Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Н. Пахомов, Неразрешимость элементарной теории полурешетки GLP-слов, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 8, 141–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7883>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 16:41:19

УДК 510.673

Ф. Н. Пахомов

Неразрешимость элементарной теории полурешетки GLP-слов

Алгебра Линденбаума арифметики Пеано РА может быть обогащена операторами n -непротиворечивости, которые сопоставляют данной формуле утверждение о ее совместности с теорией РА, расширенной множеством всех истинных Π_n -предложений. В алгебре Линденбаума РА из 1 операторами n -непротиворечивости порождается нижняя полурешетка. Мы доказываем неразрешимость элементарной теории этой полурешетки и разрешимость элементарной теории ее подполурешетки, порожденной лишь операторами 0-непротиворечивости и 1-непротиворечивости.

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: логика доказуемости, элементарные теории, неразрешимость.

§ 1. Введение

Еще в 1949 г. А. Тарский доказал разрешимость элементарной теории любой счетной безатомной булевой алгебры и тем самым элементарной теории алгебры Линденбаума $\mathfrak{L}(T)$ любой существенно неразрешимой теории T [1]. А. Гжегорчик [2] показал неразрешимость элементарной теории класса алгебр Гейтинга и элементарной теории алгебры с замыканием пространства $\mathbb{R}^n$ для $n \geq 2$. В. В. Рыбаковым [3] была доказана неразрешимость элементарных теорий топобулевых и псевдодобулевых алгебр, соответствующих некоторым расширениям модальной логики S4 и интуиционистской логики Int.

Элементарные теории алгебр Магари, являющихся семантикой для логики доказуемости GL, изучались С. Н. Артёмовым и Л. Д. Беклемишевым [4]. Ими было показано, что элементарная теория свободной алгебры Магари, порожденной n образующими, разрешима, если и только если $n = 0$. В. Ю. Шавруковым [5] была показана неразрешимость элементарной теории алгебры Магари, полученной из алгебры Линденбаума арифметики Пеано РА добавлением оператора доказуемости в РА.

Напомним, что $\mathfrak{L}(РА)$ – это булева алгебра, носителем которой является множество арифметических предложений, факторизованное по отношению РА-доказуемой эквивалентности. Булевы операции на $\mathfrak{L}(РА)$ индуцированы соответствующими пропозициональными связками; например, конъюнкция двух классов эквивалентности, порожденных предложениями A и B соответственно, полагается равной классу эквивалентности предложения $A \& B$. Кроме того,

напомним, что во всякой булевой алгебре имеется частичный порядок $\leq$ (такой порядок вводится и во всех нижних полурешетках):

$$x \leq y \stackrel{\text{def}}{\iff} x \wedge y = x.$$

Единичный элемент булевой алгебры (единственный максимальный элемент в смысле $\leq$) мы обозначаем символом $\mathbf{1}$.

Для каждого натурального числа n фиксируем выбранную естественным образом арифметическую формулу $\text{Con}_n(x)$, выражающую непротиворечивость расширения РА формулой с гёделевым номером x и множеством всех истинных в стандартной модели Π_n -предложений. Формулы $\text{Con}_n(x)$ индуцируют на $\mathfrak{L}(\text{РА})$ операторы n -непротиворечивости $\langle n \rangle$, сопоставляющие классу эквивалентности формулы φ класс эквивалентности формулы $\text{Con}_n(\ulcorner \varphi \urcorner)$, где $\ulcorner \varphi \urcorner$ означает гёделев номер φ (см. [6]).

Алгебра $\mathfrak{Tr}(\text{РА}) = (\mathfrak{L}(\text{РА}); \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \dots)$ была введена в [7]. В силу результата Шаврукова элементарная теория этой алгебры неразрешима. Вопрос о разрешимости элементарной теории минимальной подалгебры C (подалгебры порожденной из $\mathbf{1}$) алгебры $\mathfrak{Tr}(\text{РА})$, был поставлен Л. Д. Беклемишевым [8].

Кроме алгебры C интерес также представляют некоторые ее подструктуры. В [7] было рассмотрено подмножество $W \subset \mathfrak{Tr}(\text{РА})$, порожденное из $\mathbf{1}$ операторами $\wedge$ и $\langle n \rangle$ для каждого n . Мы будем рассматривать это подмножество как полурешетку $\mathbb{W} = (W, =, \wedge)$ и как алгебру $\widehat{\mathbb{W}} = (W, =, \wedge, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \dots)$.

Как было отмечено в [7], на множестве W имеется естественное отношение строгого линейного порядка $<_0$, определяемое следующим образом:

$$x <_0 y \stackrel{\text{def}}{\iff} y \leq \langle 0 \rangle x.$$

Отметим, что различаются $\leq_0$ и стандартный частичный порядок на полурешетке $\leq$. Бинарное отношение $<_0$ является вполне упорядочением типа

$$\varepsilon_0 = \sup \left\{ \underbrace{\omega^{\omega \cdots \omega}}_{n \text{ раз}} \mid n \in \omega \right\}.$$

Таким образом, структура $\widehat{\mathbb{W}}$ с определимым на ней порядком $<_0$ является конструктивной системой ординальных обозначений до ординала ε_0 . Данная структура использовалась Л. Д. Беклемишевым [7] для ординального анализа теории РА. Для ординала ε_0 имеются и некоторые другие системы конструктивных обозначений [9]. Вопрос об их сравнении имеет значение в связи с проблемой каноничности систем ординальных обозначений в теории доказательств.

В этой работе доказывается неразрешимость элементарных теорий полурешетки $\mathbb{W}$ и алгебры $\widehat{\mathbb{W}}$. Фактически мы доказываем, что операции $\langle n \rangle$ выражимы в теории полурешетки $\mathbb{W}$. Кроме того, мы рассматриваем подмножество $W_1 \subset \mathfrak{Tr}(\text{РА})$, порожденное из $\mathbf{1}$ операторами $\wedge$, $\langle 0 \rangle$ и $\langle 1 \rangle$ и доказываем разрешимость элементарной теории $\text{Th}(W_1, =, \wedge, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle)$. В тоже время из наших результатов следует неразрешимость теории $\text{Th}(W_2, =, \wedge)$, где $W_2 \subset \mathfrak{Tr}(\text{РА})$ порождено из $\mathbf{1}$ операторами $\wedge$, $\langle 0 \rangle$, $\langle 1 \rangle$ и $\langle 2 \rangle$.

§ 2. Логика доказуемости GLP

Полимодальная логика доказуемости GLP была введена Г.К. Джапаридзе [10], им же была доказана теорема об арифметической полноте и разрешимость этой логики. Нам далее потребуется другая форма теоремы об арифметической полноте логики GLP, которая позднее была сформулирована и доказана К.Н. Игнатьевым [11].

Язык логики GLP – это язык исчисления высказываний с логической константой $\top$ (истина) и пропозициональными переменными $x_1, x_2, \dots$, обогащенный семейством одноместных связок $\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \dots$. Логика GLP задается следующими аксиомами и правилами вывода, в которых n и k пробегает всевозможные, в рамках указанных ниже ограничений, натуральные числа:

0. тавтологии исчисления высказываний;

$$1. \langle n \rangle (A \vee B) \rightarrow (\langle n \rangle A \vee \langle n \rangle B);$$

$$2. \neg \langle n \rangle \neg \top;$$

$$3. \langle n \rangle A \rightarrow \langle n \rangle (A \wedge \neg \langle n \rangle A);$$

$$4. \langle n \rangle A \rightarrow \langle k \rangle A, \text{ где } k \leq n;$$

$$5. \langle k \rangle A \rightarrow \neg \langle n \rangle \neg \langle k \rangle A, \text{ где } k < n;$$

$$6. \frac{A \quad A \rightarrow B}{B};$$

$$7. \frac{A \rightarrow B}{\langle n \rangle A \rightarrow \langle n \rangle B}.$$

Выводимость формулы A в этом исчислении будем обозначать $\vdash A$, а множество всех корректно построенных формул языка логики GLP – через $L(\text{GLP})$.

Арифметической оценкой называется функция v из множества всех формул языка GLP в множество арифметических предложений, обладающая следующими свойствами:

$$1. v(A * B) = v(A) * v(B), \text{ где } * \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\};$$

$$2. v(\neg A) = \neg v(A);$$

$$3. v(\langle n \rangle A) = \text{Con}_n(\ulcorner v(A) \urcorner);$$

$$4. \text{PA} \vdash v(\top).$$

Теорема Джапаридзе об арифметической полноте утверждает, что в логике GLP выводимы те и только те формулы A , для которых при произвольной оценке v в PA выводимо предложение $v(A)$.

Алгеброй Линденбаума $\mathfrak{L}(\text{GLP})$ логики GLP называется булева алгебра, носителем которой является множество $L(\text{GLP})$, факторизованное по отношению GLP-доказуемой эквивалентности, а операции которой индуцированы соответствующими пропозициональными связками. Для каждого n на алгебру Линденбаума GLP индуцируются операторы $\langle n \rangle$. Рассмотрим подмножество $V \subset \mathfrak{L}(\text{GLP})$, порожденное из единицы операторами $\wedge$ и $\langle n \rangle$ для всех n . Из теоремы Джапаридзе следует, что структуры $\mathbb{W}$ и $\widehat{\mathbb{W}}$ изоморфны структурам $(V, =, \wedge)$ и $(V, =, \wedge, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \dots)$ соответственно. Тем самым мы переходим от исследования алгебры $\mathfrak{Gr}(\text{PA})$ к исследованию алгебры $\mathfrak{L}(\text{GLP})$.

§ 3. Полурешетка GLP-слов

Мы будем обозначать слова в алфавите $\mathbb{N}$ строчными греческими буквами. Слова α и β считаем равными, если они графически совпадают. Говоря о символах слова $k_1 k_2 \dots k_n$, будем иметь ввиду числа $k_1, k_2, \dots, k_n$. Выражение $\alpha\beta$ будет обозначать конкатенацию слов α и β . Будем отождествлять всякое слово вида $k_1 k_2 \dots k_n$ с формулой $\langle k_1 \rangle \langle k_2 \rangle \dots \langle k_n \rangle \top \in L(\text{GLP})$. В частности, пустое слово Λ отождествляем с формулой $\top$. Слова, таким образом отождествленные с формулами, будем называть *GLP-словами*. Далее, говоря о словах, будем подразумевать GLP-слова. Отношение эквивалентности $\sim$ является сужением отношения GLP-эквивалентности на множество слов:

$$\alpha \sim \beta \stackrel{\text{def}}{\iff} \vdash \alpha \leftrightarrow \beta.$$

Ниже мы увидим, что всякий класс эквивалентности из V порожден некоторым GLP-словом. Тем самым вместо элементов V мы часто будем иметь дело с соответствующими словами.

Введем следующие обозначения:

1. S – множество всех слов;
2. S_n – множество всех слов, любой символ которых $\geq n$;
3. $B_n = \{n\alpha \mid \alpha \in S_n\} \cup \{\top\}$;
4. $B = \bigcup_{n \in \omega} B_n$.

Для каждого натурального числа k определим бинарное отношение $<_k$ на множестве S :

$$\alpha <_k \beta \stackrel{\text{def}}{\iff} \vdash \beta \rightarrow \langle k \rangle \alpha.$$

Из определений следует, что для произвольных слов $\alpha_1 \sim \alpha_2$ и $\beta_1 \sim \beta_2$ мы имеем

$$\alpha_1 <_k \beta_1 \iff \alpha_2 <_k \beta_2.$$

Таким образом, при всех k бинарное отношение $<_k$ переносится на множества $S/\sim$ и $S_k/\sim$.

Отметим некоторые результаты о словах, полученные в статьях [7], [12].

ФАКТ 1. Для всякого натурального числа k бинарное отношение $<_k$ является вполне упорядочением порядкового типа ε_0 на множестве $S_k/\sim$.

Заметим, что всякое слово $\alpha \in S_k$ может быть единственным образом представлено в виде $\alpha = \alpha_1 k \alpha_2 k \dots k \alpha_n$, где $\alpha_i \in S_{k+1}$. Одновременно для всех $k \in \mathbb{N}$ зададим функции $o_k: S_k \rightarrow \varepsilon_0$ следующей системой тождеств:

1. $o_k(\langle k \rangle^n \top) = n$;
2. $o_k(\alpha_1 k \dots k \alpha_n) = \omega^{o_{k+1}(\alpha_n)} + \dots + \omega^{o_{k+1}(\alpha_1)}$, где $\alpha_i \in S_{k+1}$ для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ и существует $l \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $\alpha_l \neq \top$.

Введем сокращение $o: S \rightarrow \varepsilon_0$ для функции o_0 .

ФАКТ 2 (см. [12; лемма 15] и [12; следствие 7]). Для всякого k функция o_k согласована с отношением эквивалентности $\sim$ и задает изоморфизм $(S_k/\sim, <_k)$ и ординала ε_0 со стандартным порядком $(\varepsilon_0, <)$.

Определим множество NF всех слов, находящихся в нормальной форме. Зададим принадлежность слов к NF индукцией по длине.

1. $\top \in \text{NF}$.
2. Пусть минимальный символ слова $\alpha \neq \top$ равен k и $\alpha = \alpha_1 k \alpha_2 k \dots k \alpha_n$, где все $\alpha_i \in S_{k+1}$. Тогда $\alpha \in \text{NF}$, если и только если $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \text{NF}$ и $\alpha_{i+1} \not\prec_{k+1} \alpha_i$ при $i = 1, \dots, n-1$.

ФАКТ 3 (см. [12; следствие 5]). Для каждого слова α существует единственное эквивалентное ему слово $\beta \in \text{NF}$. Такое β называется нормальной формой α .

Приведем здесь без доказательства процедуру приведения слова к нормальной форме, которая является незначительно перестроенной процедурой из доказательства [12; предложение 3]. Будем сводить построение нормальной формы слова к построению нормальных форм слов меньшей длины. Пустое слово уже приведено к нормальной форме. Перейдем к случаю непустого слова α . Пусть минимальный символ слова α равен k , и оно имеет вид $\alpha = \alpha_1 k \dots k \alpha_n$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in S_{k+1}$. Приведем слова α_1 и $\alpha_2 k \dots k \alpha_n$ к нормальной форме – это будут слова β_1 и $\beta_2 k \dots k \beta_m$ соответственно, где $\beta_1, \dots, \beta_m \in S_{k+1}$. Положим

$$A = \{s \mid 2 \leq s \leq m, \beta_s \not\prec_{k+1} \beta_1\}.$$

Если множество A не пусто, то нормальная форма α равна $\beta_1 k \beta_l k \dots k \beta_m$, где $l = \min A$, иначе нормальная форма α равна β_1 .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если слово принадлежит S_k , то и его нормальная форма принадлежит S_k .

Определим функцию $t: S \rightarrow (\mathbb{N} \cup \{-1\})$, переводящую слово в его первый символ:

1. $t(\top) = -1$;
2. $t(k_1 \dots k_n) = k_1$.

ФАКТ 4 (см. [12; лемма 1]). Пусть слова α и β таковы, что $\alpha \in S_k$ и $t(\beta) < k$. Тогда $\vdash \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \alpha\beta$.

В силу того, что в GLP верна теорема $\langle k \rangle \langle k \rangle A \rightarrow \langle k \rangle A$, мы получаем

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $\alpha \in B_k$, то $\vdash \langle k \rangle \alpha \rightarrow \alpha$.

ФАКТ 5. Пусть $\alpha, \beta \in B_k$. Тогда либо $\vdash \alpha \rightarrow \beta$, либо $\vdash \beta \rightarrow \alpha$. Притом $\alpha <_k \beta$ влечет $\vdash \beta \rightarrow \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [12; следствие 6] получаем, что либо $\vdash \alpha \rightarrow \beta$, либо $\vdash \beta \rightarrow \alpha$. Предположим, что $\alpha <_k \beta$. По определению $<_k$ мы имеем $\vdash \beta \rightarrow \langle k \rangle \alpha$. Тем самым с помощью замечания 2 получаем $\vdash \beta \rightarrow \alpha$.

ФАКТ 6 (см. [12; лемма 9]). Для любых слов $\alpha, \beta \in S_k$ эффективно строится слово $\gamma \in S_k$ такое, что $\vdash \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \gamma$.

Для данного слова α обозначим через $[\alpha]$ класс эквивалентности

$$[\alpha] = \{\beta \in S \mid \alpha \sim \beta\} \in S/\sim.$$

Множество S вложено в $L(\text{GLP})$, тем самым фактормножество $S/\sim$ каноническим образом вкладывается в $\mathfrak{L}(\text{GLP})$: $[\alpha] \mapsto \{A \in L(\text{GLP}) \mid \vdash A \leftrightarrow \alpha\}$. В силу факта 6 такое вложение есть биекция между $S/\sim$ и V . Таким образом, с V на $S/\sim$ переносятся операции $\wedge, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \dots$. Отметим, что структуры $\mathbb{W}$ и $\widehat{\mathbb{W}}$ изоморфны структурам $(S/\sim, =, \wedge)$ и $(S/\sim, =, \wedge, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \dots)$ соответственно.

Введем операцию конъюнкции слов. Пусть α и β – слова, а γ – единственное слово из NF такое, что $\vdash \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \gamma$. Положим $\alpha \wedge \beta = \gamma$. Отметим, что $[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta]$ и $\langle n \rangle[\alpha] = [n\alpha]$ при всех n .

§ 4. Некоторые свойства полурешетки слов

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ зададим функцию $h_k: S \rightarrow S_k$. Заметим, что для всякого слова α существует и единственно его представление в виде $\alpha = \beta\gamma$, где $\beta \in S_k$, а $t(\gamma) < k$. Положим $h_k(\alpha) = \beta$.

ЛЕММА 1. *Для всякого слова α*

$$t(\alpha) = \min\{k \mid h_k(\alpha) \sim \top\} - 1. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $h_k(\alpha) \neq \top$ тогда и только тогда, когда $k \leq t(\alpha)$. Также для всякого β имеет место следующая эквивалентность: $\beta = \top$ тогда и только тогда, когда $\beta \sim \top$. Отсюда получаем тождество (1).

ЛЕММА 2. *Пусть слова α и β таковы, что $\alpha \sim \beta$. Тогда для всякого k выполняется $h_k(\alpha) \sim h_k(\beta)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $h_k(\alpha) \sim h_k(\beta)$ индукцией по k . Предположение индукции для $k = 0$, очевидно, выполнено; перейдем к случаю $k > 0$.

Предположим, что $h_k(\alpha) \sim h_k(\beta)$, и докажем, что $h_{k+1}(\alpha) \sim h_{k+1}(\beta)$. Слово $h_k(\alpha)$ имеет вид

$$h_k(\alpha) = h_{k+1}(h_k(\alpha))k\alpha_1k\alpha_2k \dots k\alpha_n,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in S_{k+1}$. Заметим, что $h_{k+1}(\alpha) = h_{k+1}(h_k(\alpha))$ и тем самым $h_k(\alpha) = h_{k+1}(\alpha)k\alpha_1k \dots k\alpha_n$.

Пусть слово γ – нормальная форма слова $h_k(\alpha)$. Рассмотрим построение γ по описанной ранее процедуре. Пусть нормальная форма $\alpha_1k\alpha_2k \dots k\alpha_n$ имеет вид $\gamma_1k\gamma_2k \dots k\gamma_mk$, где все $\gamma_i \in S_{k+1}$, а нормальная форма $h_{k+1}(\alpha)$ равна слову γ_0 . Исходя из процедуры построения нормальной формы слова мы выводим, что либо $\gamma = \gamma_0k\gamma_1k \dots k\gamma_mk$ для некоторого положительного натурального числа $l \leq m$, либо $\gamma = \gamma_0$. Следовательно, $h_{k+1}(\gamma) = \gamma_0 \sim h_{k+1}(\alpha)$.

Проведя аналогичное рассуждение для β и нормальной формы слова $h_k(\beta)$, равной δ , мы получим, что $h_{k+1}(\delta) \sim h_{k+1}(\beta)$. В силу единственности нормальной формы слова и предположения индукции $\gamma = \delta$. Тем самым $h_{k+1}(\alpha) \sim h_{k+1}(\beta)$, что завершает доказательство леммы.

По лемме 2 правая часть тождества (1) сохраняет свое значение при замене слова α на эквивалентное, тем самым получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\alpha \sim \beta$, то $t(\alpha) = t(\beta)$.

Из замечания 1 и следствия 1 выводим

СЛЕДСТВИЕ 2. Если слово α принадлежит B_k , то и его нормальная форма принадлежит B_k .

ЛЕММА 3. Для всякого натурального числа k и любых слов α и β

$$h_k(\alpha \wedge \beta) \sim h_k(\alpha) \wedge h_k(\beta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем такое число $n > k$ и слова $\alpha_0, \beta_0 \in B_0$, $\alpha_1, \beta_1 \in B_1, \dots, \alpha_n, \beta_n \in B_n$, что $\alpha = \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_0$ и $\beta = \beta_n \beta_{n-1} \dots \beta_0$. При $i = 0, \dots, n$ положим $\gamma_i = \alpha_i \wedge \beta_i$. Из факта 5 и следствия 2 для всех γ_i получаем, что $\gamma_i \in B_i$. Используя факт 4, последовательно получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &\sim \alpha_n \wedge \dots \wedge \alpha_0 \wedge \beta_n \wedge \dots \wedge \beta_0 \sim \gamma_n \wedge \dots \wedge \gamma_0 \sim \gamma_n \dots \gamma_0, \\ h_k(\alpha) \wedge h_k(\beta) &\sim \alpha_n \wedge \dots \wedge \alpha_k \wedge \beta_n \wedge \dots \wedge \beta_k \sim \gamma_n \wedge \dots \wedge \gamma_k \sim \gamma_n \dots \gamma_k, \\ h_k(\alpha \wedge \beta) &\sim h_k(\gamma_n \dots \gamma_0) \sim \gamma_n \dots \gamma_k \sim h_k(\alpha) \wedge h_k(\beta). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть α и β – слова. Тогда $t(\alpha \wedge \beta) = \max(t(\alpha), t(\beta))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3 при произвольном k

$$h_k(\alpha \wedge \beta) \sim \top \iff h_k(\alpha) \sim \top \text{ и } h_k(\beta) \sim \top.$$

Таким образом, искомое следует из леммы 1.

Назовем слово α *разложимым*, если существуют такие слова $\beta \approx \alpha$ и $\gamma \approx \alpha$, что $\beta \wedge \gamma \sim \alpha$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть слово $\alpha \in \text{NF}$. Тогда α неразложимо, если и только если $\alpha \in B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \notin B$, докажем, что α разложимо. Представим α в виде $\alpha = h_{t(\alpha)}(\alpha)\beta$, где $\beta \neq \top$ и $t(\beta) < t(\alpha)$. Рассматривая процедуру приведения слова к нормальной форме, мы замечаем, что для всякого слова длина его нормальной формы не превосходит его собственной длины. Тем самым нормальные формы слов $h_{t(\alpha)}(\alpha)$ и β не совпадают со словом α . Следовательно, $\alpha \approx h_{t(\alpha)}(\alpha)$ и $\alpha \approx \beta$, притом $\alpha \sim h_{t(\alpha)}(\alpha) \wedge \beta$. Таким образом, α разложимо.

Пусть $\alpha \in B$, докажем, что α неразложимо. Выберем такое натуральное число k , что $\alpha \in B_k$. Рассмотрим произвольные слова β и γ такие, что $\alpha \sim \beta \wedge \gamma$. Из леммы 3 выводим, что

$$h_k(\beta) \wedge h_k(\gamma) \sim h_k(\alpha) = \alpha.$$

Таким образом, в силу следствия 3 имеем $t(h_k(\beta)) \leq k$ и $t(h_k(\gamma)) \leq k$. Следовательно, $h_k(\beta) \in B_k$ и $h_k(\gamma) \in B_k$. Тем самым в силу факта 5 либо $h_k(\beta) \wedge h_k(\gamma) \sim h_k(\beta)$, либо $h_k(\beta) \wedge h_k(\gamma) \sim h_k(\gamma)$. Без ограничения общности будем считать, что $h_k(\beta) \wedge h_k(\gamma) \sim h_k(\beta)$. Таким образом, имеем $\vdash \alpha \leftrightarrow h_k(\beta)$, $\vdash \beta \rightarrow h_k(\beta)$ и $\vdash \alpha \rightarrow \beta$. Следовательно, $\alpha \sim \beta$. Последнее в силу произвольности выбора слов β и γ означает неразложимость слова α .

ЛЕММА 4. Пусть для пары слов (α, β) выполняются следующие два условия:

1. $\nvdash \alpha \rightarrow \beta$;
2. для всякого слова $\gamma \approx \alpha$ такого, что $\vdash \gamma \rightarrow \alpha$ имеет место $\vdash \gamma \rightarrow \beta$.

Тогда $\alpha <_0 \beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим слова α и β в виде

$$\alpha = h_1(\alpha)\alpha_1, \quad \beta = h_1(\beta)\beta_1.$$

Заметим, что $\alpha_1, \beta_1 \in B_0$. В силу фактов 4 и 5 имеем

$$\begin{aligned} \vdash h_1(\alpha)0\alpha &\rightarrow h_1(\alpha)0h_1(\alpha)\alpha_1 \\ &\rightarrow h_1(\alpha) \wedge \langle 0 \rangle (h_1(\alpha)\alpha_1) \\ &\rightarrow h_1(\alpha) \wedge \langle 0 \rangle (h_1(\alpha) \wedge \alpha_1) \\ &\rightarrow h_1(\alpha) \wedge \langle 0 \rangle \alpha_1 \\ &\rightarrow h_1(\alpha) \wedge \alpha_1 \\ &\rightarrow \alpha. \end{aligned}$$

Поскольку $o(h_1(\alpha)0\alpha) > o(\alpha)$, то $h_1(\alpha)0\alpha \approx \alpha$. Таким образом, пользуясь условием 2, получаем $\vdash h_1(\alpha)0\alpha \rightarrow \beta$. Тем самым

$$h_1(\alpha) \sim h_1(h_1(\alpha)0\alpha) \sim h_1(h_1(\alpha)0\alpha \wedge \beta) \sim h_1(h_1(\alpha)0\alpha) \wedge h_1(\beta) \sim h_1(\alpha) \wedge h_1(\beta).$$

Предположим, что $\alpha \not\prec_0 \beta$. Так как $\alpha \approx \beta$ и $<_0$ является отношением строгого линейного порядка, мы имеем $\beta <_0 \alpha$. Используя факт 5 и то, что $\beta_1 <_0 0\beta$, получаем $\vdash \langle 0 \rangle \beta \rightarrow \beta_1$. Поскольку $\vdash \alpha \rightarrow \langle 0 \rangle \beta$, то $\vdash \alpha \rightarrow \beta_1$. Кроме того, $\vdash \alpha \rightarrow h_1(\alpha)$ и $\vdash h_1(\alpha) \rightarrow h_1(\beta)$, следовательно, $\vdash \alpha \rightarrow h_1(\beta)$. Так как $\beta \sim h_1(\beta) \wedge \beta_1$, то $\vdash \alpha \rightarrow \beta$, что противоречит условию 1. Следовательно, $\alpha <_0 \beta$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 5. Для всякого слова α пара $(\alpha, \langle 0 \rangle \alpha)$ удовлетворяет условиям леммы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что выполняется условие 1. С помощью факта 5 из $o(00\alpha) > o(0\alpha)$ получаем $\nvdash \langle 0 \rangle \alpha \rightarrow \langle 0 \rangle \langle 0 \rangle \alpha$. Таким образом, $\nvdash \alpha \rightarrow \langle 0 \rangle \alpha$.

Теперь покажем, что выполняется условие 2. Рассмотрим произвольное слово $\gamma \approx \alpha$ такое, что $\vdash \gamma \rightarrow \alpha$, и докажем, что $\vdash \gamma \rightarrow \langle 0 \rangle \alpha$. Предположим, что $\gamma <_0 \alpha$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \vdash \alpha &\rightarrow \langle 0 \rangle \gamma \\ &\rightarrow \langle 0 \rangle \alpha. \end{aligned}$$

Мы показали, что $\alpha <_0 \alpha$, а это противоречит рефлексивности $<_0$. Таким образом, $\alpha <_0 \gamma$, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $\alpha, \beta \in S_k$. Тогда $\alpha <_k \beta$, если и только если $\alpha <_0 \beta$.

Искомое следует из факта 2 и определений функций o_k и o .

ЛЕММА 6. Для любого k и $\alpha \in S_k$ имеют место следующие факты:

1. $\alpha <_0 \langle k \rangle \alpha$;
2. если $\alpha \in B_k$, то $\forall \beta \in S_k (\alpha <_0 \beta \Rightarrow \vdash \beta \rightarrow \alpha)$;
3. если $\vdash \langle k \rangle \alpha \rightarrow \alpha$, то $\alpha \in B_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Очевидно следует из аксиомы 4 логики GLP.

2. Пусть $\alpha \in B_k$, а β произвольное слово из S_k такое, что $\alpha <_0 \beta$. Докажем, что $\vdash \beta \rightarrow \alpha$. В силу замечания 3 имеем $\alpha <_k \beta$. Так как $\vdash \beta \rightarrow \langle k \rangle \alpha$ и $\vdash \langle k \rangle \alpha \rightarrow \alpha$, получаем требуемое $\vdash \beta \rightarrow \alpha$.

3. Пусть $\vdash \langle k \rangle \alpha \rightarrow \alpha$. С помощью следствия 3 получаем, что $t(\alpha) \leq t(k\alpha) = k$. Следовательно, либо α начинается с k , либо $\alpha = \top$. Тем самым $\alpha \in B_k$.

§ 5. Определимость в теории полурешетки слов

Рассмотрим полурешетку $\mathfrak{S} = (S/\sim, =, \wedge)$, которая, что уже было отмечено ранее, изоморфна полурешетке $\mathbb{W}$. Перед тем, как перейти к доказательству неразрешимости $\text{Th}(\mathfrak{S})$, мы покажем, что в этой теории можно выразить многие естественные понятия, относящиеся к классам эквивалентности слов.

При всех $k \in \mathbb{N}$ определим подмножества $\hat{B}$, $\hat{B}_k$, $\hat{S}_k$ множества $S/\sim$. Для всякого k и $\alpha \in \text{NF}$:

$$[\alpha] \in \hat{B}(\hat{B}_k, \hat{S}_k) \stackrel{\text{def}}{\iff} \alpha \in B(B_k, S_k).$$

При всяком k функции o_k , t_k и предикат $<_k$ согласованы с отношением эквивалентности $\sim$ и, таким образом, могут быть перенесены на $\mathfrak{S}$. Кроме того, на $\mathfrak{S}$ индуцируются функции $h_k: S/\sim \rightarrow S/\sim$, определяемые следующим тождеством, имеющим место для всех $\alpha \in S$ и $k \in \mathbb{N}$: $h_k([\alpha]) = [h_k(\alpha)]$.

Рассмотрим S^k – множество всех слов, любой символ которых меньше или равен k . Принадлежность к S^k , как видно из замечания 4, инвариантна относительно эквивалентных замен. Тем самым корректно следующее определение множества $\hat{S}^k \subset S/\sim$:

$$[\alpha] \in \hat{S}^k \stackrel{\text{def}}{\iff} \alpha \in S^k.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть α – слово, а k – натуральное число. Тогда $\alpha \in S^k$, если и только если $\alpha <_0 \langle k+1 \rangle \top$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя определения функции o , заметим, что наличие в α символов больших k равносильно тому, что

$$o(\alpha) \geq \underbrace{\omega \dots \omega}_{k+1 \text{ раз}} = o(\langle k+1 \rangle \top).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В формулах конъюнкцию как пропозициональную связку будем обозначать символом $\&$, а конъюнкцию как функцию из сигнатуры полурешетки – символом $\wedge$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. В теории $\text{Th}(\mathfrak{S})$ для всякого натурального числа k определимы следующие функции, бинарные отношения и классы:

1. класс $\widehat{B}$;
2. функция $\langle 0 \rangle$ и бинарное отношение $<_0$;
3. классы $\widehat{B}_k$;
4. функции h_k ;
5. классы $\widehat{S}_k$;
6. функции $\langle k \rangle$ и бинарные отношения $<_k$;
7. классы $\widehat{S}^k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Понятие неразложимого слова формализуется в языке рассматриваемой теории:

$$\alpha - \text{неразложимое слово} \iff \forall x \forall y ([\alpha] = x \wedge y \leftrightarrow [\alpha] = x \vee [\alpha] = y).$$

Таким образом, из предложения 1 мы получаем определимость класса $\widehat{B}$.

2. Для всяких слов α и β имеем

$$[\beta] \leq \langle 0 \rangle [\alpha] \iff \vdash \beta \rightarrow \langle 0 \rangle \alpha \iff [\alpha] <_0 [\beta].$$

Тем самым нам осталось выразить функцию $\langle 0 \rangle$. Для всякого слова α

$$\langle 0 \rangle [\alpha] = \max_{\leq} \{x \in \mathfrak{S} \mid x \leq \langle 0 \rangle [\alpha]\} = \max_{\leq} \{x \in \mathfrak{S} \mid [\alpha] <_0 x\}.$$

Зададим формулу $A(x, y)$ языка теории $\text{Th}(\mathfrak{S})$ такую, что всякая пара слов (β, γ) удовлетворяет условию леммы 4, если и только если $\mathfrak{S} \models A([\beta], [\gamma])$:

$$A(x, y) \stackrel{\text{def}}{\iff} x \not\leq y \ \& \ \forall z < x \ (z \leq y).$$

По лемме 4 множество $\{y \in \mathfrak{S} \mid A([\alpha], y)\}$ включено в множество $\{y \in \mathfrak{S} \mid [\alpha] <_0 y\}$. Притом по лемме 5 максимум второго множества содержится в первом. Следовательно, $\langle 0 \rangle [\alpha] = \max_{\leq} (\{y \mid A([\alpha], y)\})$. Таким образом, функция $\langle 0 \rangle$, а тем самым и отношение $<_0$ определимы в теории $\text{Th}(\mathfrak{S})$.

3. Последовательно, в порядке увеличения k , построим определения классов $\widehat{B}_k$. Пусть построены определения классов $\widehat{B}_0, \widehat{B}_1, \dots, \widehat{B}_{k-1}$. Построим определение класса $\widehat{B}_k$. Положим $\widehat{G}_k = \bigcup_{i \geq k} \widehat{B}_i$. Ясно, что $\widehat{B}_k \subset \widehat{G}_k \subset \widehat{S}_k$. При этом

$$\widehat{G}_k = \left(\widehat{B} \setminus \bigcup_{0 \leq i < k} \widehat{B}_i \right) \cup \{[\top]\}$$

и тем самым множество $\widehat{G}_k$ определимо. Пользуясь леммой 6, получаем, что

$$[\alpha] \in \widehat{B}_k \iff [\alpha] \in \widehat{G}_k \ \& \ \forall x \in \widehat{G}_k ([\alpha] <_0 x \rightarrow x \leq [\alpha]).$$

4. Пусть α и β – слова. Покажем, что утверждение $h_k([\alpha]) = h_k([\beta])$ эквивалентно предложению

$$\exists x_0 \in \widehat{B}_0 \dots \exists x_{k-1} \in \widehat{B}_{k-1} ([\alpha] \wedge x_{k-1} \wedge \dots \wedge x_0 = [\beta] \wedge x_{k-1} \wedge \dots \wedge x_0). \quad (2)$$

В силу леммы 3 и того, что для всякого $i < k$ и $x \in B_i$ имеет место $h_k(x) = [\top]$, получаем, что из (2) следует $h_k([\alpha]) = h_k([\beta])$.

Пусть теперь $h_k([\alpha]) = h_k([\beta])$. Докажем, что имеет место (2). Рассмотрим такие слова $\alpha_0, \beta_0 \in B_0, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_{k-1} \in B_{k-1}$, что $\alpha = h_k(\alpha)\alpha_{k-1} \dots \alpha_0$, $\beta = h_k(\beta)\beta_{k-1} \dots \beta_0$. С помощью следствия 2 получаем, что $[\alpha_i] \wedge [\beta_i] \in \widehat{B}_i$ при $i < k$. Заметим, что

$$\begin{aligned} [\alpha] \wedge \bigwedge_{0 \leq i < k} ([\alpha_i] \wedge [\beta_i]) &= h_k([\alpha]) \wedge \bigwedge_{0 \leq i < k} ([\alpha_i] \wedge [\beta_i]) \\ &= h_k([\beta]) \wedge \bigwedge_{0 \leq i < k} ([\alpha_i] \wedge [\beta_i]) = [\beta] \wedge \bigwedge_{0 \leq i < k} ([\alpha_i] \wedge [\beta_i]). \end{aligned}$$

Тем самым выбирая $[\alpha_i] \wedge [\beta_i]$ в качестве x_i , выводим (2). Таким образом, мы доказали требуемую эквивалентность.

Заметим, что

$$h_k([\alpha]) = \max_{\leq} \{x \in \mathfrak{S} \mid h_k(x) = h_k([\alpha])\}.$$

Таким образом, в силу доказанной выше эквивалентности функция h_k определима.

5. Заметим, что для всякого слова $\alpha \in \text{NF}$

$$\alpha \in S_k \iff \alpha = h_k(\alpha),$$

а следовательно,

$$[\alpha] \in \widehat{S}_k \iff [\alpha] = h_k([\alpha]).$$

Тем самым класс $\widehat{S}_k$ определим.

6. Покажем, что выражима функция $x \mapsto \langle k \rangle h_k(x)$. Пусть α – слово. Так как $h_k([\alpha]) \in \widehat{S}_k$ и на множестве $\widehat{S}_k$ отношения $<_0$ и $<_k$ совпадают, мы получаем, что

$$\langle k \rangle h_k([\alpha]) = \min_{<_0} \{x \in \widehat{S}_k \mid h_k([\alpha]) <_0 x\}.$$

Тем самым мы показали искомую выражимость.

Пусть α – слово и слова $\alpha_0 \in B_0 \cap \text{NF}, \dots, \alpha_{k-1} \in B_{k-1} \cap \text{NF}$ таковы, что $\alpha \sim h_k(\alpha) \wedge \alpha_{k-1} \wedge \dots \wedge \alpha_0$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle k \rangle [\alpha] &= [\langle k \rangle (h_k(\alpha) \wedge \alpha_{k-1} \wedge \dots \wedge \alpha_0)] = [\langle k \rangle h_k(\alpha)] \wedge [\langle k \rangle \alpha_{k-1}] \wedge \dots \wedge [\langle k \rangle \alpha_0] \\ &= [\langle k \rangle h_k(\alpha)] \wedge ([\langle k \rangle \top] \wedge [\alpha_{k-1}]) \wedge \dots \wedge ([\langle k \rangle \top] \wedge [\alpha_0]) \\ &= \langle k \rangle h_k([\alpha]) \wedge [\alpha_{k-1}] \wedge \dots \wedge [\alpha_0]. \end{aligned}$$

Кроме того, заметим, что для данного α существует по крайней мере один набор $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$, обладающий указанными выше свойствами. Тем самым мы можем выразить функцию $\langle k \rangle$ таким образом:

$$x = \langle k \rangle[\alpha] \iff \exists y_0 \in \hat{B}_0 \dots \exists y_{k-1} \in \hat{B}_{k-1} \\ (([\alpha] = h_k([\alpha]) \wedge y_{k-1} \wedge \dots \wedge y_0) \ \& \ (x = \langle k \rangle h_k([\alpha]) \wedge y_{k-1} \wedge \dots \wedge y_0)).$$

Порядок $<_k$ определяется через функцию $\langle k \rangle$: $[\alpha] <_k [\beta] \iff [\beta] \leq \langle k \rangle[\alpha]$.

7. Из п. 6 этого предложения и замечания 4 следует, что в рассматриваемой теории класс $\hat{S}^k$ может быть определен следующим образом:

$$[\alpha] \in \hat{S}^k \iff [\alpha] <_0 \langle k+1 \rangle([\top]).$$

Как известно, для всякого ординала $a > 0$ существует и единственно его представление в виде канторовской нормальной формы

$$a = \omega^{a_1} + \omega^{a_2} + \dots + \omega^{a_n}, \quad \text{где } a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n.$$

Определим функцию $r: \text{On} \rightarrow \text{On}$:

1. $r(0) = 0$;
2. пусть канторовская нормальная форма ординала $a > 0$ имеет вид $\omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_n}$, тогда $r(a) = a_n$.

По теореме о канторовской нормальной форме такое определение корректно.

ЛЕММА 7 (см. [13; лемма 3.3]). Пусть a, b и c – ординалы. Если $b < a$ и $c < \omega^{r(a)}$, то $b + c < a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что если $b < a$, то $b + \omega^{r(a)} \leq a$ – из этого факта следует искомое. Пусть $b < a$ и канторовская нормальная форма a имеет вид $\omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_{n-1}} + \omega^{a_n}$. Если $b < \omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_{n-1}}$, то доказываемое очевидно. Таким образом, будем считать, что $b = \omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_{n-1}} + c$, где ординал c таков, что $0 < c < \omega^{a_n}$. Пусть канторовская нормальная форма ординала c имеет вид $\omega^{c_1} + \dots + \omega^{c_m}$. Заметим, что $c_1 < a_n$, а следовательно, существует такой ординал $d \geq 1$, что $c_1 + d = a_n$. Таким образом, имеют место следующие соотношения:

$$c + \omega^{r(a)} = \omega^{c_1} + \dots + \omega^{c_m} + \omega^{c_1+d} \leq \omega^{c_1} \cdot m + \omega^{c_1} \cdot \omega^d \\ = \omega^{c_1} \cdot (m + \omega^d) = \omega^{c_1} \cdot \omega^d = \omega^{a_n}, \\ b + \omega^{r(a)} = \omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_{n-1}} + c + \omega^{r(a)} \leq \omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_{n-1}} + \omega^{a_n} = a.$$

Из факта 2 и определения NF вытекает

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Пусть слова $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ таковы, что $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in S_{k+1} \cap \text{NF}$. Тогда $\alpha_1 k \alpha_2 k \dots k \alpha_n \in \text{NF}$, если и только если

$$o_{k+1}(\alpha_1) \leq o_{k+1}(\alpha_2) \leq \dots \leq o_{k+1}(\alpha_n).$$

Простой проверкой получаем

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Пусть натуральные числа $n \geq 1$, k , слово $\alpha \in S_k \setminus \{\top\}$ и слова $\alpha_1 \in S_{k+1}, \dots, \alpha_n \in S_{k+1}$ таковы, что $\alpha = \alpha_1 k \dots k \alpha_n$. Тогда для всякого m от 1 до n имеет место

$$o_k(\alpha) = o_k(\alpha_m k \dots k \alpha_n) + \omega^{o_{k+1}(\alpha_{m-1})} + \dots + \omega^{o_{k+1}(\alpha_1)}.$$

ЛЕММА 8. Для всякого $k \in \mathbb{N}$ существует формула $\text{In}_k(x, y)$ языка теории $\text{Th}(\mathbb{W})$, обладающая следующими свойствами:

1. для всякого $[\beta] \in \hat{S}_k$ существует лишь конечное число классов эквивалентности $[\alpha] \in \hat{S}_{k+1}$, для которых выполняется $\text{In}_k([\alpha], [\beta])$;
2. для всякого конечного множества $A \subset \hat{S}_{k+1}$ существует $[\beta] \in \hat{S}_k$ такой, что всякий $[\alpha] \in \hat{S}_{k+1}$ принадлежит A тогда и только тогда, когда $\text{In}_k([\alpha], [\beta])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим $\text{In}_k(x, y)$:

$$\text{In}_k(x, y) \stackrel{\text{def}}{\iff} y \neq \top \ \& \ \exists z \in \hat{S}_k \ (h_{k+1}(z) = x \ \& \ z \leq_k y <_k (x \wedge \langle k \rangle z)).$$

Установим, что для всякого слова $\beta \in S_k \cap \text{NF}$ вида $\alpha_1 k \dots k \alpha_n$, где $\alpha_i \in S_{k+1} \cap \text{NF}$ при i от 1 до n , имеет место равенство

$$\{\alpha \in S_{k+1} \cap \text{NF} \mid \text{In}_k([\alpha], [\beta])\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}.$$

Заметим, что отсюда следует выполнение обоих условий на предикат. Теперь докажем требуемое предположение. Если $\beta = \top$, то оба множества пусты. Покажем, что в случае $\beta \neq \top$ для всякого $\alpha \in S_{k+1} \cap \text{NF}$ мы имеем

$$\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \iff \text{In}_k([\alpha], [\beta]).$$

$\Rightarrow$: Пусть $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Покажем, что $\text{In}_k([\alpha], [\beta])$. Пусть m – минимальный индекс из $\{1, \dots, n\}$ такой, что $\alpha = \alpha_m$. В качестве слова, порождающего требуемый класс эквивалентности y , возьмем слово $\gamma = \alpha_m k \dots k \alpha_n$. Таким образом, требуется доказать, что

$$h_{k+1}([\gamma]) = [\alpha], \quad [\gamma] \leq_k [\beta], \quad [\beta] <_k ([\alpha] \wedge \langle k \rangle [\gamma]).$$

Выполнение первых двух условий очевидно. В силу замечания 6 и минимальности m для всякого i от 1 до $m-1$ имеем $o_{k+1}(\alpha_i) < o_{k+1}(\alpha_m)$. Следовательно, учитывая лемму 7, получаем

$$\begin{aligned} o_k(\beta) &= o_k(\alpha_m k \dots k \alpha_n) + \omega^{o_{k+1}(\alpha_{m-1})} + \dots + \omega^{o_{k+1}(\alpha_1)} \\ &< o_k(\alpha_m k \dots k \alpha_n) + \omega^{o_{k+1}(\alpha_m)} = o_k(\alpha_m k \gamma) = o_k(\alpha \wedge \langle k \rangle \gamma). \end{aligned}$$

Таким образом, выполняется оставшееся условие $[\beta] <_k ([\alpha] \wedge \langle k \rangle [\gamma])$.

$\Leftarrow$: Возьмем слово $\alpha \in (S_{k+1} \cap \text{NF}) \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ и докажем, что не выполняется $\text{In}_k([\alpha], [\beta])$. Предположим противное. Таким образом, существует слово $\gamma \in S_k \cap \text{NF}$ такое, что $h_{k+1}([\gamma]) = [\alpha]$, $[\gamma] \leq_k [\beta]$ и $[\beta] <_k ([\alpha] \wedge \langle k \rangle [\gamma])$. В силу замечания 6 существует натуральное число $s \leq n$ такое, что

$$\forall i \leq s \ (o_{k+1}(\alpha_i) < o_{k+1}(\alpha)), \quad \forall i > s \ (o_{k+1}(\alpha_i) > o_{k+1}(\alpha)).$$

Поскольку $[\gamma] \leq_k [\beta]$ и $o_k(\gamma) \geq o_k(\alpha)$, имеем $o_k(\alpha) \leq o_k(\beta)$. Следовательно, $[\alpha] \leq_{k+1} [\alpha_n]$ и тем самым $s < n$. Разберем возможные варианты сравнения $o_k(\gamma)$ и $o_k(\alpha_{s+1}k \dots k\alpha_n)$:

1. $o_k(\gamma) < o_k(\alpha_{s+1}k \dots k\alpha_n)$. Учитывая, что $r(o_k(\alpha_{s+1}k \dots k\alpha_n)) = o_{k+1}(\alpha_{s+1})$ и лемму 7, имеем

$$o_k(\alpha \wedge \langle k \rangle \gamma) = o_k(\gamma) + \omega^{o_{k+1}(\alpha)} < o_k(\alpha_{s+1}k \dots k\alpha_n) \leq o_k(\beta).$$

Тем самым мы пришли к противоречию с условием $[\beta] <_k ([\alpha] \wedge \langle k \rangle [\gamma])$.

2. $o_k(\gamma) = o_k(\alpha_{s+1}k \dots k\alpha_n)$. В этом случае имеем

$$\alpha = h_{k+1}(\gamma) = h_{k+1}(\alpha_{s+1}k \dots k\alpha_n) = \alpha_{s+1},$$

но $\alpha \in (S_{k+1} \cap \text{NF}) \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – противоречие.

3. $o_k(\gamma) > o_k(\alpha_{s+1}k \dots k\alpha_n)$. Учитывая лемму 7 и то, что $r(o_k(\gamma)) = o_{k+1}(\alpha)$, получаем

$$o_k(\beta) = o_k(\alpha_{s+1}k \dots k\alpha_n) + \omega^{o_{k+1}(\alpha_s)} + \dots + \omega^{o_{k+1}(\alpha_1)} < o_k(\gamma),$$

а это противоречит условию $[\gamma] \leq_k [\beta]$.

Таким образом, ни один из случаев не возможен, и мы пришли к противоречию, что завершает доказательство леммы.

§ 6. Неразрешимые теории

Для доказательства неразрешимости $\text{Th}(\mathfrak{S})$ нам потребуется рассмотреть другую неразрешимую теорию и построить ее интерпретацию в $\text{Th}(\mathfrak{S})$.

Рассмотрим слабую монадическую теорию второго порядка WS1S (см. [14]). Для всякого множества F обозначим $\mathcal{P}_{\text{fin}}(F)$ множество всех конечных подмножеств F . Язык $\mathcal{L}_0$ теории WS1S является языком исчисления предикатов с двумя сортами переменных. Переменные $x, y, z, \dots$ пробегают множество $\mathbb{N}$, переменные $X, Y, Z, \dots$ пробегают $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$. В языке $\mathcal{L}_0$ имеется предикат равенства $x = y$ для натуральных чисел, функция следования $S(x) = x + 1$ из натуральных чисел в натуральные числа и предикат принадлежности $x \in Y$ числа x множеству Y . Таким образом, нами также была задана модель $\mathfrak{M}_0 = (\mathbb{N}, \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}), =, S, \in)$ языка $\mathcal{L}_0$. Теория WS1S состоит из всех предложений языка $\mathcal{L}_0$, истинных в модели $\mathfrak{M}_0$.

Определим теорию U , консервативно расширяющую WS1S. Язык $\mathcal{L}_1$ теории U расширяет язык $\mathcal{L}_0$ новым сортом переменных $\Gamma, \Delta, \Theta, \dots$, пробегающими множество $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}))$. Также язык $\mathcal{L}_1$ содержит предикат $\in_1$ принадлежности элементов $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ элементам $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}))$. Таким образом, мы также задали модель $\mathfrak{M}_1 = (\mathbb{N}, \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}), \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})), =, \in, \in_1)$ языка $\mathcal{L}_1$. Теория U состоит из всех предложений языка $\mathcal{L}_1$, истинных в модели $\mathfrak{M}_1$.

Хорошо известно, что теория WS1S разрешима [14]. С другой стороны легко видеть, что теория U неразрешима. Для удобства читателя приведем простое рассуждение, показывающее это.

ЛЕММА 9. *Теория U неразрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим обогащение теории WS1S функцией $h(x) = 2x$. Эта теория, как известно, неразрешима [15]. Построим эффективную интерпретацию этой теории в U , тем самым получим неразрешимость U .

Мы будем считать двоичной записью числа n функцию $\zeta_n : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ такую, что для некоторого k при всех $l > k$ имеет место $\zeta_n(l) = 0$ и $\sum_{i \leq k} 2^i \zeta_n(i) = n$. Как несложно видеть, для всякого натурального числа его двоичная запись, в описанном выше смысле, существует и единственна.

Натуральные числа будем представлять элементами $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$:

$$n \mapsto n^I := \{k \mid \zeta_n(k) = 1\}.$$

Конечные множества натуральных чисел будем представлять множествами, составленными из представлений их элементов:

$$X \mapsto X^I := \{n^I \mid n \in X\}.$$

Несложно видеть, что для построения интерпретации нам осталось определить интерпретации $S^I(X)$ и $h^I(X)$ функций $S(x)$ и $h(x)$ соответственно. Выразим функцию $h^I(X)$:

$$h^I(X) = Y \stackrel{\text{def}}{\iff} 0 \notin Y \ \& \ \forall x (x \in X \leftrightarrow S(x) \in Y).$$

Рассмотрим функцию $\text{Tran} : \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$, задаваемую следующей эквивалентностью, выполненной для всех натуральных чисел n и k :

$$k \in \text{Tran}(n^I) \stackrel{\text{def}}{\iff} \zeta_n(k) \neq \zeta_{n+1}(k).$$

Заметим, что функция $\text{Tran}(X)$ определима в U :

$$\text{Tran}(X) = Y \iff 0 \in Y \ \& \ \forall x (S(x) \in Y \leftrightarrow x \in Y \ \& \ x \in X).$$

Теперь выразим функцию $S^I(X)$:

$$S^I(X) = Y \stackrel{\text{def}}{\iff} x \in Y \leftrightarrow (x \in X \ \& \ x \notin \text{Tran}(X)) \vee (x \notin X \ \& \ x \in \text{Tran}(X)).$$

ЛЕММА 10. *Теория $\text{Th}(\mathfrak{S})$ неразрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что теория U эффективно интерпретируется в теории $\text{Th}(\mathfrak{S})$, и тем самым по лемме 9 мы получим неразрешимость $\text{Th}(\mathfrak{S})$. Поставим в соответствие каждому натуральному числу n элемент $\langle 2 \rangle^n [\top]$. Заметим, что элементу $x \in \mathfrak{S}$ соответствует некоторое натуральное число тогда и только тогда, когда $x \in \hat{S}_2 \cap \hat{S}^2$. Предикат равенства для натуральных чисел интерпретируется равенством для классов эквивалентности слов. Функция S интерпретируется функцией $\langle 2 \rangle$. Множества $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ и $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}))$ будем интерпретировать множествами $\hat{S}_1$ и $\hat{S}_0$ соответственно. Предикат $\in$

будем интерпретировать предикатом In_1 . Зададим предикат $\in_1^I$, интерпретирующий $\in_1$:

$$y \in_1^I x \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists z \in \widehat{S}_1 (\text{In}_0(z, x) \ \& \ \forall w \in \widehat{S}_2 \cap \widehat{S}^2 (\text{In}_1(w, y) \leftrightarrow \text{In}_1(w, z))).$$

Определим функции $\text{Ir}_1: \widehat{S}_1 \rightarrow \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ и $\text{Ir}_2: \widehat{S}_0 \rightarrow \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}))$:

$$\text{Ir}_1(x) = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{In}_1(\langle 2 \rangle^n [\top], z)\}, \quad \text{Ir}_2(x) = \{\text{Ir}_1(y) \mid y \in \widehat{S}_1, \text{In}_0(y, x)\}.$$

Заметим, что в силу леммы 8 функции Ir_1 и Ir_2 корректно определены и сюръективны.

Рассмотрим некоторую формулу $A(x_1, \dots, x_{n_1}, X_1, \dots, X_{n_2}, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n_3})$ языка $\mathfrak{L}_1$, мы построили ее интерпретацию $A^I(y_1, \dots, y_{n_1}, z_1, \dots, z_{n_2}, w_1, \dots, w_{n_3})$ – формулу языка теории $\text{Th}(\mathfrak{S})$. Покажем, что для произвольных $s_1, \dots, s_{n_1} \in \mathbb{N}$, $[\alpha_1], \dots, [\alpha_{n_2}] \in \widehat{S}_1$ и $[\beta_1], \dots, [\beta_{n_3}] \in \widehat{S}_0$ следующие два утверждения эквивалентны:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} \models A^I(\langle 2 \rangle^{s_1} [\top], \dots, \langle 2 \rangle^{s_{n_1}} [\top], [\alpha_1], \dots, [\alpha_{n_2}], [\beta_1], \dots, [\beta_{n_3}]), \\ \mathfrak{M}_1 \models A(s_1, \dots, s_{n_1}, \text{Ir}_1([\alpha_1]), \dots, \text{Ir}_1([\alpha_{n_2}]), \text{Ir}_2([\beta_1]), \dots, \text{Ir}_2([\beta_{n_3}])). \end{aligned}$$

Покажем требуемое индукцией по длине формулы A . Пользуясь определениями Ir_1 и Ir_2 , получаем требуемое для атомарных A . Если A имеет вид $\neg B$ или $B * C$, где $*$ $\in \{\&, \vee, \rightarrow\}$, то предположение индукции очевидно выполнено. Если A начинается с квантора, то для получения предположения индукции пользуемся сюръективностью Ir_1 и Ir_2 .

Тем самым, воспользовавшись доказанным фактом для замкнутых формул A , получаем корректность построенной нами интерпретации U в $\text{Th}(\mathfrak{S})$.

Используя изоморфизм структур $\mathfrak{S}$ и $\mathbb{W}$, получаем теорему 1.

ТЕОРЕМА 1. *Теории $\text{Th}(\mathbb{W})$ и $\text{Th}(\widehat{\mathbb{W}})$ неразрешимы.*

Теорема 1 может быть усилена.

Для натуральных чисел n и m , что $n \geq m \geq 0$, введем обозначения:

1. $S_m^n = S_m \cap S^n$;
2. $B_m^n = B_m \cap S^n$;
3. $B^n = B \cap S^n$.

ТЕОРЕМА 2. *Теория $\text{Th}(W_2, =, \wedge)$ неразрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не будем приводить здесь подробного доказательства. Перечислим необходимые изменения в доказательстве теоремы 1. Требуется доказать замкнутость S^2 относительно конъюнкции. Нужно изменить область действия кванторов с S на S^2 в определении разложимого слова, что не повлияет на доказательство предложения 1. В лемме 4 нужно потребовать, чтобы $\alpha, \beta \in S^2$ и, кроме того, чтобы в п. 2 слово $\gamma \in S^2$. Аналогично подмножествам $\widehat{B}$, $\widehat{B}_k$, $\widehat{S}_k$ множества $S/\sim$ вводятся подмножества $\widehat{B}^2$, $\widehat{B}_k^2$, $\widehat{S}_k^2$ множества $S^2/\sim$. Модифицируется предложение 2: теперь оно говорит о выразимости

в $\text{Th}(S^2/\sim, =, \wedge)$, теперь k пробегает значения из множества $\{0, 1, 2\}$, в пп. 1, 3 и 5 множества $\widehat{B}$, $\widehat{B}_k$ и $\widehat{S}_k$ заменяются на множества $\widehat{B}^2$, $\widehat{B}_k^2$ и $\widehat{S}_k^2$ соответственно, п. 7 становится не нужен. Далее заметим, что при изменении области действия кванторов все определения из предложения 2 сохраняются и для теории $\text{Th}(S^2/\sim, =, \wedge)$. В лемме 8 нужно ограничиться словами из S^2 и $k \in \{0, 1\}$. Этих изменений достаточно для завершения доказательства теоремы 2.

§ 7. Слова из двух символов

В силу замечания 4 множество S^1 замкнуто относительно эквивалентных замен слов. Покажем, что множество S^1 замкнуто относительно конъюнкции. Заметим, что всякое слово α принадлежит S^1 тогда и только тогда, когда оно имеет вид $\beta\gamma$, где $\beta \in B_1^1$, а $\gamma \in B_0^1$. Пусть $\alpha_1 = \beta_1\gamma_1$, $\alpha_2 = \beta_2\gamma_2$, где $\beta_1, \beta_2 \in B_1^1$, а $\gamma_1, \gamma_2 \in B_0^1$. Тогда

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \sim (\beta_1 \wedge \beta_2) \wedge (\gamma_1 \wedge \gamma_2) \sim \beta_i \wedge \gamma_j \sim \beta_i \gamma_j,$$

для некоторых $i, j \in \{1, 2\}$. Следовательно, $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \in S^1$. Тем самым аналогично $S/\sim$ на $S^1/\sim$ вводятся функции $\wedge$, $\langle 0 \rangle$, $\langle 1 \rangle$. Отсюда и из теоремы Джапаридзе об арифметической полноте логики GLP следует изоморфизм алгебр $(S^1/\sim, =, \wedge, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle)$ и $(W_1, =, \wedge, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle)$.

Для доказательства разрешимости теории $\text{Th}(W_1, =, \wedge, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle)$ мы далее построим интерпретацию теории $\text{Th}(S^1/\sim, =, \wedge, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle)$ в теории $\text{Th}(\omega^\omega, =, \leq, +)$, которая, как известно разрешима [16].

ЛЕММА 11. В теории $\text{Th}(\omega^\omega, =, \leq, +)$ определимы следующие функции и множества:

1. множество $\{\omega^x \mid 1 \leq x < \omega\}$;
2. ограниченная на множестве $\{\omega^x \mid 1 \leq x < \omega\}$ функция умножения на ω справа: $x \mapsto x \cdot \omega$;
3. множество $\{x \in \omega^\omega \mid r(x) = 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Докажем, что для всякого $a \in \omega^\omega$

$$a \in \{\omega^x \mid 1 \leq x < \omega\} \iff a \neq 0 \ \& \ a \neq 1 \ \& \ \forall x < a \ (\forall y < a \ (x + y < a)).$$

Заметим, что если $a \in \{0, 1\}$, то обе части рассматриваемой эквивалентности ложны. Тем самым мы переходим к случаю $a \notin \{0, 1\}$.

Импликация слева направо имеется в силу леммы 7.

Докажем импликацию справа налево. Пусть $a \notin \{\omega^x \mid 1 \leq x < \omega\}$. Найдем ординалы $b, c < a$ такие, что $b + c \geq a$. Рассмотрим канторовскую нормальную форму $a = \omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_n}$, где $a_1 \geq \dots \geq a_n$ и $n \geq 2$. Заметим, что

$$(\omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_{n-1}}) + (\omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_{n-1}}) \geq \omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_{n-1}} + \omega^{a_1} \geq \omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_n} = a.$$

Тем самым мы можем положить $b = c = \omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_{n-1}}$.

2. $\omega^a \cdot \omega = b \iff b = \min\{\omega^x \mid 1 \leq x < \omega\} \cap \{x \mid x > \omega^a\}$.
3. $r(a) = 0 \iff a = 0 \vee \exists x \ (a = x + 1)$.

ТЕОРЕМА 3. Теория $\text{Th}(W_1, =, \wedge, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle)$ разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства разрешимости теории $\text{Th}(S^1/\sim, =, \wedge, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle)$ построим ее эффективную интерпретацию в теории $\text{Th}(\omega^\omega, =, \leq, +)$ и далее воспользуемся разрешимостью последней. Для всякого $\alpha \in S$ представим $[\alpha]$ парой $(o(\alpha), o(h_1(\alpha)))$. Заметим, что таким образом мы построили инъекцию из $S^1/\sim$ в $\omega^\omega \times \omega^\omega$. Отметим, что множество всех пар ординалов, соответствующих словам, равно

$$\{(x + y, y) \mid r(x) = 0, y \in \{\omega^z \mid 1 \leq z < \omega\} \cup \{0\}\}.$$

Зададим функции $\langle 0 \rangle^I: (\omega^\omega \times \omega^\omega) \rightarrow (\omega^\omega \times \omega^\omega)$ и $\langle 1 \rangle^I: (\omega^\omega \times \omega^\omega) \rightarrow (\omega^\omega \times \omega^\omega)$ следующими тождествами:

$$\langle 0 \rangle^I(a, b) = (a + 1, 0), \quad \langle 1 \rangle^I(a, b) = (a + (1 + b) \cdot \omega, (1 + b) \cdot \omega).$$

Заметим, что $\langle 0 \rangle^I$ и $\langle 1 \rangle^I$ являются интерпретациями функций $\langle 0 \rangle$ и $\langle 1 \rangle$ соответственно.

Определим бинарную операцию $\wedge^I: (\omega^\omega \times \omega^\omega)^2 \rightarrow (\omega^\omega \times \omega^\omega)$. Пусть ординалы $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \omega^\omega$. Если $a_2 > a_1$, то положим

$$(a_1, b_1) \wedge^I (a_2, b_2) = (a_2, b_2) \wedge^I (a_1, b_1).$$

Тем самым мы далее считаем, что $a_1 \geq a_2$. Если $b_1 \geq b_2$, то положим $(a_1, b_1) \wedge^I (a_2, b_2) = (a_1, b_1)$, иначе положим $(a_1, b_1) \wedge^I (a_2, b_2) = (a_1 + b_2, b_2)$. Таким образом, мы определили операцию $\wedge^I$ на всех значениях аргументов.

Покажем, что коммутативно ограничение $\wedge^I$ на пары ординалов, являющиеся представлениями каких-то слов. Рассмотрим слова α_1, α_2 и соответствующие им пары ординалов

$$(a_1, b_1) = (o(\alpha_1), o(h_1(\alpha_1))), \quad (a_2, b_2) = (o(\alpha_2), o(h_1(\alpha_2))).$$

Докажем, что

$$(a_1, b_1) \wedge^I (a_2, b_2) = (a_2, b_2) \wedge^I (a_1, b_1).$$

Если $a_1 \neq a_2$, то получаем требуемое непосредственно из определения. Если $a_1 = a_2$, то $b_1 = o(h_1(\alpha)) = o(h_1(\beta)) = b_2$. Следовательно

$$(a_1, b_1) \wedge^I (a_2, b_2) = (a_1, b_1) = (a_2, b_2) = (a_2, b_2) \wedge^I (a_1, b_1).$$

Пусть пары (a_1, b_1) , (a_2, b_2) и (a_3, b_3) представляют классы эквивалентности $[\alpha_1]$, $[\alpha_2]$ и $[\alpha] \wedge [\beta]$ соответственно. Покажем, что совпадают пары (a_3, b_3) и $(a_4, b_4) = (a_1, b_1) \wedge^I (a_2, b_2)$, тем самым покажем, что $\wedge^I$ интерпретирует конъюнкцию. Из леммы 3 и факта 5 следует, что $b_3 = b_4$. Перейдем к доказательству того, что $a_3 = a_4$. В силу коммутативности ограничения $\wedge^I$ без ограничения общности будем считать, что $o(\alpha_1) \geq o(\alpha_2)$. Пусть $\beta \in B_0^1$ таково, что $\alpha_2 = h_1(\alpha_2)\beta$. Заметим, что $o(\alpha_1) \geq o(\alpha_2) \geq o(\beta)$, а следовательно из п. 2 леммы 6 получаем $\vdash \alpha_1 \rightarrow \beta$. Таким образом,

$$[\alpha_1] \wedge [\alpha_2] = [\alpha_1] \wedge [h_1(\alpha_2)].$$

Предположим, что $b_1 \geq b_2$. Отсюда мы получаем, что

$$[\alpha_1] \leq [h_1(\alpha_1)] \leq [h_1(\alpha_2)].$$

Следовательно $[\alpha_1] \wedge [\alpha_2] = [\alpha_1]$. Таким образом, в этом случае $a_3 = a_4$.

Теперь предположим, что $b_1 < b_2$. Пусть $\gamma \in B_0^1$ таково, что $\alpha_1 = h_1(\alpha_1)\gamma$. Тогда

$$\begin{aligned} [\alpha_1] \wedge [\alpha_2] &= [\alpha_1] \wedge [h_1(\alpha_2)] = [h_1(\alpha_1)] \wedge [\gamma] \wedge [h_1(\alpha_2)] \\ &= [h_1(\alpha_2)] \wedge [\gamma] = [h_1(\alpha_2)\gamma]. \end{aligned}$$

Заметим, что $o(h_1(\alpha_2)\gamma) = o(h_1(\alpha_2)0h_1(\alpha_1)\gamma)$. В силу замечания 7 имеется равенство

$$\begin{aligned} o([\alpha_1] \wedge [\alpha_2]) &= o(h_1(\alpha_2)\gamma) = o(h_1(\alpha_2)0h_1(\alpha_1)\gamma) \\ &= o(\alpha_1) + \omega^{o_1(h_1(\alpha_2))} = o(\alpha_1) + o(h_1(\alpha_2)). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$a_3 = o([\alpha_1] \wedge [\alpha_2]) = o(\alpha_1) + o(h_1(\alpha_2)) = a_4.$$

Тем самым мы доказали, что $\wedge^I$ интерпретирует конъюнкцию на классах эквивалентности слов.

В силу леммы 11 все построенные выше определения формализуются в языке $\text{Th}(\omega^\omega, =, \leq, +)$. Тем самым была построена требуемая интерпретация, из чего следует разрешимость теорий $\text{Th}(S^1/\sim, =, \wedge, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle)$ и $\text{Th}(W_1, =, \wedge, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle)$.

Список литературы

- [1] A. Tarski, “Arithmetical classes and types of Boolean algebras”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 63–64.
- [2] A. Grzegorezyk, “Undecidability of some topological theories”, *Fund. Math.*, **38** (1951), 137–152.
- [3] В. В. Рыбаков, “Элементарные теории свободных топобулевых и псевдобулевых алгебр”, *Матем. заметки*, **37:6** (1985), 797–802; англ. пер.: V. V. Rybakov, “Elementary theories of free topo-Boolean and pseudo-Boolean algebras”, *Math. Notes*, **37:6** (1985), 435–438.
- [4] S. N. Artemov, L. D. Beklemishev, “On propositional quantifiers in provability logic”, *Notre Dame J. Formal Logic*, **34:3** (1993), 401–419.
- [5] V. Yu. Shavrukov, “Undecidability in diagonalizable algebras”, *J. Symbolic Logic*, **62:1** (1997), 79–116.
- [6] Л. Д. Беклемишев, “Схемы рефлексии и алгебры доказуемости в формальной арифметике”, *УМН*, **60:2** (2005), 3–78; англ. пер.: L. D. Beklemishev, “Reflection principles and provability algebras in formal arithmetic”, *Russian Math. Surveys*, **60:2** (2005), 197–268.
- [7] L. D. Beklemishev, “Provability algebras and proof-theoretic ordinals. I”, *Ann. Pure Appl. Logic*, **128:1–3** (2004), 103–123.

- [8] L. D. Beklemishev, A. Visser, “Problems in the logic of provability”, *Mathematical problems from applied logic*, v.I, Int. Math. Ser. (N. Y.), **4**, Springer-Verlag, New York, 2006, 77–136.
- [9] G. Lee, “A comparison of well-known ordinal notation systems for ε_0 ”, *Ann. Pure Appl. Logic*, **147**:1–2 (2007), 48–70.
- [10] Г. К. Джапаридзе, *Модально-логические средства исследования доказуемости*, Дисс. . . . канд. филос. наук, МГУ, М., 1986.
- [11] K. N. Ignatiev, “On strong provability predicates and the associated modal logics”, *J. Symbolic Logic*, **58**:1 (1993), 249–290.
- [12] L. D. Beklemishev, “Veblen hierarchy in the context of provability algebras”, *Logic, methodology and philosophy of science* (Oviedo, Spain, 2003), Kings College Publ., London, 2005, 65–78.
- [13] L. D. Beklemishev, J. J. Joosten, M. Vervoort, “A finitary treatment of the closed fragment of Japaridze’s provability logic”, *J. Logic Comput.*, **15**:4 (2005), 447–463.
- [14] J. R. Büchi, “Weak second-order arithmetic and finite automata”, *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, **6** (1960), 66–92.
- [15] C. C. Elgot, M. O. Rabin, “Decidability and undecidability of extensions of second (first) order theory of (generalized) successor”, *J. Symbolic Logic*, **31**:2 (1966), 169–181.
- [16] J. R. Büchi, “Decision methods in the theory of ordinals”, **71**:5 (1965), 767–770.

Ф. Н. Пахомов (F. N. Pakhomov)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: pakhfn@gmail.com

Поступила в редакцию

02.05.2011