Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Мультипликативные модули над некоммутативными кольцами,
Матем. сб., 2003, том 194, номер 12, 93–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm788>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:01:21

УДК 512.55

А. А. Туганбаев

Мультипликационные модули над некоммутативными кольцами

Доказано, что все подмодули мультипликационных модулей над регулярными кольцами являются мультипликационными. Если A – кольцо с коммутативным умножением правых идеалов, то каждый его проективный правый идеал является мультипликационным, и конечно порожденный A -модуль M является мультипликационным в точности тогда, когда все его локализации относительно максимальных правых идеалов кольца A являются циклическими модулями над соответствующими локализациями кольца A . Кроме того, ряд известных результатов о мультипликационных модулях над коммутативными кольцами перенесен на модули над не обязательно коммутативными кольцами.

Библиография: 20 названий.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Если не оговорено противное, все модули предполагаются правыми и унитарными. Выражение типа “нётерово кольцо” означает, что соответствующие условия выполнены справа и слева. A -модуль M называется *мультипликационным*, если для каждого его подмодуля N существует такой идеал B кольца A , что $N = MB$. Правый идеал B кольца A называется *мультипликационным правым идеалом*, если B_A – мультипликационный модуль. Ясно, что M_A – мультипликационный модуль $\iff M(N : M) = N$ для любого подмодуля N из $M \iff Mr(M/N) = N$ для любого подмодуля N из M . (Для любых подмножеств X и Y модуля M_A через $(Y : X)$ обозначается подмножество $\{a \in A \mid Xa \subseteq Y\}$ кольца A , а через $r(X)$ или $r_A(X)$ обозначается правый аннулятор $(0 : X)$ множества X в A .)

Простейшим примером мультипликационного модуля является любой простой модуль над произвольным кольцом. В случае коммутативных колец мультипликационными являются все проективные идеалы, все циклические модули, все конечно порожденные дистрибутивные модули и все идеалы, порожденные идемпотентами. В настоящей работе приведены также другие примеры мультипликационных модулей. Если перейти от коммутативного к более общему случаю модулей над инвариантными справа кольцами (т.е. кольцами, у которых все правые идеалы являются идеалами), то класс всех мультипликационных правых модулей будет продолжать включать в себя все циклические правые модули, все правые идеалы, порожденные идемпотентами, и все конечно порожденные дистрибутивные правые модули (см. лемму 2.1, предложение 2.5 и [1; с. 168]). Кроме того, каждый обратимый идеал инвариантного кольца является конечно порожденным мультипликационным правым (левым) идеалом (см. предложение 2.6).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00218).

Имеется много работ, содержащих результаты о мультипликативных модулях над коммутативными кольцами; см., например, [2]–[14]. Мультипликативные модули над не обязательно коммутативными кольцами слегка затронуты в [1] и [15].

Хотя все фактормодули мультипликативных модулей являются мультипликативными и любое коммутативное кольцо является мультипликативным модулем над собой (см. лемму 1.2(1) и лемму 2.1), подмодули мультипликативных модулей не всегда являются мультипликативными и идеалы коммутативных колец не всегда являются мультипликативными идеалами. Например, если $A = k[x, y]$ – кольцо многочленов от двух переменных x, y над полем k , то A_A – мультипликативный модуль, но его подмодуль $xA + yA$ не является мультипликативным, поскольку можно проверить, что $(x + y)A \neq (xA + yA)B$ для любого идеала B области A . В [14] доказано, что каждый проективный идеал коммутативного кольца является мультипликативным идеалом. Кольцо A называется *регулярным* (*строго регулярным*), если $a \in aAa$ ($a \in a^2A$) для каждого элемента $a \in A$. В [11] доказано, что если M – мультипликативный модуль над коммутативным регулярным кольцом A , то все подмодули модуля M являются мультипликативными.

Первым основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА 1. (1) *Если M – мультипликативный модуль над регулярным кольцом, то все его подмодули являются мультипликативными и M – дистрибутивный модуль.*

(2) *Если A – кольцо с коммутативным умножением правых идеалов, то каждый его проективный правый идеал является мультипликативным правым идеалом.*

В связи с теоремой 1 заметим, что если A – некоммутативное тело, то само тело A и кольцо формальных степенных рядов $A[[x]]$ являются примерами некоммутативных колец с коммутативным умножением правых идеалов. Кроме того, любое строго регулярное кольцо является кольцом с коммутативным умножением правых идеалов, поскольку легко проверить, что строго регулярные кольца совпадают с регулярными кольцами, у которых все идемпотенты центральны.

В связи с теоремой 1 также заметим, что кольцо A с коммутативным умножением правых идеалов является инвариантным справа кольцом, поскольку $B = BA = AB$ для любого правого идеала B кольца A . Кроме того, существует такое инвариантное кольцо A , что A обладает ровно двумя максимальными правыми (левыми) идеалами P и Q , но правая локализация A_P не существует [16]. Таким образом, при изучении модулей над некоммутативными инвариантными кольцами возникает дополнительное затруднение: инвариантное кольцо не обязательно обладает правой локализацией относительно любого максимального правого идеала.

В [4] доказано, что конечно порожденный модуль M над коммутативным кольцом A является мультипликативным в точности тогда, когда для любого максимального идеала P кольца A модуль частных M_P является циклическим A_P -модулем. В [17] доказано, что модуль M над коммутативным кольцом A является мультипликативным в точности тогда, когда для любого максимального идеала P кольца A модуль частных M_P является циклическим A_P -модулем и либо $M_P = 0_P$, либо $(N : M)_P = (N_P : M_P)$ для любого подмодуля N модуля M . В [6] доказаны следующие результаты для модуля M над коммутативным кольцом A :

(1) M – мультипликативный модуль $\iff$ для любого максимального идеала P кольца A верно, что либо P не содержит аннулятор любого элемента модуля M , либо существуют такие элементы $p \in P$ и $x \in M$, что $M(1 - p) \subseteq xA$;

(2) если M конечно порожден, то M – мультипликативный модуль $\iff M/MP$ – циклический модуль для любого максимального идеала P кольца A .

Вторым основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 2. Пусть A – кольцо с коммутативным умножением правых идеалов и M – A -модуль. Тогда для каждого максимального правого идеала P кольца A правая локализация A_P существует и является кольцом с коммутативным умножением правых идеалов; кроме того, существует модуль частных M_P , являющийся правым A_P -модулем. Далее:

(1) M – мультипликативный модуль $\iff$ для каждого $P \in \max(A_A)$ верно, что M_P – циклический A_P -модуль и либо $M_P = 0_P$, либо $(N_P : M_P) \subseteq (N : M)_P$ для любого $N \in \text{Lat}(M)$ $\iff$ для каждого $P \in \max(A_A)$ верно, что либо P не содержит аннулятор любого элемента модуля M , либо существуют такие элементы $p \in P$ и $x \in M$, что $M(1 - p) \subseteq xA$;

(2) если M – конечно порожденный модуль, то M – мультипликативный модуль $\iff M_P$ – циклический A_P -модуль для каждого $P \in \max(A_A)$ $\iff M/MP$ – циклический модуль для каждого $P \in \max(A_A)$.

Третьим основным результатом работы является теорема 3, которая переносит на модули над инвариантными справа кольцами один полезный результат для мультипликативных модулей над коммутативными кольцами (см. [6] и [12]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть M – мультипликативный модуль над инвариантным справа кольцом A . Тогда равносильны следующие условия:

- (1) M – конечно порожденный модуль;
- (2) $M \neq MP$ для каждого такого максимального правого идеала P кольца A , что $r(M) \subseteq P$;
- (3) существуют такие $m_1, \dots, m_n \in M$, что $A = \sum_{i=1}^n (m_i A : M)$.

В связи с теоремой 3 отметим, что существуют коммутативная область A и мультипликативный A -модуль M , не являющийся конечно порожденным. Пусть K – поле, A – кольцо многочленов $K[x_1, x_2, x_3, \dots]$ от счетного бесконечного множества переменных $x_1, x_2, x_3, \dots$, $B = \sum_{i=1}^{\infty} x_i A$, $C = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_i^2) A$, и пусть $M = B/C$. В [6] показано, что M – требуемый модуль.

Заметим, что некоторые промежуточные результаты настоящей работы являются расширениями на некоммутативный случай соответствующих результатов для модулей над коммутативными кольцами, доказанных в [3], [6], [12] и [17].

Доказательство теорем 1–3 разбито на ряд утверждений, некоторые из которых представляют самостоятельный интерес. Приведем необходимые обозначения и определения. Для модуля M через $J(M)$, $\text{End}(M)$, $\text{Lat}(M)$ и $\max(M)$ обозначаются его радикал Джекобсона, кольцо эндоморфизмов, решетка всех подмодулей и множество всех максимальных подмодулей соответственно. Модуль называется *дистрибутивным*, если решетка $\text{Lat}(M)$ дистрибутивна, т.е. $(X + Y) \cap Z = X \cap Z + Y \cap Z$ для любых $X, Y, Z \in \text{Lat}(M)$.

Подмножество S кольца A называется *множеством правых знаменателей*, если существуют кольцо AS^{-1} и кольцевой гомоморфизм $f: A \rightarrow AS^{-1}$ такие,

что все элементы множества $f(S)$ обратимы в AS^{-1} , $AS^{-1} = \{f(a)f(t)^{-1} \mid a \in A, t \in S\}$ и $\text{Ker}(f) = \{a \in A \mid S \cap r_A(a) \neq \emptyset\}$. В этом случае кольцо AS^{-1} называется *кольцом частных кольца A относительно S* , f называется *каноническим кольцевым гомоморфизмом* и для любого A -модуля M правый AS^{-1} -модуль $M \otimes_A (AS^{-1})$ называется *модулем частных модуля M относительно S* (этот AS^{-1} -модуль обозначается через MS^{-1}). Отображение $g: M \rightarrow M \otimes_A A \subseteq MS^{-1}$, для которого $g(m) = m \otimes 1$, является A -модульным гомоморфизмом из M_A в MS^{-1} ; этот гомоморфизм называется *каноническим модульным гомоморфизмом*. В [18; с. 57] доказано, что $\text{Ker}(g) = \{m \in M \mid ms = 0 \text{ для некоторого } s \in S\}$. Если P — правый идеал кольца A и $A \setminus P$ — множество правых знаменателей, то кольцо $A(A \setminus P)^{-1}$ называется *правой локализацией относительно P* , и мы пишем A_P и M_P вместо $A(A \setminus P)^{-1}$ и $M(A \setminus P)^{-1}$ соответственно.

Прямая сумма простых модулей называется *полупростым* модулем. Кольцо A называется *локальным* (*полулокальным*), если $A/J(A)$ — тело (полупростое кольцо). Кольцо A называется *квазиинвариантным справа*, если каждый его максимальный правый идеал является идеалом кольца A .

Если $N \in \text{Lat}(M)$ и $N + X \neq M$ для каждого собственного $X \in \text{Lat}(M)$, то N называется *малым* подмодулем в M . Если $N \in \text{Lat}(M)$ и $N \cap X \neq 0$ для каждого ненулевого $X \in \text{Lat}(M)$, то N называется *существенным* подмодулем в M . Для модуля M_A обозначим через $\text{Sing}(M)$ множество всех таких элементов $m \in M$, что $r(m)$ — существенный правый идеал в A . Множество $\text{Sing}(M)$ является вполне инвариантным подмодулем в M и называется *сингулярным подмодулем* модуля M . Поэтому $\text{Sing}(A_A)$ — идеал кольца A , который называется *правым сингулярным идеалом* кольца A .

Элемент a кольца A называется *регулярным справа* (*регулярным слева*), если $r(a) = 0$ ($\ell(a) = 0$). Регулярный справа и слева элемент называется *регулярным элементом*. Подмножество S кольца A называется *перестановочным справа*, если для любых элементов $a \in A$ и $s \in S$ существуют такие элементы $b \in A$ и $t \in S$, что $at = sb$. Модуль M_A называется *модулем без кручения*, если $ta \neq 0$ для каждого ненулевого элемента $t \in M$ и любого регулярного элемента $a \in A$.

Унитарное подкольцо A кольца Q называется *правым порядком* в Q , если каждый регулярный элемент кольца A обратим в Q и для каждого $q \in Q$ существуют такие элементы $a, s \in A$, что s — регулярный элемент в A и $q = as^{-1}$. В этом случае кольцо Q называется *правым классическим кольцом частных* кольца A . Хорошо известно, что кольцо A имеет правое классическое кольцо частных тогда и только тогда, когда множество всех регулярных элементов кольца A перестановочно справа. Поэтому каждое инвариантное справа (справа и слева) кольцо A является правым (двусторонним) порядком в некотором кольце. Для двустороннего порядка A в кольце Q подбимодуль M A - A -бимодуля Q называется *обратимым*, если существует такой подбимодуль M^* A - A -бимодуля Q , что $MM^* = M^*M = A$.

Ненулевой модуль M называется *первичным* (*вполне первичным*), если $r(K) = r(M)$ для каждого ненулевого $K \in \text{Lat}(M)$ ($r(m) = r(M)$ для каждого ненулевого $m \in M$). Собственный подмодуль N ненулевого модуля M называется *первичным* (*вполне первичным*), если M/N — первичный (вполне первичный) модуль. Кольцо называется *первичным кольцом* (*областью*), если произведение любых двух его ненулевых идеалов (ненулевых элементов) не равно нулю. Собственный

идеал P кольца A называется *первичным* (вполне *первичным*), если A/P – первичное кольцо (область). Для собственного идеала P кольца A непосредственно проверяется, что P – первичный (вполне первичный) идеал $\iff P$ – первичный (вполне первичный) подмодуль A -модуля $A \iff P$ – первичный (вполне первичный) подмодуль левого A -модуля A . Кроме того, если A – инвариантное справа кольцо, то первичные правые A -модули совпадают с вполне первичными правыми A -модулями. Множество всех первичных подмодулей модуля M обозначается $\text{Prime}(M)$. Любой минимальный элемент множества $\text{Prime}(M)$ называется *минимальным первичным* подмодулем в M . Модуль $\bigcap_{X \in \text{Prime}(M)} X$ называется *первичным радикалом* модуля M и обозначается через $\text{rad}(M)$. Для собственного $N \in \text{Lat}(M)$ модуль $\bigcap_{X \in \text{Prime}(M), X \supseteq N} X$ называется *N -первичным радикалом* модуля M и обозначается через $N\text{-rad}(M)$. Ясно, что $\text{rad}(M) = 0\text{-rad}(M)$.

Модуль M называется *точным*, если $r(M) = 0$. Модуль называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Модуль называется *конечномерным*, если он не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей. Модуль называется *полунётеровым*, если каждый его ненулевой подмодуль имеет максимальный подмодуль.

§ 1. Свойства мультипликативных модулей

ЛЕММА 1.1. Для модуля M над кольцом A равносильны следующие условия:

- (1) M – мультипликативный модуль;
- (2) для каждого циклического подмодуля X модуля M существует такой правый идеал B кольца A , что $X = MB$;
- (3) для каждого $X \in \text{Lat}(M)$ существуют такое подмножество $\{X_i\}_{i \in I}$ в $\text{Lat}(X)$ и множество $\{B_i\}_{i \in I}$ идеалов кольца A , что $X = \sum_{i \in I} X_i$ и $X_i = MB_i$ для любого $i \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $X \in \text{Lat}(M)$, $\{X_i\}_{i \in I}$ – множество всех циклических подмодулей модуля X и $B_i = (X_i : M)$ ($i \in I$). По условию $X_i \subseteq MB_i \subseteq X_i$ для всех i . Так как $X = \sum_{i \in I} X_i$, то $\{X_i\}$ и $\{B_i\}$ – требуемые множества.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $X \in \text{Lat}(M)$. По условию существуют такое подмножество $\{X_i\}_{i \in I}$ в $\text{Lat}(X)$ и множество $\{B_i\}_{i \in I}$ идеалов кольца A , что $X = \sum_{i \in I} X_i$ и $X_i = MB_i$ для любого $i \in I$. Пусть $B = \sum_{i \in I} B_i$. Тогда $X = \sum_{i \in I} X_i = \sum_{i \in I} MB_i = M(\sum_{i \in I} B_i) = MB$.

ЛЕММА 1.2. Пусть M – мультипликативный модуль над кольцом A и N – подмодуль в M . Тогда

- (1) M/N – мультипликативный модуль; следовательно, все гомоморфные образы модуля M являются мультипликативными;
- (2) N – вполне инвариантный подмодуль в M ;
- (3) если $N \cap MB = NB$ для каждого идеала B кольца A , то N – мультипликативный модуль;

- (4) если $N = f(M)$ для некоторого $f \in \text{End}(M)$ (это так, например, если N – прямое слагаемое в M), то N – мультипликативный вполне инвариантный подмодуль в M ;
- (5) если $h: M \rightarrow X \oplus Y$ – модульный эпиморфизм, то $f(X) \subseteq X$ для любого гомоморфизма $f: X \rightarrow X \oplus Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $X/N \in \text{Lat}(M/N)$, где $X \in \text{Lat}(M)$. Существует такой идеал B кольца A , что $X = MB$. Тогда $X/N = (M/N)B$.

(2) Существует такой идеал B кольца A , что $N = MB$. Если $f \in \text{End}(M)$, то $f(N) = f(MB) = f(M)B \subseteq MB = N$.

(3) Пусть X – подмодуль в N . Существует такой идеал B кольца A , что $X = MB$. Тогда $X = N \cap MB = NB$.

(4) Утверждение следует из (1) и (2).

(5) Существует такой эндоморфизм $g \in \text{End}(h(M))$, что $g(x+y) = f(x)$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$. В силу (1) и (2) все подмодули мультипликативного модуля $h(M)$ вполне инвариантны в $h(M)$. Поэтому $X \supseteq g(X) = f(X)$.

ЛЕММА 1.3. Пусть M – мультипликативный модуль и $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Тогда

- (1) $N = \bigoplus_{i \in I} (N \cap M_i)$ для любого $N \in \text{Lat}(M)$;
- (2) $\text{Hom}(M_i, \bigoplus_{j \neq i} M_j) = \text{Hom}(\bigoplus_{j \neq i} M_j, M_i) = 0$ для любого $i \in I$ (в частности, $M_i \not\cong M_j$ при $i \neq j$);
- (3) если все модули M_i дистрибутивны, то M дистрибутивен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $\varphi_i: M \rightarrow M_i$ – естественные проекции. По лемме 1.2(2) $\varphi_i(N) \subseteq N$ для всех $i \in I$. Поэтому $N = \bigoplus_{i \in I} (N \cap M_i)$.

(2) Утверждение следует из леммы 1.2(5).

(3) Утверждение следует из (1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Пусть M – мультипликативный модуль и $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$.

- (1) Если существует модуль X и эпиморфизмы $\alpha_i: X \rightarrow M_i$ ($1 \leq i \leq n$), то гомоморфизм $\sum_{i=1}^n \alpha_i: X \rightarrow M$ является эпиморфизмом.
- (2) Если все модули M_i циклически, то M цикличесок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $N = \sum_{i=1}^n \alpha_i(X) \subseteq M$, $\pi_i: M \rightarrow X$ – естественные проекции. Тогда $\pi_i(N) = \alpha_i(X) = M_i$ и по лемме 1.3(1) $N = \bigoplus_{i=1}^n (N \cap M_i)$. Поэтому $M_i = \pi_i(N) = N \cap M_i \subseteq N$ и $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ – эпиморфизм.

(2) Для каждого i существует эпиморфизм $A_i \rightarrow M_i$. В силу (1) существует эпиморфизм $A_A \rightarrow M$.

ЛЕММА 1.5. (1) Пусть M – полупростой мультипликативный модуль. Тогда M дистрибутивен. Кроме того, если M конечно порожден, то M цикличесок.

(2) Если $B_1, \dots, B_u, C_1, \dots, C_v$ – такие идеалы кольца A , что $A = B_s + C_t$ для всех s и t , то $A = (\bigcap_{s=1}^u B_s) + (\bigcap_{j=1}^v C_j)$.

(3) Если B и C – идеалы кольца A и M – такой правый A -модуль, что M/MB и M/MC – конечно порожденные модули, то $M/M(BC)$ – конечно порожденный модуль.

(4) Если $B_1, \dots, B_n$ – идеалы кольца A и M – такой правый A -модуль, что все модули M/MB_i конечно порождены, то $M/M(B_1 \cdots B_n)$ и модули $M/M(B_1 \cap \cdots \cap B_n)$ и $M/(MB_1 \cap \cdots \cap MB_n)$ конечно порождены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как каждый полупростой модуль является прямой суммой простых модулей, то по лемме 1.3(3) M дистрибутивен. Если полупростой модуль M конечно порожден, то M – конечная прямая сумма циклических модулей. По предложению 1.4(2) M циклический.

(2) Обозначим через B и C идеалы $\bigcap_{s=1}^u B_s$ и $\bigcap_{t=1}^v C_t$ кольца A соответственно. Для любого B_s имеем $A = (B_s + C_1) \cdots (B_s + C_v) \subseteq B_s + C_1 \cdots C_v \subseteq B_s + C \subseteq A$. Поэтому $A = C + B_s$ для всех B_s . Тогда $A = (C + B_1) \cdots (C + B_v) \subseteq C + B_1 \cdots B_v \subseteq C + B \subseteq A$.

(3) Так как M/MB и M/MC конечно порождены, то существуют такие $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in M$, что $M = \sum_{i=1}^m x_i A + MB = \sum_{j=1}^n y_j A + MC$. Поэтому $MC = \sum_{i=1}^m x_i C + (MB)C$ и $M = \sum_{j=1}^n y_j A + MC = \sum_{j=1}^n y_j A + \sum_{i=1}^m x_i C + M(BC) \subseteq \sum_{j=1}^n y_j A + \sum_{i=1}^m x_i A + MBC \subseteq M$. Пусть $h: M \rightarrow M/M(BC)$ – естественный эпиморфизм. Тогда $h(M) = \sum_{i=1}^m h(x_i)A + \sum_{j=1}^n h(y_j)A$.

(4) Из (3) и индукции по n следует, что $M/M(B_1 \cdots B_n)$ – конечно порожденный модуль. Так как $M(B_1 \cdots B_n) \subseteq M(B_1 \cap \cdots \cap B_n) \subseteq MB_1 \cap \cdots \cap MB_n$, то $M/M(B_1 \cap \cdots \cap B_n)$ и $M/(MB_1 \cap \cdots \cap MB_n)$ изоморфны фактормодулям конечно порожденного модуля $M/M(B_1 \cdots B_n)$. Поэтому $M/M(B_1 \cap \cdots \cap B_n)$ и $M/(MB_1 \cap \cdots \cap MB_n)$ – конечно порожденные модули.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. Пусть M – мультипликативный модуль над кольцом A .

(1) Если A – простое кольцо, то либо $M = 0$, либо M – простой модуль.

(2) Если A – конечное прямое произведение простых колец $A_1, \dots, A_n$, то M – циклический полупростой дистрибутивный модуль. В частности, если A – полупростое артиново кольцо, то M – циклический полупростой дистрибутивный модуль.

(3) Если P – максимальный идеал кольца A , то M/MP циклический и либо $M/MP = 0$, либо M/MP – простой модуль и существует такой элемент $x \in M$, что $A = P + r(M/xA)$.

(4) Если $J(A)B \subseteq BJ(A)$ для каждого идеала B кольца A , то $MJ(A)$ – малый подмодуль в M .

(5) Если все примитивные справа факторкольца кольца A являются простыми кольцами и $N \in \text{Lat}(M)$, то $N \in \text{max}(M) \iff N = MP \neq M$ для некоторого максимального идеала P кольца A (следовательно, $J(M)$ совпадает с пересечением всех таких максимальных идеалов P кольца A , что $M \neq MP$).

(6) Если $A = B + r(M)$ для каждого такого идеала B кольца A , что $M = MB$, то M конечно порожден.

(7) Если $M \neq MP$ для каждого такого максимального идеала P кольца A , что $r(M) \subseteq P$, то M конечно порожден.

(8) Если $M_1, \dots, M_n \in \text{Lat}(M)$ и каждый фактормодуль M/M_i конечно порожден, то $M/(M_1 \cap \cdots \cap M_n)$ конечно порожден (следовательно, если

модуль $M_1 \cap \dots \cap M_n$ мал в M , то M конечно порожден).

(9) Если B – такой правый идеал кольца A , что $B \supseteq r(M)$ и $B/r(M)$ – существенный правый идеал в $A/r(M)$, то MB – существенный подмодуль A -модуля M .

(10) Если кольцо $A/r(M)$ не содержит идеалов, являющихся бесконечными прямыми суммами ненулевых идеалов кольца $A/r(M)$, то M – конечномерный A -модуль.

(11) Если любые два ненулевых идеала кольца $A/r(M)$ имеют ненулевое пересечение, то M – равномерный A -модуль.

(12) Если $r(M)$ – первичный идеал кольца A , то M – равномерный первичный A -модуль.

(13) Если решетка двусторонних идеалов кольца A дистрибутивна и $MB \cap MC = M(B \cap C)$ для любых идеалов B и C кольца A , то M дистрибутивен.

(14) Если N – собственный подмодуль в M , то N – первичный подмодуль в $M \iff r(M/N)$ – первичный идеал кольца A .

(15) Если $N \in \max(M)$, то $N \in \text{Prime}(M)$ и $N = MP$ для некоторого примитивного справа идеала P кольца A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h: A \rightarrow A/r(M)$ – естественный кольцевой эпиморфизм.

(1) Утверждение проверяется непосредственно.

(2) Так как $M = MA_1 \oplus \dots \oplus MA_n$, то утверждение следует из (1) и леммы 1.5(1).

(3) Если $M/MP = 0$, то M/MP циклический. Допустим, что $M/MP \neq 0$. По лемме 1.2(1) M/MP – ненулевой мультипликативный модуль над простым кольцом A/P . В силу (1) M/MP прост. Пусть $x \in M \setminus MP$. Существует такой идеал B кольца A , что $xA = MB \not\subseteq MP$. Тогда $B \not\subseteq P$ и $B \subseteq r(M/xA)$. Поэтому $P \subsetneq P + r(M/xA)$. Так как P – максимальный идеал, то $A = P + r(M/X)$.

(4) Положим $J = J(A)$. Пусть $N \in \text{Lat}(M)$, $M = N + MJ$ и $\overline{M} = M/N$. Тогда $\overline{M} = \overline{M}J$. По лемме 1.2(1) $\overline{M}$ – мультипликативный модуль. Если $\overline{M} = 0$, то $N = M$ и MJ мал в M . Допустим, что $\overline{M} \neq 0$. Пусть $\overline{X}$ – ненулевой циклический подмодуль в $\overline{M}$. По лемме Накаямы $\overline{X} \neq \overline{X}J$. Так как $\overline{M}$ – мультипликативный модуль, то $\overline{M}B = \overline{X}$ для некоторого идеала B кольца A . Так как $JB \subseteq BJ$, то $\overline{X} = \overline{M}B = \overline{M}JB \subseteq \overline{M}BJ = \overline{X}J \subseteq \overline{X}$ и получено противоречие.

(5) Если P – максимальный идеал кольца A и $N = MP \neq M$, то $N \in \max(M)$ в силу (3). Если $N \in \max(M)$, то $N = MP$ для некоторого примитивного справа идеала P кольца A и P – максимальный идеал по условию.

(6) Пусть $\{X_i\}_{i \in I}$ – множество всех циклических подмодулей модуля M . Для любого X_i существует такой идеал B_i кольца A , что $X_i = MB_i$. Пусть $B = \sum_{i \in I} B_i$. Тогда $M = \sum_{i \in I} X_i = \sum_{i \in I} MB_i = MB$. Так как $M = MB$, то $A = B + r(M)$ по условию. Так как $1 \in B + r(M)$, то существует такое конечное подмножество $\{B_1, \dots, B_n\}$ в $\{B_i\}_{i \in I}$, что $1 \in \sum_{i=1}^n B_i + r(M)$. Поэтому $M = M \cdot 1 = M(\sum_{i=1}^n B_i + r(M)) = \sum_{i=1}^n MB_i = \sum_{i=1}^n X_i$, откуда M конечно порожден.

(7) Пусть $\{P_i\}_{i \in I}$ – множество всех таких максимальных идеалов кольца A , что $P \supseteq r(M)$. По условию $M \neq MP_i$ для каждого P_i . Поэтому существует такой

ненулевой циклический подмодуль X_i модуля M , что $X_i \not\subseteq MP_i$ ($i \in I$). Пусть $B = \sum_{i \in I} r(M/X_i)$. Тогда $B \supseteq r(M/X_i) \supseteq r(M)$.

Допустим, что $A = B$. Тогда существует такое конечное подмножество J в I , что $A = \sum_{j \in J} r(M/X_j)$. Так как $X_j = Mr(M/X_j)$ для каждого $j \in J$, то $M = MA = M(\sum_{j \in J} r(M/X_j)) = (\sum_{j \in J} Mr(M/X_j)) = \sum_{j \in J} X_j$ и M конечно порожден.

Допустим, что $A \neq B$. Существует такой максимальный идеал P кольца A , что $P \supseteq B \supseteq r(M)$. Поэтому $P = P_i$ для некоторого $i \in I$. Тогда $r(M/X_i) \subseteq B \subseteq P_i$ и $X_i = Mr(M/X_i) \subseteq MP_i$; получено противоречие.

(8) Существуют такие идеалы $B_1, \dots, B_n$ кольца A , что $M_i = MB_i$ для каждого i . Каждый фактормодуль M/MB_i конечно порожден. По лемме 1.5(4) $M/(M(B_1 \cap \dots \cap B_n))$ конечно порожден. Так как $M(B_1 \cap \dots \cap B_n) \subseteq MB_1 \cap \dots \cap MB_n$, то $M/(MB_1 \cap \dots \cap MB_n)$ изоморфен фактормодулю конечно порожденного модуля $M/(M(B_1 \cap \dots \cap B_n))$. Поэтому $M/(MB_1 \cap \dots \cap MB_n)$ конечно порожден; кроме того, $MB_1 \cap \dots \cap MB_n = M_1 \cap \dots \cap M_n$.

(9) Пусть $N \in \text{Lat}(M)$ и $(MB) \cap N = 0$. Существует такой идеал C кольца A , что $N = MC$. Тогда $M(B \cap C) \subseteq (MB) \cap N = 0$. Поэтому $B \cap C \subseteq r(M)$. Так как $h(B) \cap h(C) = 0$ и $h(B)$ – существенный правый идеал кольца $h(A)$, то $h(C) = 0$. Поэтому $C \subseteq r(M)$ и $N = MC = 0$.

(10) Пусть $X = \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i \in \text{Lat}(M)$. Существует такое множество $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ идеалов кольца A , что для каждого i $B_i \supseteq r(M)$ и $X_i = MB_i$. Далее, $M(B_i \cap \sum_{j \neq i} B_j) \subseteq MB_i \cap M(\sum_{j \neq i} B_j) = 0$ для каждого i . Поэтому $\sum_{i=1}^{\infty} h(B_i)$ – прямая сумма идеалов $h(B_i)$ кольца $h(A) = A/r(M)$. По условию существует такое n , что $h(B_i) = 0$ для всех $i > n$. Тогда $X_i = MB_i = 0$ для всех $i > n$.

(11) Пусть $X, Y \in \text{Lat}(M)$ и $X \cap Y = 0$. Существуют такие идеалы B и C кольца A , что $X = MB$ и $Y = MC$. Тогда $M(B \cap C) \subseteq MB \cap NC = X \cap Y = 0$. Поэтому $B \cap C \subseteq r(M)$ и $h(B) \cap h(C) = 0$. Так как любые два ненулевых идеала кольца $h(A)$ имеют ненулевое пересечение, то можно считать, что $h(B) = 0$. Тогда $X = MB = 0$ и M равномерен.

(12) Так как любые два ненулевых идеала первичного кольца $h(A)$ имеют ненулевое пересечение, то в силу (11) M равномерен. Пусть $0 \neq N \in \text{Lat}(M)$. Тогда $r(M) \subseteq r(N) \subsetneq A$ и существует такой идеал B кольца A , что $N = MB$ и $h(B) \neq 0$. Так как $Br(N) \subseteq r(M)$, то $h(B)h(r(N)) = 0$; кроме того, $h(A)$ – первичное кольцо и $h(B) \neq 0$. Поэтому $h(r(N)) = 0$ и $r(N) \subseteq r(M) \subseteq r(N)$.

(13) Пусть $X, Y, Z \in \text{Lat}(M)$. Существуют такие идеалы B, C и D кольца A , что $X = MB$, $Y = MC$ и $Z = MD$. Тогда $(X + Y) \cap Z = (MB + MC) \cap MD = (M(B + C)) \cap (MD) = M((B + C) \cap D) = M(B \cap D + C \cap D) = M(B \cap D) + M(C \cap D) = MB \cap MD + MC \cap MD = X \cap Z + Y \cap Z$.

(14) Докажем импликацию $\Rightarrow$. Пусть B и C – такие идеалы кольца A , что $BC \subseteq r(M/N)$ и $B \not\subseteq r(M/N)$. Тогда $0 \neq (M/N)B \in \text{Lat}(M/N)$ и $C \subseteq r((M/N)B)$. Так как $N \in \text{Prime}(M)$, то $C \subseteq r(M/N)$. Поэтому $r(M/N)$ – первичный идеал кольца A .

Докажем импликацию $\Leftarrow$. Положим $P = r(M/N)$. Тогда $N = MP$. Пусть $0 \neq K/N \in \text{Lat}(M/N)$, где $N = MP \subsetneq K \subseteq M$. Так как $MP \subsetneq K$, то существует такой идеал B кольца A , что $K = MB$ и $P \subsetneq B$. Кроме того, $MBr(K/N) \subseteq N$. Поэтому $Br(K/N) \subseteq P$; кроме того, P – первичный идеал кольца A . Поэтому

$r(K/N) \subseteq P = r(M/N) \subseteq r(M/N)$ и $r(K/N) = r(M/N)$.

(15) Пусть $N \in \max(M)$. Тогда $N = Mr(M/N)$ и $r(M/N)$ – примитивный справа идеал кольца A , поскольку M/N – простой модуль. Так как примитивный справа идеал $r(M/N)$ кольца A является первичным идеалом и $N = Mr(M/N)$, то в силу (14) $N \in \text{Prime}(M)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. Пусть M – такой модуль над кольцом A , что $\bigcap_{i \in I} (MB_i) = M[\bigcap_{i \in I} (B_i + r(M))]$ для каждого непустого множества идеалов B_i ($i \in I$) кольца A . Тогда равносильны следующие условия:

- (1) M – мультипликативный модуль;
- (2) для любого $N \in \text{Lat}(M)$ и каждого такого идеала C кольца A , что $N \subsetneq MC$, существует такой идеал B кольца A , что $B \subsetneq C$ и $N = MB$;
- (3) для любого $N \in \text{Lat}(M)$ и каждого такого идеала C кольца A , что $N \subsetneq MC$, существует такой идеал B кольца A , что $B \subsetneq C$ и $N \subseteq MB$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $N \in \text{Lat}(M)$, C – такой идеал кольца A , что $N \subsetneq MC$. Так как M – мультипликативный модуль, то $N = M(N : M)$. Положим $B = C \cap (N : M)$. Так как $N = M(N : M) \subsetneq MC$, то $C \not\subseteq (N : M)$. Поэтому $B \subsetneq C$. Так как $r(M) \subseteq (N : M)$, то $(C + r(M)) \cap (N : M) = C \cap (N : M) + r(M) = B + r(M)$ по модулярному закону. Далее, $N = MC \cap M(N : M)$ и по условию $M[(C + r(M)) \cap (N : M)] = M(C + r(M)) \cap M(N : M) = MC \cap MD = N$. Поэтому $N = M[(C + r(M)) \cap (N : M)] = M(B + r(M)) = MB$.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) очевидна.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $N \in \text{Lat}(M)$ и $\mathcal{D} = \{D \mid D \text{ – идеал кольца } A \text{ и } N \subseteq MD\}$. Очевидно, что $A \in \mathcal{D}$. Пусть $\{B_i\}_{i \in I}$ – любое непустое множество идеалов из $\mathcal{D}$. По условию $\bigcap_{i \in I} B_i \in \mathcal{D}$. По лемме Цорна $\mathcal{D}$ имеет минимальный элемент C . Тогда $N \subseteq MC$. Допустим, что $N \neq MC$. В силу (3) существует такой идеал B , что $B \subsetneq C$ и $N \subseteq MB$. В этом случае $B \in \mathcal{D}$, что противоречит выбору идеала C . Поэтому $N = MC$ и M – мультипликативный модуль.

В связи с предложением 1.7 рассмотрим следующий пример.

ПРИМЕР 1.8 [6; с. 760]. Пусть $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел, $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел, A – коммутативное кольцо всех (2×2) -матриц вида $\begin{pmatrix} z & q \\ 0 & z \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Q}$, и M – идеал кольца A , образованный всеми такими матрицами, что $z = 0$. Непосредственно проверяется, что M не является мультипликативным A -модулем, но для любого $N \in \text{Lat}(M)$ и каждого такого идеала C кольца A , что $N \subsetneq MC$, существует такой идеал B кольца A , что $B \subsetneq C$ и $N \subseteq MB$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. Пусть M – мультипликативный модуль над полулокальным кольцом A . Тогда

- (1) $M/MJ(A)$ – циклический полупростой дистрибутивный модуль;
- (2) если $MJ(A)$ – малый подмодуль в M , то M циклический;
- (3) если M – конечно порожденный модуль, то M циклический;
- (4) если $J(A)B \subseteq BJ(A)$ для каждого идеала B кольца A , то M циклический.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Гомоморфный образ M/MJ мультипликативного модуля M является мультипликативным модулем по лемме 1.2(1). Поэтому M/MJ — мультипликативный A -модуль. Так как полупростое артиново кольцо A/J является конечным прямым произведением простых колец, то M/MJ — циклический дистрибутивный полупростой A/J -модуль по предложению 1.6(2). Поэтому M/MJ — циклический дистрибутивный полупростой A -модуль.

(2) В силу (1) существует такой циклический подмодуль X в M , что $M = X + MJ(A)$. По условию $MJ(A)$ мал в M . Поэтому $M = X$.

(3) Так как $MJ(A)$ мал в M , то утверждение следует из (2).

(4) По предложению 1.6(4) $MJ(A)$ мал в M ; в силу (2) M циклический.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10. Пусть каждое факторкольцо кольца A не содержит бесконечную прямую сумму своих ненулевых идеалов, и пусть M — мультипликативный A -модуль. Тогда

- (1) каждый факормодуль модуля M конечномерен;
- (2) M нётеров $\iff$ каждый факормодуль модуля M полунётеров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $\overline{M}$ — факормодуль модуля M . По условию кольцо $A/r(\overline{M})$ не содержит бесконечной прямой суммы своих ненулевых идеалов. По предложению 1.6(10) $\overline{M}$ конечномерен.

(2) Достаточно доказать импликацию $\Leftarrow$. В [19] доказано следующее утверждение:

- (*) если F — произвольный модуль, то каждый факормодуль модуля F конечномерен $\iff$ каждый $G \in \text{Lat}(F)$ содержит такой конечно порожденный подмодуль H , что G/H не имеет максимальных подмодулей.

В силу (1) каждый факормодуль модуля M конечномерен. По утверждению (*) каждый $X \in \text{Lat}(M)$ содержит такой конечно порожденный подмодуль Y , что X/Y не имеет максимальных подмодулей. По условию каждый ненулевой подмодуль любого факормодуля модуля M имеет максимальный подмодуль. Поэтому $X = Y$, X конечно порожден и M нётеров.

ЛЕММА 1.11. Пусть A — кольцо с коммутативным умножением двусторонних идеалов и M — мультипликативный A -модуль.

(1) Если P — такой идеал кольца A , что $M = MP$, то $N = NP$ для каждого $N \in \text{Lat}(M)$ и, следовательно, для каждого $t \in M$ существует такой элемент $p \in P$, что $t(1 - p) = 0$.

(2) Если P — максимальный идеал кольца A , то $M = MP \iff P$ не содержит аннулятор любого циклического подмодуля модуля M .

(3) Для каждого собственного $N \in \text{Lat}(M)$ существует такой примитивный справа идеал P кольца A , что $M \neq MP + N$ и $MP \in \text{Prime}(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Существует такой идеал B кольца A , что $N = MB = MPB$. По условию $PB = BP$. Поэтому $N = MBP = NP$.

(2) Импликация $\implies$ следует из (1). Докажем импликацию $\Leftarrow$. Пусть $t \in M$. Так как $r(tA) \not\subseteq P$ и P максимален, то $A = P + r(tA)$. Поэтому $tA = tA(P + r(tA)) = tP$ и $M = MP$.

(3) Пусть $\overline{M}$ — ненулевой мультипликативный модуль M/N и $\overline{X}$ — ненулевой циклический подмодуль в M . Так как ненулевой циклический модуль $\overline{X}$ имеет

максимальный подмодуль, то существует такой примитивный справа идеал P кольца A , что $\overline{X} \neq \overline{X}P$. В силу (1) $\overline{M} \neq \overline{M}P$. Поэтому $M \neq MP + N$. По предложению 1.6(14) MP – первичный подмодуль в M .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.12. Пусть A – кольцо с коммутативным умножением двухсторонних идеалов, M – мультипликативный A -модуль и все примитивные справа факторкольца кольца A являются простыми кольцами.

(1) Для каждого собственного $N \in \text{Lat}(M)$ существует такой максимальный идеал P кольца A , что $MP \in \text{max}(M)$, $MP \in \text{Prime}(M)$ и $MP \supseteq N$.

(2) Каждый фактормодуль $\overline{M}$ модуля M полунётеров, $J(\overline{M}) = \overline{M}J(\overline{A})$ и $J(\overline{M})$ мал в $\overline{M}$.

(3) Если каждое факторкольцо кольца A не содержит бесконечную прямую сумму своих ненулевых идеалов, то M – нётеров модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть N – собственный подмодуль в M . По лемме 1.11(3) существует такой примитивный справа идеал P кольца A , что $M \neq MP + N$ и $MP \in \text{Prime}(M)$. Так как все примитивные справа факторкольца кольца A являются простыми кольцами, то P – максимальный идеал кольца A . По предложению 1.6(3) $MP \in \text{max}(M)M$; кроме того, $M \neq MP + N$. Поэтому $N \subseteq M$. Тогда $P \subseteq r(M/MP) \subsetneq A$.

(2) В силу (1) каждый фактормодуль $\overline{M}$ модуля M полунётеров. Поэтому $J(\overline{M})$ мал в $\overline{M}$.

(3) Утверждение следует из (2) и предложения 1.10(2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.13. Пусть M – мультипликативный артинов модуль. Тогда

- (1) $M/J(M)$ – циклический полупростой дистрибутивный модуль;
- (2) если $J(M)$ – малый подмодуль в M , то M циклический;
- (3) если M – конечно порожденный модуль, то M циклический.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) По лемме 1.2(1) $M/J(M)$ – мультипликативный модуль. Так как $M/J(M)$ – конечно порожденный полупростой модуль, то по лемме 1.5(1) $M/J(M)$ циклический.

(2) В силу (1) существует такой циклический подмодуль X в M , что $M = X + J(M)$. По условию $J(M)$ мал в M . Поэтому $M = X$.

(3) Так как M конечно порожден, то $J(M)$ мал в M . В силу (2) M циклический.

ЛЕММА 1.14. Пусть M – модуль над кольцом A .

(1) Если $X, Y \in \text{Lat}(M)$ и $X + Y$ – мультипликативный модуль, то $(X + Y) \cap Z = X \cap Z + Y \cap Z$ для любого $Z \in \text{Lat}(M)$.

(2) Если все 2-порожденные подмодули модуля M являются мультипликативными, то M дистрибутивен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как $X + Y$ – мультипликативный модуль, то существует такой идеал B кольца A , что $(X + Y) \cap Z = (X + Y)B$. Тогда $(X + Y) \cap Z = (X + Y)B = XB + YB \subseteq X \cap Z + Y \cap Z \subseteq (X + Y) \cap Z$.

(2) Если $x, y \in M$, то $xA + yA$ – мультипликативный модуль и в силу (1) $(x + y)A = xA \cap (x + y)A + yA \cap (x + y)A$. Поэтому M дистрибутивен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.15. Пусть M – модуль над кольцом A и X, Y – мультипликативные подмодули в M . Тогда равносильны следующие условия:

- (1) $X + Y$ – мультипликативный модуль;
- (2) $X = (X + Y)(X : (X + Y)) = (X + Y)(X : Y) = X(X : Y) + X \cap Y$,
 $Y = (X + Y)(Y : (X + Y)) = (X + Y)(Y : X) = Y(Y : X) + X \cap Y$ и
 $(X + Y) \cap Z = X \cap Z + Y \cap Z$ для любого $Z \in \text{Lat}(M)$;
- (3) $Z = X \cap Z + Y \cap Z$ для любого $Z \in \text{Lat}(M)$ и существуют такие идеалы B и C кольца A , что $X = (X + Y)B$ и $Y = (X + Y)C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). По лемме 1.14(1) $(X + Y) \cap Z = X \cap Z + Y \cap Z$ для любого $Z \in \text{Lat}(M)$. Так как $X + Y$ и Y – мультипликативные модули, то $X = (X + Y)(X : (X + Y))$ и $X \cap Y = Y(X : Y)$ по лемме 1.1. Кроме того, $(X : (X + Y)) = (X : Y)$. Поэтому $X = (X + Y)(X : Y) = X(X : Y) + Y(X : Y) = X(X : Y) + X \cap Y$. Аналогично, $Y = (X + Y)(Y : (X + Y)) = (X + Y)(Y : X) + X \cap Y = Y(Y : X) + X \cap Y$.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) очевидна.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $Z \in \text{Lat}(X + Y)$. Надо доказать, что существует такой идеал H кольца A , что $Z = (X + Y)H$. По условию $Z = X \cap Z + Y \cap Z$. Существуют такие идеалы D и E кольца A , что $Z \cap X = XD$ и $Z \cap Y = YE$. По условию существуют такие идеалы B и C кольца A , что $X = (X + Y)B$ и $Y = (X + Y)C$. Поэтому $Z = X \cap Z + Y \cap Z = XD + YE = (X + Y)BD + (X + Y)CE = (X + Y)(BD + CE)$ и $BD + CE$ – требуемый идеал H кольца A .

СЛЕДСТВИЕ 1.16. Пусть M – модуль над кольцом A и X, Y – такие мультипликативные подмодули в M , что $A = (X : Y) + (Y : X)$. Тогда $X + Y$ – мультипликативный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z \in \text{Lat}(X + Y)$. Тогда $Z = ((X + Y) \cap Z)((X : Y) + (Y : X)) = ((X + Y) \cap Z)(X : Y) + ((X + Y) \cap Z)(Y : X) \subseteq X \cap Z + Y \cap Z \subseteq Z$. По предложению 1.15 достаточно доказать, что существуют такие идеалы B и C кольца A , что $X = (X + Y)B$ и $Y = (X + Y)C$. Так как X и Y – мультипликативные модули, то $X \cap Y = X(Y : X) = Y(X : Y)$ по лемме 1.1. Так как $A = (X : Y) + (Y : X)$, то $X = X((X : Y) + (Y : X)) = X(X : Y) + X(Y : X) = X(X : Y) + Y(X : Y) = (X + Y)(X : Y)$. Аналогично, $Y = (X + Y)(Y : X)$ и можно положить $B = (X : Y)$ и $C = (Y : X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.17. Пусть M – модуль над кольцом A и $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Тогда равносильны следующие условия:

- (1) M – мультипликативный модуль;
- (2) каждый подмодуль модуля M вполне инвариантен в M , все M_i – мультипликативные модули и существуют такие идеалы B_i кольца A , что $M_i = MB_i$ ($i \in I$);
- (3) $N = \bigoplus_{i \in I} (N \cap M_i)$ для каждого $N \in \text{Lat}(M)$, все M_i – мультипликативные модули и существуют такие идеалы B_i кольца A , что $M_i = MB_i$ ($i \in I$);
- (4) для каждого конечного подмножества J множества I $\bigoplus_{j \in J} M_j$ – мультипликативный модуль и $\bigoplus_{j \in J} M_j = MB_J$ для некоторого идеала B_J кольца A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) следует из леммы 1.2(2) и леммы 1.2(4).

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $N \in \text{Lat}(M)$ и $\varphi_i: M \rightarrow M_i$ — естественные проекции. Так как N вполне инвариантен в M , то $\varphi_i(N) \subseteq N$ для всех $i \in I$. Поэтому $N \subseteq \bigoplus_{i \in I} \varphi_i(N) \subseteq N$. Тогда $N = \bigoplus_{i \in I} \varphi_i(N)$ и $N = \bigoplus_{i \in I} N \cap M_i$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $N \in \text{Lat}(M)$ и $N_i = N \cap M_i$ ($i \in I$). По условию все M_i — мультипликационные модули, $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$ и для каждого $i \in I$ существуют такие идеалы B_i и C_i кольца A , что $M_i = MB_i$ и $N_i = M_i C_i$. Так как $N_i = MB_i C_i$ и $N = \sum_{i \in I} N_i$, то по лемме 1.1 M — мультипликационный модуль.

(1) $\Rightarrow$ (4). Существует такой идеал B_J кольца A , что $\bigoplus_{j \in J} M_j = MB_J$. По лемме 1.2(4) $\bigoplus_{j \in J} M_j$ — мультипликационный модуль.

(4) $\Rightarrow$ (1). Пусть N — циклический подмодуль в M . Существует такое конечное подмножество J в I , что $N \subseteq \bigoplus_{j \in J} M_j$. По условию $\bigoplus_{j \in J} M_j$ — мультипликационный модуль и $\bigoplus_{j \in J} M_j = MB_J$ для некоторого идеала B_J кольца A . Существует такой идеал C_J кольца A , что $(\bigoplus_{j \in J} M_j)C_J = N$. Тогда $N = MB_J C_J$. По лемме 1.1 M — мультипликационный модуль.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.18. Пусть M — мультипликационный модуль над кольцом A и $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ($\text{card}(I) \geq 2$).

(1) Если M — мультипликационный модуль, то все M_i — мультипликационные модули и $M_i = M_i r(\bigoplus_{j \neq i} M_j)$ для каждого $i \in I$.

(2) Если все M_i — мультипликационные модули и $A = r(M_i) + r(\bigoplus_{j \neq i} M_j)$ для каждого $i \in I$, то M — мультипликационный модуль.

(3) Допустим, что множество I конечно, все M_i — мультипликационные модули и $A = r(M_i) + r(M_j)$ для всех $i \neq j$. Тогда M — мультипликационный модуль.

(4) Допустим, что все M_i — мультипликационные модули, $A = r(M_i) + r(M_j)$ для всех $i \neq j$ и для каждого конечного подмножества J в I существует такой идеал B_J кольца A , что $\bigoplus_{i \in J} M_i = MB_J$. Тогда M — мультипликационный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) По лемме 1.2(4) все M_i — мультипликационные модули. Существуют такие идеалы B_i кольца A , что $M_i = MB_i$ для каждого i . Кроме того, $(\bigoplus_{j \neq i} M_j)B_i \subseteq MB_i \cap (\bigoplus_{j \neq i} M_j) = M_i \cap (\bigoplus_{j \neq i} M_j) = 0$. Для каждого $i \in I$ имеем $M_i = MB_i = (M_i \oplus (\bigoplus_{j \neq i} M_j))B_i = M_i B_i \oplus (\bigoplus_{j \neq i} M_j)B_i = M_i B_i$.

(2) Пусть $N \in \text{Lat}(M)$, $B_i = r(\bigoplus_{j \neq i} M_j)$ и $h_i: M \rightarrow M_i$ — проекция с ядром $\bigoplus_{j \neq i} M_j$ ($i \in I$). По условию $A = r(M_i) + B_i$ для каждого $i \in I$. Поэтому $M_i = M_i A = M_i(r(M_i) + B_i) = M_i B_i$ и $NB_i \subseteq N \cap M_i$. Пусть $i \in I$. Так как $h_i(N) \subseteq M_i$ и $NB_i \subseteq N \cap M_i$, то $h_i(N) = h_i(N)(r(M_i) + B_i) = h_i(N)B_i = h_i(NB_i) \subseteq h_i(N \cap M_i) = N \cap M_i \subseteq N$. Поэтому $N = \bigoplus_{i \in I} (N \cap M_i)$. По предложению 1.17 M — мультипликационный модуль.

(3) Пусть $i \in I$. По условию $A = r(M_i) + r(M_j)$ для каждого $j \neq i$. По лемме 1.5(2) $A = r(M_i) + \bigcap_{j \neq i} r(M_j) = r(M_i) + r(\bigoplus_{j \neq i} M_j)$. В силу (2) M — мультипликационный модуль.

(4) Пусть J — конечное подмножество множества I . По утверждению (3), примененному к $\bigoplus_{j \in J} M_j$, этот модуль является мультипликационным. По предложению 1.17 M — мультипликационный модуль.

ПРИМЕР 1.19. Пусть A – квазиинвариантное справа кольцо, $\{P_i\}_{i \in I}$ – некоторое множество несовпадающих максимальных идеалов кольца A , $M_i = (A/P_i)_A$, $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Тогда

- (1) M – полупростой дистрибутивный A -модуль;
- (2) если множество $\{P_i\}_{i \in I}$ конечно, то M – мультипликативный модуль;
- (3) допустим, что множество $\{P_i\}_{i \in I}$ бесконечно и идеал P_1 содержит идеал $\bigcap_{i \neq 1} P_i$. (Например, можно взять $A = \mathbb{Z}$ и $P_i = p_i \mathbb{Z}$, где $\{p_i\}_{i=1}^\infty$ – множество всех несовпадающих простых целых чисел.) Тогда полупростой дистрибутивный A -модуль M не является мультипликативным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как все факторкольца A/P_i являются телами, то все A -модули M_i просты и M – полупростой модуль. Можно считать, что $|I| \geq 2$. Пусть $i, j \in I$ и $i \neq j$. Так как P_i и P_j – идеалы и $P_i \neq P_j$, то $(A/P_i)_A \not\cong (A/P_j)_A$. Так как $M_i \not\cong M_j$ при $i \neq j$, то непосредственно проверяется, что M дистрибутивен.

(2) Можно считать, что $2 \leq |I| < \infty$. Пусть $i, j \in I$ и $i \neq j$. Тогда $A = P_i + P_j$, поскольку P_i и P_j – максимальные идеалы. Заметим, что M_i – мультипликативный модуль и $A = r(M_i) + r(M_j)$. По предложению 1.18(3) M – мультипликативный модуль.

(3) Пусть $B = \bigcap_{i \neq 1} P_i$. Тогда $B = r(\bigoplus_{i \neq 1} M_i)$. По условию $B \subseteq P_1 = r(M_1)$. Допустим, что M – мультипликативный модуль. По предложению 1.18(1) $M_1 = M_1 r(\bigoplus_{i=2}^\infty M_i)$. Поэтому $M_1 = M_1 B \subseteq M_1 r(M_1) = 0$; получено противоречие.

ЛЕММА 1.20. Пусть X и Y – ненулевые модули над кольцом A .

(1) Если существует эпиморфизм $f: X \rightarrow Y$, то модуль $X \oplus Y$ не дистрибутивен.

(2) Допустим, что существуют изоморфизм $f: X \rightarrow Y$ и такие идеалы B и C кольца A , что $X = (A/B)_A$ и $Y = (A/C)_A$. Тогда $B = C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $Z = \{x + f(x) \mid x \in X\}$. Если $x \in X$ и $x + f(x) \in Y \cap Z$, то $x = (x + f(x)) - f(x) \in X \cap Y = 0$ и $f(x) = 0$. Поэтому $Y \cap Z = 0$. Допустим, что $X \oplus Y$ дистрибутивен. Тогда $Z = (X + Y) \cap Z = X \cap Z + Y \cap Z = X \cap Z \subseteq X$. Если $x \in X$, то $x \in Z$ и $f(x) = (x + f(x)) - x \in Y \cap Z = 0$. Поэтому $Y = f(X) = 0$; получено противоречие.

(2) Допустим, что $X = (A/B)_A$ и $Y = (A/C)_A$, где B и C – идеалы кольца A . Пусть $h_B: A_A \rightarrow (A/B)_A$ и $h_C: A_A \rightarrow (A/C)_A$ – естественные эпиморфизмы. Так как модуль A_A проективен, то существует такой гомоморфизм $g: A_A \rightarrow A_A$, что $fh_B = h_Cg$. Так как f – изоморфизм, то $\text{Ker}(fh_B) = \text{Ker}(h_B) = B$. Так как C – идеал, то $g(C) = g(1 \cdot C) = g(1)C \subseteq C$. Поэтому $(fh_B)(C) = h_C(g(C)) \subseteq h_C(C) = 0$, $C \subseteq \text{Ker}(fh_B) = B$ и $C \subseteq B$. Аналогично получаем $B \subseteq C$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.21. Пусть M – полупростой дистрибутивный модуль над квазиинвариантным справа кольцом A . Если M конечно порожден, то M – мультипликативный модуль. Если M не является конечно порожденным, то M не обязательно является мультипликативным модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = \bigoplus_{i \in I} m_i A$, где для любого i модуль $m_i A$ прост и $m_i A \cong A_A / r(m_i)$. Пусть $i, j \in I$ и $r(m_i A) = r(m_j A)$. Так как A квазиинвариантно справа, то максимальный правый идеал $r(m_k)$ совпадает с максимальным идеалом $r(m_k A)$ кольца A для всех $k \in I$. Тогда $r(m_i) = r(m_j)$ и $m_i A \cong m_j A$. По лемме 1.20(1) $i = j$. Таким образом, $r(m_i A) \neq r(m_j A)$ при $i \neq j$. В силу примера 1.19(3) модуль M не всегда является мультипликативным. Допустим, что M конечно порожден. Тогда множество I конечно. Так как A квазиинвариантно справа, то все идеалы P_i максимальны. В силу примера 1.19(2) M – мультипликативный модуль.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.22. Пусть M – мультипликативный модуль над регулярным кольцом A . Тогда

- (1) каждый подмодуль N модуля M является мультипликативным;
- (2) каждый подмодуль N модуля M дистрибутивен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) По лемме 1.2(3) достаточно доказать, что $N \cap MB = NB$ для каждого идеала B кольца A . Пусть $x \in N \cap MB$. Тогда $x = \sum_{i=1}^n m_i b_i$ для некоторых элементов $m_1, \dots, m_n \in M$ и $b_1, \dots, b_n \in B$. Так как A регулярно, то его конечно порожденный левый идеал $C = \sum_{i=1}^n A b_i$ порождается некоторым идемпотентом e . Пусть $b_i = a_i e$, где $a_i \in A$ ($i = 1, \dots, n$). Если $m = \sum_{i=1}^n m_i a_i$, то $x = m e \in N$ и $x = x e \in NB$. Поэтому $N \cap MB \subseteq NB \subseteq N \cap MB$.

(2) В силу (1) все подмодули модуля M являются мультипликативными. По лемме 1.14(2) M дистрибутивен. Поэтому N дистрибутивен.

§ 2. Продолжение доказательства теорем 1–3

ЛЕММА 2.1. Для кольца A равносильны следующие условия:

- (1) A – инвариантное справа кольцо;
- (2) все циклические правые A -модули являются мультипликативными модулями;
- (3) свободный главный правый идеал A кольца A является мультипликативным правым идеалом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть M – циклический A -модуль с образующим m , $N \in \text{Lat}(mA)$ и $B = (N : m)$. Так как $N \subseteq mA$, то $N \subseteq m(N : m) \subseteq N$; поэтому $N = mB$. Кроме того, B – идеал кольца A , поскольку кольцо A инвариантно справа. Поэтому $N = mB = m(AB) = (mA)B = MB$ и M – мультипликативный модуль.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) очевидна.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть N – правый идеал кольца A . Так как A_A – мультипликативный модуль, то существует такой идеал B кольца A , что $N = AB$. Поэтому $N = AB = A(AB) = AN$ и N – идеал кольца A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Для модуля M над инвариантным справа кольцом A равносильны следующие условия:

- (1) M – мультипликативный модуль, являющийся конечной прямой суммой циклических модулей;

- (2) M циклический;
 (3) существуют такие элементы $m_1, \dots, m_n \in M$, что $M = \bigoplus_{i=1}^n m_i A$ и $A = r(m_i) + r(m_j)$ для всех $i \neq j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) следует из предложения 1.4(2).

Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) следует из леммы 2.1.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $M = m_1 A$. Положим $m_2 = 0$. Тогда $M = m_1 A \oplus m_2 A$ и $A = r(m_1) + r(m_2)$.

(3) $\Rightarrow$ (2). Положим $m = m_1 + \dots + m_n \in M$. Пусть $i \in \{1, \dots, n\}$. Так как $r(m_i)$ — идеал инвариантного справа кольца A и $A = r(m_i) + r(m_j)$ для всех $j \neq i$, то по лемме 1.5(2) $A = r(m_i) + \bigcap_{j \neq i} r(m_j)$. Поэтому существует такой элемент $a_i \in r(m_i)$, что $1 - a_i \in \bigcap_{j \neq i} r(m_j)$. Тогда $m(1 - a_i) = (m_1 + \dots + m_n)(1 - a_i) = m_i(1 - a_i) = m_i$ и $m_i A \subseteq mA$ для каждого i . Поэтому $M = mA$.

ЛЕММА 2.3. Пусть A — инвариантное справа кольцо.

(1) $B(1 - b) \subseteq (1 - b)B$ для каждого правого идеала B кольца A и любого $b \in B$.

(2) Если B — идеал кольца A и M — такой циклический правый A -модуль, что $M = MB$, то $A = B + r(M)$.

(3) Пусть $n \geq 2$ — натуральное число, M — n -порожденный A -модуль с образующими $m_1, \dots, m_n$, $N = \sum_{i=1}^{n-1} m_i A$ и B — такой идеал кольца A , что $M = MB$. Тогда $A = B + (N : m_n A)$ и $N = NB$.

(4) Если $a_1, \dots, a_n \in A$ и $1 = \sum_{i=1}^n a_i$, то существуют такие $b_1, \dots, b_n \in A$, что $1 = \sum_{i=1}^n a_i^2 b_i$.

(5) Пусть M — A -модуль, $m \in M$, $P \in \text{max}(A_A)$ и $r(mA) \subseteq P$. Тогда $r(m(1 - p)A) \subseteq P$ для каждого $p \in P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $b_1 \in B$. Так как A инвариантно справа, то $(1 - b)A$ — идеал в A . Поэтому существует такой элемент $a \in A$, что $b_1(1 - b) = (1 - b)a$. Тогда $a = (1 - b)a + ba = b_1(1 - b) + ba \in B$ и $B(1 - b) \subseteq (1 - b)B$.

(2) Пусть $M = mA$. Так как A инвариантно справа, то $r(M) = r(m)$ и $mA = mAB = mB$ по условию. Поэтому существует такой элемент $b \in B$, что $m(1 - b) = 0$. Тогда $A = B + r(m) = A + r(M)$.

(3) Положим

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2, \\ \sum_{i=2}^{n-1} m_i A, & \text{если } n \geq 3. \end{cases}$$

Для каждого m_i

$$m_i \in M = MB = \sum_{j=1}^n m_j B$$

и существует такой элемент $b_i \in B$, что $m_i(1 - b_i) \in \sum_{j \neq i} m_j B$. Тогда $m_n A(1 - b_n) \subseteq NB = m_1 B + YB$ и $m_1 A(1 - b_1) \in YB + m_n B$, поскольку A инвариантно справа; кроме того, $B(1 - b_1) \subseteq (1 - b_1)B$ в силу (1). Поэтому $A = B + (N : m_n A)$ и $m_1 A(1 - b_1)(1 - b_n) \subseteq (YB + m_n B)(1 - b_n) \subseteq YB + m_n B(1 - b_n) \subseteq YB + m_n(1 - b_n)B \subseteq YB + m_1 B = NB$. Тогда существует такой элемент $b^* \in B$, что $m_1(1 - b_1)(1 - b_n) - m_1 b^* \in YB$ и $m_1[(1 - b_1)(1 - b_n) - b^*] \in YB$.

Положим $b = 1 - [(1 - b_1)(1 - b_n) - b^*] \in B$. Тогда $m_1 = m_1b + m_1(1 - b) = m_1b + m_1[(1 - b_1)(1 - b_n) - b^*] \in m_1B + YB = NB$. Поэтому $m_1A \subseteq NB$. Аналогично можно доказать, что $m_iA \subseteq NB$ при $i = 2, \dots, n - 1$. Поэтому $N = NB$.

(4) Достаточно доказать, что идеал $\sum_{i=1}^n a_i^2 A$ инвариантного справа кольца A совпадает с A . Допустим противное. Существует максимальный идеал P кольца A , содержащий B . Поэтому $a_i^2 \in P$ для всех i . Тогда $a_i \in P$ для всех i , поскольку A/P — тело. Поэтому $P \ni \sum_{i=1}^n a_i = 1 \notin P$; получено противоречие.

(5) Допустим, что $r(m(1 - p)A) \not\subseteq P$ для некоторого элемента $p \in P$. Так как P — максимальный идеал, то $A = P + r(m(1 - p)A)$. Поэтому существует такой элемент $p_1 \in P$, что $m(1 - p)A(1 - p_1) = 0$. Элемент $1 - (1 - p)(1 - p_1)$ идеала P обозначим через p_2 . Так как A инвариантно справа, то $mA(1 - p_2) = mA(1 - p)(1 - p_1) \subseteq m(1 - p)A(1 - p_1) = 0$. Поэтому $1 - p_2 \in r(mA) \subseteq P$ и $1 = p_2 + (1 - p_2) \in P$; получено противоречие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть A — инвариантное справа кольцо.

(1) Если M — конечно порожденный A -модуль и B — идеал кольца A , то $M = MB \iff A = B + r(M)$.

(2) Если B — конечно порожденный идеал кольца A и $B = B^2$, то существует такой центральный идемпотент e кольца A , что $B = eA$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Если $A = B + r(M)$, то $M = M(B + r(M)) = MB + Mr(M) = MB$.

Допустим, что $M = \sum_{i=1}^n m_i A = MB$. Проведем индукцию по n . При $n = 1$ утверждение следует из леммы 2.3(2).

Допустим, что $n \geq 2$ и утверждение верно для всех натуральных чисел, меньших n . Пусть $N = \sum_{i=1}^{n-1} m_i A$. По лемме 2.3(3) $A = B + (N : m_n A)$ и $N = NB$. По предположению индукции $A = B + r(N)$. Тогда $M(N : m_n A)r(N) = (N + m_n A)(N : m_n A)r(N) = N(N : m_n A)r(N) + m_n A(N : m_n A)r(N) \subseteq Nr(N) = 0$. Поэтому $(N : m_n A)r(N) \subseteq r(M)$ и $A = A \cdot A = (B + (N : m_n A))(B + r(N)) \subseteq B + (N : m_n A)r(N) \subseteq B + r(M) \subseteq A$.

(2) Так как B — конечно порожденный идеал инвариантного справа кольца A , то B — конечно порожденный правый идеал в A . В силу (1) $A = B + r(B)$. Поэтому существует такой элемент $e \in B$, что $B(1 - e) = 0$. В частности, $e(1 - e) = 0$ и $e = e^2$. Так как eA и $(1 - e)A$ — идеалы инвариантного справа кольца A , то идемпотент e централен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Если A — инвариантное справа кольцо и M — идеал кольца A , порожденный некоторым множеством идемпотентов кольца A , то M — мультипликативный правый идеал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = \sum_{i \in I} e_i A$ ($e_i^2 = e_i$) и B — правый идеал кольца A , содержащийся в M . Так как A инвариантно справа, то $MB \subseteq B$. Поэтому достаточно доказать, что $B \subseteq MB$. Пусть $b \in B$. Существует такое конечное подмножество $\{e_1, \dots, e_n\}$ в $\{e_i\}_{i \in I}$, что $b = \sum_{i=1}^n e_i a_i$ для некоторых $a_1, \dots, a_n \in A$. Так как A инвариантно справа, то все идемпотенты e_i центральны. Тогда $(1 - e_1) \cdots (1 - e_n)b = 0$ и $b = (1 - (1 - e_1) \cdots (1 - e_n))b \in (\sum_{i=1}^n e_i A)b \subseteq MB$. Поэтому $B \subseteq MB$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Пусть A – инвариантное кольцо, Q – классическое кольцо частных кольца A и M – идеал кольца A . Равносильны следующие условия:

- (1) M – обратимый идеал;
- (2) M_A и ${}_A M$ – конечно порожденные мультипликативные модули и M содержит регулярный элемент s кольца A ;
- (3) M_A и ${}_A M$ – мультипликативные модули и M содержит регулярный элемент s кольца A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). По условию существует такой подбимодуль M^* в ${}_A Q_A$, что $MM^* = M^*M = A$. Пусть N – подмодуль правого или левого A -модуля M . Так как A инвариантно, то N – идеал кольца A . Обозначим через B и C идеалы M^*N и NM^* кольца A соответственно. Тогда $N = AN = MM^*N = MB$ и $N = NA = NM^*M = CN$. Поэтому M_A и ${}_A M$ – мультипликативные модули.

Так как $MM^* = A$, то существуют такие $m_1, \dots, m_n \in M$ и $q_1, \dots, q_n \in M^*$, что $\sum_{i=1}^n m_i q_i = 1$. Существуют такие $a_1, \dots, a_n \in A$ и регулярный элемент $s \in A$, что $q_i = a_i s^{-1}$ при $i = 1, \dots, n$. Тогда $s = 1 \cdot s = (\sum_{i=1}^n m_i a_i s^{-1})s = \sum_{i=1}^n m_i a_i \in M$ и M содержит регулярный элемент s . Кроме того,

$$M = \left(\sum_{i=1}^n m_i q_i \right) M = \sum_{i=1}^n m_i (q_i M) \subseteq \sum_{i=1}^n m_i A \subseteq M.$$

Поэтому M – конечно порожденный правый идеал в A . Так как A инвариантно, то M – конечно порожденный левый идеал кольца A .

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) очевидна.

(3) $\Rightarrow$ (1). Так как M_A и ${}_A M$ – мультипликативные модули, то существуют такие идеалы B и C кольца A , что $MB = sA = As = CM$; поэтому $M(Bs^{-1}) = A = (s^{-1}C)M$. Так как A инвариантно, то $s^{-1}as \in A$ и $sas^{-1} \in A$ для любого $a \in A$; кроме того, B и C – идеалы инвариантного кольца A . Поэтому непосредственно проверяется, что Bs^{-1} и $s^{-1}C$ – подбимодули в ${}_A Q_A$. Кроме того, $Bs^{-1} = ABs^{-1} = (s^{-1}C)MBs^{-1} = s^{-1}C(MBs^{-1}) = s^{-1}CA = s^{-1}C$. Поэтому можно положить $M^* = Bs^{-1} = s^{-1}C$. Тогда $MM^* = M^*M = A$ и M – обратимый идеал.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Пусть A – инвариантное кольцо с коммутативным умножением идеалов и M – идеал кольца A , содержащий регулярный элемент кольца A . Тогда равносильны следующие условия:

- (1) M – мультипликативный A -модуль;
- (2) M – мультипликативный левый A -модуль;
- (3) M – обратимый идеал;
- (4) M_A и ${}_A M$ – конечно порожденные мультипликативные модули.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать эквивалентность условий (1), (3) и (4). Эквивалентность условий (3) и (4) следует из предложения 2.6. Импликация (4) $\Rightarrow$ (1) очевидна.

(1) $\Rightarrow$ (4). По предложению 2.6 достаточно доказать, что M – мультипликативный левый A -модуль. Пусть N – подмодуль левого A -модуля M . Так как A инвариантно, то N – подмодуль A -модуля M . Так как M – мультипликативный правый A -модуль, то существует такой идеал B кольца A , что $N = MB$. Так как A – кольцо с коммутативным умножением идеалов, то $BM = MB = N$. Поэтому M – мультипликативный левый A -модуль.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. Пусть M – модуль над инвариантным справа кольцом A , $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, $\text{card}(I) \geq 2$ и все модули M_i конечно порождены. Тогда равносильны следующие условия:

- (1) M – мультипликативный модуль;
- (2) все M_i – мультипликативные модули и $A = r(M_i) + r(\bigoplus_{j \neq i} M_j)$ для каждого $i \in I$;
- (3) все M_i – мультипликативные модули, $A = r(M_i) + r(M_j)$ для всех $i \neq j$ и для каждого конечного подмножества J в I существует такой идеал B_J кольца A , что $\bigoplus_{i \in J} M_i = MB_J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). По предложению 1.18(1) все M_i – мультипликативные модули и $M_i = M_i r(\bigoplus_{j \neq i} M_j)$ для каждого $i \in I$. По предложению 2.4(1) $A = r(M_i) + r(\bigoplus_{j \neq i} M_j)$ для каждого $i \in I$.

(2) $\Rightarrow$ (3). В силу (2) все M_i – мультипликативные модули и $A = r(M_i) + r(\bigoplus_{k \neq i} M_k)$ для каждого $i \in I$. Кроме того, если $j \neq i$, то $r(\bigoplus_{k \neq i} M_k) \subseteq r(M_j)$. Поэтому $A = r(M_i) + r(M_j)$ для всех $i \neq j$. По предложению 1.18(2) M – мультипликативный модуль. По предложению 1.17 для каждого конечного подмножества J в I существует такой идеал B_J кольца A , что $\bigoplus_{i \in J} M_i = MB_J$.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) следует из предложения 1.18(4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. Пусть M – мультипликативный модуль над инвариантным справа кольцом A и $h: A \rightarrow A/r(M)$ – естественный кольцевой эпиморфизм.

(1) Для каждого конечно порожденного прямого слагаемого X модуля M существует такой центральный идемпотент $\bar{e}$ кольца $h(A)$, что $X = M\bar{e}$ и $r_{h(A)}(X) = (1_{h(A)} - \bar{e})h(A)$.

(2) Для каждого циклического прямого слагаемого X модуля M существует такой центральный идемпотент $\bar{e}$ кольца $h(A)$, что правый $h(A)$ -модуль X изоморфен проективному прямому слагаемому $\bar{e}h(A)$ модуля $h(A)_{h(A)}$.

(3) Если A дистрибутивно справа, то M дистрибутивен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $M = X \oplus Y$, $B = (X : M) \supseteq r(M)$ и $C = (Y : M) \supseteq r(M)$. Тогда $X = MB$, $Y = MC$, $Mr(X) = (X \oplus Y)r(X) = Yr(X) \subseteq Y$, $r(X) \subseteq C$, $XC \subseteq X \cap Y = 0$ и $C \subseteq r(X)$. Поэтому $C = r(X)$. Аналогично $B = r(Y)$. Тогда $X = MB = (X \oplus Y)B = XB \oplus YB = X \cap (XB \oplus YB) = XB$. Так как $X = XB$ и X – конечно порожденный модуль над инвариантным справа кольцом A , то по предложению 2.4(1) $A = B + r(X) = B + C$ и $h(A) = h(B) + h(C)$. Кроме того, $M(B \cap C) \subseteq MB \cap MC = X \cap Y = 0$, $B \cap C = r(M)$ и $h(B) \cap h(C) = h(0)$. Поэтому существует такой центральный идемпотент $\bar{e}$ кольца $h(A)$, что $h(B) = \bar{e}h(A)$ и $h(C) = (1_{h(A)} - \bar{e})h(A)$. Тогда $X = M\bar{e}$ и $r_{h(A)}(X) = (1_{h(A)} - \bar{e})h(A)$.

(2) Так как X – циклический модуль над инвариантным справа кольцом $h(A)$, то существует такой элемент $x \in X$, что $X = xh(A)$ и $r_{h(A)}(x) = r_{h(A)}(X)$. В силу (1) существует такой центральный идемпотент $\bar{e}$ кольца $h(A)$, что $r_{h(A)}(x) = r_{h(A)}(X) = (1_{h(A)} - \bar{e})h(A)$. Поэтому $X_{h(A)} \cong h(A)/r_{h(A)}(x) = h(A)/(1_{h(A)} - \bar{e})h(A) \cong \bar{e}h(A)$.

(3) Утверждение следует из предложения 1.6(13) и следующего известного утверждения (см., например, [1; с. 170] или [15; с. 143]): если M – модуль над дистрибутивным справа инвариантным справа кольцом A , то $MB \cap MC = M(B \cap C)$ для любых правых идеалов B и C кольца A .

ТЕОРЕМА 2.10. Пусть M – мультипликативный модуль над инвариантным справа кольцом. Тогда равносильны следующие условия:

- (1) M – конечно порожденный модуль;
- (2) $M \neq MB$ для каждого такого собственного идеала B кольца A , что $r(M) \subseteq B$;
- (3) $M \neq MP$ для каждого такого $P \in \text{max}(A_A)$, что $r(M) \subseteq P$;
- (4) существует такое конечное подмножество $\{m_1, \dots, m_n\}$ в M , что $A = \sum_{i=1}^n (m_i A : M)$;
- (5) существуют такие $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$ и конечное подмножество $\{m_1, \dots, m_n\}$ в M , что $1 = \sum_{i=1}^n a_i^2 b_i$ и $Ma_i \subseteq m_i A$ при $i = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). Допустим, что существует такой собственный идеал B кольца A , что $r(M) \subseteq B$ и $M = MB$. По предложению 2.4(1) $A = B + r(M) = B$; получено противоречие.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) очевидна, а импликация (3) $\Rightarrow$ (1) следует из предложения 1.6(7).

(4) $\Rightarrow$ (1). Так как $M = MA$, то $M = M(r(M) + \sum_{i=1}^n (m_i A : M)) = Mr(M) + \sum_{i=1}^n (M(m_i A : M)) = \sum_{i=1}^n m_i A$.

(1) $\Rightarrow$ (4). Пусть $M = \sum_{i=1}^n m_i A$ и $B = \sum_{i=1}^n (m_i A : M)$. Тогда $MB = \sum_{i=1}^n (M(m_i A : M)) = \sum_{i=1}^n m_i A = M$. Так как $MB = M$ и M конечно порожден, то $A = r(M) + B$ по предложению 2.4(1). Кроме того, $r(M) \subseteq (m_i A : M)$ для каждого i . Поэтому $A = B$.

(4) $\Rightarrow$ (5). Так как $A = (\sum_{i=1}^n (m_i A : M))$, то существуют такие $a_1, \dots, a_{n+1} \in A$, что $1 = \sum_{i=1}^n a_i$ и $Ma_i \subseteq m_i A$ при $i = 1, \dots, n$. По лемме 2.3(4) существуют такие $b_1, \dots, b_n \in A$, что $1 = \sum_{i=1}^n a_i^2 b_i$.

(5) $\Rightarrow$ (4). Положим $c_i = a_i^2 b_i$ при $i = 1, \dots, n$. Так как $Ma_i \subseteq m_i A$, то $Mc_i \subseteq m_i A$. Так как $1 = \sum_{i=1}^n c_i$, то $A = \sum_{i=1}^n (m_i A : M)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.11. Пусть M – точный мультипликативный модуль над инвариантным справа кольцом A . Тогда

- (1) $\text{Sing}(M) = M \text{Sing}(A_A)$;
- (2) $\{a \in A \mid ta = 0 \text{ для некоторого } 0 \neq t \in M\} = \{a \in A \mid ba = 0 \text{ для некоторого } 0 \neq b \in A\}$;
- (3) M – модуль без кручения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Непосредственно проверяется, что $M \text{Sing}(A_A) \subseteq \text{Sing}(M)$ для каждого модуля M над любым кольцом A .

Допустим, что M – мультипликативный модуль над инвариантным справа кольцом A . Пусть $m \in \text{Sing}(M)$. Существует такой идеал B кольца A , что $mA = MB$. Так как A инвариантно справа, то $r(m)$ – идеал. Поэтому $r(m) = r(mA)$ и $MBr(m) = mAr(m) = mAr(mA) = 0$. Тогда $Br(m) = 0$, поскольку M точен. Так как $r(m)$ – существенный правый идеал и $Br(m) = 0$, то $B \subseteq \text{Sing}(A_A)$. Поэтому $m \in MB \subseteq M \text{Sing}(A_A)$ и $\text{Sing}(M) \subseteq M \text{Sing}(A_A)$.

(2) Положим $z(M) = \{a \in A \mid ma = 0 \text{ для некоторого } 0 \neq m \in M\}$, $z(A) = \{a \in A \mid ba = 0 \text{ для некоторого } 0 \neq b \in A\}$. Пусть $a \in z(A)$. Существует такой ненулевой элемент $b \in A$, что $ba = 0$. Так как M точен, то $Mb \neq 0$ и $(Mb)a = 0$, откуда $a \in z(M)$. Поэтому $z(A) \subseteq z(M)$.

Наоборот, пусть $a \in z(M)$. Существует такой ненулевой элемент $m \in M$, что $ma = 0$. Существует такой идеал B кольца A , что $mA = MB$. Тогда $MBa = 0$ и $Ba = 0$, поскольку M точен. Тогда $B \neq 0$ и $a \in z(A)$. Поэтому $z(M) \subseteq z(A)$.

(3) Утверждение следует из (2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.12. Пусть M – конечно порожденный модуль над инвариантным справа кольцом A , $X, Y \in \text{Lat}(M)$ и $X + Y = M$.

(1) Если M – мультипликативный модуль, то $A = (X : Y) + (Y : X)$.

(2) Если X и Y – мультипликативные модули и $Z = X \cap Y + Y \cap X$ для любого $Z \in \text{Lat}(M)$, то M – мультипликативный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Обозначим через B идеал $(X : Y) + (Y : X)$. Имеем $(X : Y) = (X : (X + Y)) = (X : M)$ и $(Y : X) = (Y : (X + Y)) = (Y : M)$. Тогда $MB = M((X : M) + (Y : M)) = M(X : M) + M(Y : M) = X + Y = M$. Так как $MB = M$ и M конечно порожден, то $A = r(M) + B$ по предложению 2.4(1). Кроме того, $r(M) \subseteq (X : Y) \subseteq B$ для каждого i . Поэтому $A = B$.

(2) Так как $X + Y$ конечно порожден, то существуют такие элементы $x_i \in X$, $y_i \in Y$ ($1 \leq i \leq n$), что $X + Y = (x_1 + y_1)A + \dots + (x_n + y_n)A$. Пусть $y \in Y$. По условию $(X + Y) \cap Z = (X \cap Z) + (Y \cap Z)$ для всех $Z \in \text{Lat}(M)$. Так как $(x_i + y)A = (x_i + y)A \cap (X + Y) = [(x_i + y)A \cap X] + [(x_i + y)A \cap Y]$ ($1 \leq i \leq n$), то существуют такие элементы $a \in A$ и $z \in Y$, что $x_i + y = (x_i + y)a + z$ и $(x_i + y)a \in X$. Поэтому $x_i(1 - a) \in Y$ и $ya \in X$. Следовательно, $A = (X : yA) + (Y : x_iA)$ ($1 \leq i \leq n$). Тогда $A = (X : yA) + [(Y : x_1A) \cap \dots \cap (Y : x_nA)] = (X : yA) + (Y : X)$. В частности, $A = (X : y_iA) + (Y : X)$ ($1 \leq i \leq n$). Поэтому $A = [(X : y_1A) \cap \dots \cap (X : y_nA)] + (Y : X) = (X : Y) + (Y : X)$. По следствию 1.16 M – мультипликативный модуль.

ЛЕММА 2.13. Пусть S – мультипликативно замкнутое подмножество кольца A , содержащее единицу и не содержащее нуля кольца A .

(1) S – множество правых знаменателей $\iff S$ перестановочно справа и для любых элементов $a \in A$ и $s \in S$ равенство $sa = 0$ влечет существование такого элемента $t \in S$, что $at = 0$.

(2) Пусть A – инвариантно справа кольцо и для любых таких элементов $a \in A$ и $s \in S$, что $sa = 0$, существует такой элемент $u \in S$, что $au = 0$. Тогда S – множество правых знаменателей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) См., например, [18; с. 51].

(2) Пусть $a \in A$ и $s \in S$. Так как $as \in As \subseteq sA$, то существует такой элемент $b \in A$, что $as = sb$. В силу (1) S – множество правых знаменателей.

ЛЕММА 2.14. Пусть S – множество правых знаменателей в кольце A , $Q = AS^{-1}$, $f: A \rightarrow Q$ – канонический кольцевой гомоморфизм, M – A -модуль и $g: M \rightarrow MS^{-1}$ – канонический A -модульный гомоморфизм.

(1) Для любых элементов $b_1, \dots, b_n \in A$ и $s_1, \dots, s_n \in S$ существуют такие элементы $s \in S$ и $a_i \in b_i A$, что $f(b_i)f(s_i)^{-1} = f(a_i)f(s)^{-1}$ ($i = 1, \dots, n$).

(2) Для любых элементов $x_1, \dots, x_n \in M$ и $s_1, \dots, s_n \in S$ существуют такие элементы $s \in S$ и $a_i \in A$, что $g(x_i)f(s_i)^{-1} = g(x_i a_i)f(s)^{-1}$ ($i = 1, \dots, n$) и $\sum_{i=1}^n g(x_i)f(s_i)^{-1} = g(\sum_{i=1}^n x_i a_i)f(s)^{-1}$.

(3) Если $X \in \text{Lat}(M)$, то $g(X)Q = \{g(x)f(s)^{-1} \mid x \in X, s \in S\}$.

(4) Если $\overline{X}$ – подмодуль Q -модуля MS^{-1} , то существует такой $X \in \text{Lat}(M)$, что $\text{Ker}(g) \subseteq X$ и $g(X)Q = \overline{X}$.

(5) Если $m \in M$ и $X \in \text{Lat}(M)$, то $g(m) \in g(X)Q \iff ms \in X$ для некоторого $s \in S$.

(6) Если $m \in M$ и $X \in \text{Lat}(M)$, то $f((X : m))Q \subseteq (g(X)Q : g(mA)Q)$.

(7) Если X и Y – подмодули модуля M и $\{X_i\}$ – некоторое множество подмодулей модуля M , то $\sum_{i \in I} (g(X_i)Q) = g(\sum_{i \in I} X_i)Q$ и $g(X)Q \cap g(Y)Q = g(X \cap Y)Q$. Следовательно, если $M_A = \bigoplus_{i \in I} X_i$, то $(g(M)Q)_Q = \bigoplus_{i \in I} (g(X_i)Q)$.

(8) Если A -модуль M проективен (свободен), то Q -модуль $g(M)Q$ проективен (свободен).

(9) Если множество $A \setminus S$ аддитивно замкнуто, то Q – локальное кольцо.

(10) Если $q \in Q$, то $qQ = Q \iff$ существует такой элемент $a \in A$, что $qQ = f(a)Q$ и $S \cap aA \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Достаточно рассмотреть случай $n = 2$. По лемме 2.13(1) существуют такие элементы $t_1 \in S$ и $t_2 \in A$, что $s_1 t_1 = s_2 t_2 = s \in S$. Положим $a_i = b_i t_i \in b_i A$ ($i = 1, 2$). Тогда $f(s_i)^{-1} = f(t_i)f(s)^{-1}$ и $f(b_i)f(s_i)^{-1} = f(a_i)f(s)^{-1}$ ($i = 1, 2$).

(2) В силу (1) существуют такие элементы $s \in S$ и $a_i \in A$, что $f(s_i)^{-1} = f(a_i)f(s)^{-1}$ ($i = 1, \dots, n$). Тогда $g(x_i)f(s_i)^{-1} = g(x_i a_i)f(s)^{-1}$ ($i = 1, \dots, n$) и $\sum_{i=1}^n g(x_i)f(s_i)^{-1} = g(\sum_{i=1}^n x_i a_i)f(s)^{-1}$.

(3) Пусть $\overline{x} \in g(X)Q$. Существуют такие элементы $x_1, \dots, x_n \in X$ и $s_1, \dots, s_n \in S$, что $\overline{x} = \sum_{i=1}^n g(x_i)f(s_i)^{-1}$. В силу (2) существуют такие элементы $a_1, \dots, a_n \in A$ и $s \in S$, что $\overline{x} = g(\sum_{i=1}^n x_i a_i)f(s)^{-1} = g(x)f(s)^{-1}$, где $x = \sum_{i=1}^n x_i a_i \in X$.

(4) Для каждого элемента $y \in \overline{X}$ возьмем любой такой элемент $x(y) \in M$, что $y = g(x(y))f(s)^{-1}$ для некоторого элемента $s \in S$. Тогда $yQ = g(x(y))Q$ и обозначим через X подмодуль $\text{Ker}(g) + \sum_{y \in \overline{X}} yA$ модуля M . Тогда $\text{Ker}(g) \subseteq X$ и $g(X)Q = \overline{X}$.

(5) Если существует такой элемент $s \in S$, что $ms \in X$, то $g(m)f(s) \in g(X)$ и $g(m) \in g(X)f(s)^{-1} \subseteq g(X)Q$.

Теперь допустим, что $g(m) \in g(X)Q$. В силу (3) существуют такие элементы $x \in X$ и $t \in S$, что $g(m) = g(x)f(t)^{-1}$. Тогда $g(mt) = g(x)$. Так как $mt - x \in \text{Ker}(g)$, то существует такой элемент $u \in S$, что $(mt - x)u = 0$. Положим $s = tu \in S$. Тогда $ms = mtu = xu \in X$.

(6) Пусть y – элемент из $(g(X)Q : g(m)Q)$. Существуют такие элементы $a \in A$ и $s \in S$, что $y = f(a)f(s)^{-1}$. Тогда $g(ma) = g(m)f(a)f(s)^{-1}f(s) \in g(m)yQ \subseteq$

$g(X)Q$. В силу (5) существует такой элемент $t \in S$, что $mat \in X$. Тогда $at \in (X : m)$ и $y = f(at)f(t)^{-1}f(s)^{-1} \in f((X : m))Q$.

(7) Соотношения $\sum_{i \in I} (g(X_i)Q) = g(\sum_{i \in I} X_i)Q$ и $g(X)Q \cap g(Y)Q \supseteq g(X \cap Y)Q$ проверяются непосредственно. Пусть $\bar{z}$ – элемент из $g(X)Q \cap g(Y)Q$. В силу (3) существуют такие элементы $t, u \in S$, $x \in X$ и $y \in Y$, что $\bar{z} = g(x)f(t)^{-1} = g(y)f(u)^{-1}$. В силу (1) существуют такие элементы $a, b \in A$ и $s \in S$, что $f(t)^{-1} = f(a)f(s)^{-1}$ и $f(u)^{-1} = f(b)f(s)^{-1}$. Поэтому $\bar{z} = g(xa)f(s)^{-1} = g(yb)f(s)^{-1}$. Тогда $g(xa) = g(yb)$ и $xa - yb \in \text{Ker}(g)$. Поэтому существует такой элемент $v \in S$, что $xav = ybv \in X \cap Y$. Тогда $\bar{z} = g(xav)f(v)^{-1}f(s)^{-1} \in g(X \cap Y)Q$ и $g(X)Q \cap g(Y)Q \subseteq g(X \cap Y)Q$.

(8) Утверждение следует из (7).

(9) Пусть $qQ \neq Q$, где $q = f(a)f(s)^{-1} \in Q$, $a \in A$ и $s \in A$. Достаточно доказать, что $(1 - q)Q = Q$. Так как $qQ \neq Q$, то $a \in A \setminus S$. Так как $s = (s - a) + a \in S$ и $A \setminus S$ аддитивно замкнуто, то $s - a \in S$. Поэтому $Q = f(s - a)Q = f(s - a)f(s)^{-1}Q = (f(s) - f(a))f(s)^{-1}Q = (1 - q)Q$.

(10) Пусть $q \in Q$. Если существуют такие $a, b \in A$, что $qQ = f(a)Q$ и $ab \in S$, то элемент $f(ab)$ обратим в Q и $Q = f(ab)Q \subseteq f(a)Q = qQ \subseteq Q$. Теперь допустим, что $qQ \neq Q$. Существуют такие $a \in A$ и $s \in S$, что $q = f(a)f(s)^{-1}$. Тогда $Q = qQ \subseteq f(a)Q \subseteq Q$, $f(a)Q = Q$ и существуют такие $c \in A$ и $s \in S$, что $f(a)f(c)f(s)^{-1} = f(1)$. Тогда $ac - s \in t \in \text{Ker}(f)$ и существует такой элемент $t \in S$, что $(ac - s)t = 0$. Тогда $st = act \in S \cap aA$.

ЛЕММА 2.15. Пусть P – такой максимальный идеал кольца A , что A/P – тело и существует правая локализация A_P , $f: A \rightarrow A_P$ – канонический кольцевой гомоморфизм, M – A -модуль и $g: M \rightarrow M_P$ – канонический A -модульный гомоморфизм из M в модуль частных M_P . Тогда

- (1) A_P – локальное кольцо, $J(A_P) = P_P$ и $X_P \cap Y_P = (X \cap Y)_P$ для любых подмодулей X и Y модуля M ;
- (2) если $m \in M$ и $X \in \text{Lat}(M)$, то $g(m) \in X_P \iff m(1 - p) \in X$ для некоторого $p \in P$;
- (3) если M – ненулевой проективный A -модуль, то $g(M)Q$ – свободный Q -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $Q = A_P$ и $S = A \setminus P$.

(1) По лемме 2.14(7) $X_P \cap Y_P = (X \cap Y)_P$ для любых $X, Y \in \text{Lat}(M)$. По лемме 2.14(9) Q – локальное кольцо. Пусть $\bar{p} \in f(P)Q$. По лемме 2.14(3) существуют такие $p \in P$ и $s \in S$, что $\bar{p} = f(p)f(s)^{-1}$. Тогда $(1 - \bar{p})Q = (f(s) - f(p))f(s)^{-1}Q = f(s - p)Q$. Так как $p \in P$ и $s \notin P$, то $s - p \notin P$. По лемме 2.14(10) $(1 - \bar{p})Q = Q$, причем $\bar{p}$ – произвольный элемент из $f(P)Q$. Поэтому $f(P)Q \subseteq J(Q)$. Возьмем $q \in Q \setminus f(P)Q$. По лемме 2.14(3) существуют такие $a, s \in S$, что $q = f(a)f(s)^{-1}$. Поэтому все элементы из $Q \setminus f(P)Q$ обратимы в Q . Тогда $J(Q) \subseteq f(P)Q \subseteq J(Q)$.

(2) По лемме 2.14(5) $g(m) \in g(X)Q \iff s \in S \cap (X : m) \neq \emptyset$. Так как A/P – тело, то P – максимальный правый идеал и $g(m) \in g(X)Q \iff A = P + (X : m)$.

(3) По лемме 2.14(8) правый Q -модуль $g(M)Q$ проективен. В силу (1) Q – локальное кольцо. Поэтому ненулевой проективный Q -модуль $g(M)Q$ свободен [20].

ЛЕММА 2.16. Пусть S – множество правых знаменателей в кольце A , $Q = AS^{-1}$, $f: A \rightarrow Q$ – канонический кольцевой гомоморфизм, M – A -модуль и $g: M \rightarrow MS^{-1}$ – канонический A -модульный гомоморфизм. Допустим, что кольцо Q инвариантно справа. Тогда

- (1) $g(XB)Q = g(X)Qf(B)Q$ для каждого $X \in \text{Lat}(M)$ и любого правого идеала B кольца A ;
- (2) $f((X : Y))Q \subseteq (g(X)Q : g(Y)Q)$;
- (3) если $m \in M$ и X – такой подмодуль в M , что $(X : m) = (X : mA)$, то $f((X : mA))Q = (g(X)Q : g(mA)Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как Q инвариантно справа, то $f(B)Q = Qf(B)Q$ и $g(XB)Q = g(X)f(B)Q = g(X)Qf(B)Q$.

(2) Пусть $z \in f((X : Y))Q$. По лемме 2.14(3) $z = f(a)f(s)^{-1}$ для некоторых $a \in (X : Y)$ и $s \in S$. Так как Q инвариантно справа, то $Qz \subseteq zQ$. Поэтому $f(Y)Qz \subseteq f(Y)zQ = f(Y)f(a)f(s)^{-1}Q \subseteq f(Ya)Q \subseteq f(X)Q$ и $f((X : Y))Q \subseteq (g(X)Q : g(Y)Q)$.

(3) В силу (2) $f((X : mA))Q \subseteq (g(X)Q : g(mA)Q)$. По лемме 2.14(6) $f((X : m))Q \subseteq (g(X)Q : g(mA)Q)$. По условию $(X : m) = (X : mA)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.17. Пусть M – мультипликативный модуль над кольцом A и S – такое множество правых знаменателей в A , что кольцо AS^{-1} инвариантно справа. Тогда

- (1) MS^{-1} – мультипликативный AS^{-1} -модуль;
- (2) если $A \setminus S$ замкнуто по сложению и M конечно порожден, то MS^{-1} – циклический мультипликативный AS^{-1} -модуль;
- (3) AS^{-1} – полулокальное кольцо с коммутативным умножением идеалов, MS^{-1} – циклический мультипликативный правый AS^{-1} -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $Q = AS^{-1}$.

(1) Пусть $g: M \rightarrow MS^{-1}$ – канонический A -модульный гомоморфизм и $\overline{X}$ – подмодуль Q -модуля MS^{-1} . По лемме 2.14(4) существует такой подмодуль X в M , что $g(X)Q = \overline{X}$. Так как M – мультипликативный A -модуль, то существует такой идеал B кольца A , что $X = MB$. Кроме того, $f(B)Q = Qf(B)Q$, поскольку Q инвариантно справа. Поэтому $\overline{X} = g(X)Q = g(MB)Q = g(M)f(B)Q = g(M)Qf(B)Q = MS^{-1}(Qf(B)Q)$.

(2) По лемме 2.15(1) Q – локальное кольцо. Так как M_A конечно порожден, то MS^{-1} – конечно порожденный Q -модуль. В силу (1) MS^{-1} – конечно порожденный мультипликативный модуль над локальным кольцом Q . По предложению 1.9(3) M циклический.

(3) В силу (1) MS^{-1} – мультипликативный AS^{-1} -модуль. По предложению 1.9(4) MS^{-1} – циклический AS^{-1} -модуль.

ЛЕММА 2.18. Пусть A – кольцо с коммутативным умножением правых идеалов. Тогда

- (1) $xy \in yxA$ для любых элементов $x, y \in A$ и, следовательно, A инвариантно справа;

- (2) если S – мультипликативно замкнутое подмножество кольца A , содержащее единицу и не содержащее нуля кольца A , то S – множество правых знаменателей и AS^{-1} – инвариантное справа кольцо с коммутативным умножением правых идеалов;
- (3) для любого максимального правого идеала P кольца A правая локализация A_P существует и является инвариантным справа локальным кольцом с коммутативным умножением правых идеалов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Утверждение следует из того, что $xy \in (xA)(yA) = (yA)(xA) = xyA$.

(2) В силу (1) A инвариантно справа. Пусть $a \in A$, $s \in S$ и $sa = 0$. В силу (1) $as \in saA = 0$. По лемме 2.13(2) S – множество правых знаменателей. Теперь достаточно доказать, что $q_1q_2Q \subseteq q_2q_1Q$ для любых $q_1, q_2 \in Q$. Пусть $q_1 = f(a)f(s)^{-1}$, $q_2 = f(b)f(t)^{-1}$, где $a, b \in A$ и $s, t \in S$. В силу (1) $bs \in sbA$ и $ta \in atA$. Поэтому $q_2Q = f(bs)Q \subseteq f(sb)Q = f(s)f(b)Q$ и $f(ta) \in f(a)f(t)Q = f(a)f(s)^{-1}f(s)f(a)Q \subseteq q_1Q$. Тогда $q_1q_2Q \subseteq (f(a)f(s)^{-1})f(s)f(b)Q = f(ab)Q \subseteq f(ba)Q = f(b)f(t)^{-1}f(ta)Q \subseteq q_2q_1Q$.

(3) Утверждение следует из (2) и леммы 2.15(1).

ЛЕММА 2.19. Пусть M – модуль над инвариантным справа кольцом A и P – такой максимальный идеал кольца A , что правая локализация A_P существует.

(1) Если $m \in M$ и $N \in \text{Lat}(M)$, то $(mA)_P \subseteq N_P \iff mA(1-p)A \subseteq N$ для некоторого $p \in P$.

(2) Если $m \in M$ и $N \in \text{Lat}(M)$, то $(N : mA)_P = (N_P : (mA)_P)$.

(3) Если A_P – инвариантное справа кольцо, то $(X : Y)_P \subseteq (X_P : Y_P)$.

(4) Если M_P – циклический A_P -модуль, то M содержит такой элемент x , что для каждого элемента $m \in M$ существует такой элемент $p \in P$, что $m(1-p) \in xA$.

(5) Если M – конечно порожденный модуль и M_P – циклический A_P -модуль, то существуют такие элементы $x \in M$ и $p \in P$, что $M(1-p) \in xA$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S = A \setminus P$, $f: A \rightarrow A_P$ – канонический кольцевой гомоморфизм, $g: M \rightarrow M_P$ – канонический A -модульный гомоморфизм, $h: A \rightarrow A/P$ – естественный эпиморфизм и $m \in M$. Так как $h(A)$ – инвариантное справа простое кольцо, то $h(A)$ – тело.

(1) Так как A инвариантно справа, то $(N : m) = (N : mA)$. Поэтому утверждение следует из леммы 2.15(2).

(2) Так как A инвариантно справа, то $(N : m) = (N : mA)$. Поэтому утверждение следует из леммы 2.16(3).

(3) Утверждение следует из леммы 2.16(2).

(4) По условию M_P – циклический A_P -модуль. Существуют такие элементы $x \in M$ и $s \in S$, что $M_P = g(x)f(s)^{-1}A_P = g(xA)A_P$. Так как $g(m) \in g(xA)A_P$, то из леммы 2.14(5) следует, что существует такой элемент $s \in S$, что $ms \in xA$. Так как $h(A)$ – тело, то $h(s)$ обратим в A/P и существуют такие элементы $t \in S$ и $p \in P$, что $st = 1 - p$. Тогда $m(1-p) = mst \in xA$.

(5) Пусть $M = \sum_{i=1}^n m_i A$. В силу (4) существуют такие элементы $p_1, \dots, p_n \in P$, что $m_i(1-p_i) \in xA$ при $i = 1, \dots, n$. Элемент $1 - (1-p_1) \cdots (1-p_n)$ идеала P

обозначим через p . Так как A инвариантно справа, то $A(1-p) \subseteq \bigcap_{i=1}^n ((1-p_i)A)$. Поэтому $M(1-p) = \sum_{i=1}^n m_i A(1-p) \subseteq \sum_{i=1}^n m_i (1-p_i)A \subseteq xA$.

ТЕОРЕМА 2.20. Пусть A – кольцо с коммутативным умножением правых идеалов и M – A -модуль. Для каждого $P \in \max(A_A)$ правая локализация A_P существует и является кольцом с коммутативным умножением правых идеалов. Равносильны следующие условия:

- (1) M – мультипликативный модуль;
- (2) для любого такого $P \in \max(A_A)$, что $M \neq MP$, существует такой циклический подмодуль X модуля M , что $A = P + r(M/X)$;
- (3) для любого $P \in \max(A_A)$ либо P не содержит аннулятор любого циклического подмодуля модуля M , либо существует такой циклический подмодуль X модуля M , что $P \not\supseteq r(M/X)$;
- (4) для любого $P \in \max(A_A)$ либо P не содержит аннулятор любого элемента из M , либо существуют такие элементы $p \in P$ и $x \in M$, что $M(1-p) \subseteq xA$;
- (5) $M_P = 0_P$ для любого такого $P \in \max(A_A)$, что $P \supseteq \sum_{m \in M} (mA : M)$;
- (6) для любого такого $P \in \max(A_A)$, что $M_P \neq 0_P$, существуют такие элементы $s \in A \setminus P$ и $x \in M$, что $Ms \subseteq xA$;
- (7) для каждого правого A -модульного расширения $M \subseteq K$ и любого такого $P \in \max(A_A)$, что $M_P \neq 0_P$, A_P -модуль M_P циклический и $(N_P : M_P) = (N : M)_P$ для любого $N \in \text{Lat}(K)$;
- (8) для любого такого $P \in \max(A_A)$, что $M_P \neq 0_P$, A_P -модуль M_P циклический и $(N_P : M_P) \subseteq (N : M)_P$ для любого $N \in \text{Lat}(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.18(3) для каждого $P \in \max(A_A)$ правая локализация A_P существует и является инвариантным справа кольцом с коммутативным умножением правых идеалов.

(1) $\Rightarrow$ (2). Если $M \neq MP$, то по предложению 1.6(3) существует такой циклический подмодуль X в M , что $A = P + r(M/X)$. Допустим, что $M = MP$. Пусть X – циклический подмодуль в M . Так как $M = MP$, то $X = XP$ по лемме 1.11(1). Поэтому $P \not\supseteq r(M/X)$.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) следует из леммы 1.11(2).

(3) $\Rightarrow$ (4). Допустим, что $r(m) \subseteq P$ для некоторого $m \in M$. Так как A инвариантно справа, то $P \supseteq r(mA)$. Из (3) следует, что существует такой циклический подмодуль X модуля M , что максимальный идеал P не содержит $r(M/X)$. Поэтому $A = P + r(M/X)$ и $M(1-p) \subseteq X$ для некоторого $p \in P$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Пусть Y – циклический подмодуль в M . По лемме 1.1 достаточно доказать, что $Y \subseteq M(Y : M)$. Если $(M(Y : M) : Y) = A$, то $Y = Y(M(Y : M) : Y) \subseteq M(Y : M)$.

Допустим, что $(M(Y : M) : Y) \neq A$. Тогда $(M(Y : M) : Y) \subseteq P$ для некоторого $P \in \max(A_A)$. Так как $r(Y) \subseteq (M(Y : M) : Y) \subseteq P$, то из (4) следует, что $M(1-p) \subseteq X$ для некоторого $p \in P$ и некоторого циклического подмодуля X модуля M . Следовательно, $Y(1-p)A$ – подмодуль циклического модуля X над инвариантным справа кольцом A . Поэтому $Y(1-p)A = XD$ для некоторого идеала D кольца A . Тогда $MD(1-p)A = M(1-p)D \subseteq XD \subseteq Y$. Поэтому

$D(1-p)A \subseteq (Y : M)$ и $Y(1-p)^2 \subseteq Y(1-p)A(1-p)A = XD(1-p)A \subseteq M(Y : M)$. Тогда $(1-p)^2 \subseteq (M(Y : M) : Y) \subseteq P$ и $1 \in pA + P = P$. Получено противоречие.

(1) $\Rightarrow$ (5). Положим $B = \sum_{m \in M} (mA : M)$. Тогда $M = \sum_{m \in M} mA = \sum_{m \in M} M(mA : M) = MB$. Пусть $B \subseteq P \in \max(A_A)$ и $m \in M$. Тогда $mA = M(mA : M) = MB(mA : M) = M(mA : M)B = mAB \subseteq mP$. Поэтому $m(1-p) = 0$ для некоторого $p \in P$. Тогда $m \in \text{Ker}(g_P)$ и $M_P = 0_P$.

(5) $\Rightarrow$ (6). Пусть $P \in \max(A_A)$ и $M_P \neq 0_P$. Тогда $P \not\supseteq \sum_{m \in M} (mA : M)$ в силу (5). Поэтому $P \not\supseteq (xA : M)$ для некоторого $x \in M$ и $Ms \subseteq xA$ для некоторого $s \in A \setminus P$.

(6) $\Rightarrow$ (7). Пусть K – такой A -модуль, что $M \in \text{Lat}(K)$, $P \in \max(A_A)$, $M_P \neq 0_P$, и пусть $f : A \rightarrow A_P$ – канонический кольцевой гомоморфизм. Так как $M_P \neq 0_P$, то в силу (6) существуют такие $s \in A \setminus P$ и $x \in M$, что $Ms \subseteq xA$. Поэтому $M_P = (xA)_P$. По лемме 2.19(3) $(N : M)_P \subseteq (N_P : M_P)$. Если $y \in (N : Ms)$, то $AyA \subseteq (N : Ms)$, $M(AsA)(AyA) \subseteq N$, $M(AyA)(AsA) \subseteq N$, $ys \in (N : M)$ и $f(y) = f(ys)f(s)^{-1} \in (N : M)_P$. Кроме того, $(N : xA)_P \supseteq (N_P : (xA)_P)$ по лемме 2.19(2). Поэтому $(N_P : M_P) = (N_P : (xA)_P) \subseteq (N : xA)_P \subseteq (N : Ms)_P \subseteq (N : M)_P$.

Импликация (7) $\Rightarrow$ (8) очевидна.

(8) $\Rightarrow$ (5). Пусть $P \in \max(A_A)$ и $P \supseteq \sum_{m \in M} (mA : M)$. Допустим, что $M_P \neq 0_P$. Из (8) следует, что A_P -модуль M_P циклический и $(N_P : M_P) \subseteq (N : M)_P$ для любого $N \in \text{Lat}(M)$. Тогда $M_P = (xA)_P$ для некоторого $x \in M$. Тогда $A_P = ((xA)_P : M_P) = (xA : M)_P$, поскольку $(N_P : M_P) \subseteq (N : M)_P$ для любого подмодуля N модуля M . Так как $P \supseteq \sum_{m \in M} (mA : M)$, то $P_P \supseteq (\sum_{m \in M} (mA : M))_P \supseteq (xA : M)_P = A_P$. Получено противоречие, поскольку $P_P = J(A_P)$ по лемме 2.19(1).

(5) $\Rightarrow$ (4). Пусть $P \in \max(A_A)$. Допустим, что $P \supseteq \sum_{m \in M} (mA : M)$. По условию $M_P = 0_P$. По лемме 2.15(2) для каждого $m \in M$ существует такой элемент $p \in P$, что $m(1-p) = 0$. Поэтому P не содержит аннулятор любого элемента из M . Допустим, что $P \not\supseteq \sum_{m \in M} (mA : M)$. Тогда существует такой элемент $m \in M$, что $(mA : M) \not\subseteq P$. Поэтому $A = P + (mA : M)$ и существует такой элемент $p \in P$, что $1-p \in (mA : M)$. Тогда $M(1-p) \subseteq M(mA : M) \subseteq mA$.

ТЕОРЕМА 2.21. Пусть A – кольцо с коммутативным умножением правых идеалов. Для конечно порожденного A -модуля M равносильны следующие условия:

- (1) M – мультипликативный модуль;
- (2) $M/MJ(A)$ – мультипликативный модуль;
- (3) для каждого $P \in \max(A_A)$ модуль M/MP циклический;
- (4) для каждого $P \in \max(A_A)$ существует такой циклический подмодуль X в M , что $P \not\supseteq r(M/X)$;
- (5) M_P – циклический A_P -модуль для каждого $P \in \max(A_A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) следует из леммы 1.2(1).

(2) $\Rightarrow$ (3). Так как $J(A) \subseteq P$ для любого $P \in \max(A_A)$, то без ограничения общности можно считать, что $J(A) = 0$. В этом случае утверждение следует из предложения 1.6(3).

(3) $\Rightarrow$ (4). Так как M/MP циклический, то существует такой циклический подмодуль X в M , что $M = X + MP$. Положим $\overline{M} = M/X$. По лемме 1.2(1) $\overline{M}$ — мультипликативный модуль; кроме того, $\overline{M} = \overline{M}P$. По предложению 2.4(1) $A = P + r(\overline{M})$. Поэтому $P \not\subseteq r(\overline{M}) = r(M/X)$.

Импликация (4) $\Rightarrow$ (1) следует из теоремы 2.20, а импликация (1) $\Rightarrow$ (5) следует из предложения 2.17(2).

(5) $\Rightarrow$ (4). По лемме 2.19(4) для каждого $P \in \max(A_A)$ существуют такие $x \in M$ и $p \in P$, что $M(1-p) \in xA$. Поэтому для каждого $P \in \max(A_A)$ существует такой циклический подмодуль X в M , что $P \not\subseteq r(M/X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.22. Пусть A — кольцо с коммутативным умножением правых идеалов и M — ненулевой проективный правый идеал кольца A . Тогда M — мультипликативный правый идеал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.20 для каждого $P \in \max(A_A)$ правая локализация A_P существует и инвариантна справа. Пусть $N \in \text{Lat}(M_A)$ и P — такой максимальный правый идеал кольца A , что $M_P \neq 0_P$. Так как A инвариантно справа, то $MN \subseteq N$, $N \subseteq (N : M)$ и $N_P \subseteq (N : M)_P$. По теореме 2.20 достаточно доказать, что M_P — циклический правый A_P -модуль и $(N_P : M_P) \subseteq (N : M)_P$. По лемме 2.15(1) A_P — локальное кольцо. По лемме 2.15(3) ненулевой правый идеал M_P кольца A_P свободен. Если свободный правый A_P -модуль M_P циклический, то $(N_P : M_P) = N_P \subseteq (N : M)_P$.

Допустим, что M_P — нециклический свободный правый A_P -модуль с базисом $\{m_i\}_{i \in I}$ ($|I| \geq 2$). Существуют несовпадающие $m_i, m_j \in \{m_i\}$. Тогда $m_i m_j \in m_i A \cap m_j A \subseteq m_i A \cap m_j A = 0$, $m_j \in r(m_i) = 0$; получено противоречие.

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1, 2 и 3. Теорема 1 следует из предложений 1.22 и 2.22. Теорема 2 следует из теорем 2.20 и 2.21. Теорема 3 следует из теоремы 2.10.

Список литературы

1. Tuganbaev A. A. Semidistributive modules and rings. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998.
2. Anderson D. D. Multiplication ideals, multiplication rings and the ring $R(X)$ // Canad. J. Math. 1976. V. 28. P. 760–768.
3. Anderson D. D. Some remarks on multiplication ideals // Math. Japon. 1980. V. 4. № 4. P. 463–469.
4. Barnard A. Multiplication modules // J. Algebra. 1981. V. 71. № 1. P. 174–178.
5. Brewer J. W., Rutter E. A. A note on finitely generated ideals which are locally principal // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. V. 31. P. 429–432.
6. El-Bast Z. A., Smith P. F. Multiplication modules // Comm. Algebra. 1988. V. 16. № 4. P. 755–779.
7. Larsen M. D., McCarthy P. J. Multiplicative theory of ideals. New York: Academic Press, 1971.
8. Low G. M., Smith P. F. Multiplication modules and ideals // Comm. Algebra. 1990. V. 18. № 12. P. 4353–4375.
9. Naoum A. G., Al-Akwan F. H. Dense submodules of multiplication modules // Comm. Algebra. 1996. V. 24. № 2. P. 413–424.
10. Naoum A. G., Hasan M. A. K. The residual of finitely generated multiplication modules // Arch. Math. (Basel). 1986. V. 46. № 3. P. 225–230.

11. *Singh S., Al-Shaniafi Y.* Multiplication modules // *Comm. Algebra*. 2001. V. 29. № 6. P. 2597–2609.
12. *Smith P. F.* Some remarks on multiplication modules // *Arch. Math. (Basel)*. 1988. V. 50. № 3. P. 223–235.
13. *Smith P. F.* Multiplication modules and projective modules // *Period. Math. Hungar.* 1994. V. 29. № 2. P. 163–168.
14. *Smith W. W.* Projective ideals of finite type // *Canad. J. Math.* 1969. V. 21. P. 1057–1061.
15. *Tuganbaev A. A.* Distributive modules and related topics. Amsterdam: Gordon and Breach, 1999.
16. *Туганбаев А. А.* Строение дистрибутивных колец // *Матем. сб.* 2002. Т. 193. № 5. С. 113–128.
17. *Anderson D. D.* Some remarks on multiplication ideals. II // *Comm. Algebra*. 2000. V. 28. № 5. P. 2577–2583.
18. *Stenström B.* Rings of quotients: an introduction to methods of ring theory. Berlin: Springer-Verlag, 1975.
19. *Camillo V. P.* Modules whose quotients have finite Goldie dimension // *Pacific J. Math.* 1977. V. 69. № 5. P. 337–338.
20. *Kaplansky I.* Projective modules // *Ann. of Math. (2)*. 1958. V. 68. P. 372–377.

Московский энергетический институт
(технический университет)
E-mail: askar@tuganbaev.mccme.ru

Поступила в редакцию
13.08.2002