Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Коломойцев, Аппроксимативные свойства обобщенных средних Бохнера–Рисса в пространствах Харди H_p , $0 < p \leq 1$, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 8, 79–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7888>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 17:41:54

УДК 517.551

Ю. С. Коломойцев

Аппроксимативные свойства обобщенных средних Бохнера–Рисса в пространствах Харди H_p , $0 < p \leq 1$

Получен критерий сходимости обобщенных сферических средних и ℓ_1 -средних Бохнера–Рисса в пространствах Харди $H_p(D^n)$, $0 < p \leq 1$, где D^n – единичный поликруг. Найдены точные порядки приближения функций обобщенными ℓ_q -средними Бохнера–Рисса через K -функционал и через специальные модули гладкости.

Библиография: 31 название.

Ключевые слова: пространства Харди в поликруге, обобщенные средние Бохнера–Рисса, K -функционал, модуль гладкости, неравенства типа Бернштейна.

§ 1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n -мерное вещественное евклидово пространство элементов

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad (x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \\ |x|_q = (|x_1|^q + \dots + |x_n|^q)^{1/q}, \quad |x| = |x|_2,$$

$\mathbb{R}_+^n$ – подмножество точек из $\mathbb{R}^n$ с неотрицательными координатами, $\mathbb{Z}^n$ – с целыми координатами, $\mathbb{N}^n$ – с натуральными координатами, $\mathbb{Z}_+^n = \mathbb{Z}^n \cap \mathbb{R}_+^n$. Единичный поликруг обозначим через

$$D^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, j = 1, \dots, n\}, \quad D = D^1,$$

а единичный тор – через

$$\mathbb{T}^n = \{\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n : |\zeta_j| = 1, j = 1, \dots, n\}, \quad \mathbb{T} = \mathbb{T}^1.$$

Всюду в статье C , C_1 и C_2 – некоторые положительные константы, зависящие от указанных параметров, а запись $A(f, \varepsilon) \asymp B(f, \varepsilon)$ означает двустороннее неравенство с положительными константами, не зависящими от f и ε .

Аналитическая в единичном поликруге D^n функция f принадлежит $H_p(D^n)$, если

$$\|f\|_{H_p} = \sup_{0 < \rho < 1} \left(\int_{\mathbb{T}^n} |f(\rho \zeta)|^p d\sigma_n(\zeta) \right)^{1/p} < \infty,$$

где σ_n – нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}^n$.

Для каждой функции $f \in H_p(D^n)$ на торе $\mathbb{T}^n$ существует почти всюду радиальная граничная функция, которую мы также обозначаем буквой f (см., например, [1]), причем $f \in L_p(\mathbb{T}^n)$ и

$$\|f\|_{H_p} = \|f\|_p,$$

где $\|\cdot\|_p$ – (квази-)норма в пространстве $L_p(\mathbb{T}^n)$.

Любая функция из $H_p(D^n)$, $p > 0$, разлагается в поликруге D^n в абсолютно сходящийся степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} c_k(f) z^k,$$

где $z^k = z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$, $c_k(f) = c_{k_1, \dots, k_n}(f)$ – коэффициенты ряда Тейлора функции f .

Обобщенные ℓ_q -средние Бохнера–Рисса определим следующим образом:

$$R_{\varepsilon; q}^{\beta, \delta}(f, z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} (1 - (\varepsilon|k|_q)^\beta)_+^\delta c_k(f) z^k, \quad (1.1)$$

где $x_+ = \max\{x, 0\}$. При $q = 2$ средние (1.1) называют обобщенными сферическими средними Бохнера–Рисса. Такие средние мы будем обозначать символом $R_\varepsilon^{\beta, \delta}$. При $q = 1$ средние (1.1) называют обобщенными ℓ_1 -средними Бохнера–Рисса.

Отметим, что вопросы сходимости для средних (1.1), а также двусторонние оценки приближения функций рассматриваемыми средними в $H_p(D^n)$ при $0 < p \leq 1$ и, конечно, при $p > 1$ изучались в работах [2]–[11]. Далее рассматриваем случай $0 < p \leq 1$. Р. М. Тригубом в работе [8] были получены точные двусторонние оценки приближения функций из $H_p(D^n)$ сферическими средними Бохнера–Рисса с показателем $\delta > n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$ и четным $\beta > 0$ через K -функционал и через специальный модуль гладкости. При $\beta > n(\frac{1}{p} - 1)$ аналогичные оценки приближения через K -функционал были получены автором в [9]. В работах С. Г. Прибегина [10], [11] с использованием методов статьи [3] были получены двусторонние оценки приближения функций $f \in H^p(D^n)$ ℓ_1 -средними Бохнера–Рисса с показателями $\delta > \frac{n}{p} - 1$ и $\beta \in \mathbb{N} \cup [n(\frac{1}{p} + 1), \infty)$. Отметим, что при $n = 1$ оценки приближения в [10], [11] являются точными, а при $n \geq 2$ оценка сверху отличается от оценки снизу.

В настоящей работе получен критерий сходимости в $H_p(D^n)$, $0 < p \leq 1$, обобщенных сферических средних и ℓ_1 -средних Бохнера–Рисса, а также найдены точные порядки приближения функций ℓ_q -средними Бохнера–Рисса через K -функционалы и через специальные модули гладкости. Результаты работы обобщают на случай произвольного $\beta > 0$ соответствующие результаты статей [8] и [9], а также по существу усиливают и дополняют с точки зрения точности и применимости основные результаты работ [10]–[12].

Настоящая статья имеет следующую структуру. В § 2 излагаются основные результаты. В § 3 приводятся вспомогательные теоремы о мультипликаторах в аналитических и вещественных пространствах Харди H_p , а также доказывается новое неравенство типа Бернштейна для аналитических полиномов. В § 4 доказываются основные результаты статьи.

§ 2. Формулировка основных результатов

2.1. Критерии сходимости. Прежде чем перейти к изучению вопроса о скорости приближения функций обобщенными средними Бохнера–Рисса, выясним, при каких значениях параметров β и δ средние $R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}$ сходятся в пространстве $H_p(D^n)$. Как обычно, средние $R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}$ будем называть сходящимися в $H_p(D^n)$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f - R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}(f)\|_p = 0$$

для каждой функции $f \in H_p(D^n)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < p \leq 1$ и $\beta > 0$.

- 1) Средние $R_{\varepsilon}^{\beta,\delta}$ сходятся в $H_p(D^n)$, если и только если $\delta > n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$.
- 2) Средние $R_{\varepsilon,1}^{\beta,\delta}$ сходятся в $H_p(D^n)$, если и только если $\delta > \frac{1}{p} - 1$.

Мы покажем (см. ниже лемму 6), что при любом натуральном q средние $R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}$ сходятся в $H_p(D^n)$, $0 < p \leq 1$, если $\beta > 0$ и $\delta > n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$. В случае $q \geq 3$ точные значения параметра δ , при которых данные средние сходятся, не известны. Однако полученные ниже оценки приближения средними $R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}$ в определенном смысле неупущаемы, поскольку в соответствующих формулировках предполагается только сходимость рассматриваемых средних.

2.2. Двусторонние оценки приближения через K -функционал.

Оценивать скорость приближения функции ее средними можно с помощью различных объектов. Одним из таких объектов является K -функционал. Для исследования скорости приближения функций обобщенными ℓ_q -средними Бохнера–Рисса мы будем использовать K -функционал пары пространств, определяемых дифференциальным оператором

$$\mathcal{D}_q^\beta f(z) = \sum_k |k|_q^\beta c_k(f) z^k.$$

Положим

$$K_{\beta,q}(f, \varepsilon)_p = \inf_{\mathcal{D}_q^\beta g \in H_p} \{ \|f - g\|_p + \varepsilon^\beta \|\mathcal{D}_q^\beta g\|_p \}. \quad (2.1)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in H_p(D^n)$, $0 < p \leq 1$, $q \in \mathbb{N}$, $\beta > 0$ и средние $R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}$ сходятся в $H_p(D^n)$. Тогда

$$\|f - R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}(f)\|_p \asymp K_{\beta,q}(f, \varepsilon)_p, \quad \varepsilon > 0.$$

2.3. Двусторонние оценки приближения через модули гладкости.

2.3.1. ℓ_q -средние Бохнера–Рисса. Приведем необходимые обозначения. Биномиальные коэффициенты дробного порядка $\beta > 0$ обозначим через

$$\binom{\beta}{k} = \frac{\beta(\beta-1) \cdots (\beta-k+1)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N},$$

и $\binom{\beta}{0} = 1$. Мы будем неоднократно использовать следующую хорошо известную оценку (см., например, [13; гл. 1, § 1]):

$$\left| \binom{\beta}{k} \right| \leq \frac{C(\beta)}{k^{\beta+1}}. \quad (2.2)$$

Введем специальный модуль гладкости

$$\omega_{\beta,q}(f, \varepsilon)_p = \left\| \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\beta}{\nu} (-1)^\nu P_{\nu\varepsilon;q}(f) \right\|_p,$$

где

$$P_{\varepsilon;q}(f, z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} e^{-\varepsilon|k|_q} c_k(f) z^k$$

— ℓ_q -средние Абеля–Пуассона функции $f \in H_p(D^n)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in H_p(D^n)$, $0 < p \leq 1$, $q \in \mathbb{N}$, $\beta > 0$ и средние $R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}$ сходятся в $H_p(D^n)$. Тогда

$$\|f - R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}(f)\|_p \asymp \omega_{\beta,q}(f, \varepsilon)_p, \quad \varepsilon > 0.$$

Выбирая параметр δ в теоремах 2 и 3 достаточно большим, используя при этом лемму 6 (см. ниже), сразу получаем следующую формулу для вычисления K -функционала (2.1).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f \in H_p(D^n)$, $0 < p \leq 1$, $q \in \mathbb{N}$ и $\beta > 0$. Тогда

$$K_{\beta,q}(f, \varepsilon)_p \asymp \omega_{\beta,q}(f, \varepsilon)_p, \quad \varepsilon > 0.$$

2.3.2. Сферические средние Бохнера–Рисса. Рассмотрим специальный модуль гладкости

$$\begin{aligned} \omega_{\beta}^{0,m}(f, \varepsilon)_p &= \left\| \int_{|x^{(1)}| \leq 1} dx^{(1)} \dots \int_{|x^{(m)}| \leq 1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\beta}{\nu} (-1)^\nu f((\cdot) e^{i\varepsilon\nu(x^{(1)} + \dots + x^{(m)})}) dx^{(m)} \right\|_p, \end{aligned}$$

где интеграл (усреднение) берется по декартову произведению m единичных шаров в $\mathbb{R}^n$. Отметим, что при четных β данный модуль гладкости был введен в [8].

Важную роль при доказательстве оценок приближения функций средними $R_{\varepsilon}^{\beta,\delta}$ через модуль гладкости $\omega_{\beta}^{0,m}$ играет условие

$$\int_{|x^{(1)}| \leq 1} dx^{(1)} \dots \int_{|x^{(m)}| \leq 1} (1 - e^{i(t, x^{(1)} + \dots + x^{(m)})})^\beta dx^{(m)} \neq 0 \quad \text{при } t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (2.3)$$

Здесь и далее используется главная ветвь логарифма. Данное условие имеет место, например, при $\beta \in (0, 1)$. Это следует из того, что $\operatorname{Re}(1 - e^{iu})^\beta > 0$ при $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть

$$f \in H_p(D^n), \quad 0 < p \leq 1, \quad \delta > n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}, \quad \beta > 0, \quad m > \frac{2n}{n+1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right)$$

и выполняется соотношение (2.3). Тогда

$$\|f - R_{\varepsilon}^{\beta,\delta}(f)\|_p \asymp \omega_{\beta}^{0,m}(f, \varepsilon)_p, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно заметить, что условие (2.3) является необходимым для выполнения оценки сверху в (2.4). В то же самое время, как будет видно из доказательства теоремы 4, оценка снизу имеет место без предположения (2.3).

Из теорем 2, 3 и 4 получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f \in H_p(D^n)$, $0 < p \leq 1$, $\beta > 0$, $m > \frac{2n}{n+1}(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$ и выполняется соотношение (2.3). Тогда

$$K_{\beta,2}(f, \varepsilon)_p \asymp \omega_{\beta}^{0,m}(f, \varepsilon)_p \asymp \omega_{\beta,2}(f, \varepsilon)_p, \quad \varepsilon > 0.$$

2.3.3. ℓ_1 -средние Бохнера–Рисса. Отметим, что величину $\omega_{\beta,1}(f, \varepsilon)_p$ можно рассматривать как (квази-)норму разности функции f и ее обобщенных средних Абеля–Пуассона

$$P_{\varepsilon}^{\beta}(f, z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{\beta}{\nu} (-1)^{\nu+1} f(e^{-\nu\varepsilon} z),$$

т.е.

$$\omega_{\beta,1}(f, \varepsilon)_p = \left\| \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\beta}{\nu} (-1)^{\nu} f(e^{-\nu\varepsilon}(\cdot)) \right\|_p = \|f - P_{\varepsilon}^{\beta}(f)\|_p.$$

Изучению двусторонних оценок приближения функций обобщенными средними Абеля–Пуассона в $H_p(D^n)$ посвящены работы [2], [11], [12], [14]. В качестве следствия из теоремы 3 получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f \in H_p(D^n)$, $0 < p \leq 1$, $\delta > \frac{1}{p} - 1$ и $\beta > 0$. Тогда

$$\|f - R_{\varepsilon;1}^{\beta,\delta}(f)\|_p \asymp \|f - P_{\varepsilon}^{\beta}(f)\|_p, \quad \varepsilon > 0.$$

Рассмотрим вопрос об оценке приближения средними $R_{\varepsilon;1}^{\beta,\delta}$ через классические модули гладкости.

Пусть $f \in H_p(D^n)$, $0 < p \leq 1$. Если $\beta \in \mathbb{N} \cup (\frac{1}{p} - 1, \infty)$ и $h \in \mathbb{R}$, то дробная разность

$$\Delta_h^{\beta} f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\beta}{\nu} (-1)^{\nu} f(e^{i\nu h} z)$$

определена почти всюду и $\Delta_h^{\beta} f \in H_p(D^n)$. Модуль гладкости, соответствующий разности $\Delta_h^{\beta} f$, определяют следующим образом:

$$\omega_{\beta}(f, \varepsilon)_p = \sup_{|h| \leq \varepsilon} \|\Delta_h^{\beta} f\|_p.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $f \in H_p(D^n)$, $0 < p \leq 1$, $\beta \in \mathbb{N} \cup (\frac{1}{p} - 1, \infty)$ и $\delta > \frac{1}{p} - 1$. Тогда

$$\|f - R_{\varepsilon;1}^{\beta,\delta}(f)\|_p \asymp \omega_{\beta}(f, \varepsilon)_p, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.5)$$

Из теорем 2, 3 и 6 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $f \in H_p(D^n)$, $0 < p \leq 1$, и $\beta \in \mathbb{N} \cup (\frac{1}{p} - 1, \infty)$. Тогда

$$K_{\beta,1}(f, \varepsilon)_p \asymp \omega_{\beta}(f, \varepsilon)_p \asymp \omega_{\beta,1}(f, \varepsilon)_p, \quad \varepsilon > 0.$$

§ 3. Вспомогательные утверждения

3.1. Мультипликаторы степенных рядов. В настоящей работе мы существенно опираемся на ряд свойств мультипликаторов из [8] (см. также [15]).

Числовая последовательность $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+^n}$ называется *мультипликатором* в пространстве $H_p(D^n)$ (будем писать $\{\lambda_k\} \in M_p$), если для любой функции $f \in H_p(D^n)$

$$(\Lambda f)(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \lambda_k c_k(f) z^k \in H_p(D^n)$$

и существует константа γ такая, что для любой функции $f \in H_p(D^n)$

$$\|\Lambda f\|_{H_p} \leq \gamma \|f\|_{H_p}, \quad \|\{\lambda_k\}\|_{M_p} = \inf \gamma.$$

Пусть функция $\varphi: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{C}$. Если

$$\|\varphi\|_{M_p} = \sup_{\varepsilon > 0} \|\{\varphi(\varepsilon k)\}\|_{M_p} < \infty,$$

то будем писать $\varphi \in M_p(D^n)$ или просто $\varphi \in M_p$, если из контекста понятно, о какой размерности идет речь.

Приведем здесь основные свойства мультипликаторов, которые в дальнейшем мы будем неоднократно использовать (см., например, [8], [15; гл. 7]).

Из определения мультипликатора сразу следует, что:

- 1) $\|\{\lambda_k \mu_k\}\|_{M_p} \leq \|\{\lambda_k\}\|_{M_p} \|\{\mu_k\}\|_{M_p}$, $p > 0$;
- 2) $\|\{\lambda_k + \mu_k\}\|_{M_p}^p \leq \|\{\lambda_k\}\|_{M_p}^p + \|\{\mu_k\}\|_{M_p}^p$, $p \in (0, 1]$.

ЛЕММА 1 (см. [8]). Пусть $\{\lambda_k\}$ и $\{\tilde{\lambda}_k\}$ – две такие последовательности, что из $\lambda_k = 0$ следует $\tilde{\lambda}_k = 0$, а $K = \inf \|\{\frac{\tilde{\lambda}_k}{\lambda_k}\}\|_{M_p} < \infty$ (нижняя грань относится к выбору значений дробей $\frac{0}{0}$), $p > 0$. Тогда для любой функции f такой, что $\Lambda f \in H_p(D^n)$, выполняется неравенство $\|\tilde{\Lambda} f\|_{H_p} \leq K \|\Lambda f\|_{H_p}$.

ТЕОРЕМА 7 (см. [8]). Пусть $0 < p \leq 1$, а $\varphi \in C^r(\mathbb{R}_+^n)$ при некотором $r > n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$. Если

$$|\varphi(x)| \leq \frac{C_1}{1 + |x|^a}, \quad \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial^r \varphi}{\partial x_j^r}(x) \right| \leq \frac{C_2}{1 + |x|^b},$$

где $a > 0$, $b = r + a$ или $b = a > n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$, то $\varphi \in M_p$.

Преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ будем определять следующим образом:

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i(x,y)} dy.$$

ЛЕММА 2 (см. [15; гл. 7]). Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R}_+^n)$ и $0 < p \leq 1$.

- а) Если $\varphi \in M_p$, $\varphi(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}_+^n$ и ψ – произвольная непрерывная функция с компактным носителем на $\mathbb{R}_+^n$ такая, что $\widehat{\psi} \in L_p(\mathbb{R}^n)$, то $\widehat{\varphi\psi} \in L_p(\mathbb{R}^n)$.

- б) Если функция φ имеет компактный носитель, радиальная (зависит только от $|x|$) и после продолжения на $\mathbb{R}^n$ остается радиальной функцией такой, что $\widehat{\varphi}\chi \in L_p(\mathbb{R}^n)$, где χ – некоторая функция, равная единице в окрестности нуля, то $\varphi \in M_p$, если и только если преобразование Фурье продолженной радиальной функции принадлежит пространству $L_p(\mathbb{R}^n)$.

В следующей лемме установлена связь между специальными мультипликаторами в пространствах $H_p(D)$ и $H_p(D^n)$ при $n \geq 2$.

ЛЕММА 3. Пусть $0 < p \leq 1$, $\varphi_0: \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{C}$ и $\varphi(x) = \varphi_0(|x|_1)$. Функция $\varphi \in M_p(D^n)$ тогда и только тогда, когда $\varphi_0 \in M_p(D)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 из [16].

При доказательстве основных результатов работы нам понадобятся мультипликаторы вида $m(x) = |x|_q^\beta h(|x|_q)$, где $h \in C^\infty$ имеет компактный носитель и $h(0) = 1$. Исследовать такие функции мы будем с помощью теорем о мультипликаторах в вещественных пространствах Харди [17], [18; гл. 3].

Далее мы используем стандартные обозначения для пространства распределений умеренного роста $\mathcal{S}'(X)$ и для соответствующего пространства пробных функций $\mathcal{S}(X)$, где $X = \mathbb{R}^n$ или $\mathbb{T}^n$.

Вещественные пространства Харди $H_p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < \infty$, определяют как класс умеренных распределений $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\|f\|_{H_p(\mathbb{R}^n)} = \left\| \sup_{t>0} |\varphi_t * f(x)| \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

где $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ и $\varphi_t(x) = t^{-n} \varphi(\frac{x}{t})$.

Периодические вещественные пространства Харди $H_p(\mathbb{T}^n)$, $0 < p < \infty$, определяют как класс умеренных распределений $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$ таких, что

$$\|f\|_{H_p(\mathbb{T}^n)} = \left\| \sup_{t>0} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \widehat{\varphi}(tk) a_k(f) \zeta^k \right| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} < \infty,$$

где $a_k(f)$ – коэффициенты Фурье распределения f .

Функцию φ в определенных выше пространствах Харди выбираем специальным образом:

$$\varphi(x) = \prod_{j=1}^n \phi(x_j),$$

где ϕ выбрана так, чтобы $\widehat{\phi}(t) = e^t \psi_1(t) + e^{-t} \psi_2(t)$ с функциями $\psi_1, \psi_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\psi_1(t) + \psi_2(t) \equiv 1$ и

$$\psi_2(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t \leq -1. \end{cases}$$

Очевидно, что $\widehat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и убывает при $|x| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени. Применяя обратное преобразование Фурье, получаем, что $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$.

ЛЕММА 4. Пусть $f \in H_p(D^n)$, $0 < p \leq 1$. Тогда ряд $\sum_k c_k(f) \zeta^k$, $\zeta \in \mathbb{T}^n$, является рядом Фурье умеренного распределения $f \in H_p(\mathbb{T}^n)$ и

$$\|f\|_{H_p(\mathbb{T}^n)} \asymp \|f\|_{H_p(D^n)}. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеет место неравенство

$$|c_k(f)| \leq \prod_{j=1}^n (k_j + 1)^{1/p-1} \|f\|_{H_p(D^n)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n. \quad (3.2)$$

При $n = 1$ достаточно простое доказательство неравенства (3.2) содержится в [19], при $n \geq 2$ доказательство данного неравенства аналогично одномерному случаю. Используя (3.2), а также элементарные рассуждения из [20; теорема 12.5.3], нетрудно проверить, что ряд $\sum_k c_k(f) \zeta^k$ действительно является рядом Фурье распределения умеренного роста.

Заметим, что по построению $\widehat{\varphi}(x) = e^{-|x|_1}$ при $x \in \mathbb{R}_+^n$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|f\|_{H_p(D^n)} &= \sup_{t>0} \left(\int_{\mathbb{T}^n} |f(e^{-t}\zeta)|^p d\sigma_n(\zeta) \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{T}^n} \sup_{t>0} |f(e^{-t}\zeta)|^p d\sigma_n(\zeta) \right)^{1/p} = \|f\|_{H_p(\mathbb{T}^n)}. \end{aligned}$$

Противоположное неравенство в (3.1) вытекает из следующего соотношения, полученного в [21]:

$$\int_{\mathbb{T}^n} \sup_{0<\rho<1} |f(\rho\zeta)|^p d\sigma_n(\zeta) \leq C(p) \sup_{0<\rho<1} \int_{\mathbb{T}^n} |f(\rho\zeta)|^p d\sigma_n(\zeta).$$

Лемма 4 доказана.

Из леммы 4, в частности, вытекает, что каждый мультипликатор в $H_p(\mathbb{T}^n)$ является также мультипликатором в $H_p(D^n)$.

Дадим определение мультипликаторов в вещественных пространствах Харди. Функцию m называют мультипликатором Фурье в $H_p(\mathbb{R}^n)$, если оператор

$$T_m: (T_m f)^\wedge(x) = m(x) \widehat{f}(x), \quad f \in H_p(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n),$$

можно продолжить до линейного ограниченного оператора на всем $H_p(\mathbb{R}^n)$. Числовую последовательность $\tilde{m} = \{m_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ называют мультипликатором в $H_p(\mathbb{T}^n)$, если оператор

$$T_{\tilde{m}} f(\zeta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} m_k a_k(f) \zeta^k, \quad f \in H_p(\mathbb{T}^n) \cap L_2(\mathbb{T}^n),$$

можно продолжить до линейного ограниченного оператора на всем $H_p(\mathbb{T}^n)$.

Следующая теорема доказана в работе [22] (см. также [23]).

ТЕОРЕМА 8. Пусть $0 < p \leq 1$, функция m является мультипликатором Фурье в $H_p(\mathbb{R}^n)$ и $m(0) = 0$. Тогда $\tilde{m} = \{m(k)\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ является мультипликатором в $H_p(\mathbb{T}^n)$ и

$$\|T_{\tilde{m}}\|_{H_p(\mathbb{T}^n) \rightarrow H_p(\mathbb{T}^n)} \leq C \|T_m\|_{H_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_p(\mathbb{R}^n)},$$

где C – константа, зависящая только от p и n .

ТЕОРЕМА 9 (см. [24; гл. III, § 7]). Пусть $0 < p \leq 1$ и $s > n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$. Если

$$\left(\frac{1}{R^n} \int_{R < |x| < 2R} \left| \frac{\partial^{|\nu|_1}}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_n^{\nu_n}} m(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{A}{R^{|\nu|_1}}$$

для всех $0 \leq |\nu|_1 \leq s$ и $R > 0$, то функция m является мультипликатором в $H_p(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|T_m f\|_{H_p(\mathbb{R}^n)} \leq CA \|f\|_{H_p(\mathbb{R}^n)},$$

где C – константа, зависящая только от p и n .

ЛЕММА 5. Пусть $0 < p \leq 1$, $q \in \mathbb{N}$, $\beta > 0$ и $m(x) = |x|_q^\beta h(|x|_q)$, где $h(t) \in C^\infty[0, \infty)$, $\text{supp } h \subset [0, 2)$ и $h(t) = 1$ при $t \leq 1$. Тогда функция $m \in M_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя теорему 9 и выполняя простые вычисления для функции $m_\varepsilon(x) = m(\varepsilon x)$, нетрудно проверить, что $\|T_{m_\varepsilon}\|_{H_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_p(\mathbb{R}^n)} \leq C$, где C – константа, не зависящая от ε . Следовательно, по теореме 8 и лемме 4 функция $m \in M_p$.

3.2. Неравенства типа Бернштейна. Отметим здесь одно интересное следствие из леммы 5, представляющее самостоятельный интерес.

В пространстве $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$, хорошо известно классическое неравенство Бернштейна для дробной производной в смысле Вейля

$$\left\| \sum_{k=-N}^N |k|^\beta \exp\left(\frac{i\pi\beta}{2} \text{sign } k\right) a_k \zeta^k \right\|_{L_p(\mathbb{T})} \leq C(\beta, p) N^\beta \left\| \sum_{k=-N}^N a_k \zeta^k \right\|_{L_p(\mathbb{T})}. \quad (3.3)$$

Детальную историю можно найти, например, в книге [14; гл. 4]. В пространстве $L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, рассматриваемое неравенство при $\beta \in \mathbb{N}$ было получено Э. А. Стороженко, В. Г. Кротовым и П. Освальдом в [25] и независимо В. И. Ивановым [26]. При $\beta \notin \mathbb{N}$ и $0 < p < 1$ неравенство Бернштейна (3.3) имеет место только при $\beta > \frac{1}{p} - 1$. Этот результат был получен Э. С. Белинским и И. Р. Лифляндом в работе [27].

В многомерном случае известно, что неравенство типа Бернштейна

$$\left\| \sum_{|k| \leq N, k \in \mathbb{Z}^n} |k|^{2\beta} a_k \zeta^k \right\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \leq C(\beta, p, n) N^{2\beta} \left\| \sum_{|k| \leq N, k \in \mathbb{Z}^n} a_k \zeta^k \right\|_{L_p(\mathbb{T}^n)}$$

имеет место тогда и только тогда, когда $\beta \in \mathbb{N} \cup (\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - 1)_+, \infty)$ (см. [28]).

Для аналитических полиномов $T_N \in \mathcal{T}_{N,1}^+$, где $\mathcal{T}_{N,n}^+ = \text{span}\{e^{i(k,t)} : k \in \mathbb{Z}_+^n, |k| \leq N\}$ оказалось, что неравенство (3.3) будет верным для любого $\beta > 0$ и $p > 0$. Этот результат был получен Э. С. Белинским [29] и независимо Вит. В. Волчковым [30].

Из леммы 5 сразу получаем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $0 < p \leq 1$, $\beta > 0$ и $q \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\|\mathcal{D}_q^\beta T\|_p \leq CN^\beta \|T\|_p, \quad T \in \mathcal{T}_{N,n}^+,$$

где C – положительная константа, не зависящая от T и N .

§ 4. Доказательство основных результатов

4.1. Доказательство теоремы 1. Нам понадобится следующая лемма, дающая достаточное и необходимое условие сходимости средних (1.1) в пространстве $H_p(D^n)$.

ЛЕММА 6. Пусть $0 < p \leq 1$, $q \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ и $\beta > 0$. Средние $R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}$ сходятся в $H_p(D^n)$, если и только если $R_{\varepsilon;q}^{\alpha,\delta}$ сходятся в том же пространстве. В частности, средние $R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}$ сходятся в $H_p(D^n)$, если $\delta > n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства первой части леммы достаточно проверить, что из сходимости в $H_p(D^n)$ средних $R_{\varepsilon;q}^{\alpha,\delta}$ при некоторых α и δ вытекает сходимость средних $R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}$ в том же пространстве $H_p(D^n)$. Заметим, что из теоремы Банаха–Штейнгауза и определения мультипликатора вытекает, что средние $R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}$ сходятся в $H_p(D^n)$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi(x) = (1 - |x|_q^\beta)_+^\delta \in M_p. \quad (4.1)$$

Пусть функции $h_1, h_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$h_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{4}, \\ 0, & |t| > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad h_2(t) = 1 - h_1(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Проверим сначала, что при любом $\delta > 0$ функция $\varphi_1(x) = \varphi(x)h_1(|x|_q)$ принадлежит пространству M_p . Для этого воспользуемся представлением $\varphi_1(x) = \varphi_{1,1}(x) + \varphi_{1,2}(x)$, где

$$\begin{aligned} \varphi_{1,1}(x) &= h_1(|x|_q) \left(1 + \sum_{k=\mu}^{\infty} \binom{\delta}{k} (-1)^k |x|_q^{\beta k} \right), \\ \varphi_{1,2}(x) &= \sum_{k=1}^{\mu-1} \binom{\delta}{k} (-1)^k |x|_q^{\beta k} h_1(|x|_q) \end{aligned} \quad (4.3)$$

и $\mu = [\frac{qn}{\beta}(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})] + 1$. Используя теорему 7 и оценку (2.2), нетрудно проверить, что $\varphi_{1,1} \in M_p$. Применяя лемму 5 к каждому слагаемому суммы (4.3), а также используя элементарные свойства мультипликаторов, получаем, что и $\varphi_{1,2} \in M_p$. Таким образом, $\varphi_1 \in M_p$.

Далее, разлагая функцию $((1 - t^\beta)/(1 - t^\alpha))^\delta$ в ряд Тейлора в окрестности точки $t_0 = 1$ и делая замену $t = |x|_q$, получаем, что при любых положительных δ, β и α имеет место разложение

$$(1 - |x|_q^\beta)_+^\delta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (1 - |x|_q^\alpha)_+^{\delta+k}, \quad (4.4)$$

где $a_k \in \mathbb{R}$, а $a_0 = (\frac{\beta}{\alpha})^\delta$. Введем функции

$$\varphi_2(x) = h_2(|x|_q)(\varphi(x) - \Phi_q(x)), \quad \Phi_q(x) = \sum_{k=0}^{\lambda} a_k (1 - |x|_q^\alpha)_+^{\delta+k}, \quad (4.5)$$

где $\lambda = [n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})]$. Вычисляя частные производные порядка $r = [n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})] + 1$ от функции φ_2 , учитывая при этом разложение (4.4), нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial^r \varphi_2(x)}{\partial x_j^r} \in C(\mathbb{R}_+^n), \quad j = 1, \dots, n.$$

Следовательно, в силу теоремы 7 $\varphi_2 \in M_p$. Используя лемму 5, находим, что

$$(1 - |x|_q^\alpha)_+^{\delta+k} = (1 - |x|_q^\alpha)_+^\delta \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} (-1)^\nu |x|_q^{\nu\alpha} \in M_p$$

при любом $k \in \mathbb{Z}_+$. Откуда вытекает, что $\Phi_q \in M_p$. Таким образом, функция $h_2(|x|_q)\varphi(x) \in M_p$ и, следовательно, $\varphi(x) = \varphi_1(x) + h_2(|x|_q)\varphi(x) \in M_p$.

Для доказательства второй части леммы 6 достаточно проверить условия теоремы 9 для функции $m(x) = (1 - |x|_q^\alpha)_+^\delta$, а затем воспользоваться леммой 4 и доказанным выше критерием сходимости для средних $R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}$.

Лемма 6 доказана.

Для доказательства необходимости в условиях теоремы 1 нам будет полезна следующая простая

ЛЕММА 7. Пусть $\delta > 0$, $\varphi(x) = (1 - |x|_2^\alpha)_+^\delta$ и функция $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ такова, что $\psi(x) = 1$ при $\frac{1}{2} < |x| < \frac{3}{2}$ и $\psi(x) = 0$ при $|x| \leq \frac{1}{4}$ и $|x| > 2$. Тогда

$$\widehat{\psi\varphi}(y) = C \frac{\cos(2\pi|y| - \pi\delta/2 - \pi/4)}{|y|^{(n+1)/2+\delta}} + O(|y|^{-(n+3)/2-\delta}), \quad |y| \geq 1, \quad (4.6)$$

где C – положительная константа, зависящая только от δ и n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя равенство (см., например, [31; гл. IV])

$$\widehat{\varphi}(y) = (2\pi)^{n/2} 2^\delta \Gamma(\delta + 1) |y|^{-n/2-\delta} J_{n/2+\delta}(2\pi|y|),$$

а также гладкость функции $(\psi(x) - 1)\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, получаем

$$\begin{aligned} \widehat{\psi\varphi}(y) &= \widehat{\varphi}(y) + ((\psi - 1)\varphi)^\wedge(y) \\ &= (2\pi)^{n/2} 2^\delta \Gamma(\delta + 1) |y|^{-n/2-\delta} J_{n/2+\delta}(2\pi|y|) + O(|y|^{-r}), \quad r = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Остается воспользоваться асимптотикой функции Бесселя (см., например, [31; гл. IV])

$$J_\nu(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos\left(u - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(u^{-3/2}), \quad u \rightarrow \infty, \quad (4.7)$$

и выбрать r достаточно большим.

Лемма 7 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Достаточность в утверждении 1) содержится в лемме 6.

Докажем необходимость. Покажем сначала, что если $\varphi(x) = (1 - |x|_2^\beta)_+^\delta \in M_p$, то

$$\widehat{\psi\Phi}_2 \in L_p(\mathbb{R}^n), \quad (4.8)$$

где ψ – функция из леммы 7, а функция Φ_2 определена равенством (4.5) при $q = 2$. Действительно, согласно утверждению б) леммы 2 преобразование Фурье $\widehat{\psi\varphi} \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Применяя теорему 7 и лемму 2 к функции

$$\gamma(x) = \psi(x)(\varphi(x) - \Phi_2(x)) = \psi(x) \sum_{k=\lambda+1}^{\infty} a_k (1 - |x|_2^2)_+^{\delta+k},$$

получаем, что и $\widehat{\gamma} \in L_p(\mathbb{R}^n)$ при любых значениях $\delta, \beta > 0$. Следовательно, имеет место (4.8).

Выведем теперь из (4.8) необходимость условия $\delta > n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$. Используя равенство (4.6), находим

$$\begin{aligned} \int_1^N |\widehat{\psi\Phi_2}(x)|^p dx &\geq C \int_1^N r^{n-1} \left| \frac{\cos(2\pi r - \pi\delta/2 - \pi/4)}{r^{(n+1)/2+\delta}} \right|^p dr \\ &\quad - O\left(\int_1^N r^{n-1-p((n+3)/2+\delta)} dr\right). \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует, что $\delta > n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$. В противном случае при $N \rightarrow \infty$ мы получили бы, что $\widehat{\psi\Phi_2} \notin L_p(\mathbb{R}^n)$, а это противоречит (4.8).

Доказательство утверждения 2) вытекает из утверждения 1) теоремы 1 и леммы 3.

Теорема 1 доказана.

4.2. Доказательство теоремы 2. Докажем сначала следующие два неравенства:

$$\|f - R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}(f)\|_p \leq C_1 \varepsilon^\beta \|\mathcal{D}_q^\beta f\|_p, \quad (4.9)$$

$$\varepsilon^\beta \|\mathcal{D}_q^\beta R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}(f)\|_p \leq C_2 \|f - R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}(f)\|_p, \quad (4.10)$$

где константы C_1 и C_2 зависят только от n, p, β и δ .

Положим

$$\xi(x) = \frac{1 - \varphi(x)}{|x|_q^\beta}, \quad \eta(x) = \frac{|x|_q^\beta \varphi(x)}{1 - \varphi(x)},$$

где $\varphi(x) = (1 - |x|_q^\beta)_+^\delta$. В силу леммы 1 достаточно доказать, что после доопределения в нуле по непрерывности функций ξ и η имеет место

$$\xi \in M_p, \quad \eta \in M_p. \quad (4.11)$$

Покажем сначала, что $\xi \in M_p$. Положим $\xi_j(x) = h_j(|x|_q)\xi(x)$, $j = 1, 2$, где h_1 и h_2 – функции, определенные равенствами (4.2). Заметим, что

$$\xi_1(x) = h_1(|x|_q) \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\delta}{k} (-1)^k |x|_q^{\beta(k-1)}.$$

Рассуждая по аналогии с доказательством леммы 6, нетрудно проверить, что $\xi_1 \in M_p$. Функция $\xi_2 \in M_p$, поскольку $1 - \varphi \in M_p$ и $h_2(|x|_q)|x|_q^{-\beta} \in M_p$ (см. теорему 7, а также примеры в [8]). Таким образом, получаем, что $\xi \in M_p$.

Покажем теперь, что $\eta \in M_p$. Положим $\eta_j(x) = h_j(|x|_q)\eta(x)$, $j = 1, 2$, и представим η_2 в следующем виде: $\eta_2 = \eta_{2,1} + \eta_{2,2}$, где

$$\eta_{2,1}(x) = |x|_q^\beta h_2(|x|_q) \sum_{k=1}^{\lambda} \varphi^k(x), \quad \eta_{2,2}(x) = |x|_q^\beta h_2(|x|_q) \sum_{k=\lambda+1}^{\infty} \varphi^k(x)$$

и $\lambda = [\frac{n}{\delta}(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})]$. Используя теорему 7, нетрудно проверить, что $\eta_{2,2} \in M_p$. Функция $\eta_{2,1} \in M_p$ в силу доказанного ранее соотношения (4.1) и теоремы 7, примененной к функции $|x|_q^\beta h_2(|x|_q)h_1(\frac{|x|_q}{4})$.

Остается показать, что $\eta_1 \in M_p$. Поскольку $\varphi \in M_p$, достаточно проверить, что

$$\eta_{1,1}(x) = \frac{|x|_q^\beta h_1(|x|_q)}{1 - \varphi(x)} \in M_p. \quad (4.12)$$

Введем в рассмотрение функции

$$\gamma(x) = \phi(x)h_1(|x|_q), \quad \phi(x) = \frac{|x|_q^\beta}{1 - (1 - |x|_q^\beta)_+^\delta} - \sum_{k=0}^{\mu} a_k |x|_q^\beta,$$

где $\mu = [\frac{qn}{\beta}(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})] + 1$. Из леммы 5 следует, что $\gamma - \eta_{1,1} \in M_p$. Таким образом, показав, что $\gamma \in M_p$, мы получим (4.12).

Заметим, что при $u \in (0, 1)$

$$\frac{u^\beta}{1 - (1 - u^\beta)^\delta} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k u^{\beta k} \right)^{-1},$$

где $c_0 = \delta \neq 0$. Следовательно, числа $\{a_k\}$ в определении функции ϕ можно выбрать так, чтобы

$$\phi(x) = \frac{\sum_{k=\mu+1}^{\infty} b_k |x|_q^{\beta k}}{\sum_{k=0}^{\infty} c_k |x|_q^{\beta k}}. \quad (4.13)$$

Вычисляя производную порядка $r = [n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})] + 1$ от функции $\phi(x)$, учитывая при этом равенство (4.13) и оценку (2.2), получаем, что $\frac{\partial^r}{\partial x_j^r}(h_1(|x|_q)\phi(x)) \in C(\mathbb{R}_+^n)$, $j = 1, \dots, n$. Таким образом, из теоремы 7 вытекает, что $\gamma \in M_p$ и, следовательно, имеет место (4.12).

Из приведенных выше рассуждений следует справедливость (4.11) и, следовательно, неравенств (4.9) и (4.10). Выведем из них оценки для K -функционала. Находим

$$\begin{aligned} K_{\beta,q}(f, \varepsilon)_p &\leq \|f - R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}(f)\|_p + \varepsilon^\beta \|\mathcal{D}_q^\beta(R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta})(f)\|_p \\ &\leq (1 + C_2) \|f - R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}(f)\|_p. \end{aligned}$$

Докажем теперь оценку снизу. При произвольной функции g такой, что $\mathcal{D}_q^\beta g \in H_p(D^n)$, имеем

$$\begin{aligned} \|f - R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}(f)\|_p^p &\leq \|(f - g) - R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}(f - g)\|_p^p + \|g - R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}(g)\|_p^p \\ &\leq (1 + \|R_{\varepsilon;q}^{\beta,\delta}\|_{H_p \rightarrow H_p}) \|f - g\|_p^p + C_2^p \varepsilon^{\beta p} \|\mathcal{D}_q^\beta g\|_p^p. \end{aligned}$$

Осталось перейти к нижней грани по g и учесть, что

$$\sup_{\varepsilon > 0} \|R_{\varepsilon; q}^{\beta, \delta}\|_{H_p \rightarrow H_p} = \sup_{\varepsilon > 0} \|\{\varphi(\varepsilon k)\}\|_{M_p} = \|\varphi\|_{M_p} < \infty.$$

Теорема 2 доказана.

4.3. Доказательство теоремы 4. Отметим, что интеграл в определении $\omega_{\beta}^{0, m}$ равен сумме степенного ряда, множители перед коэффициентами Тейлора f которого равны

$$\begin{aligned} \psi(hk) &= \int_{|x^{(1)}| \leq 1} dx^{(1)} \dots \int_{|x^{(m)}| \leq 1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\beta}{\nu} (-1)^{\nu} \prod_{j=1}^n e^{ih\nu(x_j^{(1)} + \dots + x_j^{(m)})k_j} dx^{(m)} \\ &= \int_{|x^{(1)}| \leq 1} dx^{(1)} \dots \int_{|x^{(m)}| \leq 1} (1 - e^{i(hk, x^{(1)} + \dots + x^{(m)})})^{\beta} dx^{(m)} \\ &= (2\pi)^{mn/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\beta}{\nu} (-1)^{\nu} \left(\frac{J_{n/2}(|\nu hk|)}{|\nu hk|^{n/2}} \right)^m. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Согласно условиям теоремы $\psi(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. Таким образом, в силу леммы 1 достаточно доказать, что после доопределения в нуле функции

$$\xi = \frac{1 - \varphi}{\psi} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{\psi}{1 - \varphi} \quad (\varphi(x) = (1 - |x|^{\beta})_{+}^{\delta})$$

принадлежат пространству M_p .

Пусть h_1, h_2 – функции, определенные равенствами (4.2). Положим $\xi_j(x) = \chi_j(|x|)\xi(x)$, $\eta_j(x) = \chi_j(|x|)\eta(x)$, где $\chi_j(t) = h_j(\frac{t}{4})$, $j = 1, 2$.

Далее все функции будем доопределять в нуле по непрерывности.

Рассмотрим сначала ξ_1 и η_1 . Представим функцию ξ_1 в следующем виде:

$$\xi_1(x) = \frac{\chi_1(|x|)|x|^{\beta}}{\psi(x)} \cdot \frac{1 - \varphi(x)}{|x|^{\beta}}.$$

Заметим, что функция $\chi_1(|x|)|x|^{\beta}(\psi(x))^{-1}$ имеет компактный носитель и принадлежит $C^{\infty}(\mathbb{R}_{+}^n)$. Последний факт нетрудно получить воспользовавшись равенством $1 - e^{it} = 2e^{\frac{i(t-\pi)}{2}} \sin \frac{t}{2}$ и формулой

$$\int_{|w| \leq 1} g((x, w)) dw = C \int_0^1 r^{n-1} dr \int_{-1}^1 g(ru|x|)(1 - u^2)^{(n-3)/2} du$$

(см., например, [14; гл. 5, § 25]). Таким образом, используя теорему 7, соотношения (4.11) и элементарные свойства мультипликаторов, получаем, что $\xi_1 \in M_p$.

Далее считаем, что $\chi_1 = \chi_{1,1} \cdot \chi_{1,2}$, где $\chi_{1,j} \in C^{\infty}([0, \infty))$ и функция $\chi_{1,2}(t) = 1$ в окрестности нуля. Представим η_1 в следующем виде:

$$\eta_1(x) = \frac{\chi_{1,1}(|x|)\psi(x)}{|x|^{\beta}} \cdot \frac{\chi_{1,2}(|x|)|x|^{\beta}}{1 - \varphi(x)}.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям получаем, что $\chi_{1,1}(|x|)\psi(x)|x|^{-\beta} \in M_p$, а для функции $\chi_{1,2}(|x|)|x|^\beta(1 - \varphi(x))^{-1}$ мы можем повторить доказательство утверждения (4.12). Следовательно, $\eta_1 \in M_p$.

Исследуем теперь функции ξ_2 и η_2 . Из равенства (4.14), используя асимптотику функции Бесселя (4.7), получаем

$$\psi(x) = \left(\int_{|w| \leq 1} dw \right)^m + O \left\{ |x|^{-m(n+1)/2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{\beta}{\nu} \nu^{-m(n+1)/2} \right\}, \quad |x| \geq 1.$$

Следовательно,

$$\psi(\infty) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(x) = \left(\int_{|w| \leq 1} dw \right)^m.$$

Из (4.14), асимптотики (4.7) и равенства $(u^\nu J_\nu(u))' = u^\nu J_{\nu-1}(u)$ (см., например, [31; гл. IV]) получаем, что функция $\psi(x) - \psi(\infty)$, как и любая ее частная производная, при $|x| \rightarrow \infty$ ведет себя как $O(|x|^{-m(n+1)/2})$. Заметим также, что при $|x| \geq 1$ справедливы представления

$$\xi(x) = \frac{\psi(\infty) - \psi(x)}{\psi(\infty)\psi(x)} + \frac{1}{\psi(\infty)}, \quad \eta(x) = (\psi(x) - \psi(\infty)) + \psi(\infty).$$

Таким образом, применяя теорему 7 при $a = b = \frac{m(n+1)}{2} > n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$ к функциям $\xi_2(x) - \chi_2(|x|)(\psi(\infty))^{-1}$ и $\eta_2(x) - \psi(\infty)\chi_2(|x|)$, получаем, что ξ_2 и η_2 принадлежат M_p .

Теорема 4 доказана.

4.4. Доказательство теоремы 3. Поскольку имеет место равенство

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\beta}{\nu} (-1)^\nu P_{\nu\epsilon; q}(f, z) = \sum_k (1 - e^{-|\epsilon k|_q})^\beta c_k(f) z^k,$$

достаточно проверить, что

$$\frac{1 - (1 - |x|_q^\beta)_+^\delta}{(1 - e^{-|x|_q})^\beta} \in M_p \quad \text{и} \quad \frac{(1 - e^{-|x|_q})^\beta}{1 - (1 - |x|_q^\beta)_+^\delta} \in M_p,$$

используя при этом схему доказательства теоремы 4 и соотношения, полученные при доказательстве теоремы 2.

4.5. Доказательство теоремы 6. Для доказательства теоремы 6 нам понадобятся следующие вспомогательные леммы.

ЛЕММА 8. Пусть $f \in H_p(D)$, $0 < p \leq 1$, $s \in \mathbb{N}$, $\epsilon \in (0, 1)$, $\beta > 0$ и $\rho = e^{-\epsilon/2}$. Тогда

$$\|f - P_\epsilon^\beta(f)\|_p \leq C \epsilon^{sp-1} \int_{-\pi}^{\pi} \|\Delta_\theta^\beta f\|_p^p \frac{d\theta}{|1 - \rho e^{i\theta}|^{sp}}, \quad (4.15)$$

где C – константа, не зависящая от f и ϵ .

Неравенство (4.15) было получено при доказательстве теоремы 1 работы [12] (см. также доказательство теоремы 1 в [11]).

ЛЕММА 9. Пусть $f \in H_p(D^n)$, $0 < p \leq 1$, $\lambda, h \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\|\Delta_{\lambda h}^\beta f\|_p^p \leq M(\beta, p)(|\lambda| + 1)^{N(\beta, p)} \omega_\beta(f, |h|)_p^p,$$

где $M(\beta, p) = \sum_{\nu=0}^{\infty} |\binom{\beta}{\nu}|^p$, $N(\beta, p) = n([\log_2 M(\beta, p)] + 1)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4 работы [11].

Перейдем к доказательству теоремы 6. Используя срез-функцию $f_z(\zeta) = f(\zeta z)$, $\zeta \in \mathbb{T}$, $z \in D^n$, теорему Фубини, а также леммы 8 и 9, последовательно находим

$$\begin{aligned} \|f - P_\varepsilon^\beta(f)\|_p^p &= \int_{\mathbb{T}^n} \|f_z(\cdot) - P_\varepsilon^\beta(f_z, \cdot)\|_p^p d\sigma_n(z) \\ &\leq C\varepsilon^{sp-1} \int_{\mathbb{T}^n} \int_{-\pi}^{\pi} \|\Delta_\theta^\beta f_z(\cdot)\|_p^p \frac{d\theta d\sigma_n(z)}{|1 - \rho e^{i\theta}|^{sp}} \\ &= C\varepsilon^{sp-1} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbb{T}} \|\Delta_\theta^\beta f(\zeta(\cdot))\|_p^p \frac{d\sigma_1(\zeta) d\theta}{|1 - \rho e^{i\theta}|^{sp}} \\ &= C\varepsilon^{sp-1} \int_{-\pi}^{\pi} \|\Delta_\theta^\beta f\|_p^p \frac{d\theta}{|1 - \rho e^{i\theta}|^{sp}} \\ &\leq C\varepsilon^{sp-1} \omega_\beta(f, \varepsilon)_p^p \int_0^\pi \left(\frac{\theta}{\varepsilon} + 1\right)^N \frac{d\theta}{|1 - \rho e^{i\theta}|^{sp}} \\ &= C\varepsilon^{sp-1} \omega_\beta(f, \varepsilon)_p^p \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \varepsilon^{-k} \int_0^\pi \theta^k |1 - \rho e^{i\theta}|^{-sp} d\theta, \end{aligned}$$

где $\rho = e^{-\varepsilon/2}$, $N = N(\beta, p)$. Выбирая $s > \frac{N+1}{p}$ и учитывая, что при $\lambda \geq 0$, $\gamma > 0$, $\gamma - \lambda > 1$ и $\frac{1}{2} < R < 1$ имеет место

$$\int_0^\pi t^\lambda |1 - Re^{it}|^{-\gamma} dt \leq C(1 - R)^{1+\lambda-\gamma}$$

(см. [2]), мы получаем, что

$$\|f - P_\varepsilon^\beta(f)\|_p \leq C\omega_\beta(f, \varepsilon)_p. \quad (4.16)$$

Противоположное неравенство

$$\omega_\beta(f, \varepsilon)_p \leq C\|f - P_\varepsilon^\beta(f)\|_p \quad (4.17)$$

содержится в теореме 2 статьи [11].

Таким образом, из (4.16), (4.17) и теоремы 5 мы получаем соотношения (2.5).

Теорема 6 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В заключении статьи отметим, что все сформулированные выше теоремы для ℓ_1 -средних Бохнера–Рисса остаются верными в пространствах Харди $H_p(B^n)$, где B^n – единичный шар в $\mathbb{C}^n$. Доказательства аналогичны приведенным выше рассуждениям и вытекают из одномерного случая посредством применения срез-функции и леммы 3, которая также имеет место в $H_p(B^n)$ (см. [16]).

Список литературы

- [1] У. Рудин, *Теория функций в полукруге*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: W. Rudin, *Function theory in polydiscs*, Benjamin, New York–Amsterdam, 1969.
- [2] Э. А. Стороженко, “Приближение функций класса H^p , $0 < p \leq 1$ ”, *Матем. сб.*, **105(147)**:4 (1978), 601–621; англ. пер.: È. A. Storozhenko, “Approximation of functions of class H^p , $0 < p \leq 1$ ”, *Math. USSR-Sb.*, **34**:4 (1978), 527–545.
- [3] А. А. Солжаник, “On the order of approximation to functions of $H^p(\mathbb{R})$ ($0 < p \leq 1$) by certain means of Fourier integrals”, *Anal. Math.*, **12**:1 (1986), 59–75.
- [4] Э. С. Белинский, “Сильная суммируемость периодических функций и теоремы вложения”, *Докл. РАН*, **332**:2 (1993), 133–134; англ. пер.: Èh. S. Belinskij, “Strong summability of periodic functions and imbedding theorems”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **48**:2 (1994), 255–258.
- [5] Р. М. Тригуб, “Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:6 (1980), 1378–1409; англ. пер.: R. M. Trigub, “Absolute convergence of Fourier integrals, summability of Fourier series, and polynomial approximation of functions on the torus”, *Math. USSR-Izv.*, **17**:3 (1981), 567–593.
- [6] О. И. Кузнецова, Р. М. Тригуб, “Двусторонние оценки приближения функций средними Рисса и Марцинкевича”, *Докл. АН СССР*, **251**:1 (1980), 34–36; англ. пер.: O. I. Kuznetsova, R. M. Trigub, “Two-sided estimates of the approximation of functions by Riesz and Marcinkiewicz means”, *Soviet Math. Dokl.*, **21**:2 (1980), 374–377.
- [7] А. Н. Подкорытов, “Суммирование кратных рядов Фурье по полиэдрам”, *Вестн. ЛГУ. Сер. матем., мех., астрон.*, 1980, № 1, 51–58; англ. пер.: A. N. Podkorytov, “Summation of multiple Fourier series over polyhedra”, *Vestnik Leningrad Univ. Math.*, **13** (1981), 69–77.
- [8] Р. М. Тригуб, “Мультипликаторы в пространствах Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0, 1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов”, *Матем. сб.*, **188**:4 (1997), 145–160; англ. пер.: R. M. Trigub, “Multipliers in the Hardy spaces $H_p(D^m)$ with $p \in (0, 1]$ and approximation properties of summability methods for power series”, *Sb. Math.*, **188**:4 (1997), 621–638.
- [9] Ю. С. Коломойцев, “О двусторонних оценках приближения функций обобщенными средними Бохнера–Рисса в H_p , $0 < p \leq 1$ ”, *Тр. ИПММ НАН Украины*, **20** (2010), 116–123.
- [10] С. Г. Прибегин, “Приближение функций из H^p , $0 < p \leq 1$, обобщенными средними Рисса с дробными показателями”, *Матем. сб.*, **197**:7 (2006), 77–86; англ. пер.: S. G. Pribegin, “Approximation of functions in H^p , $0 < p \leq 1$, by generalized Riesz means with fractional exponents”, *Sb. Math.*, **197**:7 (2006), 1025–1035.
- [11] С. Г. Прибегин, “О некоторых методах суммирования степенных рядов для функций из $H^p(D^n)$, $0 < p < \infty$ ”, *Матем. сб.*, **200**:2 (2009), 89–106; англ. пер.: S. G. Pribegin, “Some summability methods for power series of functions in $H^p(D^n)$, $0 < p < \infty$ ”, *Sb. Math.*, **200**:2 (2009), 243–260.
- [12] С. Г. Прибегин, “Об одном методе приближения в H^p , $0 < p \leq 1$ ”, *Матем. сб.*, **192**:11 (2001), 123–136; англ. пер.: S. G. Pribegin, “A method of approximation in H^p , $0 < p \leq 1$ ”, *Sb. Math.*, **192**:11 (2001), 1705–1719.
- [13] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987; англ. пер.: St. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*, Gordon and Breach, New York, NY, 1993.
- [14] Я. Валашек, “О приближениях в многомерных пространствах Харди H^p , $0 < p \leq 1$ ”, *Сообщ. АН ГССР*, **105**:1 (1982), 21–24.

- [15] R. M. Trigub, E. S. Bellinsky, *Fourier analysis and approximation of functions*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.
- [16] В. В. Савчук, М. В. Савчук, “Норми мультиплікаторів і найкращі наближення голоморфних функцій багатьох змінних”, *Укр. матем. журн.*, **54**:12 (2002), 1669–1679; англ. пер.: V. V. Savchuk, M. V. Savchuk, “Norms of multipliers and best approximations of holomorphic multivariable functions”, *Ukrainian Math. J.*, **54**:12 (2002), 2025–2037.
- [17] C. Fefferman, E. M. Stein, “ H^p spaces of several variables”, *Acta Math.*, **129**:1 (1972), 137–193.
- [18] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Math. Ser., **43**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [19] A. B. Aleksandrov, “Essays on nonlocally convex Hardy classes”, *Complex analysis and spectral theory* (Leningrad, 1979/1980), Lecture Notes in Math., **864**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1981, 1–89.
- [20] Р. Эдвардс, *Ряды Фурье в современном изложении*, т. 2, Мир, М., 1985; пер. с англ.: R. E. Edwards, *Fourier series. A modern introduction*, v. 2, Grad. Texts in Math., **85**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1982.
- [21] S. Bochner, “Classes of holomorphic functions of several variables in circular domains”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **46**:5 (1960), 721–723.
- [22] Z. Liu, “Multipliers on real Hardy spaces”, *Sci. China Ser. A*, **35**:1 (1992), 55–69.
- [23] D. Chen, D. Fan, “Multiplier transformations on H^p spaces”, *Studia Math.*, **131**:2 (1998), 189–204.
- [24] J. Garcia-Cuerva, J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Math. Stud., **116**, North Holland, Amsterdam, 1985.
- [25] Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд, “Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L^p , $0 < p < 1$ ”, *Матем. сб.*, **98**(140):3(11) (1975), 395–415; англ. пер.: È. A. Storozhenko, V. G. Krotov, P. Osval'd, “Direct and converse theorems of Jackson type in L^p spaces, $0 < p < 1$ ”, *Math. USSR-Sb.*, **27**:3 (1975), 355–374.
- [26] В. И. Иванов, “Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для $0 < p < 1$ ”, *Матем. заметки*, **18**:5 (1975), 641–658; англ. пер.: V. I. Ivanov, “Direct and converse theorems of the theory of approximation in the metric of L_p for $0 < p < 1$ ”, *Math. Notes*, **18**:5 (1975), 972–982.
- [27] E. Belinskii, E. Liflyand, “Approximation properties in L_p , $0 < p < 1$ ”, *Funct. Approx. Comment. Math.*, **22** (1993), 189–199.
- [28] K. Runovski, H.-J. Schmeisser, “On some extensions of Bernstein’s inequality for trigonometric polynomials”, *Funct. Approx. Comment. Math.*, **29** (2001), 125–142.
- [29] E. S. Belinsky, “Strong summability for the Marcinkiewicz means in the integral metric and related questions”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **65**:3 (1998), 303–312.
- [30] Вит. В. Волчков, “Неравенство Бернштейна в пространствах Харди H^p , $0 < p < 1$ ”, *Ряды Фурье: теория и приложения* (Каменец-Подольский, 1997), Ин-т матем. НАН Украины, Киев, 1998, 77–84.
- [31] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Math. Ser., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.

Ю. С. Коломойцев (Yu. S. Kolomoitsev)
 Институт прикладной математики и механики
 НАН Украины, г. Донецк;
 Донецкий национальный университет
E-mail: kolomus1@mail.ru

Поступила в редакцию
 15.05.2011 и 27.12.2011