/\rho}}^a \frac{a^{-\rho} - k\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau,$$

из [2] извлекаем для $k \in [0, 1]$ и $\rho \in (0, 1)$ оценки

$$\begin{aligned} C(k, \rho) &> \frac{e^{k-1}}{\rho}, \\ \frac{\pi k}{\sin \pi \rho} + \left(1 + k \ln \frac{k}{e}\right) C(\rho) &\leq C(k, \rho) \leq \frac{\pi k}{\sin \pi \rho} + (1 - k)C(\rho), \end{aligned}$$

а также асимптотические формулы при $\rho \rightarrow +0$ и фиксированном $k \in [0, 1]$. Для наглядности укажем лишь одну из них, справедливую для достаточно малых k (подробнее см. в [2]):

$$C(k, \rho) = \frac{e^{k-1}}{\rho} + \left(1 - \frac{k}{\rho + 1}\right) e^{-(1-k)(1/\rho+1)} + O\left(\frac{1}{\rho}e^{-2(1-k)/\rho}\right), \quad \rho \rightarrow +0.$$

Неэлементарный характер экстремальной величины из теоремы 1 приводит к необходимости дать развернутое исследование ее поведения. Именно, в обозначениях $k^* := \alpha^*/\beta^*$ и

$$C^*(k^*, \rho) := \frac{\pi \rho k^*}{\sin \pi \rho} + \rho \max_{b>0} \int_{ba^{1/\rho}}^{ba^{1/\rho}} \frac{b^{-\rho} - k^* \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau$$

в настоящей работе получены, в частности, следующие двусторонние оценки, справедливые при всех $k^* \in [0, 1]$ и $\rho \in (0, 1)$:

$$\frac{\pi k^*}{\sin \pi \rho} + \left(a_2 - k^* \ln \frac{ea_2}{a_1}\right) C(\rho) \leq \frac{C^*(k^*, \rho)}{\rho} \leq \frac{\pi k^*}{\sin \pi \rho} + (a_2 - k^*)C(\rho). \quad (1.10)$$

Кроме того, при фиксированном $k^* \in [0, 1]$ и $\rho \rightarrow +0$ установлено асимптотическое соотношение

$$C^*(k^*, \rho) = 1 + \frac{\rho}{1 + \rho} a_2^{-1/\rho} \ln e^\rho a_2 + \frac{\rho}{1 - \rho} a_1^{1/\rho} \ln \frac{e^\rho}{a_1} + O(a_2^{-2/\rho}).$$

Анализ этой формулы приводит к интересным выводам о неравноправном влиянии корней уравнения (1.7) на величину $C^*(k^*, \rho)$ при малых ρ . Например, при значениях $0 < k^* \leq 0.58058 \dots$ меньший корень a_1 вообще не участвует в трехчленной асимптотике $C^*(k^*, \rho)$. Случай $k^* = 0$, примыкая к предыдущему, понимается в предельном смысле и приводит к следующему результату:

$$s^*(\beta^*, \rho) = \beta^* \{1 + \rho e^{-1/\rho} + O(e^{-2/\rho})\}, \quad \rho \rightarrow +0,$$

согласующемуся с асимптотикой (1.9).

Опишем структуру работы. В § 1 доказывается основная оценка типа функции, обосновывается точность полученной оценки и в качестве следствия выводится теорема 2. В § 2 устанавливается возрастание и выпуклость по k^* величины $C^*(k^*, \rho)$. Приводятся также более точные (хотя и более громоздкие) по сравнению с (1.10) равномерные двусторонние оценки $C^*(k^*, \rho)$. Кроме того, показывается, что всякая экстремальная последовательность в задаче (1.2) имеет нулевую нижнюю плотность. Выводу и анализу асимптотической формулы для $C^*(k^*, \rho)$ при $\rho \rightarrow +0$ посвящен § 3.

Автор выражает благодарность В. Б. Шерстюкову за сотрудничество в подготовке этой работы.

§ 2. Доказательство основной оценки

Пусть по-прежнему $f(z)$ – целая функция порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями $\Lambda = \Lambda_f$, а $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0, \beta^*]$ – фиксированные числа.

Этот параграф посвящен доказательству следующего ключевого неравенства, содержащегося в (1.8) и связывающего тип целой функции с усредненными плотностями ее нулей:

$$\sigma_\rho(f) \geq \rho \left(\frac{\pi \alpha^*}{\sin \pi \rho} + \max_{b > 0} \int_{ba_1^{1/\rho}}^{ba_2^{1/\rho}} \frac{\beta^* b^{-\rho} - \alpha^* \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \right).$$

Здесь, как и ранее,

$$\sigma_\rho(f) = \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} R^{-\rho} \ln \max_{|z|=R} |f(z)|$$

– тип $f(z)$, а верхняя и нижняя усредненные плотности последовательности ее нулей подчинены условиям

$$\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\rho} = \beta^*, \quad \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \underline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\rho} \geq \alpha^*,$$

где a_1 и a_2 – корни уравнения $a \ln(e/a) = \alpha^*/\beta^*$ ($a_1 \leq 1 \leq a_2$).

Нам потребуется одно вспомогательное утверждение.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+$ – упорядоченная по возрастанию последовательность положительных чисел:

$$0 < \lambda_1 = \dots = \lambda_{n_1} < \lambda_{n_1+1} = \dots = \lambda_{n_2} < \lambda_{n_3} = \dots,$$

$n(t) = n_\Lambda(t)$ – ее считающая функция и $N(t) = N_\Lambda(t)$ – усредненная считающая функция. Обозначим для сокращения записи

$$\Delta^*(r) := \frac{N(r)}{r^\rho}, \quad \overline{\Delta}^* := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \Delta^*(r), \quad \widetilde{\Delta} := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \Delta^*(\lambda_n), \quad \nu(r) := \frac{n(r)}{N(r)}.$$

ЛЕММА 1. Пусть Λ – неизмеримая последовательность положительных чисел, т.е. $\underline{\Delta}^* < \overline{\Delta}^*$. Тогда найдется последовательность $r_j \rightarrow +\infty$, на которой выполняются соотношения

$$\nu(r_j) \geq \rho, \quad \Delta^*(r_j) \rightarrow \overline{\Delta}^*, \quad j \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $n(r)$ является кусочно постоянной, а именно $n(r) = n_k$, $r \in I_k := [\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}})$. Поскольку функция $N(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}_+$ и строго возрастает от 0 до $+\infty$, то для любого k найдется такое x_k , что $N(x_k) = n_k/\rho$. Положим

$$N_1 = \{k \in \mathbb{N} : x_k \in (\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}})\}, \quad N_2 = \{k \in \mathbb{N} : x_k \notin (\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}})\}$$

и обозначим, предполагая, что $k \rightarrow \infty$,

$$\overline{\Delta}_1^* := \overline{\lim}_{k \in N_1} \sup_{x \in I_k} \{\Delta^*(x)\}, \quad \overline{\Delta}_2^* := \overline{\lim}_{k \in N_2} \sup_{x \in I_k} \{\Delta^*(x)\}.$$

Если какое-либо из множеств N_i , $i = 1, 2$, ограничено или пусто, то удобно считать, что соответствующая величина $\overline{\Delta}_i^*$ равна нулю. В любом случае будем иметь $\Delta^* = \max\{\Delta_1^*, \Delta_2^*\}$. Нам предстоит рассмотреть три случая.

Случай I. Начнем с рассмотрения простого случая, когда множество N_2 ограничено или пусто. Тогда, очевидно, $\overline{\Delta}^* = \overline{\Delta}_1^*$. При всех достаточно больших k точка x_k принадлежит интервалу $(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}})$ и доставляет максимум функции $\Delta^*(x)$ на промежутке I_k . Действительно, для x из I_k имеем $n(x) \equiv n_k$ и $(\Delta^*(x))'$ исчезает при $x = x_k$, так как

$$(\Delta^*(x))' = \left(\frac{N(x)}{x^\rho} \right)' = \rho x^{-\rho-1} \left(\frac{n_k}{\rho} - N(x) \right).$$

В этом случае получаем

$$\overline{\Delta}^* = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \Delta^*(r) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in I_k} \{\Delta^*(x)\} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \Delta^*(x_k) = \lim_{j \rightarrow \infty} \Delta^*(x_{k_j}),$$

где k_j – последовательность натуральных чисел, на которой достигается последний верхний предел.

Заметим теперь, что в точке максимума x_k функции $\Delta^*(x)$ выполняется

$$(\Delta^*)'(x_k) = N(x_k)(x_k)^{-\rho-1}(\nu(x_k) - \rho) = 0,$$

т.е. $\nu(x_k) = \rho$. Поэтому, полагая $r_j := x_{k_j}$, видим, что оба условия из (2.1) выполняются:

$$\overline{\Delta}^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \Delta^*(r_j), \quad \nu(r_j) = \rho.$$

Случай II. Рассмотрим теперь случай, когда множества N_2 и N_1 неограниченны. Для каждого $k \in N_2$ функция $\Delta^*(x)$ монотонна на промежутке I_k и поэтому

$$\sup_{x \in I_k} \{\Delta^*(x)\} = \max\{\Delta^*(\lambda_{n_k}); \Delta^*(\lambda_{n_{k+1}})\}.$$

В этом случае будет выполняться неравенство

$$\overline{\Delta}_2^* \leq \widetilde{\Delta}. \quad (2.2)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}_2^* &= \overline{\lim}_{k \in N_2} \sup_{x \in I_k} \{\Delta^*(x)\} = \overline{\lim}_{k \in N_2} \max\{\Delta^*(\lambda_{n_k}); \Delta^*(\lambda_{n_{k+1}})\} \\ &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \max\{\Delta^*(\lambda_{n_k}); \Delta^*(\lambda_{n_{k+1}})\} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sup_{m \geq k} \{\Delta^*(\lambda_{n_m})\} = \widetilde{\Delta}. \end{aligned}$$

Могут возникнуть лишь две ситуации: а) $\overline{\Delta}_1^* \geq \widetilde{\Delta}$; б) $\overline{\Delta}_1^* < \widetilde{\Delta}$.

В ситуации а) из неравенства (2.2) получаем

$$\overline{\Delta}^* = \max\{\overline{\Delta}_1^*; \overline{\Delta}_2^*\} = \overline{\Delta}_1^*,$$

что приводит к уже рассмотренному случаю, в котором мы выбрали последовательность $r_j = x_{k_j}$.

Покажем, как найти искомую последовательность r_j в ситуации б), когда $\overline{\Delta}_1^* < \widetilde{\Delta}$. В этом случае с учетом (2.2) находим

$$\widetilde{\Delta} \leq \overline{\Delta}^* = \max\{\overline{\Delta}_1^*; \overline{\Delta}_2^*\} \leq \widetilde{\Delta},$$

т.е. выполняется равенство $\overline{\Delta}^* = \widetilde{\Delta}$. Последняя величина достигается на некоторой подпоследовательности λ_{n_k} , $k \in K$, т.е.

$$\widetilde{\Delta} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \Delta^*(\lambda_{n_k}) = \lim_{k \in K} \Delta^*(\lambda_{n_k}).$$

Заметим сначала, что множество $K_1 := \{k \in K, k-1 \in N_1\}$ ограничено. Действительно, в рассматриваемом случае для всех k из множества K_1 выполняется неравенство $\Delta^*(\lambda_{n_k}) \leq \Delta^*(x_{k-1})$. И если бы множество K_1 было неограниченным, то имели бы

$$\widetilde{\Delta} = \lim_{k \in K_1} \Delta^*(\lambda_{n_k}) \leq \overline{\lim}_{k \in K_1} \Delta^*(x_{k-1}) \leq \overline{\lim}_{k-1 \in N_1} \Delta^*(x_{k-1}) = \overline{\Delta}_1^* < \widetilde{\Delta}.$$

Из отмеченного факта вытекает, что функция $\Delta^*(x)$ монотонна на каждом из промежутков I_{k-1} , $k \in K$, $k \geq k_0$. Приступим к построению требуемой последовательности r_j .

Если существует такая последовательность k_j , что функция $\Delta^*(x)$ на I_{k_j} при всех j возрастает, то в качестве членов последовательности r_j можно выбрать, например, середины промежутков I_{k_j} : $r_j = (\lambda_{n_{k_j}} + \lambda_{n_{k_j+1}})/2$. Действительно,

$$\begin{cases} \overline{\Delta}^* \geq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \Delta^*(r_j) \geq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \Delta^*(\lambda_{n_{k_j}}) = \widetilde{\Delta} = \overline{\Delta}^*, \\ (\Delta^*)'(r_j) = N(r_j)r_j^{-\rho-1}(\nu(r_j) - \rho) \geq 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

т.е. $\nu(r_j) \geq \rho$. Если же такой последовательности k_j нет, то функция $\Delta^*(x)$ убывает на I_k при всех $k \in K$ начиная с некоторого места (можно считать, что $k \geq k_0$). Для каждого такого k обозначим

$$m = \min\{s \geq k_0 : \Delta^*(x) \text{ убывает на } [\lambda_{n_s}, \lambda_{n_{k+1}}]\}, \quad m = m(k).$$

Если бы номер $m = m(k)$ был постоянным для всех достаточно больших $k \in K$, скажем, $m(k) \equiv M$, то функция $\Delta^*(x)$ убывала бы на $[\lambda_{n_M}, +\infty)$. Это привело бы к сходимости на бесконечности $\Delta^*(x)$ и измеримости Λ в противоречии с условием леммы. Значит, для некоторой последовательности индексов j последовательность $m_j = m(k_j)$, $k_j \in K$, строго возрастает. При этом функция $\Delta^*(x)$ убывает на промежутке $[\lambda_{n_m}, \lambda_{n_k})$ и возрастает на предшествующем промежутке $[\lambda_{n_{m-1}}, \lambda_{n_m})$. Выберем в этом случае величины ϵ_j настолько малыми, чтобы, положив $r_j = \lambda_{n_{m_j}} - \epsilon_j$, иметь $r_j \in [\lambda_{n_{m_j-1}}, \lambda_{n_{m_j}})$ и $\Delta^*(r_j) \geq \Delta^*(\lambda_{n_{k_j}})$. Учитывая возрастание $\Delta^*(x)$ на $[\lambda_{n_{m_j-1}}, \lambda_{n_{m_j}})$, как и в (2.3), получаем, что для такой последовательности r_j условия (2.1) выполняются. Таким образом, последовательность r_j требуемая.

Случай III. Осталось рассмотреть случай, когда множество N_2 неограниченно, а множество N_1 конечно или пусто. Но в этой ситуации функция $\Delta^*(x)$ монотонна на всех промежутках I_k начиная с некоторого. Если бы эта функция постоянно возрастала или убывала начиная с некоторого места, то существовал бы $\lim_{x \rightarrow \infty} \Delta^*(x)$, что несовместимо с неизмеримостью последовательности Λ . Значит, характер монотонности $\Delta^*(x)$ на I_k меняется бесконечное число раз. Но в этом случае величина $\bar{\Delta}^*$ достигается на некоторой последовательности концов промежутков I_k и, следовательно, совпадает с $\bar{\Delta}$, т.е. $\bar{\Delta}^* = \bar{\Delta}$. Этот случай уже рассмотрен выше. Лемма 1 доказана.

Теперь перейдем к доказательству главного результата статьи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если последовательность Λ измерима, то, как известно, справедливо равенство

$$\sigma = \frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} \cdot \bar{\Delta}^*.$$

Этот же результат содержится в формуле (1.8), так как при $\alpha^* = \beta^*$ оба корня a_1 и a_2 уравнения (1.7) совпадают с 1, и интеграл в формуле (1.8) исчезает. Таким образом, в случае измеримой последовательности справедливость теоремы 1 проверена.

Рассмотрим теперь случай неизмеримой последовательности Λ . При доказательстве формулы (1.8) будем опираться на лемму 1 и на следующее равенство, полученное в [3]:

$$R^{-\rho} \ln \max_{|z|=R} |L_{\Lambda}(z)| = \int_0^{+\infty} \varphi_R(t) \frac{t^{\rho}}{(1+t)^2} dt,$$

где $\varphi_R(t) := N_{\Lambda}(Rt)/(Rt)^{\rho} = \Delta^*(Rt)$.

Из определения функции $N_{\Lambda}(x)$ вытекает, что при всех положительных R , t , a справедливо неравенство

$$N_{\Lambda}(Rt) = N_{\Lambda}\left(\frac{R}{a}\right) + \int_{Ra^{-1}}^{Rt} \frac{n_{\Lambda}(x)}{x} dx \geq N_{\Lambda}\left(\frac{R}{a}\right) + n_{\Lambda}\left(\frac{R}{a}\right) \ln at.$$

Отсюда нетрудно получить следующую оценку:

$$\begin{aligned} \varphi_R(t) &\geq \frac{N_{\Lambda}(R/a) + n_{\Lambda}(R/a) \ln at}{(Rt)^{\rho}} = \frac{N_{\Lambda}(R/a)}{(R/a)^{\rho}} \cdot \frac{1 + \nu(R/a) \ln at}{(at)^{\rho}} \\ &= \Delta^*\left(\frac{R}{a}\right) \frac{1 + \nu(R/a) \ln at}{(at)^{\rho}}. \end{aligned}$$

Зафиксируем произвольно числа $a > 0$ и $\epsilon > 0$. Из определения усредненной нижней ρ -плотности последовательности Λ найдем число такое $c > 0$, чтобы при каждом $R \geq aca_2^{1/\rho}$ для всех $t \geq c/R$ выполнялось неравенство $\varphi_R(t) \geq \alpha_\epsilon^* := \alpha^*/(1+\epsilon)$. Пусть R пробегает значения $R_j = ar_j$, где r_j взяты из леммы 1. Применяя эту лемму, для всех достаточно больших j получим

$$\nu(r_j) = \nu\left(\frac{R_j}{a}\right) \geq \rho, \quad \Delta^*\left(\frac{R_j}{a}\right) \geq \beta_\epsilon^* := \frac{\beta^*}{1+\epsilon}.$$

В результате можем записать соотношение

$$\varphi_{R_j}(t) \geq \beta_\epsilon^* \frac{1 + \rho \ln at}{(at)^\rho}, \quad t \geq \frac{c}{R_j}.$$

Учитывая, что при тех же t выполняется $\varphi_{R_j}(t) \geq \alpha_\epsilon^*$, и вводя вспомогательную функцию

$$\psi_R(t) = \begin{cases} \beta_\epsilon^* \frac{1 + \rho \ln at}{(at)^\rho}, & t \in ((aa_2^{1/\rho})^{-1}, (aa_1^{1/\rho})^{-1}), \\ \alpha_\epsilon^*, & t \notin ((aa_2^{1/\rho})^{-1}, (aa_1^{1/\rho})^{-1}), \end{cases}$$

можем утверждать, что при каждом $R_j \geq aca_2^{1/\rho}$ и любых $t \geq c/R_j$ справедливо неравенство

$$\varphi_{R_j}(t) \geq \psi_{R_j}(t).$$

Следовательно, при каждом $R = R_j \geq aca_2^{1/\rho}$ имеет место оценка

$$R^{-\rho} \ln \max_{|z|=R} |L_\Lambda(z)| \geq \int_{cR^{-1}}^{+\infty} \psi_R(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt. \quad (2.4)$$

Интеграл в правой части преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_{cR^{-1}}^{+\infty} \psi_R(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \\ &= \alpha_\epsilon^* \left(\int_{cR^{-1}}^{(aa_2^{1/\rho})^{-1}} \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt + \int_{(aa_1^{1/\rho})^{-1}}^{+\infty} \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \right) \\ & \quad + \beta_\epsilon^* \int_{(aa_2^{1/\rho})^{-1}}^{(aa_1^{1/\rho})^{-1}} \frac{1 + \rho \ln at}{(at)^\rho} \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \\ &= \alpha_\epsilon^* \int_{cR^{-1}}^{+\infty} \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt + \int_{(aa_2^{1/\rho})^{-1}}^{(aa_1^{1/\rho})^{-1}} \left(\beta_\epsilon^* \frac{1 + \rho \ln at}{(at)^\rho} - \alpha_\epsilon^* \right) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \\ &= \alpha_\epsilon^* \left(\frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} - \int_0^{cR^{-1}} \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \right) + \int_{(aa_2^{1/\rho})^{-1}}^{(aa_1^{1/\rho})^{-1}} \frac{\beta_\epsilon^* a^{-\rho} (1 + \rho \ln at) - \alpha_\epsilon^* t^\rho}{(1+t)^2} dt. \end{aligned}$$

Переходя в неравенстве (2.4) к пределу по выбранной последовательности $R = R_j \rightarrow \infty$, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_\rho(f) &\geq \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{cR_j^{-1}}^{+\infty} \psi_{R_j}(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \\ &= \frac{\pi \rho \alpha_\epsilon^*}{\sin \pi \rho} + \int_{(aa_2^{1/\rho})^{-1}}^{(aa_1^{1/\rho})^{-1}} \frac{\beta_\epsilon^* a^{-\rho} (1 + \rho \ln at) - \alpha_\epsilon^* t^\rho}{(1+t)^2} dt. \end{aligned}$$

Устремив здесь ϵ к нулю, выводим предварительную оценку

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\pi \rho \alpha^*}{\sin \pi \rho} + \int_{(aa_2^{1/\rho})^{-1}}^{(aa_1^{1/\rho})^{-1}} \frac{\beta^* a^{-\rho}(1 + \rho \ln at) - \alpha^* t^\rho}{(1+t)^2} dt. \quad (2.5)$$

Возьмем по частям интеграл в этой оценке:

$$\begin{aligned} & \int_{(aa_2^{1/\rho})^{-1}}^{(aa_1^{1/\rho})^{-1}} \frac{\beta^* a^{-\rho}(1 + \rho \ln at) - \alpha^* t^\rho}{(1+t)^2} dt \\ &= - \frac{\beta^* a^{-\rho}(1 + \rho \ln at) - \alpha^* t^\rho}{1+t} \Big|_{(aa_2^{1/\rho})^{-1}}^{(aa_1^{1/\rho})^{-1}} + \rho \int_{(aa_2^{1/\rho})^{-1}}^{(aa_1^{1/\rho})^{-1}} \frac{\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* t^\rho}{t(t+1)} dt. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Внеинтегральное слагаемое обращается в нуль, так как его числитель можно записать в виде

$$\beta^* a^{-\rho}(1 + \rho \ln at) - \alpha^* t^\rho = \beta^* t^\rho \left((at)^{-\rho} \ln \frac{e}{(at)^{-\rho}} - \frac{\alpha^*}{\beta^*} \right),$$

а выражение в скобках при $t = (aa_i^{1/\rho})^{-1}$ дает $a_i \ln(e/a_i) - \alpha^*/\beta^* = 0$, поскольку a_i , $i = 1, 2$, – корни уравнения (1.7).

Интеграл в правой части (2.6) после замены переменной $t = \tau^{-1}$ принимает вид

$$\int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau.$$

Подводя итог последним преобразованиям, из (2.5) и (2.6) получаем

$$\sigma_\rho(f) \geq \rho \left(\frac{\pi \alpha^*}{\sin \pi \rho} + \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \right).$$

Наконец, используя свободу в выборе $a > 0$, приходим к окончательной оценке

$$\sigma_\rho(f) \geq \rho \left(\frac{\pi \alpha^*}{\sin \pi \rho} + \max_{a>0} \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \right). \quad (2.7)$$

Требуемое неравенство установлено. Его точность подтверждается примером функции с дискретно измеримой последовательностью нулей из теоремы D, который и реализует равенство в полученной оценке. В самом деле, сравнивая результаты теоремы D и теоремы 1 и полагая $b = aa_2^{1/\rho}$, максимум в формуле (1.6) запишем в виде

$$\max_{b>0} \int_{b(a_1/a_2)^{1/\rho}}^b \frac{a_2 \beta^* b^{-\rho} - \alpha^* \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau = \max_{a>0} \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau.$$

Таким образом, построенная в работе [3] экстремальная функция в задаче о вычислении величины $\tilde{s}(\alpha^*, \beta^*, \rho)$ является экстремальной и в задаче о нахождении $s^*(\alpha^*, \beta^*, \rho)$, что вместе с (2.7) приводит к соотношению (1.8).

Теорема 1 доказана.

В важном частном случае $\alpha^* = 0$ общая теорема 1 решает экстремальную задачу (1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Экстремальная задача (1.5) при $\alpha^* = 0$ требует дополнительное ограничение на нижнюю усредненную плотность, совпадая с задачей (1.2). Корнями уравнения (1.7) с нулевой правой частью являются числа $a_1 = 0$ и $a_2 = e$. Подставляя их в формулу (1.8), получаем

$$\begin{aligned} s^*(\beta^*, \rho) &= s^*(0, \beta^*, \rho) = \beta^* \rho \max_{a>0} a^{-\rho} \int_0^{ae^{1/\rho}} \frac{d\tau}{\tau + 1} \\ &= \beta^* \rho \max_{a>0} a^{-\rho} \ln(1 + ae^{1/\rho}) = \beta^* \rho e \max_{a>0} \frac{\ln(1 + ae^{1/\rho})}{(ae^{1/\rho})^\rho} = \beta^* \rho e C(\rho). \end{aligned}$$

Эти простые соображения, основанные на теореме 1, позволяют найти точную нижнюю грань в задаче (1.2), доказывая теорему 2.

§ 3. Двусторонние оценки экстремальной величины $C^*(k^*, \rho)$

Приступая к изучению функции $C^*(k^*, \rho)$ на квадрате $[0, 1] \times (0, 1)$, получим сначала простые оценки интеграла, входящего в формулу (1.8):

$$\begin{aligned} J(a) &:= \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{a^{-\rho} - k^* t^{-\rho}}{1 + t} dt = \frac{a^{-\rho} - k^* t^{-\rho}}{1 + t} \Big|_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} - \rho k^* \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{\ln(1 + t)}{t^{\rho+1}} dt \\ &\geq a^{-\rho} \left[\left(1 - \frac{k^*}{a_2}\right) \ln(1 + aa_2^{1/\rho}) - \left(1 - \frac{k^*}{a_1}\right) \ln(1 + aa_1^{1/\rho}) \right] \\ &\quad - \rho k^* C(\rho) \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что неравенство $\ln(1 + t)/t^\rho \leq C(\rho)$ выполняется при всех $t > 0$. Учтем также вытекающую из уравнения (1.7) связь между его корнями: $1 - k^*/a_i = 1 - \ln(e/a_i) = \ln a_i$, т.е.

$$a_i - k^* = a_i \ln a_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.1)$$

Если обозначить через s отношение a_2/a_1 , то последнее выражение в оценке $J(a)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &a^{-\rho} [\ln a_2 \ln(1 + aa_2^{1/\rho}) - \ln a_1 \ln(1 + aa_1^{1/\rho})] - k^* C(\rho) \ln s \\ &\geq a^{-\rho} \ln a_2 \ln(1 + aa_2^{1/\rho}) - k^* C(\rho) \ln s = a_2 \ln a_2 \frac{\ln(1 + aa_2^{1/\rho})}{(aa_2^{1/\rho})^\rho} - k^* C(\rho) \ln s. \end{aligned}$$

Переход к максимуму в предыдущих неравенствах с учетом (3.1) дает левую часть соотношения (1.10):

$$\max_{a>0} J(a) \geq C(\rho)(a_2 - k^* - k^* \ln s) = C(\rho)(a_2 - k^* \ln es).$$

Оценка сверху интеграла $J(a)$ получается просто. Поскольку на промежутке интегрирования переменная t удовлетворяет неравенству $t \leq aa_2^{1/\rho}$, то

$-t^{-\rho} \leq -a^{-\rho}/a_2$, откуда получаем

$$\begin{aligned} J(a) &= \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{a^{-\rho} - k^* t^{-\rho}}{1+t} dt \leq a^{-\rho} \left(1 - \frac{k^*}{a_2}\right) \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{dt}{1+t} \\ &= a^{-\rho} \left(1 - \frac{k^*}{a_2}\right) \ln(1+t) \Big|_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} = a^{-\rho} \ln a_2 (\ln(1 + aa_2^{1/\rho}) - \ln(1 + aa_1^{1/\rho})). \end{aligned}$$

Функция $\ln(1+t)/t$, очевидно, убывает на $\mathbb{R}_+$, поэтому выполняется неравенство

$$\ln(1+x) \leq \frac{x}{y} \ln(1+y), \quad 0 < x < y.$$

Применительно к нашему случаю имеем

$$\ln(1 + aa_1^{1/\rho}) \leq \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/\rho} \ln(1 + aa_2^{1/\rho}) = s^{-1/\rho} \ln(1 + aa_2^{1/\rho}),$$

и потому

$$J(a) \leq a^{-\rho} (1 - s^{-1/\rho}) \ln a_2 \ln(1 + aa_2^{1/\rho}) = a_2 \ln a_2 \frac{\ln(1 + aa_2^{1/\rho})}{(aa_2^{1/\rho})^\rho} (1 - s^{-1/\rho}).$$

Снова используя неравенство $\ln(1+t)/t^\rho \leq C(\rho)$ и (3.1), окончательно получаем

$$J(a) \leq (a_2 - k^*) C(\rho) (1 - s^{-1/\rho}).$$

Это неравенство усиливает правую часть выражения (1.10). Полученные оценки удобно свести в отдельное утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть a_1 и a_2 – корни уравнения (1.7) и $s = a_2/a_1 \geq 1$. При всех $k^* \in [0, 1]$ и $\rho \in (0, 1)$ справедливы следующие оценки:

$$\frac{\pi k^*}{\sin \pi \rho} + (a_2 - k^* \ln es) C(\rho) \leq \frac{C^*(k^*, \rho)}{\rho} \leq \frac{\pi k^*}{\sin \pi \rho} + (a_2 - k^*) (1 - s^{-1/\rho}) C(\rho).$$

Приведем другие оценки величины $C^*(k^*, \rho)$, показав, что она является возрастающей и выпуклой функцией переменной k^* на отрезке $[0, 1]$ при каждом фиксированном значении $\rho \in (0, 1)$. Поскольку максимум возрастающих и выпуклых функций является функцией возрастающей и выпуклой, то достаточно показать, что при любых фиксированных $\rho \in (0, 1)$ и $a > 0$ этими свойствами обладает функция

$$\varphi(x) = \varphi_a(x) := \frac{\pi x}{\sin \pi \rho} + \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{a^{-\rho} - xt^{-\rho}}{(1+t)} dt,$$

в представлении которой $a_1 = a_1(x)$ и $a_2 = a_2(x)$ являются корнями уравнения

$$a \ln \frac{e}{a} = x, \quad 0 \leq a_1 \leq 1 \leq a_2 \leq e. \quad (3.2)$$

Учитывая, что в силу (3.2) выполняются равенства $a'_i(x) = -1/\ln a_i(x)$, $i = 1, 2$, найдем производную функции $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{\pi}{\sin \pi \rho} + \frac{a^{-\rho} - a^{-\rho} a_2^{-1}}{1 + a a_2^{1/\rho}} \frac{a}{\rho} a_2^{1/\rho-1} \left(-\frac{1}{\ln a_2} \right) \\ &\quad - \frac{a^{-\rho} - a^{-\rho} a_1^{-1}}{1 + a a_1^{1/\rho}} \frac{a}{\rho} a_1^{1/\rho-1} \left(-\frac{1}{\ln a_1} \right) - \int_{a a_1^{1/\rho}}^{a a_2^{1/\rho}} \frac{t^{-\rho}}{1+t} dt \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi \rho} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{a^{1-\rho} a_1^{1/\rho-1}}{1 + a a_1^{1/\rho}} - \frac{a^{1-\rho} a_2^{1/\rho-1}}{1 + a a_2^{1/\rho}} \right] - \int_{a a_1^{1/\rho}}^{a a_2^{1/\rho}} \frac{t^{-\rho}}{1+t} dt \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \left(\frac{1}{\rho} \left[\frac{t_2^{1-\rho}}{1+t_2} - \frac{t_1^{1-\rho}}{1+t_1} \right] + \int_{t_1}^{t_2} \frac{t^{-\rho}}{1+t} dt \right).\end{aligned}$$

Здесь для сокращения записи мы обозначили $t_i = a a_i^{1/\rho}$, $i = 1, 2$. Выражение в круглых скобках совпадает с интегралом $\int_{t_1}^{t_2} \frac{t^{-\rho}}{\rho(1+t)^2} dt$, поскольку

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^{1-\rho}}{\rho(1+x)} + \int_0^x \frac{t^{-\rho}}{1+t} dt \right)' &= \frac{(1-\rho)x^{-\rho}(1+x) - x^{1-\rho}}{\rho(1+x)^2} + \frac{x^{-\rho}}{1+x} \\ &= \frac{(1-\rho)x^{-\rho}(1+x) - x^{1-\rho} + \rho x^{-\rho}(1+x)}{\rho(1+x)^2} = \frac{x^{-\rho}}{\rho(1+x)^2}.\end{aligned}$$

Таким образом, мы пришли к формуле

$$\varphi'(x) = \frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \frac{1}{\rho} \int_{a a_1^{1/\rho}}^{a a_2^{1/\rho}} \frac{t^{-\rho}}{(1+t)^2} dt.$$

Установленные выше соотношения $a'_i(x) = -1/\ln a_i$, $i = 1, 2$, показывают, что функция $a_1(x)$ возрастает на отрезке $[0, 1]$ от 0 до 1, а функция $a_2(x)$ убывает на этом же отрезке от e до 1. Отсюда видно, что интеграл в последней формуле берется по стягивающемуся с ростом $x \in [0, 1]$ отрезку. Значит, его величина убывает и влечет возрастание $\varphi'(x)$. Следовательно, функция $\varphi(x)$ выпукла на $[0, 1]$. Кроме того,

$$\varphi'(x) \geq \varphi'(0) = \frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \frac{1}{\rho} \int_0^{a e^{1/\rho}} \frac{t^{-\rho}}{(1+t)^2} dt = \frac{1}{\rho} \int_{a e^{1/\rho}}^{+\infty} \frac{t^{-\rho}}{(1+t)^2} dt > 0,$$

поэтому и функция $\varphi(x)$ также возрастает на $[0, 1]$.

Поскольку

$$\varphi(0) = \int_0^{a e^{1/\rho}} \frac{t^{-\rho}}{(1+t)} dt \leq a^{-\rho} \ln(1 + a e^{1/\rho}) = e \frac{\ln(1 + a e^{1/\rho})}{(a e^{1/\rho})^\rho} \leq e C(\rho)$$

и $\varphi(1) = \pi/\sin \pi \rho$, то в силу выпуклости $\varphi(x)$ имеем

$$\varphi_a(x) = \varphi(x) \leq \varphi(1)x + \varphi(0)(1-x) \leq \frac{\pi x}{\sin \pi \rho} + e C(\rho)(1-x).$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{\rho} C^*(k^*, \rho) = \max_{a>0} \{\varphi_a(k^*)\} \leq \frac{\pi k^*}{\sin \pi \rho} + e C(\rho)(1-k^*).$$

С другой стороны, опять используя выпуклость $\varphi(x)$, запишем

$$\varphi_a(x) = \varphi(x) \geq \varphi(1) + \varphi'(1)(x-1) = \frac{\pi}{\sin \pi \rho} + \frac{\pi}{\sin \pi \rho}(x-1) = \frac{\pi x}{\sin \pi \rho}.$$

Из неравенства $\varphi_a(x) \geq \pi x / \sin \pi \rho$, кстати, вытекает, что при $a_1 < a_2$ интеграл, входящий в определение функции $\varphi_a(x)$, положителен, хотя подынтегральная функция меняет знак на отрезке интегрирования. Кроме того, переходя к максимуму в предыдущем неравенстве, видим, что

$$\frac{1}{\rho} C^*(k^*, \rho) \geq \frac{\pi k^*}{\sin \pi \rho}.$$

Аналогично получаем и следующую оценку:

$$\varphi_a(x) = \varphi(x) \geq \varphi(0) + \varphi'(0)x = e^{\frac{\ln(1+ae^{1/\rho})}{(ae^{1/\rho})^\rho}} + x \left(\frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \frac{1}{\rho} \int_0^{ae^{1/\rho}} \frac{t^{-\rho}}{(1+t)^2} dt \right).$$

Если теперь точка $a_0 = a_0(\rho)$ такова, что

$$C(\rho) = \max_{a>0} \frac{\ln(1+a)}{a^\rho} = \frac{\ln(1+a_o)}{a_o^\rho},$$

то

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} C^*(k^*, \rho) &= \max_{a>0} \{\varphi_a(k^*)\} \geq \varphi_{a_o e^{-1/\rho}}(k^*) \\ &= eC(\rho) + k^* \left(\frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \frac{1}{\rho} \int_0^{a_o} \frac{t^{-\rho}}{(1+t)^2} dt \right) = eC(\rho) + \frac{k^*}{\rho} \int_{a_o}^{+\infty} \frac{t^{-\rho}}{(1+t)^2} dt. \end{aligned}$$

Результатом проведенных выкладок является

ЛЕММА 3. При любых $k^* \in [0, 1]$, $\rho \in (0, 1)$ справедливы оценки

$$C^*(k^*, \rho) \leq \frac{\pi k^* \rho}{\sin \pi \rho} + e\rho C(\rho)(1 - k^*), \quad (3.3)$$

$$C^*(k^*, \rho) \geq \frac{\pi k^* \rho}{\sin \pi \rho}, \quad (3.4)$$

$$C^*(k^*, \rho) \geq e\rho C(\rho) + k^* \int_{a_o}^{+\infty} \frac{t^{-\rho}}{(1+t)^2} dt. \quad (3.5)$$

Для формулировки важного дополнения к теореме 2 напомним одно определение. Нижним типом целой функции $f(z)$ при порядке ρ называется величина

$$\underline{\sigma}_\rho(f) := \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-\rho} \ln \max_{|z|=R} |f(z)|.$$

ТЕОРЕМА 3. Любая экстремальная в задаче (1.2) последовательность положительных чисел Λ , совпадающая с нулевым множеством соответствующей целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$, имеет нулевую нижнюю усредненную ρ -плотность. При этом и нижний тип указанной экстремальной функции также равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, если у целой функции $f(z)$, для которой достигается точная нижняя грань (1.2), последовательность нулей $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ имеет нижнюю усредненную ρ -плотность α^* и верхнюю усредненную ρ -плотность β^* , то из оценки (3.5) следует неравенство

$$\beta^* e \rho C(\rho) = \sigma_\rho(f) \geq \beta^* C^* \left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}, \rho \right) \geq \beta^* e \rho C(\rho) + \alpha^* \int_{a_0}^{+\infty} \frac{t^{-\rho}}{(t+1)^2} dt,$$

что влечет $\alpha^* = 0$. Это в свою очередь дает равенство нулю обычной нижней плотности последовательности Λ . Но в этом случае, как показано в работе [13], и нижний тип экстремальной функции $f(z)$ равен нулю.

Объединяя леммы 2 и 3, получаем основной результат параграфа (как обычно, $x^+ := \max\{x; 0\}$).

ТЕОРЕМА 4. Пусть, как и выше, $\rho \in (0, 1)$, $k^* \in [0, 1]$, $a_i = a_i(k^*)$, $i = 1, 2$, — корни уравнения (1.7), $s = a_2/a_1$, $a_0 = a_0(\rho)$ — точка максимума функции $a^{-\rho} \ln(1+a)$ на $\mathbb{R}_+$, а

$$B_\rho := \frac{1}{\rho} \int_0^{a_0} \frac{t^{-\rho}}{(t+1)^2} dt.$$

Тогда имеют место следующие двусторонние оценки:

$$\begin{aligned} \frac{\pi k^*}{\sin \pi \rho} + (a_2 - k^* \ln es)^+ C(\rho) &\leq \frac{C^*(k^*, \rho)}{\rho} \leq \frac{\pi k^*}{\sin \pi \rho} + (a_2 - k^*)(1 - s^{-1/\rho}) C(\rho), \\ \frac{\pi k^*}{\sin \pi \rho} + e C(\rho) - B_\rho k^* &\leq \frac{C^*(k^*, \rho)}{\rho} \leq \frac{\pi k^*}{\sin \pi \rho} + e C(\rho)(1 - k^*). \end{aligned}$$

Отметим, что оценки лемм 2 и 3 принципиально различные. Оценки (3.3)–(3.5) более наглядны и просты, так как линейно зависят от k^* , но именно последняя из них позволяет доказать теорему 3. В то же время из более сложных оценок леммы 2, содержащих корни уравнения (1.7), получить информацию о свойствах экстремальных последовательностей в задаче (1.2) не удастся, хотя эти оценки при определенных значениях параметров k^* и ρ точнее описывают поведение функции $C^*(k^*, \rho)$. В следующем параграфе при фиксированном k^* даются точные асимптотические оценки этой функции при $\rho \rightarrow +0$.

§ 4. Асимптотическая формула

Начнем с простого свойства корней уравнения (1.7), необходимого для доказательства корректности формулы (1.8) и вывода асимптотической формулы для $C^*(k^*, \rho)$ при $\rho \rightarrow +0$.

ЛЕММА 4. Если a_1 и a_2 — корни уравнения (1.7), $0 < a_1 < 1 < a_2$, то выполняется неравенство $a_1 a_2 < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из леммы 1 работы [14],

$$a_1 = es^{s/(1-s)}, \quad a_2 = es^{1/(1-s)},$$

где $s = a_2/a_1$. Рассмотрим при $s > 1$ функцию

$$\gamma(s) := \frac{s+1}{s-1} \ln s.$$

Поскольку

$$\gamma'(s) = \frac{s^2 - 1 - 2s \ln s}{(s-1)^2 s} > 0,$$

то $\gamma(s)$ возрастает на промежутке $(1, +\infty)$. Но тогда $\gamma(s) > \gamma(1+0) = 2$. Отсюда легко получаем требуемое:

$$a_1 a_2 = e^{2s^{(s+1)/(1-s)}} = e^{2-\gamma(s)} < e^{2-2} = 1, \quad s > 1.$$

Для наших целей удобно записать $C^*(k^*, \rho)$ в виде

$$C^*(k^*, \rho) = \rho \max_{a>0} \Psi(a),$$

где

$$\Psi(a) := \frac{\pi k^*}{\sin \pi \rho} + \int_{as^{-1/\rho}}^a \frac{a_2 a^{-\rho} - k^* \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau.$$

ЛЕММА 5. При фиксированных $k^* \in (0, 1)$ и $\rho \in (0, 1)$ функция $\Psi(a)$ имеет на $(0, +\infty)$ единственную точку (глобального) максимума a_* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подсчет производной функции $\Psi(a)$ дает

$$\begin{aligned} \Psi'(a) &= \frac{a^{-\rho}(a_2 - k^*)}{1+a} - s^{-1/\rho} \frac{a^{-\rho}(a_2 - k^* s)}{1+as^{-1/\rho}} - \rho a_2 a^{-\rho-1} \int_{as^{-1/\rho}}^a \frac{d\tau}{1+\tau} \\ &= a^{-\rho} \left[\frac{a_2 - k^*}{1+a} - \frac{a_2 - k^* s}{a + s^{1/\rho}} - \frac{\rho a_2}{a} \ln \frac{1+a}{1+as^{-1/\rho}} \right]. \end{aligned}$$

Поэтому стационарные точки функции $\Psi(a)$ на $(0, +\infty)$ являются корнями уравнения

$$\frac{a_2 - k^*}{1+a} - \frac{a_2 - k^* s}{a + s^{1/\rho}} - \frac{\rho a_2}{a} \ln \frac{1+a}{1+as^{-1/\rho}} = 0.$$

Учитывая равенства $a_2 - k^* = a_2 \ln a_2$ и $a_2 - k^* s = a_2 \ln a_1$, запишем (после сокращения на a_2) полученное уравнение в виде $g(a) = 0$, где

$$g(a) := \frac{a}{1+a} \ln a_2 + \frac{a}{a + s^{1/\rho}} \ln \frac{1}{a_1} - \rho \ln \frac{1+a}{1+as^{-1/\rho}}. \quad (4.1)$$

Осталось показать, что функция (4.1) имеет только один положительный корень. Несложно проверяется, что

$$g(0) = 0, \quad g(+\infty) = \ln a_2 + \ln \frac{1}{a_1} - \ln s = 0,$$

а также

$$\begin{aligned} g'(a) &= \frac{\ln a_2}{(1+a)^2} + \frac{s^{1/\rho} \ln(1/a_1)}{(a + s^{1/\rho})^2} - \rho \left(\frac{1}{1+a} - \frac{s^{-1/\rho}}{1+as^{-1/\rho}} \right) \\ &= (1+a)^{-2} \left[\ln a_2 - \rho(s^{1/\rho} - 1) \frac{1+a}{a + s^{1/\rho}} + s^{1/\rho} \ln \frac{1}{a_1} \left(\frac{1+a}{a + s^{1/\rho}} \right)^2 \right] \\ &= (1+a)^{-2} \left[\left(s^{1/\rho} \ln \frac{1}{a_1} \right) t^2 - \rho(s^{1/\rho} - 1)t + \ln a_2 \right] =: (1+a)^{-2} G(t), \end{aligned}$$

где $t = t(a) := (1 + a)/(a + s^{1/\rho})$ возрастает на $(0, +\infty)$ от $s^{-1/\rho}$ до 1. Для оценки дискриминанта D квадратного трехчлена $G(t)$ применим неравенство о среднем геометрическом и среднем арифметическом к числам $\ln(1/a_1)$ и $\ln a_2$:

$$\sqrt{\ln(1/a_1) \ln a_2} \leq \frac{\ln(1/a_1) + \ln a_2}{2} = \frac{\ln s}{2}, \quad \text{или} \quad \ln \frac{1}{a_1} \ln a_2 \leq \frac{\ln^2 s}{4}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} D &= \rho^2(s^{1/\rho} - 1)^2 - 4s^{1/\rho} \ln \frac{1}{a_1} \ln a_2 \geq \rho^2(s^{1/\rho} - 1)^2 - 4s^{1/\rho} \frac{\ln^2 s}{4} \\ &= 4s^{1/\rho} \rho^2 \left[\left(\frac{s^{1/(2\rho)} - s^{-1/(2\rho)}}{2} \right)^2 - \left(\frac{\ln s}{2\rho} \right)^2 \right] \\ &= 4s^{1/\rho} \rho^2 \left[\operatorname{sh}^2 \left(\frac{\ln s}{2\rho} \right) - \left(\frac{\ln s}{2\rho} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

В силу неравенства $\operatorname{sh} x > x$ для положительных x из последней оценки получаем $D > 0$. Следовательно, функция $G(t)$ имеет два корня t_1, t_2 , $t_1 < t_2$. Из теоремы Виета и леммы 4 следует, что оба корня положительны и удовлетворяют неравенству

$$t_1 t_2 = s^{-1/\rho} \ln^{-1} \frac{1}{a_1} \ln a_2 < s^{-1/\rho}.$$

Покажем, что корни t_1 и t_2 принадлежат интервалу $(s^{-1/\rho}, 1)$. Использование явных выражений для этих корней, сложным образом зависящих от параметров ρ и s , приводит к слишком громоздким выкладкам. Поэтому для локализации корней воспользуемся более простыми рассуждениями. Предполагая, что $t_2 \geq 1$, из предыдущего неравенства заключаем, что $t_1 \leq t_1 t_2 < s^{-1/\rho}$. Следовательно, $G(t) < 0$ при $t \in (s^{-1/\rho}, 1)$. Отсюда $g'(a) = (1 + a)^{-2} G(t(a)) < 0$ при всех $a > 0$, что влечет строгое убывание $g(a)$ на $(0, +\infty)$. Последнее невозможно, так как $g(0) = g(+\infty) = 0$. Таким образом, $t_2 < 1$.

Если мы, рассуждая аналогично, предположим теперь, что $t_1 \leq s^{-1/\rho}$, то получим $G(t) < 0$ на $(s^{-1/\rho}, t_2)$. Обозначив

$$b_i := t^{-1}(t_i) = \frac{s^{1/\rho} t_i - 1}{1 - t_i}, \quad i = 1, 2,$$

видим, что функция $g(a)$ убывает от 0 до $g(b_2)$, возрастая затем до нуля и оставаясь, тем самым, отрицательной для всех $a > 0$. Это в свою очередь дает отрицательность функции $\Psi'(a)$, т.е. убывание $\Psi(a)$ на $\mathbb{R}_+$. Поскольку $\Psi(0) = \pi k^* / \sin \pi \rho$, то $\Psi(a) < \pi k^* / \sin \pi \rho$ для всех положительных a . А это противоречит отмеченному в § 2 неравенству $\Psi(a) = \varphi_a(k^*) \geq \pi k^* / \sin \pi \rho$. Предыдущие рассуждения показывают, что $s^{-1/\rho} < t_1 < t_2 < 1$, или $0 < b_1 < b_2 < +\infty$. Следовательно, функция $g(a)$ возрастает от 0 до $g(b_1)$, убывает далее до $g(b_2)$, а затем снова возрастает до нуля. Отсюда следует, что $g(b_1)g(b_2) < 0$, и непрерывная функция $g(a)$ имеет единственный положительный корень $a_* \in (b_1, b_2)$.

Лемма 5 доказана.

Получение асимптотической формулы для $C^*(k^*, \rho)$ при $\rho \rightarrow +0$ требует гораздо более точных оценок точки максимума a_* , чем использованные в доказательстве предыдущей леммы. Но описанное в ней поведение функции $g(a)$ существенным образом используется в следующей лемме.

ЛЕММА 6. При всех достаточно малых ρ (т.е. при $0 < \rho < \rho_0(k^*)$) справедливы неравенства

$$a_2^{1/\rho} - \frac{a_2}{\rho} - 1 < a_* < a_2^{1/\rho} + O\left(\frac{1}{\rho}(a_1 a_2)^{1/\rho}\right). \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $u := a_2^{(\rho-1)/\rho} < 1$ и проверим, что при малых $\rho > 0$ для функции $g(a)$, исследованной в лемме 5, выполняется неравенство $g(a_2^{(1-u)/\rho} - 1) > 0$. Отсюда будет следовать, что при тех же ρ справедливо

$$a_* > a_2^{(1-u)/\rho} - 1. \quad (4.3)$$

Из определения (4.1) в силу $\ln(1/a_1) > 0$ получим

$$g(a_2^{(1-u)/\rho} - 1) > \frac{a_2^{(1-u)/\rho} - 1}{a_2^{(1-u)/\rho}} \ln a_2 - \rho \ln a_2^{(1-u)/\rho}.$$

Положительность правой части этого неравенства равносильна каждому из неравенств следующей цепочки:

$$\begin{aligned} (1 - a_2^{(u-1)/\rho}) \ln a_2 > (1 - u) \ln a_2 &\iff 1 - a_2^{(u-1)/\rho} > 1 - u \\ \iff u > a_2^{(u-1)/\rho} &\iff a_2^{(\rho-1)/\rho} > a_2^{(u-1)/\rho} \iff u < \rho \\ \iff a_2^{1-1/\rho} < \rho &\iff \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \ln a_2 < \ln \rho \iff \left(\frac{1}{\rho} - 1\right) \ln a_2 > \ln \frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство, очевидно, верно при всех достаточно малых $\rho > 0$.

Итак, нами получено неравенство (4.3); откуда, воспользовавшись при $\mu > 0$ оценкой $e^{-\mu} > 1 - \mu$, получим

$$\begin{aligned} a_* &> a_2^{1/\rho} a_2^{-u/\rho} - 1 = a_2^{1/\rho} e^{-u \ln a_2^{1/\rho}} - 1 > a_2^{1/\rho} (1 - u \ln a_2^{1/\rho}) - 1 \\ &= a_2^{1/\rho} (1 - a_2^{1-1/\rho} \ln a_2^{1/\rho}) - 1 = a_2^{1/\rho} - \frac{1}{\rho} a_2 \ln a_2 - 1 > a_2^{1/\rho} - \frac{a_2}{\rho} - 1. \end{aligned}$$

В результате установлено левое неравенство в (4.2):

$$a_* > a_2^{1/\rho} - \frac{a_2}{\rho} - 1, \quad 0 < \rho < \rho_1(k^*).$$

Теперь получим подходящую оценку корня a_* сверху. С этой целью возьмем

$$v := \frac{1 - \ln a_1}{\ln a_2} a_2 a_1^{1/\rho} > 0$$

и докажем, что для малых $\rho > 0$ выполняется

$$g(a_2^{(1+v)/\rho} - 1) < 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} g(a_2^{(1+v)/\rho} - 1) &= (1 - a_2^{-(1+v)/\rho}) \ln a_2 + \frac{(a_2^{(1+v)/\rho} - 1) s^{-1/\rho}}{1 + (a_2^{(1+v)/\rho} - 1) s^{-1/\rho}} \ln \frac{1}{a_1} \\ &\quad - \rho \ln a_2^{(1+v)/\rho} + \rho \ln(1 + (a_2^{(1+v)/\rho} - 1) s^{-1/\rho}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< -(v + a_2^{-(1+v)/\rho}) \ln a_2 + \left(\rho + \ln \frac{1}{a_1} \right) (a_2^{1+v} s^{-1})^{1/\rho} \\
&< -v \ln a_2 + \left(\rho + \ln \frac{1}{a_1} \right) (a_2^v a_1)^{1/\rho} \\
&< -\frac{\ln(e/a_1)}{\ln a_2} a_2 a_1^{1/\rho} \ln a_2 + \left(\ln \frac{e}{a_1} \right) (a_2^v a_1)^{1/\rho} = a_1^{1/\rho} \ln \frac{e}{a_1} (a_2^{v/\rho} - a_2) < 0
\end{aligned}$$

при достаточно малых ρ , так как $v/\rho \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$.

Итак, значение функции $g(a)$ в точке $a = a_2^{(1+v)/\rho} - 1$ отрицательно при достаточно малых $\rho > 0$, откуда

$$a_* < a_2^{(1+v)/\rho} - 1, \quad 0 < \rho < \rho_2(k^*). \quad (4.4)$$

Упростим оценку (4.4), огрубив ее посредством неравенства

$$a^x < (a-1)x + 1 < ax + 1, \quad \text{где } a > 1, \quad x > 0.$$

Получим

$$\begin{aligned}
a_* &< a_2^{1/\rho} a_2^{v/\rho} - 1 < a_2^{1/\rho} \left(1 + a_2 \frac{v}{\rho} \right) = a_2^{1/\rho} \left(1 + \frac{\ln(e/a_1)}{\ln a_2} \cdot \frac{a_2^2}{\rho} a_1^{1/\rho} \right) \\
&= a_2^{1/\rho} \left(1 + \frac{M}{\rho} a_1^{1/\rho} \right), \quad \text{где } M = M(k^*) = \frac{a_2^2 \ln(e/a_1)}{\ln a_2} > 0.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$a_* < a_2^{1/\rho} + O\left(\frac{1}{\rho} (a_1 a_2)^{1/\rho}\right), \quad 0 < \rho < \rho_2(k^*).$$

Правое неравенство в (4.2), а вместе с ним и лемма 6 доказаны.

Теперь все готово для получения двусторонних асимптотических оценок $C^*(k^*, \rho)$, когда $\rho \rightarrow +0$.

ТЕОРЕМА 5. При фиксированном $k^* \in (0, 1)$ и $\rho \rightarrow +0$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
C^*(k^*, \rho) &> 1 + a_2^{-1/\rho} \frac{\rho(\ln a_2 + \rho)}{1 + \rho} + a_1^{1/\rho} \frac{\rho(\rho - \ln a_1)}{1 - \rho} + O(\rho a_2^{-2/\rho}), \\
C^*(k^*, \rho) &< 1 + a_2^{-1/\rho} \frac{\rho(\ln a_2 + \rho)}{1 + \rho} + a_1^{1/\rho} \frac{\rho(\rho - \ln a_1)}{1 - \rho} + O(a_2^{-2/\rho}).
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала будет установлена оценка снизу. Преобразуем функцию $\Psi(a)$ к виду

$$a_2 a^{-\rho} \ln \frac{1+a}{1+as^{-1/\rho}} + k^* \left(\int_0^{as^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau + \int_a^{+\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau \right)$$

и найдем ее значение в точке $a = a_2^{1/\rho}$:

$$\begin{aligned}
\Psi(a_2^{1/\rho}) &= \frac{1}{\rho} \ln a_2 + k^* \int_{a_2^{1/\rho}}^{+\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau \\
&\quad + k^* \int_0^{a_1^{1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau + \ln(1 + a_2^{-1/\rho}) - \ln(1 + a_1^{1/\rho}).
\end{aligned}$$

Для оценки первого из интегралов воспользуемся справедливым при всех $\tau > 0$ неравенством $1/(1 + \tau^{-1}) > 1 - \tau^{-1} + \tau^{-2} - \tau^{-3}$, что дает

$$\begin{aligned} \int_{a_2^{1/\rho}}^{+\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau &= \int_{a_2^{1/\rho}}^{+\infty} \frac{\tau^{-1-\rho}}{1 + \tau^{-1}} d\tau > \int_{a_2^{1/\rho}}^{+\infty} \tau^{-1-\rho} (1 - \tau^{-1} + \tau^{-2} - \tau^{-3}) d\tau \\ &= \frac{a_2^{-1}}{\rho} - \frac{a_2^{-1/\rho-1}}{1 + \rho} + \frac{a_2^{-2/\rho-1}}{2 + \rho} - \frac{a_2^{-3/\rho-1}}{3 + \rho}. \end{aligned}$$

Теперь, привлекая неравенство $1/(1 + \tau) > 1 - \tau$, оцениваем второй интеграл:

$$\int_0^{a_1^{1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau > \int_0^{a_1^{1/\rho}} (\tau^{-\rho} - \tau^{1-\rho}) d\tau = \frac{a_1^{1/\rho-1}}{1 - \rho} - \frac{a_1^{2/\rho-1}}{2 - \rho}.$$

Применяя еще неравенства $x - x^2 < \ln(1 + x) < x - x^2/2 + x^3/3$, $x > 0$, имеем

$$\ln(1 + a_2^{-1/\rho}) > a_2^{-1/\rho} - \frac{a_2^{-2/\rho}}{2}, \quad \ln(1 + a_1^{1/\rho}) < a_1^{1/\rho} - \frac{a_1^{2/\rho}}{2} + \frac{a_1^{3/\rho}}{3}.$$

Таким образом, с учетом связи $k^* = a_2 \ln(e/a_2) = a_1 \ln(e/a_1)$ при $\rho \rightarrow +0$ получаем

$$\begin{aligned} \Psi(a_2^{1/\rho}) &> \frac{1}{\rho} \ln a_2 + k^* \left(\frac{a_2^{-1}}{\rho} - \frac{a_2^{-1/\rho-1}}{1 + \rho} + \frac{a_2^{-2/\rho-1}}{2 + \rho} - \frac{a_2^{-3/\rho-1}}{3 + \rho} + \frac{a_1^{1/\rho-1}}{1 - \rho} - \frac{a_1^{2/\rho-1}}{2 - \rho} \right) \\ &\quad + a_2^{-1/\rho} - \frac{a_2^{-2/\rho}}{2} - a_1^{1/\rho} + \frac{a_1^{2/\rho}}{2} - \frac{a_1^{3/\rho}}{3} \\ &= \frac{1}{\rho} + a_2^{-1/\rho} \left(1 - \frac{k^*}{a_2(1 + \rho)} \right) + a_2^{-2/\rho} \left(\frac{k^*}{a_2(2 + \rho)} - \frac{1}{2} \right) \\ &\quad + a_1^{1/\rho} \left(\frac{k^*}{a_1(1 - \rho)} - 1 \right) + a_1^{2/\rho} \left(\frac{1}{2} - \frac{k^*}{a_1(2 - \rho)} \right) - \frac{k^*}{a_2(3 + \rho)} a_2^{-3/\rho} - \frac{a_1^{3/\rho}}{3} \\ &= \frac{1}{\rho} + \frac{a_2^{-1/\rho}}{1 + \rho} \left(1 + \rho - \ln \frac{e}{a_2} \right) + \frac{a_1^{1/\rho}}{1 + \rho} \left(\ln \frac{e}{a_1} - 1 + \rho \right) + O(a_2^{-2/\rho}) + O(a_1^{2/\rho}) \\ &= \frac{1}{\rho} + a_2^{-1/\rho} \frac{\ln a_2 + \rho}{1 + \rho} + a_1^{1/\rho} \frac{\rho - \ln a_1}{1 - \rho} + O(a_2^{-2/\rho}) + O(a_1^{2/\rho}). \end{aligned}$$

Из леммы 4 следует, что $O(a_1^{2/\rho}) = O(a_2^{-2/\rho})$, поэтому окончательно запишем

$$\Psi(a_2^{1/\rho}) > \frac{1}{\rho} + a_2^{-1/\rho} \frac{\ln a_2 + \rho}{1 + \rho} + a_1^{1/\rho} \frac{\rho - \ln a_1}{1 - \rho} + O(a_2^{-2/\rho}).$$

Итак, при фиксированном $k^* \in (0, 1)$ и $\rho \rightarrow +0$ справедливо неравенство

$$C^*(k^*, \rho) > 1 + a_2^{-1/\rho} \frac{\rho(\ln a_2 + \rho)}{1 + \rho} + a_1^{1/\rho} \frac{\rho(\rho - \ln a_1)}{1 - \rho} + O(\rho a_2^{-2/\rho}).$$

Переходя к оценке сверху, напомним, что

$$\rho^{-1} C^*(k^*, \rho) = \max_{a > 0} \Psi(a) = \Psi(a_*)$$

$$= a_2 a_*^{-\rho} \ln \frac{1 + a_*}{1 + a_* s^{-1/\rho}} + k^* \int_0^{a_* s^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{1 + \tau} d\tau + k^* \int_{a_*}^{+\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{1 + \tau} d\tau.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\ln(1 + a_*) &= \ln a_* + \ln(1 + a_*^{-1}) < \ln a_* + a_*^{-1} - \frac{a_*^{-2}}{2} + \frac{a_*^{-3}}{3}, \\ \ln(1 + a_* s^{-1/\rho}) &> a_* s^{-1/\rho} - \frac{a_*^2 s^{-2/\rho}}{2}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$a_2 a_*^{-\rho} \ln \frac{1 + a_*}{1 + a_* s^{-1/\rho}} < a_2 a_*^{-\rho} \left(\ln a_* + a_*^{-1} - \frac{a_*^{-2}}{2} + \frac{a_*^{-3}}{3} - a_* s^{-1/\rho} + \frac{a_*^2 s^{-2/\rho}}{2} \right).$$

Для оценки интегралов в представлении $\Psi(a_*)$ воспользуемся неравенствами

$$\frac{1}{1 + \tau} < 1 - \tau + \tau^2, \quad \frac{1}{1 + \tau^{-1}} < 1 - \tau^{-1} + \tau^{-2},$$

в которых $\tau > 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\int_0^{a_* s^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{1 + \tau} d\tau &< \int_0^{a_* s^{-1/\rho}} (\tau^{-\rho} - \tau^{1-\rho} + \tau^{2-\rho}) d\tau \\ &= \frac{(a_* s^{-1/\rho})^{1-\rho}}{1 - \rho} - \frac{(a_* s^{-1/\rho})^{2-\rho}}{2 - \rho} + \frac{(a_* s^{-1/\rho})^{3-\rho}}{3 - \rho}, \\ \int_{a_*}^{+\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{1 + \tau} d\tau &= \int_{a_*}^{+\infty} \frac{\tau^{-1-\rho}}{1 + \tau^{-1}} d\tau < \int_{a_*}^{+\infty} (\tau^{-1-\rho} - \tau^{-2-\rho} + \tau^{-3-\rho}) d\tau \\ &= \frac{a_*^{-\rho}}{\rho} - \frac{a_*^{-\rho-1}}{\rho + 1} + \frac{a_*^{-\rho-2}}{\rho + 2}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\rho^{-1} C^*(k^*, \rho) &< a_2 a_*^{-\rho} \left(\ln a_* + a_*^{-1} - \frac{a_*^{-2}}{2} + \frac{a_*^{-3}}{3} - a_* s^{-1/\rho} + \frac{a_*^2 s^{-2/\rho}}{2} \right) \\ &+ k^* \left(\frac{a_*^{-\rho}}{\rho} - \frac{a_*^{-\rho-1}}{\rho + 1} + \frac{a_*^{-\rho-2}}{\rho + 2} + \frac{(a_* s^{-1/\rho})^{1-\rho}}{1 - \rho} - \frac{(a_* s^{-1/\rho})^{2-\rho}}{2 - \rho} + \frac{(a_* s^{-1/\rho})^{3-\rho}}{3 - \rho} \right) \\ &= a_*^{-\rho} \left(a_2 \ln a_* + \frac{k^*}{\rho} \right) + a_*^{-\rho-1} \left(a_2 - \frac{k^*}{\rho + 1} \right) - a_*^{-\rho-2} \left(\frac{a_2}{2} - \frac{k^*}{\rho + 2} \right) + \frac{a_2 a_*^{-\rho-3}}{3} \\ &+ a_*^{1-\rho} s^{-1/\rho} \left(\frac{k^* s}{1 - \rho} - a_2 \right) - a_*^{2-\rho} s^{-2/\rho} \left(\frac{k^* s}{2 - \rho} - \frac{a_2}{2} \right) + \frac{k^* (a_* s^{-1/\rho})^{3-\rho}}{3 - \rho}.\end{aligned}$$

Замечая, что

$$\frac{a_2}{2} - \frac{k^*}{\rho + 2} > \frac{1}{2}(a_2 - k^*) > 0, \quad \frac{k^* s}{2 - \rho} - \frac{a_2}{2} > \frac{1}{2}(k^* s - a_2) = -\frac{a_2}{2} \ln a_1 > 0,$$

и отбрасывая отрицательные слагаемые, получим

$$\begin{aligned}\rho^{-1} C^*(k^*, \rho) &< a_*^{-\rho} \left(a_2 \ln a_* + \frac{k^*}{\rho} \right) + a_*^{-\rho-1} \left(a_2 - \frac{k^*}{\rho + 1} \right) \\ &+ a_*^{1-\rho} s^{-1/\rho} \left(\frac{k^* s}{1 - \rho} - a_2 \right) + \frac{a_2 a_*^{-\rho-3}}{3} + \frac{k^* (a_* s^{-1/\rho})^{3-\rho}}{3 - \rho}.\end{aligned}$$

Непосредственно проверяется, что функция $h(a) := a^{-\rho}(a_2 \ln a + k^*/\rho)$ достигает (глобального) максимума на луче $a > 0$ в точке $a = a_2^{1/\rho}$. Поэтому

$$a_*^{-\rho} \left(a_2 \ln a_* + \frac{k^*}{\rho} \right) = h(a_*) \leq h(a_2^{1/\rho}) = \frac{1}{\rho} \left(\ln a_2 + \frac{k^*}{a_2} \right) = \frac{1}{\rho}.$$

Продолжая оценку $C^*(k^*, \rho)$, запишем

$$\begin{aligned} \rho^{-1} C^*(k^*, \rho) &< \frac{1}{\rho} + a_*^{-\rho-1} \left(a_2 - \frac{k^*}{\rho+1} \right) + a_*^{1-\rho} s^{-1/\rho} \left(\frac{k^* s}{1-\rho} - a_2 \right) \\ &\quad + \frac{a_2 a_*^{-\rho-3}}{3} + \frac{k^* (a_* s^{-1/\rho})^{3-\rho}}{3-\rho}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Осталось воспользоваться леммой 6. Во-первых, из (1.7) и левого неравенства (4.2) получаем

$$\begin{aligned} a_*^{-\rho-1} \left(a_2 - \frac{k^*}{\rho+1} \right) &= a_*^{-\rho-1} a_2 \left(1 - \frac{\ln(e/a_2)}{\rho+1} \right) = a_*^{-\rho-1} a_2 \frac{\ln a_2 + \rho}{\rho+1} \\ &< \left(a_2^{1/\rho} - \frac{a_2}{\rho} - 1 \right)^{-\rho-1} a_2 \frac{\ln a_2 + \rho}{\rho+1} \\ &= a_2^{-1/\rho} \frac{\ln a_2 + \rho}{\rho+1} \left(1 - \frac{a_2^{1-1/\rho}}{\rho} - a_2^{-1/\rho} \right)^{-\rho-1}. \end{aligned}$$

К выражению $(1 - a_2^{1-1/\rho}/\rho - a_2^{-1/\rho})^{-\rho-1}$ применим неравенства

$$\begin{aligned} (1-x)^{1+\rho} &> 1 - (1+\rho)x \quad \text{при } x \in (0, 1), \\ \frac{1}{1 - (1+\rho)x} &< 1 + 2x \quad \text{при } x \in \left(0, \frac{1-\rho}{2(1+\rho)} \right). \end{aligned}$$

В результате при всех достаточно малых $\rho > 0$ будет выполняться

$$\left(1 - \frac{a_2^{1-1/\rho}}{\rho} - a_2^{-1/\rho} \right)^{-\rho-1} < 1 + 2 \left(\frac{a_2}{\rho} + 1 \right) a_2^{-1/\rho}.$$

Отсюда выводим оценку второго слагаемого в (4.5):

$$\begin{aligned} a_*^{-\rho-1} \left(a_2 - \frac{k^*}{\rho+1} \right) &< a_2^{-1/\rho} \frac{\ln a_2 + \rho}{\rho+1} \left(1 + 2 \left(\frac{a_2}{\rho} + 1 \right) a_2^{-1/\rho} \right) \\ &= a_2^{-1/\rho} \frac{\ln a_2 + \rho}{\rho+1} + O \left(\frac{1}{\rho} a_2^{-2/\rho} \right), \quad \rho \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Для оценки третьего слагаемого в (4.5) применим правое неравенство (4.2):

$$\begin{aligned} a_*^{1-\rho} s^{-1/\rho} \left(\frac{k^* s}{1-\rho} - a_2 \right) &= a_*^{1-\rho} s^{-1/\rho} a_2 \left(\frac{k^*}{a_1} \cdot \frac{1}{1-\rho} - 1 \right) \\ &= a_*^{1-\rho} a_2^{1-1/\rho} a_1^{1/\rho} \frac{\rho - \ln a_1}{1-\rho} \\ &< \left[a_2^{1/\rho} \left(1 + O \left(\frac{1}{\rho} a_1^{1/\rho} \right) \right) \right]^{1-\rho} a_2^{1-1/\rho} a_1^{1/\rho} \frac{\rho - \ln a_1}{1-\rho} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[1 + O\left(\frac{1}{\rho} a_1^{1/\rho}\right) \right]^{1-\rho} a_1^{1/\rho} \frac{\rho - \ln a_1}{1 - \rho} \\
&< a_1^{1/\rho} \frac{\rho - \ln a_1}{1 - \rho} + O\left(\frac{1}{\rho} a_1^{2/\rho}\right), \quad \rho \rightarrow +0.
\end{aligned}$$

Наконец, поскольку из (4.2) вытекает, что $a_* \sim a_2^{1/\rho}$ при $\rho \rightarrow +0$, то

$$\begin{aligned}
\frac{a_2 a_*^{-\rho-3}}{3} &= O(a_2^{-3/\rho}) = O\left(\frac{1}{\rho} a_2^{-2/\rho}\right), \\
\frac{k^* (a_* s^{-1/\rho})^{3-\rho}}{3-\rho} &\sim \frac{k^*}{3} a_2^{3/\rho-1} s^{1-3/\rho} = \frac{k^*}{3} a_1^{3/\rho-1} = O\left(\frac{1}{\rho} a_1^{2/\rho}\right), \quad \rho \rightarrow +0.
\end{aligned}$$

В очередной раз привлекая лемму 4, из (4.5) при $\rho \rightarrow +0$ окончательно выводим оценку, которая и завершает доказательство теоремы 5:

$$\rho^{-1} C^*(k^*, \rho) < \frac{1}{\rho} + a_2^{-1/\rho} \frac{\ln a_2 + \rho}{1 + \rho} + a_1^{1/\rho} \frac{\rho - \ln a_1}{1 - \rho} + O\left(\frac{1}{\rho} a_2^{-2/\rho}\right).$$

Сочетание оценок из теоремы 5 приводит к искомой асимптотике экстремальной величины $C^*(k^*, \rho)$.

СЛЕДСТВИЕ. При фиксированном $k^* \in (0, 1)$ и $\rho \rightarrow +0$ справедлива содержащая корни уравнения (1.7) асимптотическая формула

$$C^*(k^*, \rho) = 1 + a_2^{-1/\rho} \frac{\rho(\ln a_2 + \rho)}{1 + \rho} + a_1^{1/\rho} \frac{\rho(\rho - \ln a_1)}{1 - \rho} + O(a_2^{-2/\rho}). \quad (4.6)$$

Это следствие при фиксированных $0 < \alpha^* < \beta^* < +\infty$ и $\rho \rightarrow +0$ с учетом формулы (1.8) дает

$$s^*(\alpha^*, \beta^*, \rho) = \beta^* \left\{ 1 + a_2^{-1/\rho} \frac{\rho(\ln a_2 + \rho)}{1 + \rho} + a_1^{1/\rho} \frac{\rho(\rho - \ln a_1)}{1 - \rho} \right\} + O(a_2^{-2/\rho}).$$

Как уже отмечалось во введении, асимптотика (4.6) справедлива и при $\alpha^* = 0$, когда $a_1 = 0$, $a_2 = e$. Таким образом,

$$s^*(\beta^*, \rho) = \beta^* \{1 + \rho e^{-1/\rho} + O(e^{-2/\rho})\}, \quad \rho \rightarrow +0.$$

Выписанное соотношение демонстрирует близость при малых ρ наименьших значений типов целых функций порядка меньше единицы в случаях расположения их нулей на одном луче и произвольного расположения на плоскости.

Интересное обстоятельство обнаруживается при более детальном анализе формулы (4.6). Из леммы 4 можно заключить, что первые два слагаемых в (4.6) преобладают над оставшимися. Для сравнения скоростей стремления к нулю двух последних слагаемых асимптотики (4.6) необходимо выяснить, какое из чисел больше, a_1 или a_2^{-2} . Учитывая представления корней уравнения (1.7), использованные в лемме 4, сводим задачу к сравнению чисел $es^{s/(1-s)}$ и $e^{-2}s^{-2/(1-s)}$. Условие $a_1 < a_2^{-2}$ эквивалентно цепочке равносильных неравенств

$$\begin{aligned}
a_1 a_2^2 < 1 &\iff s^{(s+2)/(1-s)} e^3 < 1 \iff 3 - \frac{s+2}{s-1} \ln s < 0 \\
&\iff \ln s - 3 \frac{s-1}{s+2} > 0.
\end{aligned}$$

Элементарное исследование показывает, что последнее неравенство равносильно условию $s > s_0 := 8.57736 \dots$, что с учетом равенства

$$k^* = \frac{es^{1/(1-s)} \ln s}{s-1}$$

(см. [14]) совпадает с ограничением $k^* < k_0^* := 0.58058 \dots$.

Изложенное выше позволяет упростить вид асимптотической формулы (4.6) на различных промежутках изменения k^* .

ТЕОРЕМА 6. *При фиксированном $k^* \in (0, 1)$ и $\rho \rightarrow +0$ справедливы асимптотические соотношения*

$$C^*(k^*, \rho) = 1 + a_2^{-1/\rho} \frac{\rho(\ln a_2 + \rho)}{1 + \rho} + O(a_2^{-2/\rho}), \quad k^* \in (0, k_0^*],$$

$$C^*(k^*, \rho) = 1 + a_2^{-1/\rho} \frac{\rho(\ln a_2 + \rho)}{1 + \rho} + O(\rho a_1^{1/\rho}), \quad k^* \in (k_0^*, 1).$$

Отметим в заключение, что хорошо известная связь между экстремальными задачами для типов целых функций и полнотой позволяет непосредственно применить полученные выше результаты к вопросам полноты систем экспонент в круге. Техническая реализация этой возможности в настоящей статье привела бы к значительному увеличению ее объема. Приложениям наших результатов к полноте экспоненциальных систем с учетом последних достижений в этой области (см. [9], [10], [2]) предполагается посвятить отдельную статью.

Список литературы

- [1] А. Ю. Попов, “Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ -плотности”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, №1, 31–36; англ. пер.: A. Yu. Popov, “The least possible type under the order $\rho < 1$ of canonical products with positive zeros of a given upper ρ -density”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **60**:1 (2005), 32–36.
- [2] Г. Г. Брайчев, В. Б. Шерстюков, “О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:1 (2011), 3–28; англ. пер.: G. G. Braichev, V. B. Sherstyukov, “On the least possible type of entire functions of order $\rho \in (0, 1)$ with positive zeros”, *Izv. Math.*, **75**:1 (2011), 1–27.
- [3] Г. Г. Брайчев, В. Б. Шерстюков, “О росте целых функций с дискретно измеримыми нулями”, *Матем. заметки*, **91**:5 (2012), 674–690.
- [4] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956; англ. пер.: B. Ja. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964.
- [5] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций*, Наука, М., 1970; англ. пер.: A. A. Goldberg, I. V. Ostrovskii, *Value distribution of meromorphic functions*, Transl. Math. Monogr., **236**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [6] Б. Н. Хабибуллин, “О типе целых и мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **183**:11 (1992), 35–44; англ. пер.: B. N. Khabibullin, “On the type of entire and meromorphic functions”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **77**:2 (1994), 293–301.
- [7] P. Malliavin, L. A. Rubel, “On small entire functions of exponential type with given zeros”, *Bull. Soc. Math. France*, **89** (1961), 175–206.

- [8] Б. Н. Хабибуллин, *Полнота систем экспонент и множества единственности*, РИЦ БашГУ, Уфа, 2006.
- [9] А. Ю. Попов, “О полноте в пространствах аналитических функций систем экспонент с вещественными показателями заданной верхней плотности”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1999, № 5, 48–52; англ. пер.: A. Yu. Popov, “Completeness of exponential systems with real exponents of a prescribed under density in spaces of analytic functions”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **54**:5 (1999), 47–51.
- [10] Б. Н. Хабибуллин, “Последовательность нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции”, *Матем. сб.*, **200**:2 (2009), 129–158; B. N. Khabibullin, “Zero sequences of holomorphic functions, representation of meromorphic functions. II. Entire functions”, *Sb. Math.*, **200**:2 (2009), 283–312.
- [11] G. G. Braichev, V. B. Sherstyukov, “On an extremal problem related to the completeness of a system of exponentials in the disk”, *Asian-Eur. J. Math.*, **1**:1 (2008), 15–26.
- [12] Г. Г. Брайчев, *Введение в теорию роста выпуклых и целых функций*, Прометей, М., 2005.
- [13] Г. Г. Брайчев, О. В. Шерстюкова, “Наибольший возможный нижний тип целой функции порядка $\rho \in (0; 1)$ с нулями фиксированных ρ -плотностей”, *Матем. заметки*, **90**:2 (2011), 199–215; англ. пер.: G. G. Braichev, O. V. Sherstyukova, “The greatest possible lower type of entire functions of order $\rho \in (0; 1)$ with zeros of fixed ρ -densities”, *Math. Notes*, **90**:1–2 (2011), 189–203.
- [14] Г. Г. Брайчев, В. Б. Шерстюков, “Точные соотношения между плотностями нулей целых функций конечного порядка”, *Mat. Stud.*, **30**:2 (2008), 183–188.

Г. Г. Брайчев (G. G. Braichev)

Московский педагогический
государственный университет
E-mail: braichev@mail.ru

Поступила в редакцию
21.04.2011 и 05.02.2012