Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Горшков, Стабилизация решения двумерной системы уравнений Навье–Стокса во внешности ограниченной области посредством управления с границы, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 9, 15–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7882>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 16:00:40

УДК 517.956.45

А. В. Горшков

Стабилизация решения двумерной системы уравнений Навье–Стокса во внешности ограниченной области посредством управления с границы

Исследуется задача стабилизации решения двумерной системы Навье–Стокса, заданной во внешности ограниченной области с гладкой границей. Для заданного начального поля скоростей требуется построить управление с границы области, при котором решение стабилизируется к заданному вихревому или нулевому решению со скоростью $1/t^k$. В ходе исследования задачи затрагиваются смежные вопросы поведения спектра при относительно компактном возмущении и существования притягивающих инвариантных многообразий.

Библиография: 21 название.

Ключевые слова: система Навье–Стокса, вихрь Ламба–Озеена, стабилизация, граничное управление, инвариантные многообразия.

§ 1. Введение

В настоящей статье изучается задача стабилизации решения двумерной системы Навье–Стокса посредством граничного управления в $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, которая является внешностью некоторой ограниченной области. Для ограниченных областей задача стабилизации решения двух- и трехмерной систем Навье–Стокса была исследована А. В. Фурсиковым (см. [1]–[3]). В его работах было построено граничное управление, которое для заданного $\sigma_0 > 0$ стабилизировало решение $y(t, x)$ к некоторому стационарному решению $\hat{y}(x)$ с экспоненциальной скоростью $e^{-\sigma_0 t}$ при $t \rightarrow \infty$.

Однако случай внешности ограниченной области представляет самостоятельный интерес и имеет физическую интерпретацию обтекания тела внешним потоком.

Постановка задачи стабилизации для внешности ограниченной области отличается от аналогичной задачи для ограниченной области. Во-первых, в неограниченной области вместо экспоненциальной возможна только степенная стабилизация вида $1/t^k$, $k > 0$ (см. [4], [5]). Причем степенная скорость стабилизации существенно зависит от выбора граничного управления, т.е. не существует единого управления, обеспечивающего степенную стабилизацию для всех $k > 0$. Эта разница в скорости стабилизации обусловлена различием спектральной структуры линеаризованного производящего оператора в ограниченной и в неограниченной области.

Во-вторых, если в ограниченной области исследуется стабилизация к некоторому стационарному решению, то в настоящей работе вместо стационарной

функции мы будем стабилизировать решение к классу так называемых автомодельных функций. Автомодельная функция – это уже нестационарное решение, представимое в виде

$$y(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \hat{y}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Такого рода устойчивые нестационарные структуры встречаются в полулинейных диффузионных уравнениях и системах Навье–Стокса. Для системы уравнений Навье–Стокса Т. Галлай и К. Уэйн (см. [6], [7]) показали особую важность одного класса таких автомодельных решений, а именно вихрей Ламба–Озеена. Последние играют ключевую роль при исследовании асимптотики решения при $t \rightarrow \infty$. В частности, в [7] доказано, что со временем любое решение задачи Коши для системы Навье–Стокса будет стремиться с некоторой скоростью к определенной вихревой функции. Задача стабилизации, которая представлена в настоящей работе, заключается в том, чтобы за счет управления с границы сделать этот процесс сколь угодно быстрым. И частным случаем такой задачи является нуль-стабилизация, когда решение стремится со степенной скоростью к нулю.

Вихри Ламба–Озеена имеют гауссово распределение и моделируют поведение завихренного потока в окрестности центра вихря. Эти функции совместно с функциями так называемых точечных вихрей широко используются при численном решении задач обтекания тел методом дискретных вихрей (см. [8], [9]). Поэтому задача стабилизации в окрестности вихревого потока представляется важным объектом исследования для приложений.

Для нахождения граничного управления $u(t, x')$ в работе используется метод продолжения начальных данных, разработанный А. В. Фурсиковым для случая ограниченных областей. Мы сведем внешнюю краевую задачу к задаче Коши, продолжив начальное условие внутрь ограниченной области. Далее будет построено устойчивое многообразие M_- вблизи автомодельного решения $\hat{w}$. Данное многообразие будет обладать тем свойством, что любая функция $w_0 \in M_-$, заданная в $\mathbb{R}^2$ и находящаяся вблизи $\hat{w}$, под действием разрешающей полугруппы $S(t, w_0(\cdot))$ стремится к $\hat{w}$ с наперед заданной степенной скоростью при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, задача стабилизации сводится к задаче построения локально заданного оператора продолжения функций, определенных в Ω , на $\mathbb{R}^2$ с областью значений в M_- . Искомое граничное управление получается ограничением решения $S(t, w_0)$ на границу $\partial\Omega$. При этом получаемое управление становится управлением с обратной связью, позволяющим подавлять случайные флуктуации, возникающие при численной реализации метода. Аналогичный метод применялся автором при исследовании стабилизации параболических уравнений во внешности ограниченной области (см. [4], [5], [10]).

В основе построения инвариантного устойчивого многообразия M_- лежат исследования спектральной структуры линеаризованного оператора Озеена. И если в ограниченной области этот оператор обладает дискретным спектром, то для случая неограниченной области это уже не так. В частности, оператор Лапласа, как известно, в пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет непрерывный спектр, лежащий на полуоси $\mathbb{R}_-$.

В совместных работах Т. Галлай и К. Уэйна [6], [7] для выделения дискретной части из непрерывного спектра оператора Лапласа была предложена специальная замена переменных (t, x) на масштабирующие переменные (τ, ξ) . В переменных (τ, ξ) автомодельные решения являются уже стационарными решениями системы Навье–Стокса. При такой замене у линеаризованной в окрестности нулевого решения полугруппы вместо оператора Лапласа получается новый оператор Λ , у которого в пространстве функций $L_{2,m}(\mathbb{R}^2)$, квадратично-интегрируемых с полиномиальным весом $(1 + |\xi|^2)^{m/2}$, непрерывная часть спектра отделяется от дискретной.

В настоящей работе в качестве фазового пространства мы будем использовать $L_{2,e}(\mathbb{R}^2)$, где полиномиальная весовая функция заменяется на экспоненциальную $e^{|\xi|^2/4}$. При таком выборе фазового пространства сохраняется свойство сильной непрерывности разрешающей полугруппы, как это было справедливо для $L_{2,m}$. И при этом полностью исчезает непрерывная часть спектра.

Генератором линеаризованной разрешающей полугруппы в окрестности ненулевого вихревого решения станет новый оператор G , который можно рассматривать как Λ -компактное возмущение исходного оператора Λ . В вопросах полноты корневых функций и структуры спектра оператора G мы будем опираться на результаты работ М. В. Келдыша [11], А. С. Маркуса и В. И. Мацаева [12], [13], А. А. Шкаликова [14].

Структура работы следующая. В § 2 ставится задача о стабилизации и формулируется основная теорема. В § 3 исследуется задача Коши в пространстве $L_{2,e}$ и доказывается локальная теорема существования и единственности. В § 4 исследуются спектральные свойства генератора разрешающей полугруппы. В § 5 доказывается существование притягивающего инвариантного многообразия M_- ; решения задачи Коши с начальными данными из этого многообразия уже будут стабилизироваться к заданному решению со степеной скоростью. В § 6 строится оператор продолжения с области Ω на M_- и доказывается основная теорема.

Автор выражает глубокую признательность А. В. Фурсикову за полезные обсуждения и внимание к работе.

§ 2. Постановка задачи стабилизации

Здесь мы сформулируем задачу стабилизации решения системы Навье–Стокса к векторному полю вихря Ламба–Озеена. Пусть $\hat{v}(t, x)$ – нестационарное двумерное векторное поле, определяемое формулой

$$\hat{v}(t, x) = \frac{a}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2} (1 - e^{-|x|^2/(4(t+1))}). \quad (2.1)$$

Вихрь Ламба–Озеена определяется как ротор векторного поля $\hat{v}(t, x)$ и имеет гауссово распределение:

$$\hat{w}(t, x) = \operatorname{rot} \hat{v}(t, x) = \frac{a}{4\pi(t+1)} e^{-|x|^2/(4(t+1))}.$$

Здесь $a \in \mathbb{R}$ – интенсивность вихря, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $x^\perp = (x_2, -x_1)$, $\hat{v}(t, x) = (\hat{v}_1(t, x), \hat{v}_2(t, x))$, $\operatorname{rot} \hat{v}(t, x) = \partial \hat{v}_2 / \partial x_1 - \partial \hat{v}_1 / \partial x_2$.

Пусть $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с границей C^1 . Во внешности этой области $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B}$ рассматривается двумерная система уравнений Навье–Стокса

$$\partial_t v(t, x) - \Delta v + (v, \nabla)v = \nabla p, \quad \operatorname{div} v(t, x) = 0. \quad (2.2)$$

Двумерное векторное поле представимо парой функций: $v(t, x) = (v_1, v_2)$, $x \in \Omega$. Задано начальное распределение скоростей $v_0(\cdot)$

$$v(0, x) = v_0(x). \quad (2.3)$$

Управление решением происходит с границы области посредством неизвестной функции $u(t, x')$:

$$v(t, x') = u(t, x'), \quad x' \in \partial\Omega. \quad (2.4)$$

Требуется найти такое граничное управление $u(t, x')$, чтобы решение $(u, \nabla p)$ внешней задачи (2.2)–(2.4) удовлетворяло условию стабилизации

$$\|v(t, \cdot) - \hat{v}(t, \cdot)\|_{L_q(\Omega)} \leq \frac{C_q}{(t+1)^k}. \quad (2.5)$$

В качестве фазового пространства будем использовать L_2 с экспоненциальным весом:

$$L_{2,e}(\Omega) = L_2(\Omega, e^{|x|^2/4}) = \left\{ f \mid \|f\|_{L_{2,e}(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |f(t, x)|^2 e^{|x|^2/4} dx < \infty \right\}.$$

В дальнейшем также будут использоваться пространства $L_2(\Omega, \rho(x))$ с различными весовыми функциями $\rho(x)$.

Определим пространства решений и начальных данных:

$$\begin{aligned} V_q(\Omega) &= \{v(t, x) = (v_1, v_2) \in (L_{\infty}(0, \infty; W_q^1(\Omega))^2, \operatorname{div} v(t, x) = 0\}, \\ V_q^0(\Omega) &= \{v^0(x) = (v_1^0, v_2^0) \in (W_q^1(\Omega))^2, \operatorname{rot} v^0 \in L_{2,e}(\Omega), \operatorname{div} v^0(x) = 0\}, \\ q &> 2, \end{aligned}$$

где W_q^1 – пространство Соболева функций, которые вместе с производными первого порядка принадлежат L_q . Для граничных функций будем использовать пространства Бесова $B_q^{1-1/q}(\partial\Omega)$.

Сформулируем основную теорему о стабилизации.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\partial\Omega \in C^1$, $\hat{v}(t, x)$ – векторное поле, задаваемое формулой (2.1). Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ и произвольного $v_0 \in V_q^0(\Omega)$, $q > 2$, удовлетворяющего неравенству $\|\operatorname{rot} v_0 - \hat{w}\|_{L_{2,e}(\Omega)} < \varepsilon$, существует граничное управление

$$u = (u_1(t, x'), u_2(t, x')) \in (L_{\infty}(\mathbb{R}_+; B_q^{1-1/q}(\partial\Omega)))^2$$

такое, что решение задачи (2.2)–(2.4) $(v, \nabla p) \in V_q \times L_q(\Omega)$ удовлетворяет условию стабилизации (2.5).

Формулировка теоремы допускает нулевое векторное поле $\hat{v}(t, x)$, когда интенсивность вихря $a = 0$. В этом случае из теоремы следует возможность

нуль-стабилизации решения системы Навье–Стокса. Иными словами, для малых начальных данных найдется такое граничное управление $u(t, x')$, что решение $v(t, x)$ будет стабилизироваться к нулю со степенной скоростью:

$$\|v(t, \cdot)\|_{L_q(\Omega)} \leq \frac{C_q}{(t+1)^k}. \quad (2.6)$$

Данная теорема справедлива и в более общем случае, когда векторное поле вихря Ламба–Озеена $\widehat{v}(t, x)$ заменяется произвольным автомодельным решением уравнения (2.2), которое определяется следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Решение системы Навье–Стокса (2.2) $\widehat{v}(t, x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, называется *автомодельной функцией*, если оно представимо в виде

$$\widehat{v}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} f\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\right),$$

где $f(\cdot): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – некоторая произвольная функция из $L_{2,e}(\mathbb{R}^2)$.

Однако вихрь Ламба–Озеена является наиболее значимым примером автомодельного решения как для теоретических, так и для прикладных исследований. Т. Галлай и К. Уэйном получен важный результат об асимптотическом поведении решения задачи Коши для системы (2.2).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $v(t, x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, – решение задачи Коши (2.2) с начальным условием $v_0(x) \in L_1(\mathbb{R}^2)$. Тогда для любых $2 < q \leq \infty$ выполнено

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1/2-1/q} \|v(t, \cdot) - \widehat{v}(t, \cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^2)} = 0,$$

где в формуле (2.1) $a = \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{rot} v_0 dx$.

Доказательство см. в [7; теорема 1.2].

Для доказательства теоремы 1 мы построим оператор продолжения начального распределения скоростей $v_0(\cdot)$ внутрь области $\mathcal{B}$. Таким образом, внешняя задача Дирихле (2.2)–(2.4) в области Ω будет сведена к задаче Коши во всем пространстве $\mathbb{R}^2$. Искомое управление $u(t, x')$ будет находиться путем ограничения найденного решения задачи Коши на границу области $\partial\Omega$. При этом оператор продолжения должен быть таким, чтобы решение задачи Коши с продолженным начальным условием удовлетворяло условию стабилизации (2.5).

§ 3. Локальная теорема существования решения задачи Коши

Пусть $v(t, x)$ – решение задачи Коши (2.2) с начальными данными $v_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$. Тогда функция ротора $w(t, x) = \operatorname{rot} v(t, x)$ удовлетворяет одномерному уравнению

$$\partial_t w(t, x) - \Delta w + (v, \nabla)w = 0 \quad (3.1)$$

с начальной функцией

$$w(0, x) = w_0(x), \quad (3.2)$$

где $w_0(x) = \operatorname{rot} v_0(x)$.

Векторное поле $v(t, x)$ восстанавливается по $w(t, x)$ согласно закону Био–Савара

$$v(t, x) = \mathcal{V}w = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x - y)^\perp}{|x - y|^2} w(y) dy. \quad (3.3)$$

ЛЕММА 1. *Отображение $\mathcal{V}: W_p^s(\mathbb{R}^2) \rightarrow W_q^s(\mathbb{R}^2)$ непрерывно для любых $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 < p < 2 < q < \infty$, связанных соотношением $1/q = 1/p - 1/2$:*

$$\|v\|_{W_q^s(\mathbb{R}^2)} \leq C \|w\|_{W_p^s(\mathbb{R}^2)}.$$

Для $1 \leq p < 2 \leq \infty$, $\alpha \in (0, 1)$, $1/2 = \alpha/p + (1 - \alpha)/q$, существует такое $C > 0$, что

$$\|v\|_{L_\infty} \leq C \|w\|_{L_p}^\alpha \|w\|_{L_q}^{1-\alpha}.$$

Для $p > 1$ справедлива оценка

$$\|\nabla v\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} \leq C \|w\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}.$$

Последние два неравенства леммы, как и первое с $s = 0$, доказаны в [6]. Для положительных целых s первое неравенство напрямую следует из представления (3.3).

Сделаем замену переменных $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ на масштабирующие переменные $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$:

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{1+t}}, \quad \tau = \log(1+t), \quad (3.4)$$

и введем новую роторную функцию w^{sc} посредством формулы

$$w(t, x) = \frac{1}{1+t} w^{\text{sc}}\left(\log(1+t), \frac{x}{\sqrt{1+t}}\right). \quad (3.5)$$

Соответствующие векторные поля будут связаны соотношением

$$v(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} v^{\text{sc}}\left(\log(1+t), \frac{x}{\sqrt{1+t}}\right). \quad (3.6)$$

Тогда исходное уравнение (3.1) будет эквивалентно

$$\partial_\tau w^{\text{sc}}(\tau, \xi) = \Lambda w^{\text{sc}} - (v^{\text{sc}}, \nabla) w^{\text{sc}}, \quad (3.7)$$

где v^{sc} определяется по функции ротора w^{sc} согласно формуле (3.3), а оператор Λ имеет следующий вид:

$$\Lambda w^{\text{sc}} = \Delta w^{\text{sc}} + \frac{1}{2}(\xi \cdot \nabla) w^{\text{sc}} + w^{\text{sc}}. \quad (3.8)$$

Начальное условие (3.2) при преобразовании (3.4) останется без изменений и моменту времени $t = 0$ в новых переменных будет соответствовать $\tau = 0$:

$$w^{\text{sc}}(0, \xi) = w_0(\xi). \quad (3.9)$$

Вихрь Ламба–Озеена при преобразовании (3.4) перейдет в функцию гауссовского распределения:

$$\hat{w}^{\text{sc}} = \frac{a}{2\pi} e^{-|\xi|^2/4}. \quad (3.10)$$

Соответствующее векторное поле будет определяться формулой

$$\widehat{v}^{\text{sc}}(\xi) = \frac{a}{2\pi} \frac{\xi^\perp}{|\xi|^2} (1 - e^{-|\xi|^2/4}). \quad (3.11)$$

Функция $\widehat{w}^{\text{sc}}(\xi)$ является собственной функцией оператора Λ с нулевым собственным значением. При этом

$$(\widehat{v}^{\text{sc}}, \nabla) \widehat{w}^{\text{sc}} = 0.$$

Поэтому вихрь Ламба–Озеена в новых переменных становится стационарным решением уравнения (3.7).

Для уравнения (3.7) будет доказана локальная теорема существования, из которой будет следовать, что любая функция из $L_{2,e}$ под действием разрешающей полугруппы останется в том же пространстве.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для удобства изложения в дальнейшем для новой функции $w^{\text{sc}}(\tau, \xi)$ мы будем использовать прежнее обозначение $w(\tau, \xi)$. Для вихря Ламба–Озеена в новых переменных также сохраним обозначение $\widehat{w}(\xi)$.

ЛЕММА 2. Пусть задано начальное условие $w_0 \in L_{2,e}$. Тогда решение (3.7) с начальным условием w_0 удовлетворяет априорной оценке

$$\|w(\tau, \cdot)\|_{L_{2,e}} \leq \text{const}(\tau) \|w_0\|_{L_{2,e}}, \quad \tau > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Домножим уравнение (3.7) на $w(\tau, \xi)e^{|\xi|^2/4}$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}^2} w^2(\tau, \xi) e^{|\xi|^2/4} d\xi = (\Lambda w, w) - \int_{\mathbb{R}^2} e^{|\xi|^2/4} w(v \cdot \nabla) w d\xi.$$

После элементарных упрощений квадратичная форма $(\Lambda w, w)$ примет следующий вид:

$$(\Lambda w, w) = -\|\nabla w\|_{L_{2,e}}^2 + \|w\|_{L_{2,e}}^2.$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение, порожаемое нормой $\|\cdot\|_{L_{2,e}}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|w(\tau, \cdot)\|_{L_{2,e}}^2 + \|\nabla w\|_{L_{2,e}}^2 - \|w\|_{L_{2,e}}^2 \\ \leq \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} \|\nabla w\|_{L_{2,e}} \|w\|_{L_{2,e}} \leq \varepsilon \|\nabla w\|_{L_{2,e}}^2 + C(\varepsilon, \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}) \|w\|_{L_{2,e}}^2. \end{aligned}$$

Отсюда при $\varepsilon < 1$ получаем неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|w(\tau, \cdot)\|_{L_{2,e}}^2 \leq (C(\varepsilon, \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}) + 1) \|w\|_{L_{2,e}}^2.$$

Лемма доказана.

Сформулируем теорему о неявной функции в той форме, которая нам понадобится для доказательства разрешимости уравнения (3.7).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\Phi: \mathcal{H} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{H}$ – некоторое отображение гильбертовых пространств $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}$, удовлетворяющее следующим условиям.

1. $\Phi(\hat{w}, \hat{w}_0) = 0$, $\hat{w} \in \mathcal{H}$, $\hat{w}_0 \in \mathcal{L}$.
2. Производные Фреше Φ'_w , Φ'_{w_0} равномерно ограничены в некоторой окрестности пары функций $(\hat{w}, \hat{w}_0)$.
3. $\Phi'_w(\hat{w}, \hat{w}_0)$ обратим.
4. Производные Φ'_w , Φ'_{w_0} удовлетворяют условию Липшица в той же окрестности:

$$\begin{aligned} & \|\Phi'_w(w^1, w_0^1) - \Phi'_w(w^2, w_0^2)\|_{\mathcal{H}} + \|\Phi'_{w_0}(w^1, w_0^1) - \Phi'_{w_0}(w^2, w_0^2)\|_{\mathcal{H}} \\ & \leq C\|w^1 - w^2\|_{\mathcal{H}} + \|w_0^1 - w_0^2\|_{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение $\Phi(w, w_0) = 0$ однозначно разрешимо относительно w в некоторой области

$$\mathcal{U}_\delta = \{(w, w_0) \in \mathcal{H} \times \mathcal{L} : \|w - \hat{w}\|_{\mathcal{H}} + \|w_0 - \hat{w}_0\|_{\mathcal{L}} < \delta\}.$$

Решение w непрерывно зависит от w_0 и отображение $S: w_0 \rightarrow w$ дифференцируемо по Фреше. Производная S'_{w_0} равномерно ограничена по w_0 и удовлетворяет условию Липшица.

Теперь мы можем доказать локальную теорему существования и единственности решения задачи Коши для модифицированного уравнения (3.7).

ТЕОРЕМА 4. Для произвольного $T > 0$ найдется такой достаточно малый параметр $\varepsilon > 0$, что для $w_0(\xi) \in L_{2,e}$, $\|w_0 - \hat{w}\| < \varepsilon$, на интервале $(0, T)$ существует единственное решение $w \in C((0, T); L_{2,e})$ уравнения (3.7) с начальным условием w_0 . Более того, соответствующая разрешающая полугруппа

$$S(\tau, w(\cdot)): L_{2,e} \rightarrow L_{2,e}, \quad S(\tau, w_0(\cdot)) = w(\tau, \xi),$$

при фиксированном τ является дифференцируемой по Фреше по w . Производная $S'_w(\tau, w(\cdot))$ удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой $C > 0$

$$\|S'_w(\tau, w_1(\cdot)) - S'_w(\tau, w_2(\cdot))\| \leq C\|w_1(\cdot) - w_2(\cdot)\|_{L_{2,e}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем считать, что $\hat{w} = 0$, поскольку заменой $z(\tau, \xi) = w(\tau, \xi) - \hat{w}(\xi)$ доказательство может быть перенесено на случай произвольного $\hat{w}$. Положим $\mathcal{H} = L_2(0, T; L_{2,e})$, $\mathcal{L} = L_{2,e}$.

Рассмотрим следующее уравнение в вариациях:

$$\partial_\tau w = \Lambda w + h, \quad h \in \mathcal{H}, \quad (3.12)$$

с начальным условием

$$w(0, \xi) = w_0(\xi).$$

Пусть $Q: \mathcal{H} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{H}$ – линейный оператор, который сопоставляет паре (h, w_0) решение линейного уравнения в вариациях с правой частью h и начальным условием w_0 . Разрешимость линейной задачи в указанных пространствах легко доказывается при помощи оценок, аналогичных тем, что мы вывели выше. Поэтому оператор Q является непрерывным.

Уравнение (3.7) с начальным условием (3.9) эквивалентно

$$w = Q(0, w_0) + Q((v, \nabla)w, 0). \quad (3.13)$$

Введем оператор

$$\Phi(w, w_0) = Q(0, w_0) + Q((v, \nabla)w, 0) - w.$$

ЛЕММА 3. *Отображение $\Phi(w, w_0)$ дифференцируемо по Фреше в нуле в пространстве $\mathcal{H} \times \mathcal{L}$, и его частные производные удовлетворяют условию Липшица:*

$$\begin{aligned} & \|\Phi'_w(w^1, w_0^1) - \Phi'_w(w^2, w_0^2)\|^2 + \|\Phi'_{w_0}(w^1, w_0^1) - \Phi'_{w_0}(w^2, w_0^2)\|^2 \\ & \leq C\|w^1 - w^2\|_{\mathcal{H}}^2 + \|w_0^1 - w_0^2\|_{\mathcal{L}}^2. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что частная производная Φ'_{w_0} тем более удовлетворяет условию Липшица, коль скоро Φ линейна по w_0 . Поэтому утверждение теоремы достаточно доказать только для $Q((v, \nabla)w, 0)$.

Дифференцируемость по Фреше $Q((v, \nabla)w, 0)$ достаточно доказать для случая $w = 0$. Покажем, что решение w линейного уравнения (3.12) с правой частью $(\tilde{v}, \nabla)\tilde{w}$ есть $o(\|\tilde{w}\|_{L_2(0,T;L_{2,e})})$. Домножим (3.12) на $w(\tau, \xi)e^{|\xi|^2/4}$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}^2$. Повторяя выкладки, как при доказательстве леммы 2, получим неравенство

$$\|w\|_{L_{2,e}} \leq C\|\tilde{v}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\|\tilde{w}\|_{L_{2,e}} \leq C\|\tilde{w}\|_{L_{2,e}}^2,$$

откуда получаем $Q'_w(0, 0) = 0$. Тогда $\Phi'_w(0, 0) = -I$ и, следовательно, оператор обратим.

Докажем выполнение условия Липшица для производных. Пусть $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, W(\tau, \xi)$ – произвольные функции ротора из $L_2(0, T; L_{2,e})$, а $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, V(\tau, \xi)$ – соответствующие векторные поля. Тогда опять по аналогии с доказательством леммы 2 будем иметь оценку

$$\begin{aligned} & \|[Q'_w((\tilde{v}_1, \nabla)\tilde{w}_1) - Q'_w((\tilde{v}_2, \nabla)\tilde{w}_2)]W(\tau, \xi)\| \\ & = \|Q((\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2, \nabla)W + (V, \nabla)(\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2))\| \\ & \leq C\|\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2\|_{L_2(0,T;L_{2,e})} \|W\|_{L_2(0,T;L_{2,e})}. \end{aligned}$$

Таким образом, Φ'_w, Φ'_{w_0} являются липшицевыми операторами. Лемма доказана.

Согласно лемме 3 к уравнению (3.13) применима теорема о неявной функции, из которой следуют все утверждения доказываемой теоремы 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Хотя для двумерного уравнения Навье–Стокса справедливы нелокальные теоремы существования и единственности (см. [15]), мы ограничились только локальным случаем. Это связано с тем, что дальнейшие построения инвариантных многообразий (в § 5) будут возможны только в малой окрестности стационарного решения $\hat{w}(\xi)$. Также отметим, что решение, полученное в теореме 4, является локальным не только по фазовой переменной, но и по времени T . Но поскольку в следующих параграфах мы будем решать задачу стабилизации, в которой величина $\|w(\tau, \cdot) - \hat{w}\|$ будет стремиться к нулю, то решение задачи Коши уже можно будет продолжить на всю временную ось $\mathbb{R}_+$.

§ 4. Спектральные свойства возмущенного оператора

Пусть $\widehat{w}(\xi)$, $\widehat{v}(\xi)$ – соответственно ротор и поле вихря Ламба–Озеена, определяемые формулами (3.10), (3.11), а $z(\tau, \xi)$ – достаточно близкое к $\widehat{w}(\xi)$ решение уравнения (3.7). Выделим главную линейную часть этого уравнения в окрестности $\widehat{w}(\xi)$.

Пусть $w(\tau, \xi) = z(\tau, \xi) - \widehat{w}(\xi)$. Подставим $z(\tau, \xi) = \widehat{w}(\xi) + w(\tau, \xi)$ в (3.7):

$$\frac{\partial w(\tau, \xi)}{\partial \tau} = \Lambda w + D(\widehat{w}(\xi) + w(\tau, \xi)).$$

Здесь $D(w)$ – нелинейный член уравнения Навье–Стокса в роторном представлении:

$$D(w) = (v, \nabla)w, \quad v = \mathcal{V}w.$$

Напомним, что оператор $\mathcal{V}$ восстанавливает векторное поле по заданному ротору согласно закону Био–Савара (3.3). После линеаризации нелинейного члена $D(\widehat{w} + w)$ в окрестности $w = 0$ получим следующее уравнение, эквивалентное (3.7):

$$\frac{\partial w(\tau, \xi)}{\partial \tau} = Gw + F(\widehat{w}, w), \quad (4.1)$$

где

$$G = \Lambda + B, \quad Bw = (\widehat{v}, \nabla)w + (\mathcal{V}w, \nabla)\widehat{w}, \quad F(\widehat{w}, w) = D(\widehat{w} + w) - Bw.$$

Оператор $G = \Lambda + B$ является главной линейной частью уравнения (4.1) в окрестности $\widehat{w}(\xi)$, при этом выполняются следующие равенства:

$$F(\widehat{w}, w)|_{w=0} = F'_w(\widehat{w}, w)|_{w=0}.$$

Предметом исследования этого параграфа будет служить спектральная структура оператора G в пространстве $L_{2,e}$. Как мы увидим ниже, оператор G будет секториальным оператором. Этот оператор будет являться Λ -компактным возмущением исходного оператора Λ .

Нас будут интересовать вопросы полноты собственных функций и асимптотическое распределение собственных значений возмущенного оператора G .

ЛЕММА 4. *Спектр оператора Λ является дискретным и состоит из неположительных полуцелых чисел:*

$$\sigma(\Lambda) = \left\{ -\frac{k}{2}, k = 0, 1, 2, \dots \right\}.$$

Собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\lambda_k = -k/2$, имеет размерность $k + 1$. Собственными функциями Λ являются функции Эрмита $\psi_\alpha(\xi)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, которые образуют ортонормированный базис в $L_{2,e}$:

$$\psi_\alpha(\xi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \frac{2^{|\alpha|}}{\alpha!}} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \xi^\alpha} e^{-|\xi|^2/4}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 = k, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2!.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе Т. Галлай и К. Уэйна [6] спектр оператора Λ был исследован в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2, (1 + |\xi|^2)^{m/2})$. В частности, было показано, что в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 1/2 - m/2$ спектр оператора Λ состоит только из полужелых чисел $k/2$, $k = 0, 1, 2, \dots$. А полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda \leq 1/2 - m/2$ целиком входит в непрерывную часть спектра Λ .

Собственным значениям точек дискретного спектра как раз отвечают функции Эрмита, которые также являются собственными значениями оператора в пространстве $L_{2,e}$.

Покажем, что любое $\lambda \neq -k/2$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, принадлежит резольвентному множеству $\rho(\Lambda)$. Действительно, при любом $m > 1 - 2\operatorname{Re} \lambda$ оператор $\Lambda - \lambda I$ будет обратим в $L_2(\mathbb{R}^2, (1 + |\xi|^2)^{m/2})$. Поскольку $L_{2,e}$ непрерывно вложено в $L_2(\mathbb{R}^2, (1 + |\xi|^2)^{m/2})$, то в $L_{2,e}$ определен обратный оператор $(\Lambda - \lambda I)^{-1}$. Но, с другой стороны, Λ является генератором сильно непрерывной полугруппы в $L_{2,e}$. Следовательно, резольвента $R(\lambda, \Lambda) = (\Lambda - \lambda I)^{-1}$ является ограниченным оператором (см. [16]). Лемма доказана.

Пусть

$$S_{a,\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg(\lambda - a) - \pi| < \varphi\}, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

– сектор с раствором угла 2φ и вершиной в точке $a \in \mathbb{R}$, а $\overline{S_{a,\varphi}}$ – его дополнение. При $a = 0$ сектор $S_{0,\varphi}$ будем обозначать через S_φ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Оператор A называется *секториальным*, если его спектр заключен в секторе $S_{a,\varphi}$, $a \in \mathbb{R}$, $0 < \varphi < \pi/2$, и для его резольвенты выполняется неравенство с некоторым $M > 0$

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для резольвенты $R(\Lambda, \lambda)$ при $\lambda \in \overline{S_\varphi}$ с произвольным $0 < \varphi < \pi/2$ справедливо неравенство

$$\|R(\Lambda, \lambda)\|_{L_{2,e}} \leq \frac{1}{\sin \varphi |\lambda|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данная оценка следует из неравенства, справедливого для самосопряженных и нормальных операторов,

$$\|R(\Lambda, \lambda)\|_{L_{2,e}} \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(\Lambda))} \leq \frac{1}{\sin \varphi |\lambda|}.$$

Из последней оценки следует секториальность оператора Λ . При этом функции Эрмита являются базисом Фишера–Рисса в пространстве $L_{2,e}$. В частности, разложение резольвенты $R(\Lambda, \lambda)$ по этому базису дается сходящимся рядом:

$$R(\Lambda, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{(\psi_\alpha, \cdot)}{\lambda - k/2} \psi_\alpha.$$

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. *Оператор Λ является секториальным оператором с дискретным спектром, лежащим на прямой $\mathbb{R}_-$. При этом система собственных функций ψ_α полна и образует ортонормированный базис Фишера–Рисса в пространстве $L_{2,e}$.*

ЛЕММА 5. *Для $\lambda \in \rho(\Lambda)$ оператор*

$$R(\Lambda, \lambda) = (\Lambda - \lambda I)^{-1}: L_{2,e} \rightarrow H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2) \cap H^1(\mathbb{R}^2, e^{|\xi|^2/4})$$

ограничен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Резольвента удовлетворяет следующему тождеству:

$$R(\lambda, \Lambda) - R(\zeta, \Lambda) = (\lambda - \zeta)R(\lambda, \Lambda)R(\zeta, \Lambda).$$

Из этого тождества следует, что лемму достаточно доказать хотя бы для одного $\lambda \in \rho(\Lambda)$. Возьмем достаточно большое вещественное $\lambda > 0$ и рассмотрим следующее уравнение с правой частью $f(\xi) \in L_{2,e}$:

$$(\Lambda - \lambda I)w(\xi) = f(\xi). \quad (4.2)$$

Ограниченность нормы решения в $H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2)$ следует из свойств решений эллиптического оператора (см. [17]). Домножим это уравнение на $e^{|\xi|^2/4}w(\xi)$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}^2$. Тогда будем иметь

$$-\|\nabla w\|_{L_{2,e}}^2 + (1 - \lambda)\|w\|_{L_{2,e}}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} f w e^{|\xi|^2/4} d\xi.$$

Поскольку резольвента $R(\Lambda, \lambda)$ ограничена в $L_{2,e}$, то $\|w\|_{L_{2,e}} \leq C\|f\|_{L_{2,e}}$. Тогда из последнего тождества получим следующее неравенство с некоторой константой $C = C(\lambda) > 0$:

$$\|\nabla w\|_{L_{2,e}}^2 + \|w\|_{L_{2,e}}^2 \leq C\|f\|_{L_{2,e}}^2. \quad (4.3)$$

Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Оператор B называется *компактным относительно оператора Λ* , если при некотором λ оператор $BR(\lambda, \Lambda)$ компактен.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из резольвентного тождества следует, что данное определение является корректным и не зависит от выбора λ .

ТЕОРЕМА 6. *Оператор возмущения B компактен относительно оператора Λ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливо равенство

$$BR(\Lambda, \lambda) = (\widehat{v}, \nabla)R(\Lambda, \lambda) + (\mathcal{K}, \nabla)\widehat{w},$$

где $\mathcal{K}$ – оператор, являющийся композицией оператора $\mathcal{V}$, определенного формулой (3.3), и $R(\Lambda, \lambda)$:

$$\mathcal{K}f(\cdot) = \mathcal{V}Rf(\cdot) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} R(\Lambda, \lambda)f(y) dy.$$

Возьмем ограниченную слабо сходящуюся последовательность $\{f_n(\cdot)\}_{n=1}^\infty$. Докажем, что можно выбрать фундаментальную подпоследовательность из последовательности $\{BR(\Lambda, \lambda)f_n(\cdot)\}_{n=1}^\infty$.

Сначала докажем компактность оператора $(\widehat{v}, \nabla)R(\Lambda, \lambda)$. Оператор $\nabla R(\Lambda, \lambda)$ повышает гладкость в пространствах Соболева на единицу, а умножение на функцию $\widehat{v}$, которая на бесконечности убывает как $1/|\xi|$, повышает класс суммируемости. Поэтому найдется такая константа $C > 0$, что для всех $k, l \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |(\widehat{v}, \nabla)R(\Lambda, \lambda)(f_k - f_l)|^2 (1 + |\xi|) e^{|\xi|^2/4} d\xi \leq C.$$

Пусть $B_M = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi| \leq M\}$ – круг радиуса M , а $\overline{B_M}$ – его дополнение. Рассмотрим произвольную сходящуюся к нулю последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $\varepsilon_n > 0$. Для заданного $\varepsilon_1 > 0$ найдется такой достаточно большой радиус M , что

$$\begin{aligned} & \int_{\overline{B_M}} |(\widehat{v}, \nabla)R(\zeta, \Lambda)(f_k - f_l)|^2 e^{|\xi|^2/4} d\xi \\ &= \int_{\overline{B_M}} |(\widehat{v}, \nabla)R(\zeta, \Lambda)(f_k - f_l)|^2 e^{|\xi|^2/4} (1 + |\xi|) \frac{1}{1 + |\xi|} d\xi \\ &\leq \frac{\|(\widehat{v}, \nabla)R(f_k - f_l)\|_{L_2(\mathbb{R}^2, (1+|\xi|)e^{|\xi|^2/4})}^2}{1 + M} \leq \frac{C}{1 + M} \leq \frac{\varepsilon_1}{2}. \end{aligned}$$

Из оценок решений эллиптического уравнения (4.2) следует равномерная по $M > 0$ ограниченность $\{(\widehat{v}, \nabla)Rf_n(\xi)\}_{n=1}^\infty$ в пространстве Соболева $H^2(B_M)$. Поэтому согласно теореме Реллиха–Гординга о компактности вложений пространств Соболева (см. [18; гл. X, § 3]) из последовательности $\{(\widehat{v}, \nabla)Rf_n(\xi)\}_{n=1}^\infty$ можно выделить подпоследовательность, которая фундаментальна в $L^2(B_M)$. Тогда найдется подпоследовательность $\{(\widehat{v}, \nabla)Rf_{n_s^1}\}_{s=1}^\infty$, удовлетворяющая неравенству

$$\|(\widehat{v}, \nabla)R(\Lambda, \lambda)(f_{n_k^1} - f_{n_l^1})\|_{L_2(B_M)}^2 \leq e^{-M^2/4} \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

В итоге для последовательности $\{f_{n_1^1}, f_{n_2^1}, f_{n_3^1}, \dots\}$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|(\widehat{v}, \nabla)R(\Lambda, \lambda)(f_{n_k^1} - f_{n_l^1})\|_{L_{2,e}}^2 &= \int_{\overline{B_M}} |(\widehat{v}, \nabla)R(\Lambda, \lambda)(f_{n_k^1} - f_{n_l^1})|^2 e^{|\xi|^2/4} d\xi \\ &+ \int_{B_M} |(\widehat{v}, \nabla)R(\Lambda, \lambda)(f_{n_k^1} - f_{n_l^1})|^2 e^{|\xi|^2/4} d\xi \leq \varepsilon_1, \quad k, l \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Из полученной последовательности мы выбираем подпоследовательность $\{f_{n_s^2}\}_{s=1}^\infty$, удовлетворяющую $\|(\widehat{v}, \nabla)R(f_{n_k^2} - f_{n_l^2})\|_{L_{2,e}}^2 \leq \varepsilon_2$, $k, l \in \mathbb{N}$. Повторяя эту процедуру для каждого ε_i , $i = 3, 4, 5, \dots$, получим последовательность $\{f_{n_s^i}\}_{i,s=1}^\infty$, для которой выполнено $\|(\widehat{v}, \nabla)R(f_{n_k^i} - f_{n_l^i})\|_{L_{2,e}}^2 \leq \varepsilon_i$, $k, l, i \in \mathbb{N}$. Тогда диагональная подпоследовательность $\{(\widehat{v}, \nabla)R(f_{n_i^i})\}_{i=1}^\infty$ будет фундаментальна в $L_{2,e}$.

Теперь перейдем к оператору $(\mathcal{H}, \nabla)\widehat{w}$. Оператор $R(\Lambda, \lambda)$ непрерывно отображает $L_{2,e}$ в $H^1(\mathbb{R}^2, e^{|\xi|^2/4})$. Последнее пространство непрерывно вкладывается в $W_p^1(\mathbb{R}^2)$ с произвольным $p \in (1, 2)$. Согласно лемме 1 $\mathcal{V}$ непрерывно отображает $W_p^1(\mathbb{R}^2)$ в $W_q^1(\mathbb{R}^2)$, $q > 2$. Так как вложение $W_q^1(B_M) \subset L_2(B_M)$ вполне

непрерывно для любого круга B_M , то компактность оператора $\mathcal{K}$, умноженного на экспоненциально убывающую вектор-функцию $\nabla \hat{w}$, доказывается аналогичным образом. Теорема доказана.

Теперь перейдем к формулировке основной теоремы для возмущенного оператора $G = \Lambda + B$.

ТЕОРЕМА 7. *Справедливы следующие утверждения относительно возмущенного оператора $G = \Lambda + B$ в пространстве $L_{2,e}$.*

1. *Спектр оператора G дискретен и состоит только из собственных значений конечной кратности с единственной точкой накопления на бесконечности. Система корневых функций оператора G полна.*
2. *Оператор G является секториальным оператором. Для произвольного $0 < \varphi < \pi/2$ в $\overline{S_\varphi}$ содержится лишь конечное число собственных значений оператора G . Причем для любых $\varphi, \delta > 0$ найдется такое $M_{\varphi,\delta} > 0$, что для $\lambda \in \overline{S_\varphi}$, $|\lambda| > M_{\varphi,\delta}$, для резольвенты $R(G, \lambda)$ справедлива оценка*

$$\|R(G, \lambda)\|_{L_{2,e}} < \frac{1 + \delta}{\sin \varphi |\lambda|}.$$

3. *Размерность $N(r, G)$ корневого подпространства $E_{\operatorname{Re} \lambda > -r}$, состоящего из корневых функций оператора G с собственными значениями $\{\lambda_k, \operatorname{Re} \lambda_k > -r\}$, асимптотически растет как $2r^2$:*

$$N(r, G) = 2r^2 + o(r^2), \quad r \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda \in \rho(\Lambda)$. Тогда справедливо соотношение

$$G - \lambda I = (I + BR(\Lambda, \lambda))(\Lambda - \lambda I).$$

Оператор $BR(\Lambda, \lambda)$ компактен и $I + BR(\Lambda, \lambda)$ является голоморфной оператор-функцией. Тогда из теоремы Гохберга (см. [19; гл. 1, теорема 5.1]) о нулях голоморфной оператор-функции следует, что за исключением дискретного множества точек оператор $I + BR(\Lambda, \lambda)$, а следовательно, и $G - \lambda I$ обратим.

Далее, спектр невозмущенного оператора Λ лежит на луче $\mathbb{R}_-$ и система его собственных функций является базисом пространства $L_{2,e}$. Тогда утверждения о полноте собственных функций, как и п. 2 теоремы о распределении собственных чисел возмущенного оператора, являются следствиями из теоремы Келдыша (см. [12; гл. 1, следствие 3.7, теорема 4.3]).

Докажем оценку для резольвенты оператора G . Представим $R(\lambda, G)$ в виде

$$R(\lambda, G) = R(\lambda, \Lambda)(I + BR(\Lambda, \lambda))^{-1},$$

где оператор BR разлагается в ряд:

$$BR(\Lambda, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{(\psi_\alpha, \cdot)}{\lambda - k/2} B\psi_\alpha.$$

Из данного представления нетрудно вывести оценку

$$\|BR(\Lambda, \lambda)\| \leq \frac{C}{\|\lambda\|}.$$

Тогда для заданного $\delta > 0$ найдется такое $M_{\varphi, \delta} > 0$, что для $\lambda \in \overline{S_\varphi}$, $|\lambda| > M_{\varphi, \delta}$, будет выполнено $\|BR(\Lambda, \lambda)\| < \delta/2$ и

$$\|(I + BR(\Lambda, \lambda))^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|BR(\Lambda, \lambda)\|} < \frac{1}{1 - \delta/2} < 1 + \delta.$$

Используя оценку для резольвенты $R(\lambda, \Lambda)$, получим требуемое неравенство для $R(\lambda, G)$.

Перейдем к доказательству п. 3 теоремы и найдем асимптотику функции распределения собственных значений. Пусть $N_+(r, \varphi, G)$ – число собственных значений с учетом кратности оператора G в секторе $S_\varphi^r = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg \lambda - \pi| \leq \varphi, |\lambda| < r\}$. Для оператора Λ функция $N_+(r, 0, \Lambda)$ находится из явного вида спектра:

$$N_+(r, 0, \Lambda) = 2r^2 + 3r + O(1).$$

Тогда п. 3 теоремы является следствием следующего утверждения, доказанного в [12; гл. 1, теорема 8.4].

ТЕОРЕМА 8. Пусть $G = \Lambda + B$, резольвента Λ компактна, B компактен относительно Λ и выполнено условие

$$\lim_{r \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0} \frac{N_+(r(1 + \delta), 0, \Lambda)}{N_+(r, 0, \Lambda)} = 1.$$

Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_+(r, \varphi, G)}{N_+(r, 0, \Lambda)} = 1.$$

§ 5. Инвариантные подпространства и многообразия

В этом параграфе на основе спектра оператора G будут построены инвариантные многообразия для уравнения (4.1). Мы воспользуемся рядом утверждений, полученных А. В. Фурсиковым в [3] при исследовании стабилизации квазилинейного параболического уравнения в ограниченной области, которые применим к нашему случаю неограниченной области.

Пусть $\lambda_k \in \sigma(G)$ – произвольное собственное значение оператора G . Разложим резольвенту R в ряд Лорана в окрестности λ_k :

$$\begin{aligned} R(\lambda, G) &= \sum_{l=-m_k}^{\infty} (\lambda - \lambda_k)^l R_l(\lambda_k), \\ R_l(\lambda_k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_k|=\varepsilon} (\lambda - \lambda_k)^{-l-1} R(\lambda, G) d\lambda. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Данное разложение имеет конечную главную часть, причем оператор R_{-1} есть конечномерный проектор Рисса: $(R_{-1})^2 = R_{-1}$ (см. [3], [20]).

Как известно, сопряженный оператор G^* также является секториальным, спектр которого симметрично отражается относительно вещественной оси. Резольвента $R(\lambda, G^*)$ в окрестности точки $\overline{\lambda_k}$ имеет следующее разложение:

$$R(\lambda, G^*) = \sum_{l=-m_k}^{\infty} (\lambda - \overline{\lambda_k})^l R_l^*(\lambda_k),$$

причем операторы $R_l^*(\lambda_k)$ являются сопряженными к $R_l(\lambda_k)$.

Обозначим через $\epsilon_1^i(k), \epsilon_2^i(k), \dots, \epsilon_{m_k}^i(k)$ базис из собственных и корневых функций оператора G^* , отвечающих собственному значению $\bar{\lambda}_k$. Кратность $\bar{\lambda}_k$ совпадает с кратностью $L_k = m_1^k + \dots + m_N^k$ собственного значения λ_k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что система функций $\{\phi_j^i(k), \epsilon_j^i(k)\}$ *биортогональна*, если выполняется

$$(\phi_j^i(k), \epsilon_{j'}^{i'}(k')) = \delta_{i,j,k}^{i',j',k'},$$

где $\delta_{i,j,k}^{i',j',k'}$ – символ Кронекера, который равен единице при $i = i', j = j', k = k'$, а в остальных случаях – нулю.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Найдется биортогональная система $\{\phi_j^i(k), \epsilon_j^i(k)\} \in E_{\lambda_k} \times E_{\lambda_k}^*$, в которой оператор R_{-1} записывается в следующем виде:*

$$R_{-1}(\lambda_k) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i^k} (\cdot, \epsilon_j^i(k)) \phi_j^i(k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $(G - \lambda_k I)^m R_{-1} = 0$ и $\text{Im } R_{-1} \subset E_{\lambda_k}$, то найдется система $\{e^{i,j}\}$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, m_i^k$, такая, что

$$R_{-1}w = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i^k} (w, R_{-1}^* e^{i,j}) \phi_j^i(k).$$

Обозначим $\epsilon_j^i(k) = R_{-1}^* e^{i,j}(\lambda_k)$. Очевидно, что $\epsilon_j^i(k) \in E_{\lambda_k}^*$. Поскольку функции $\{\phi_j^i(k)\}$ линейно независимы, то $\{\epsilon_j^i(k)\}$ также линейно независимы в силу условия биортогональности, которое следует из свойства проектора $R_{-1} \phi_j^i(k) = \phi_j^i(k)$. Предложение доказано.

Возьмем произвольный раствор угла $\varphi > 0$. Поскольку вне сектора S_φ предполагается лишь конечное число собственных значений оператора G , то будем считать, что весь спектр лежит внутри множества $\Sigma = S_\varphi \cup B_M$, где B_M есть круг достаточно большого радиуса M с центром в нуле. Пусть $\Gamma = \partial\Sigma$ – граница области Σ . Так как $G = \Lambda + B$ есть секториальный оператор, то $e^{G\tau}$ можно представить в виде интеграла Данфорда–Тейлора (см. [20]):

$$e^{G\tau} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\lambda, G) e^{\lambda\tau} d\lambda.$$

Зафиксируем $\sigma_0 > M$ в предположении, что прямая $\text{Re } \lambda = -\sigma_0$ свободна от собственных значений оператора G . Пусть $\Sigma_0 = \{\lambda \in \Sigma \mid \text{Re } \lambda < -\sigma_0\}$, $\Sigma_1 = \{\lambda \in \Sigma \mid \text{Re } \lambda > -\sigma_0\}$ – две подобласти Σ , получающиеся делением Σ прямой $\text{Re } \lambda = -\sigma_0$. Границы областей Σ_0, Σ_1 обозначим через Γ_0, Γ_1 соответственно. Тогда интеграл $e^{G\tau}$ представим следующим выражением:

$$e^{G\tau} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} R(\lambda, G) e^{\lambda\tau} d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} R(\lambda, G) e^{\lambda\tau} d\lambda. \quad (5.2)$$

ЛЕММА 6. *С некоторой зависящей от φ константой $C_\varphi > 0$ выполняется неравенство*

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} R(\lambda, G) e^{\lambda\tau} d\lambda \right\|_{L_{2,e}} \leq C_\varphi e^{-\sigma_0\tau}. \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\lambda \in \Gamma_0 \cap \{\operatorname{Re} \lambda < -\sigma_0\}$ справедливо равенство $|e^{\lambda\tau}| = e^{-|\lambda| \cos \varphi \tau}$, а при $\lambda \in \Gamma_0 \cap \{\operatorname{Re} \lambda = -\sigma_0\}$ выполняется $|e^{\lambda\tau}| = e^{-\sigma_0\tau}$. Тогда, пользуясь оценкой для резольвенты $R(\lambda, G)$ из теоремы 7 с некоторым $\delta > 0$, получаем

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} R(\lambda, G) e^{\lambda\tau} d\lambda \right\|_{L_{2,e}} \leq \frac{(1+\delta)e^{-\sigma_0\tau}}{\sin \varphi} \int_{\Gamma_0} \frac{e^{-(|\lambda| \cos \arg \lambda - \sigma_0)\tau}}{|\lambda|} d\lambda \leq C e^{-\sigma_0\tau}.$$

Пусть $E_{\operatorname{Re} \lambda > -\sigma_0}^*$ состоит из всех собственных и присоединенных векторов G^* с собственными значениями в $\operatorname{Re} \lambda > -\sigma_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Предположим, что $w \perp E_{\operatorname{Re} \lambda > -\sigma_0}^*$. Тогда для разрешающей полугруппы $e^{G\tau}$ с некоторой $C_1 > 0$, не зависящей от w , выполняется оценка*

$$\|e^{G\tau} w\| \leq C_1 e^{-\sigma_0\tau}, \quad \tau > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первый интеграл по контуру Γ_0 в правой части (5.2) оценивается леммой 6. Второй интеграл по контуру Γ_1 находим с помощью вычетов:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} R(\lambda, G) e^{\lambda\tau} d\lambda = \sum_{\operatorname{Re} \lambda_k > -\sigma_0} e^{\lambda_k\tau} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{\tau^{j-1}}{(j-1)!} R_{-j}(\lambda_j) = 0,$$

так как согласно теореме 9 имеем $R_{-j}(-\lambda_j) = 0$. Предложение доказано.

Полученные свойства разрешающей полугруппы для возмущенного оператора G позволяют теперь построить инвариантные относительно этой полугруппы подпространства и инвариантные многообразия для нелинейного уравнения (4.1) в пространстве $L_{2,e}$.

Чтобы построить локальные инвариантные многообразия, мы вместо (4.1) рассмотрим модифицированное уравнение

$$\frac{\partial w(\tau, \xi)}{\partial \tau} = Gw + F_\varepsilon(\widehat{w}, w) \quad (5.4)$$

с измененной нелинейной частью

$$F_\varepsilon(\widehat{w}, w) = D_\varepsilon(\widehat{w} + w) - Bw, \quad D_\varepsilon(w) = (v, \nabla)w \cdot \chi_\varepsilon(\|w\|).$$

Здесь χ_ε – гладкая срезающая функция, равная единице на интервале $(0, \varepsilon)$ и нулю на $(2\varepsilon, \infty)$; $v = \mathcal{V}w$ – векторное поле, восстанавливаемое по роторной функции w . При малых по норме w оператор $F_\varepsilon(\widehat{w}, w)$ совпадает с первоначальным оператором $F(\widehat{w}, w)$. Поэтому если решения уравнения (4.1) с нелинейными членами F , F_ε остаются малы по норме, то они совпадают друг с другом.

Разрешающая полугруппа для уравнения (5.4) в окрестности $\widehat{w}$ может быть представлена как

$$S_\varepsilon(\tau, w + \widehat{w}) = \widehat{w} + e^{G\tau}w + \Phi^\varepsilon(\tau, w), \quad (5.5)$$

где $\Phi^\varepsilon(\tau, w)$ – некоторый нелинейный оператор. Существование данной полугруппы дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 10. *Для произвольного $T > 0$ найдется такое достаточно малое $\delta_0 > 0$, что для произвольной функции $w_0(\xi) \in L_{2,\varepsilon}$, $\|w_0 - \hat{w}\| < \delta_0$, на интервале $(0, T)$ существует единственное решение $w^\varepsilon \in C(0, T; L_{2,\varepsilon})$ уравнения (5.4) с начальным условием $w^\varepsilon(0, \cdot) = w_0(\cdot)$. Соответствующая разрешающая полугруппа*

$$S_\varepsilon(\tau, w(\cdot)) : L_{2,\varepsilon} \rightarrow L_{2,\varepsilon}, \quad S_\varepsilon(\tau, w_0(\cdot)) = w^\varepsilon(\tau, \xi),$$

является гладкой полугруппой класса C^1 , причем ее производная удовлетворяет условию Липшица. При этом функция $\Phi^\varepsilon(\tau, w)$ при любом фиксированном τ также является отображением класса C^1 с липшицевой производной, удовлетворяющей

$$\Phi^\varepsilon(\tau, 0) = \Phi'_w{}^\varepsilon(\tau, 0) = 0, \quad (5.6)$$

$$\|\Phi'_w{}^\varepsilon(\tau, w)\| \leq \gamma, \quad (5.7)$$

где $\gamma \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разрешимость уравнения (5.4), дифференцируемость по Фреше, как и выполнение условия Липшица, доказываются в точности так же, как при доказательстве теоремы 4. При этом все оценки, доказанные для уравнения (4.1), остаются справедливыми и для нашего уравнения. Очевидно, что $\hat{w} + e^{G\tau}w$ является главной линейной частью оператора $S_\varepsilon(\tau, w + \hat{w})$, откуда следует (5.6).

Докажем оценку (5.7). Возьмем произвольное $\gamma > 0$. Производная $\Phi'_w{}^\varepsilon(\tau, w)$ непрерывна по w и равна нулю при $w = 0$. Тогда найдется такое $\rho > 0$, что при $\|w\| < \rho$ будет выполнено $\|\Phi'_w{}^\varepsilon(\tau, w)\| < \gamma$ равномерно по ε . В то же время найдется настолько малый параметр $\varepsilon > 0$, что при $\|w\| \geq \rho$ полугруппа $S_\varepsilon(\tau, w + \hat{w})$ станет линейной и будет задаваться формулой $S_\varepsilon(\tau, w + \hat{w}) = \hat{w} + e^{G\tau}w$. Для таких w , очевидно, $\Phi'^\varepsilon(\tau, w) = 0$, и, тем самым, оценка (5.7) доказана.

Дальнейшее изложение предварим некоторыми сведениями из теории инвариантных многообразий, адаптированными для нашей задачи. Более подробно эта теория изложена в книге А. В. Бабина и М. И. Вишика [21].

Пусть в некотором гильбертовом пространстве E задано отображение

$$Sw = Aw + \Phi(w),$$

где A – линейный оператор, а Φ – малый по норме оператор. Предположим, что A обладает двумя инвариантными многообразиями E_+ и E_- , $E_+ \cap E_- = \{0\}$, $E = E_+ + E_-$, $LE_+ \subset E_+$, $LE_- \subset E_-$. Операторы P_+ , P_- проектируют E на E_+ и E_- соответственно. Сужение оператора A на инвариантные подпространства E_+ и E_- обозначим соответственно через A_+ и A_- . Также предположим, что выполнены следующие условия.

Условие 1. Существуют такие $r \in (0, 1)$, $\varepsilon_+, \varepsilon_- > 0$, что

$$\|A_-\| \leq r(1 - \varepsilon_-), \quad \|A_+^{-1}\| \leq \frac{1}{r}(1 - \varepsilon_+).$$

Условие 2. $\Phi(0) = \Phi'_w(0) = 0$ и существует такое достаточно малое число γ , что $\|\Phi'_w(w)\| \leq \gamma$.

Условие 3. $\Phi'_w(w)$ удовлетворяет условию Липшица при $\|w_1 - w_2\| < \delta$, $\delta > 0$:

$$\|\Phi'_w(w_1) - \Phi'_w(w_2)\| \leq L\|w_1 - w_2\|.$$

Определим локальное инвариантное многообразие M_- , заданное в некоторой окрестности нуля $\mathcal{U} \subset E$ в виде графика функции $g(w)$:

$$M_- = \{w \in E : w = w_- + g(w_-), w_- \in E_- \cap \mathcal{U}\}. \quad (5.8)$$

ТЕОРЕМА 11. В предположении, что выполнены условия 1–3 и число γ в условии 2 достаточно мало, существует многообразие M_- вида (5.8) с функцией g класса C^{1+s_0} , $s_0 > 0$, инвариантное относительно S : $SM_- \subset M_-$. Данное многообразие M_- является касательным к E_- в нуле, т.е. $g'(0) = 0$. При этом справедлива оценка

$$\|S^\tau w\| \leq r^\tau \|w\|, \quad \tau > 0.$$

Эта теорема доказана в упомянутой выше книге А. В. Бабина и М. И. Вишика [21], доказательство легко переносится на наш случай. В качестве пространства E возьмем $L_{2,e}$. Зафиксируем произвольное $\sigma_0 > 0$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ — собственные числа оператора G , располагающиеся правее прямой $\operatorname{Re} \lambda = -\sigma_0$.

Операторы $R_{-1}(-\lambda_k)$, $\operatorname{Re} \lambda_k > -\sigma_0$, являются конечномерными проекторами. Рассмотрим проектор

$$P_+ = \sum_{\operatorname{Re} \lambda_k > -\sigma_0} R_{-1}(-\lambda_k) = \sum_{k=1}^M R_{-1}(-\lambda_k),$$

который в биортогональной системе $\{\phi_j^i(k), \epsilon_j^i(k)\}$ имеет следующее представление:

$$P_+ f = \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^{N_k} \sum_{j=1}^{m_i^k} (f, \epsilon_j^i(k)) \phi_j^i(k).$$

Соответственно обозначим

$$P_- = I - P_+, \quad E_+ = P_+ E, \quad E_- = P_- E.$$

Очевидно, что пространства E_+ , E_- инвариантны относительно действия полугруппы $e^{\tau G}$.

Зададимся достаточно большим моментом времени $\tau > 0$ и введем следующие операторы:

$$S(w) = S_\varepsilon(\tau, w + \hat{w}) - \hat{w}, \quad Aw = e^{G\tau} w, \quad \Phi(w) = \Phi^\varepsilon(\tau, w). \quad (5.9)$$

Тогда в новых обозначениях эволюционное уравнение (5.5) запишется в виде

$$S(w) = Aw + \Phi(w).$$

ЛЕММА 7. Операторы $A_+ = AE_+$ и $A_- = AE_-$ удовлетворяют условию 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Операторы A_+ , A_- в $L_{2,e}$ задаются следующими формулами:

$$A_+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} R(\lambda, G) e^{\lambda\tau} d\lambda, \quad A_- = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} R(\lambda, G) e^{\lambda\tau} d\lambda.$$

Из (5.3) следует $\|A_-\| \leq C_1 e^{-\sigma_0\tau}$. Оператор A_+ имеет обратный, задаваемый формулой

$$\begin{aligned} A_+^{-1} &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\operatorname{Re} \lambda_k > -\sigma_0} \int_{|\lambda - \lambda_k| < \delta} R(\lambda, G) e^{-\lambda\tau} d\lambda \\ &= \sum_{\operatorname{Re} \lambda_k > -\sigma_0} e^{-\lambda_k\tau} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{\tau^{j-1}}{(j-1)!} R_{-j}(-\lambda_j). \end{aligned}$$

Поэтому с некоторой константой $C_2 > 0$ и достаточно малым параметром $\varepsilon > 0$ будет выполняться неравенство

$$\|A_+^{-1}\| \leq C_2 e^{(\sigma_0 + \varepsilon)\tau}.$$

Тогда нетрудно найти при некотором $\tau > 0$ такие $r = \max(C_1, C_2) e^{-(\sigma_0 - \varepsilon/2)\tau}$, $\varepsilon_+, \varepsilon_- > 0$, что будет выполняться условие 1. Лемма доказана.

Сформулируем основную теорему этого параграфа.

ТЕОРЕМА 12. *Для произвольного $\sigma_0 > 0$ в достаточно малой окрестности функции $\hat{w}(\xi)$ существует многообразие вида*

$$M_- = \{w \in L_{2,e} : w = \hat{w} + w_- + g(w_-), w_- \in E_- \cap \mathcal{O}_\varepsilon\}, \quad (5.10)$$

где $g: E_- \rightarrow E_+$ – некоторая функция класса $C^{1+\delta}$, $\mathcal{O}_\varepsilon = \{w \in L_{2,e}, \|w\|_{L_{2,e}} < \varepsilon\}$. Многообразие M_- инвариантно относительно действия полугруппы $S(\tau, w_0)$ и является устойчивым, т.е. для $w_0 \in M_-$ выполняется неравенство

$$\|S(\tau, w_0) - \hat{w}(\xi)\|_{L_{2,e}} \leq C \|w_0 - \hat{w}(\xi)\|_{L_{2,e}} e^{-\sigma_0\tau}, \quad (5.11)$$

где константа $C > 0$ не зависит от w_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как мы показали, условия 1–3 применительно к полугруппе $S_\varepsilon(\tau, w_0)$ выполнены. Оценка (5.11) следует из соответствующей оценки в теореме 11. Из теоремы 10 для малых начальных данных $\|w_0 - \hat{w}\| < \delta_0$ следует существование полугруппы $S_\varepsilon(\tau, w)$ только на интервале $(0, T)$. Но поскольку $w_0 \in M_-$, то из оценки (5.11) следует возможность продолжения решения для всех $\tau \in \mathbb{R}_+$. За счет выбора малой окрестности $\mathcal{O}_\varepsilon$ траектории $S(\tau, w_0)$ и $S_\varepsilon(\tau, w_0)$ будут совпадать. Теорема доказана.

§ 6. Стабилизация решения. Граничное управление

После нахождения устойчивых инвариантных многообразий для задачи Коши осталось построить оператор продолжения начальных функций, заданных в Ω , до функций, определенных во всем $\mathbb{R}^2$. Причем продолженная функция

должна принадлежать инвариантному многообразию M_- . Тогда искомое граничное управление $u(t, x)$ в (2.4) можно будет найти как ограничение решения задачи Коши с продолженным начальным условием на границу $\partial\Omega$.

Теорема 12, как и все результаты, полученные в §§ 3–5, были справедливы для функций $v^{\text{sc}}, w^{\text{sc}}$, заданных формулами (3.6), (3.5) в масштабирующих переменных (τ, ξ) . В этом параграфе мы вернемся к первоначальному векторному полю $v(t, x)$ с роторной функцией $w(t, x)$, для которого и была поставлена внешняя задача Дирихле (2.2)–(2.4).

ТЕОРЕМА 13. *Пусть $\hat{w}(t, x)$ есть вихрь Ламба–Озеена, M_- – устойчивое инвариантное многообразие, определенное в окрестности $\hat{w}(0, x)$. Тогда в некоторой (возможно, меньшей) окрестности в пространстве $L_{2,e}(\Omega)$ существует непрерывный оператор продолжения из $L_{2,e}(\Omega)$ в $L_{2,e}(\mathbb{R}^2)$, образ которого лежит в M_- .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что Ω является внешностью односвязной ограниченной области $\mathcal{B}$. Возьмем произвольное векторное поле $v_0(x)$, у которого ротор $w_0 = \text{rot } v_0(x)$ достаточно близок к $\hat{w}(0, x)$: $\|w_0(x) - \hat{w}(0, x)\|_{L_{2,e}(\Omega)} < \delta$. Для функции $w(0, x)$ построим продолжение $\tilde{w}_0$ внутрь области, положив в $\mathcal{B}$ $\tilde{w}_0$ равным ротору Ламба–Озеена:

$$\tilde{w}_0(x) = \begin{cases} w_0(x), & x \in \Omega, \\ \hat{w}(0, x), & x \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Продолжение $\tilde{w}_0$ можно сделать более гладким, нежели оно определено выше (например, с сохранением класса гладкости C^k). Но поскольку нашим фазовым пространством является $L_2(\Omega, e^{|x|^2/4})$, то такое негладкое продолжение вполне допустимо для нашей задачи.

Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^M$ – набор собственных значений, которые располагаются правее прямой $\text{Re } \lambda = -\sigma_0$, а P_+ есть проектор на соответствующее корневое подпространство:

$$P_+ f = \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^{N_k} \sum_{j=1}^{m_i^k} (f, \epsilon_j^i(k)) \phi_j^i(k).$$

ЛЕММА 8. *Сужение оператора P_+ на вещественное пространство $L_{2,e}$ представимо в виде*

$$P_+ f = \sum_{k=1}^n (f, \epsilon_k) \phi_k,$$

где $\{\phi_k, \epsilon_k\}_{k=1}^n$ – биортогональная система вещественных линейно независимых функций.

Доказательство данной леммы в несколько иной форме и для другого пространства приводится А. В. Фурсиковым в [3; лемма 6.2]. Это доказательство легко переносится на наш случай.

Пусть $\chi(x)$ – неотрицательная срезающая функция, носитель которой не пуст и сосредоточен внутри области $\mathcal{B}$. Продолжение будем строить в следующем виде:

$$w_0^{\text{ext}}(x) = \tilde{w}_0 + \chi(x) \sum_{k=1}^n c_k \epsilon_k.$$

Обозначим

$$z_0 = w_0^{\text{ext}} - \hat{w}.$$

Условие $w_0^{\text{ext}}(x) \in M_-$ эквивалентно

$$g(P_- z_0) = P_+ z_0,$$

где

$$P_- = I - P_+.$$

Поскольку $\text{Im } g \subset E_+$, то $g(P_- z_0)$ можно разложить по базису E_+ :

$$g(P_- z_0) = \sum_{k=1}^n g_k(P_- z_0) \phi_k.$$

Поэтому z_0 должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\sum_{k=1}^n g_k(P_- z_0) \phi_k = \sum_{k=1}^n (z_0, \epsilon_k) \phi_k.$$

Поскольку функции $\{\phi_k\}_{k=1}^n$ линейно независимы, последнее равенство эквивалентно системе из n уравнений

$$(z_0, \epsilon_k)_{L_{2,e}} = g_k(P_- z_0), \quad k = 1, \dots, n.$$

Учитывая

$$z_0 = \tilde{w}_0 - \hat{w} + \chi(x) \sum_{k=1}^n c_k \epsilon_k,$$

запишем эту систему в матричном представлении

$$\vec{e} + A\vec{c} = \vec{g}(\tilde{w}_0 - \hat{w} + \chi(\vec{c}, \vec{e}) - (\vec{\phi}, \vec{e} + A\vec{c})),$$

где

$$A = \|a_{ij}\|_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,n}, \quad a_{ij} = \int_{\mathbb{R}^2} \chi(\xi) \epsilon_i(\xi) \epsilon_j(\xi) d\xi,$$

$$\vec{e} = \{e_i\}_{i=1,\dots,n}, \quad e_i = \int_{\mathbb{R}^2} (\tilde{w}_0 - \hat{w}) \epsilon_i(\xi) d\xi,$$

$$\vec{c} = \{c_i\}_{i=1,\dots,n}, \quad \vec{g} = \{g_i\}_{i=1,\dots,n}, \quad \vec{\phi} = \{\phi_i\}_{i=1,\dots,n}, \quad \vec{e} = \{\epsilon_i\}_{i=1,\dots,n}.$$

Поскольку функции ϵ_i линейно независимы на произвольной непустой подобласти $\mathcal{B}$ (см. [3; теорема 4.1]), то матрица A является положительно определенной и поэтому обратима:

$$(A\eta, \eta) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \eta_i \eta_j = \int_{\mathbb{R}^2} \left| \sum_{i=1}^n \sqrt{\chi(\xi)} \epsilon_i \eta_i \right|^2 d\xi > 0, \quad \vec{\eta} \neq 0.$$

Пусть $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – конечномерный оператор, определяемый равенством

$$\Phi(\vec{c}) = A^{-1}\vec{g}(\tilde{w}_0 - \hat{w} + \chi(\vec{c}, \vec{c}) - (\vec{\phi}, \vec{c} + A\vec{c})) - A^{-1}\vec{c},$$

$$\|\tilde{w}_0 - \hat{w} + \chi(\vec{c}, \vec{c}) - (\vec{\phi}, \vec{c} + A\vec{c})\|_{L_{2,e}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|\tilde{w}_0 - \hat{w}\|_{L_{2,e}(\mathbb{R}^2)}^2 + \|\vec{c}\|_{\mathbb{R}^2}^2 \rightarrow 0.$$

Поскольку $g'(0) = 0$ и, соответственно, $\|g'(w)\|_{\mathbb{R}^2} \leq \varepsilon$ в достаточно малой окрестности нуля, то из теоремы о неявных функциях следует, что уравнение

$$\Phi(\vec{c}) = \vec{c}$$

имеет единственное решение. Таким образом, построено продолжение ротора $w_0(x)$ внутрь области $\mathcal{B}$, которое лежит на многообразии M_- . Нетрудно показать, что $w_0^{\text{ext}}(x)$ непрерывно зависит от $w_0(x)$. Соответствующее векторное поле $v_0^{\text{ext}}(x)$ получается при помощи закона Био–Савара (3.3).

Теорема 13 доказана.

Перейдем к доказательству основной теоремы о стабилизации, сформулированной в § 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть задано начальное векторное поле v_0 и $w_0^{\text{ext}} \in M_-$ есть продолжение $\text{rot } v_0$, определенное уже во всем $\mathbb{R}^2$. Решение задачи Коши (3.7) с начальным условием w_0^{ext} обозначим через $w^{\text{sc}}(\tau, \xi)$. Зададимся произвольным $\sigma_0 > 0$. Тогда

$$\|w^{\text{sc}}(\tau, \xi) - \hat{w}^{\text{sc}}(\xi)\|_{L_{2,e}} \leq C\|(w_0^{\text{ext}} - \hat{w}^{\text{sc}}(\xi))\|_{L_{2,e}} e^{-\sigma_0 \tau}.$$

Вложение $L_{2,e}(\mathbb{R}^2) \subset L_p(\mathbb{R}^2)$ для $p \in (1, 2)$ непрерывно. Тогда с учетом леммы 1 будем иметь оценку для $q > 2$

$$\begin{aligned} \|v^{\text{sc}}(\tau, \cdot) - \hat{v}^{\text{sc}}(\cdot)\|_{L_q} &\leq C_1 \|w^{\text{sc}}(\tau, \cdot) - \hat{w}^{\text{sc}}(\cdot)\|_{L_p} \\ &\leq C_2 \|w^{\text{sc}}(\tau, \cdot) - \hat{w}^{\text{sc}}(\cdot)\|_{L_{2,e}} \leq C e^{-\sigma_0 \tau}. \end{aligned}$$

Левая часть последнего неравенства может быть выражена в терминах исходного поля $v(t, x)$:

$$\begin{aligned} \|v^{\text{sc}}(\tau, \cdot) - \hat{v}^{\text{sc}}(\cdot)\|_{L_q} &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v^{\text{sc}}(\log(1+t), \xi) - \hat{v}^{\text{sc}}(\xi)|^q dx \right)^{1/q} \\ &= (1+t)^{1/2-1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v(t, x) - \hat{v}(t, x)|^q dx \right)^{1/q} \\ &= (1+t)^{1/2-1/q} \|v(t, \cdot) - \hat{v}(t, \cdot)\|_{L_q}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|v(t, \cdot) - \hat{v}(t, \cdot)\|_{L_q(\Omega)} \leq \|v(t, \cdot) - \hat{v}(t, \cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{C}{(1+t)^{\sigma_0+1/2-1/q}}.$$

Таким образом, выполнено условие стабилизации (2.5) с $k = \sigma_0 - 1/2 + 1/q$ и, следовательно, $v \in L_\infty(\mathbb{R}^2, L_q(\Omega))$. Из неравенства $\|\nabla v\|_{L_q(\Omega)} \leq C\|w\|_{L_q(\Omega)}$, справедливого для $q > 2$, следует, что $\nabla v \in L_\infty(\mathbb{R}^2, L_q(\Omega))$. Тогда для v определен оператор $\gamma_{\partial\Omega}$, который сужает функции, заданные во всем $\mathbb{R}^2$, на границу $\partial\Omega$:

$$\gamma_\Omega: L_\infty(\mathbb{R}_+, W_q^1(\mathbb{R}^2)) \rightarrow L_\infty(\mathbb{R}_+, B_q^{1-1/q}(\partial\Omega)), \quad \gamma_\Omega v(t, x) = v(t, x'), \quad x' \in \partial\Omega, \quad (6.1)$$

где $B_q^{1-1/q}(\partial\Omega)$ есть пространство Бесова следов функций из $W_q^1(\mathbb{R}^2)$.

В итоге $(v(t, x), u(t, x'))$ будет искомым решением задачи стабилизации (2.2)–(2.5), где управление u находится по формуле $u(t, x') = \gamma_{\Omega} v(t, x)$.

Теорема 1 полностью доказана.

Список литературы

- [1] A. Fursikov, “Real process corresponding to the 3D Navier–Stokes system, and its feedback stabilization from the boundary”, *Partial differential equations*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **206**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, 95–123.
- [2] A. V. Fursikov, “Stabilizability of two-dimensional Navier–Stokes equations with help of a boundary feedback control”, *J. Math. Fluid Mech.*, **3**:3 (2001), 259–301.
- [3] А. В. Фурсиков, “Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью”, *Матем. сб.*, **192**:4 (2001), 115–160; англ. пер.: A. V. Fursikov, “Stabilizability of a quasi-linear parabolic equation by means of a boundary control with feedback”, *Sb. Math.*, **192**:4 (2001), 593–639.
- [4] А. В. Горшков, “Стабилизация одномерного уравнения теплопроводности на полуграниченном стержне”, *УМН*, **56**:2 (2001), 213–214; англ. пер.: A. V. Gorshkov, “Stabilization of the one-dimensional heat equation on a semibounded rod”, *Russian Math. Surveys*, **56**:2 (2001), 409–410.
- [5] А. В. Горшков, “Стабилизация полулинейного параболического уравнения, заданного во внешности ограниченной области, посредством управления с границы”, *Матем. сб.*, **194**:10 (2003), 49–76; англ. пер.: A. V. Gorshkov, “Stabilization of a semilinear parabolic equation in the exterior of a bounded domain by means of boundary controls”, *Sb. Math.*, **194**:10 (2003), 1475–1502.
- [6] Th. Gallay, C. E. Wayne, “Invariant manifolds and the long-time asymptotics of the Navier–Stokes and vorticity equations on $\mathbb{R}^2$ ”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **163**:3 (2002), 209–258.
- [7] Th. Gallay, C. E. Wayne, “Global stability of vortex solutions of the two-dimensional Navier–Stokes equation”, *Comm. Math. Phys.*, **255**:1 (2005), 97–129.
- [8] С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов, *Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их приложение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике*, Наука, М., 1985; англ. пер.: S. M. Belotserkovsky, I. K. Lifanov, *Method of discrete vortices*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.
- [9] G.-H. Cottet, P. D. Koumoutsakos, *Vortex methods. Theory and practice*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [10] A. V. Gorshkov, “Stabilization of linear parabolic equations defined in an exterior of a bounded domain by a boundary control”, *J. Dynam. Control Systems*, **10**:1 (2004), 1–9.
- [11] М. В. Келдыш, “О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов”, *УМН*, **26**:4 (1971), 15–41; англ. пер.: M. V. Keldysh, “On the completeness of the eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators”, *Russian Math. Surveys*, **26**:4 (1971), 15–44.
- [12] А. С. Маркус, *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков*, Штиинца, Кишинев, 1986; англ. пер.: A. S. Markus, *Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils*, Transl. Math. Monogr., **71**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [13] А. С. Маркус, В. И. Мацаев, “Теоремы сравнения спектров линейных операторов и спектральные асимптотики”, Тр. ММО, **45**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1982, 133–181; англ. пер.: A. S. Markus, V. I. Matsaev, “Comparison theorems for spectra

- of linear operators, and spectral asymptotics.”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1984, № 1, 139–187.
- [14] А. А. Шкалик, “О базисности корневых векторов возмущенного самосопряженного оператора”, *Теория функций и дифференциальные уравнения*, Тр. МИАН, **269**, МАИК, М., 2010, 290–303; англ. пер.: А. А. Shkalikov, “On the basis property of root vectors of a perturbed self-adjoint operator”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **269** (2010), 284–298.
- [15] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973; англ. пер.: О. А. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, Appl. Math. Sci., **49**, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [16] Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, М., 1985; пер. с англ.: D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Math., **840**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1981.
- [17] Л. Хёрмандер, *Линейные дифференциальные операторы с частными производными*, Мир, М., 1965; пер. с англ.: L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1963.
- [18] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: K. Yosida, *Functional analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **123**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg; Academic Press, New York, 1965.
- [19] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Kreĭn, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Math. Monogr., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.
- [20] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1966.
- [21] А. В. Бабин, М. И. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений*, Наука, М., 1983; англ. пер.: A. V. Babin, M. I. Vishik, *Attractors of evolution equations*, Stud. Math. Appl., **25**, North-Holland, Amsterdam, 1992.

А. В. Горшков (A. V. Gorshkov)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: armcon@mail.ru

Поступила в редакцию

28.04.2011