Общероссийский математический портал

А. Б. Шишкин, Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 12, 123–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm789>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 13:32:20

УДК 517.5

А. Б. Шишкин

Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами

Рассмотрены подпространства аналитических функций одной комплексной переменной, инвариантные относительно систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Описываются ситуации, когда такие инвариантные подпространства допускают спектральный синтез.

Библиография: 25 названий.

Настоящая статья использует терминологию и обозначения статей [1]–[3].

§ 1. Введение

1.1. Спектральный синтез. Выделим в кольце $\mathbb{C}[z]$ многочленов от одной переменной совокупность из q элементов $\pi_1, \dots, \pi_q$. Условимся отождествлять в обозначениях многочлены и осуществляемые ими отображения. Следуя этому соглашению, символом π будем обозначать q -многочлен $(\pi_1, \dots, \pi_q)$ и отображение из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}^q$, осуществляемое этим q -многочленом. Обозначим через Λ образ $\mathbb{C}$ при отображении π . Считаем, что среди многочленов $\pi_1, \dots, \pi_q$ есть хотя бы один, отличный от константы. При этом условии отображение π имеет конечные слои

$$\tilde{\lambda} := \pi^{-1}(\lambda) = \bigcap_{p=1}^q \pi_p^{-1}(\lambda_p), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q) \in \Lambda.$$

Если $q > 1$, то Λ – собственное подмножество $\mathbb{C}^q$.

Пусть $\Omega = \{\Omega_1, \dots, \Omega_\nu\}$ – некоторая система односвязных областей в $\mathbb{C}$; $H_j = H(\Omega_j)$ – пространство функций, голоморфных в Ω_j , с топологией компактной сходимости; $\mathbf{H}$ – топологическое произведение $H_1, \dots, H_\nu$; D – оператор дифференцирования, действующий в $\mathbf{H}$ покомпонентно: $D(f) = (f'_1, \dots, f'_\nu)$, $f = (f_1, \dots, f_\nu) \in \mathbf{H}$;

$$\pi_1(D), \dots, \pi_q(D) \tag{1}$$

– система линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Отличный от нуля элемент $f \in \mathbf{H}$ называется *корневым элементом* системы операторов (1), отвечающим *вектору собственных значений* $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{C}^q$, если он при некотором натуральном k удовлетворяет системе уравнений

$$(\pi_1(D) - \lambda_1)^k f = 0, \quad \dots, \quad (\pi_q(D) - \lambda_q)^k f = 0.$$

Легко показать, что запас всех векторов собственных значений системы операторов (1) совпадает с Λ . При этом всякий корневой элемент системы операторов (1),

отвечающий вектору собственных значений $\lambda \in \Lambda$, представляется в виде конечной линейной комбинации

$$\sum a_{n,\omega,j} z^n \exp_j \omega z, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \omega \in \tilde{\lambda}, \quad j = 1, \dots, \nu,$$

с коэффициентами $a_{n,\omega,j}$ из $\mathbb{C}$, где $\exp_j \omega z := e_j \exp \omega z$, $e_1, \dots, e_\nu$ – система единичных векторов.

Подпространство $W \subseteq \mathbf{H}$ называем *инвариантным*, если оно инвариантно относительно каждого из операторов системы (1). Говорят, что замкнутое инвариантное подпространство $W \subseteq \mathbf{H}$ *допускает спектральный синтез*, если оно совпадает с замыканием в $\mathbf{H}$ линейной оболочки корневых элементов системы операторов (1), содержащихся в W . *Задача спектрального синтеза* для системы операторов (1) состоит в нахождении условий, при которых замкнутое инвариантное подпространство $W \subseteq \mathbf{H}$ допускает спектральный синтез.

1.2. Локальное описание. Пусть H_j^* – сильное сопряженное к пространству H_j ; T_j – преобразование Лапласа, которое каждому функционалу $S \in H_j^*$ ставит в соответствие целую функцию экспоненциального типа $\varphi(\zeta) = \langle S, e^{\zeta z} \rangle$; $P_j = T_j(H_j^*)$ – полный образ отображения T_j . Отображение $T_j: H_j^* \rightarrow P_j$ является взаимно однозначным; оно индуцирует в P_j отделимую локально выпуклую топологию. Известно, что P_j – топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[\zeta]$.

Сильное сопряженное $\mathbf{H}^*$ к пространству $\mathbf{H}$ совпадает с топологическим произведением $H_1^* \times \dots \times H_\nu^*$. Пусть $\mathbf{P}$ – топологическое произведение $P_1 \times \dots \times P_\nu$, $\mathbf{T}$ – отображение $\mathbf{H}^* \rightarrow \mathbf{P}$, $(S_1, \dots, S_\nu) \rightarrow (T_1(S_1), \dots, T_\nu(S_\nu))$. Пространство $\mathbf{P}$ наследует основные свойства пространств $P_1, \dots, P_\nu$. В частности, отображение $\mathbf{H}^* \rightarrow \mathbf{P}$ является линейным топологическим изоморфизмом, $\mathbf{P}$ выдерживает покомпонентное умножение на многочлены и это умножение непрерывно в топологии $\mathbf{P}$. Кроме того, в пространстве $\mathbf{P}$ выполняется импликация *устойчивости*:

$$\varphi \in \mathbf{P}, \quad \zeta - a \mid \varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{\varphi}{\zeta - a} \in \mathbf{P}.$$

Здесь $\zeta - a \mid \varphi$ означает, что двучлен $\zeta - a$ делит каждую компоненту элемента φ .

Кольцо $\mathbb{C}[\pi] := \mathbb{C}[\pi_1, \dots, \pi_q]$ многочленов от $\pi_1, \dots, \pi_q$ является подкольцом кольца $\mathbb{C}[\zeta]$. Это позволяет рассматривать $\mathbf{P}$ как модуль над кольцом $\mathbb{C}[\pi]$. Известно, что этот модуль является топологическим [4; §2]. Следовательно, замыкание $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуля в $\mathbf{P}$ есть снова $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$.

Множество $U \subseteq \mathbb{C}$ называется *π -симметричным*, если найдется множество $V \subseteq \mathbb{C}^q$ такое, что $U = \pi^{-1}(V)$. Функция φ , голоморфная в открытом π -симметричном множестве, называется *π -симметричной*, если для каждого π -слоя $\tilde{\lambda}$ из области определения функции φ найдутся открытая π -симметричная окрестность U этого слоя и открытая окрестность $V \subseteq \mathbb{C}^q$ точки $\lambda = \pi(\tilde{\lambda})$, содержащая $\pi(U)$, такие, что сужение φ на U представляется в виде $\Phi \circ \pi$, где Φ – некоторая функция, голоморфная в V . Простейшие π -симметричные функции – это отображения, осуществляемые элементами кольца $\mathbb{C}[\pi]$.

Топологию, которую образуют в $\mathbb{C}$ открытые π -симметричные множества, обозначим через τ_π . Пусть $U \in \tau_\pi$; $O(U)$ – кольцо голоморфных на U функций; $\mathbf{O}(U)$ – декартово произведение ν копий $O(U)$; $O_\pi(U)$ – множество всех π -симметричных

на U функций. Очевидно, что $\mathbf{O}(U)$ – модуль над кольцом $O(U)$, а $O_\pi(U)$ – подкольцо $O(U)$. Рассматриваем $\mathbf{O}(U)$ как модуль над кольцом $O_\pi(U)$.

Совокупность $\{O_\pi(U)\}$, $U \in \tau_\pi$, вместе с гомоморфизмами сужения $\rho_{U,U'}: O_\pi(U') \rightarrow O_\pi(U)$, $U \subseteq U'$, образует предпучок колец над $(\mathbb{C}, \tau_\pi)$. Аналогично, совокупность $\{\mathbf{O}(U)\}$, $U \in \tau_\pi$, вместе с гомоморфизмами сужения $\sigma_{U,U'}: \mathbf{O}(U') \rightarrow \mathbf{O}(U)$, $U \subseteq U'$, образует предпучок абелевых групп над $(\mathbb{C}, \tau_\pi)$ [5; гл. IV, А]. Легко убедиться, что отображение $\sigma_{U,U'}$, $U \subseteq U'$, является гомоморфизмом $O_\pi(U')$ -модуля $\mathbf{O}(U')$ в $O_\pi(U)$ -модуль $\mathbf{O}(U)$, следовательно, предпучок абелевых групп $\{\mathbf{O}(U)\}$, $U \in \tau_\pi$, является предпучком модулей над предпучком колец $\{O_\pi(U)\}$, $U \in \tau_\pi$.

Выберем $\lambda \in \Lambda$. Пусть $\tilde{\lambda} = \pi^{-1}(\lambda)$. Слой предпучка $\{\mathbf{O}(U)\}$, $U \in \tau_\pi$ (индуктивный предел групп $\mathbf{O}(U)$, $\tilde{\lambda} \subset U \in \tau_\pi$, относительно гомоморфизмов $\sigma_{U,U'}$, $U \subseteq U'$), обозначим символом $\mathbf{O}(\tilde{\lambda})$. Аналогично, слой предпучка $\{O_\pi(U)\}$, $U \in \tau_\pi$ (индуктивный предел колец $O_\pi(U)$, $\tilde{\lambda} \subset U \in \tau_\pi$, относительно гомоморфизмов $\rho_{U,U'}$, $U \subseteq U'$), обозначим символом $O_\pi(\tilde{\lambda})$. Слой $O_\pi(\tilde{\lambda})$ обладает структурой кольца, а слой $\mathbf{O}(\tilde{\lambda})$ – структурой модуля над этим кольцом. Элементы $\mathbf{O}(\tilde{\lambda})$ называются ростками ν -функций, голоморфных в окрестностях $\tilde{\lambda}$, а элементы $O_\pi(\tilde{\lambda})$ – ростками π -симметричных функций, голоморфных в π -симметричных окрестностях $\tilde{\lambda}$.

Пусть I – замкнутый подмодуль в $\mathbf{P}$. Обозначим через $I(\tilde{\lambda})$ минимальный подмодуль $O_\pi(\tilde{\lambda})$ -модуля $\mathbf{O}(\tilde{\lambda})$, включающий I . Ясно, что $I(\tilde{\lambda})$ состоит из всевозможных конечных сумм $\sum c_i \varphi^{(i)}$, где $c_i \in O_\pi(\tilde{\lambda})$, $\varphi^{(i)} \in I$. Подмодуль $I(\tilde{\lambda})$ называется *локальным подмодулем I , ассоциированным с π -слоем $\tilde{\lambda}$* . Говорят, что подмодуль I допускает локальное описание, если справедлива следующая импликация:

$$\varphi \in \mathbf{P}, \quad \varphi \in I(\tilde{\lambda}) \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad \Rightarrow \quad \varphi \in I. \quad (2)$$

Задача локального описания состоит в нахождении условий, при которых замкнутый подмодуль $I \subseteq \mathbf{P}$ допускает локальное описание. Отметим, что импликация (2) была введена впервые И. Ф. Красичковым-Терновским в [6]. Замкнутые подмодули, удовлетворяющие этой импликации, названы им *обильными*.

1.3. Двойственность. Пусть W – замкнутое инвариантное подпространство $\mathbf{H}$; W^0 – аннулятор W в $\mathbf{H}^*$. Подпространство $\text{An } W := \mathbf{T}(W^0) \subseteq \mathbf{P}$ обладает структурой замкнутого $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуля в $\mathbf{P}$. Соотношение $I = \text{An } W$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между замкнутыми инвариантными подпространствами $W \subseteq \mathbf{H}$ и замкнутыми $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулями $I \subseteq \mathbf{P}$. Подмодуль $I = \text{An } W \subseteq \mathbf{P}$ принято называть *аннуляторным подмодулем* подпространства W .

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ. *Замкнутое инвариантное подпространство W допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль I является обильным.*

Эта теорема доказана в [2]. Она вскрывает двойственный характер задач спектрального синтеза и локального описания. Переход от первой задачи ко второй лежит в основе большинства известных работ по спектральному синтезу в комплексной области.

1.4. Редукция. Обозначим через $\mathbb{C}(\pi)$ поле частных кольца $\mathbb{C}[\pi]$. По известной теореме Люрота о полях рациональных функций [7; § 7, теорема 12] $\mathbb{C}(\pi)$ – простое трансцендентное расширение поля $\mathbb{C}$. Другими словами, существует элемент $l \in \mathbb{C}(\pi)$ такой, что $\mathbb{C}(\pi) = \mathbb{C}(l)$, где $\mathbb{C}(l)$ – поле частных кольца $\mathbb{C}[l]$ многочленов от l . Всякий элемент $l \in \mathbb{C}(\pi)$, для которого выполняется соотношение $\mathbb{C}(\pi) = \mathbb{C}(l)$, называется *элементом Люрота* системы многочленов $\pi_1, \dots, \pi_q$. Если l – это элемент Люрота, то и элемент $\frac{al+b}{cl+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, является элементом Люрота [7; § 7, теорема 11]. По теореме Нётер [7; § 7, теорема 14] в качестве элемента Люрота может быть выбран многочлен – *многочлен Люрота*. Если l – многочлен Люрота, то $al + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, – тоже многочлен Люрота. Существуют конструктивные процедуры, позволяющие найти многочлен Люрота для любой конкретной системы многочленов (см., например, [7; § 7]).

Пусть I_0 – произвольное множество в $\mathbf{P}$. Обозначим через $I_0[\pi]$ множество всевозможных конечных линейных комбинаций элементов I_0 с коэффициентами из кольца $\mathbb{C}[\pi]$. Множество $I_0[\pi]$ является минимальным $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулем в $\mathbf{P}$, содержащим множество I_0 . Так как операция умножения на многочлен непрерывна в топологии $\mathbf{P}$, то замыкание $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуля $I_0[\pi]$ будет также $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулем в $\mathbf{P}$. Этот подмодуль будем обозначать I и называть *замкнутым $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулем в $\mathbf{P}$, порождаемым множеством I_0* . $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль I является минимальным замкнутым $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулем в $\mathbf{P}$, содержащим множество I_0 . Аналогичным образом определяется *замкнутый $\mathbb{C}[l]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$, порождаемый множеством I_0* . Этот подмодуль будем обозначать J . Здесь l – фиксированный многочлен Люрота системы многочленов $\pi_1, \dots, \pi_q$. Если множество I_0 конечно, то подмодули I, J называются *конечно порожденными*. Если множество I_0 состоит из одного элемента, то эти подмодули называются *главными*.

Пусть $O_l(\tilde{\xi})$ – кольцо ростков l -симметричных функций, голоморфных в l -симметричных окрестностях l -слоя $\tilde{\xi}$; $\mathbf{O}(\tilde{\xi})$ – $O_l(\tilde{\xi})$ -модуль ростков ν -функций, голоморфных в l -симметричных окрестностях l -слоя $\tilde{\xi}$; $J(\tilde{\xi}) \subseteq \mathbf{O}(\tilde{\xi})$ – локальный подмодуль J , ассоциированный с l -слоем $\tilde{\xi}$. Согласно определению замкнутый $\mathbb{C}[l]$ -подмодуль J называется *обильным*, если справедлива импликация

$$f \in \mathbf{P}, \quad f \in J(\tilde{\xi}) \quad \forall \xi \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad f \in J.$$

В работе [3] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА РЕДУКЦИИ. *Подмодули I и J обильны или нет одновременно.*

Для доказательства теоремы редукции принципиальна выполнимость включений

$$s\mathbb{C}[l] \subseteq \mathbb{C}[\pi] \subseteq \mathbb{C}[l], \quad (3)$$

из которых вытекают включения

$$sJ \subseteq I \subseteq J. \quad (4)$$

Здесь s – это некоторый многочлен из кольца $\mathbb{C}[\pi]$. Среди отличных от нуля многочленов s , для которых выполняются включения (3), имеется многочлен минимальной степени. Этот многочлен определен однозначно с точностью до постоянного множителя. Отличный от нуля многочлен s , для которого выполнены включения (3), имеющий наименьшую из возможных степень и коэффициент при старшем

члене (относительно l) равный единице, называется многочленом, *ассоциированным с многочленом Люрота l* .

Включения (4) отражаются на свойствах локальных подмодулей $I(\tilde{\lambda})$, $J(\tilde{\xi})$. Точнее, всякий π -слой состоит из конечного множества l -слоев. Если π -слой $\tilde{\lambda}$ составлен из конечного множества попарно не пересекающихся l -слоев $\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_k$, то справедливы следующие включения:

$$s \bigcap_{j=1}^k J(\tilde{\xi}_j) \subseteq I(\tilde{\lambda}) \subseteq \bigcap_{j=1}^k J(\tilde{\xi}_j),$$

см. [3; предложение 9].

1.5. Краткое содержание работы. В §2 доказан критерий обильности, сводящий исследования по спектральному синтезу к проверке конкретных аналитико-алгебраических свойств замкнутых $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулей в $\mathbf{P}$; рассмотрены ситуации, в которых эта проверка может быть упрощена. В §3 замкнутые подпространства в $\mathbf{H}$ описаны в терминах однородных сверточных уравнений. Здесь же вскрывается строение аннуляторных подмодулей для подпространств решений систем однородных сверточных уравнений. Этим открывается путь к применению результатов по локальному описанию в частных ситуациях. Основные следствия критерия обильности и теоремы редукции приведены в §4.

§2. Критерий обильности

Теорема редукции сводит задачу локального описания замкнутых подмодулей в $\mathbf{P}$ над кольцом многочленов, порожденным совокупностью многочленов $\pi_1, \dots, \pi_q$, к задаче локального описания замкнутых подмодулей в $\mathbf{P}$ над кольцом многочленов, порожденным одним многочленом l . Последняя задача исследовалась ранее. Практически все известные результаты по локальному описанию замкнутых $\mathbb{C}[l]$ -подмодулей в $\mathbf{P}$ связаны с ограничением: $\Omega_1, \dots, \Omega_\nu$ — выпуклые области в $\mathbb{C}$. Это объясняется тем, что все известные исследования замкнутых подмодулей в $\mathbf{P}$ опираются на предположение, что в модуле $\mathbf{P}$ выполнены следующие аксиомы.

АКСИОМА СХОДИМОСТИ. *Топология $\mathbf{P}$ мажорирует топологию поточечной сходимости.*

АКСИОМА РАВНОМЕРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. *Для любой окрестности нуля $V \subseteq \mathbf{P}$ существует окрестность нуля $U \subseteq \mathbf{P}$ такая, что справедлива импликация*

$$\varphi \in U, \quad (\zeta - a) \mid \varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - a} \in V.$$

Здесь $(\zeta - a) \mid \varphi$ означает, что двучлен $\zeta - a$ делит $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_\nu)$, т.е. $\frac{\varphi_j(\zeta)}{\zeta - a}$ голоморфны в окрестности точки a .

Эти аксиомы впервые сформулированы в работе И. Ф. Красичкова-Терновского [6].

Выполнимость аксиомы сходимости не связана с условием выпуклости областей $\Omega_1, \dots, \Omega_\nu$. Эта аксиома выполняется, если $\Omega_1, \dots, \Omega_\nu$ — односвязные области [8].

В то же время, для выполнимости аксиомы равномерной устойчивости выпуклость областей $\Omega_1, \dots, \Omega_\nu$ является принципиальной [8].

Согласно известному критерию И. Ф. Красичкова-Терновского проверка обильности замкнутого $\mathbb{C}[l]$ -подмодуля в $\mathbf{P}$ сводится к проверке его *устойчивости* и *насыщенности* (случай $l(\zeta) = \zeta$ изучен в [6], [9]; общий случай рассмотрен в [10], [11]; ситуация $l(\zeta) = \zeta^m$ исследована автором [12], [13]).

2.1. Устойчивые подмодули. Пусть $\Omega_1, \dots, \Omega_\nu$ – выпуклые области в $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль $I \subseteq \mathbf{P}$ называется *устойчивым*, если для любого $r \in \mathbb{C}[\pi]$ справедлива импликация

$$f \in I, \quad \frac{f}{r} \in I(\tilde{\lambda}) \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{f}{r} \in I. \quad (5)$$

Обозначим через l фиксированный многочлен Люрота системы многочленов $\pi_1, \dots, \pi_q$; и пусть s – многочлен, ассоциированный с многочленом Люрота l ; I_0 – произвольное множество в $\mathbf{P}$; I – замкнутый $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$, порождаемый множеством I_0 ; J – замкнутый $\mathbb{C}[l]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$, порождаемый множеством I_0 (см. п. 1.4). Для $\mathbb{C}[l]$ -подмодуля J импликация (5) эквивалентна импликации

$$f \in J, \quad \frac{f}{l-l(\xi)} \in J(\tilde{\xi}) \quad \Rightarrow \quad \frac{f}{l-l(\xi)} \in J,$$

где ξ – фиксированное комплексное число, $\tilde{\xi} = l^{-1}(\xi)$. Выполнимость этой импликации не зависит от выбора числа ξ [10; предложение 3.1].

ТЕОРЕМА 2.1. *Подмодули I и J устойчивы или нет одновременно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль I является устойчивым. Значит, для любого многочлена $r \in \mathbb{C}[\pi]$ справедлива импликация (5). Нужно доказать, что условие $f \in J, \frac{f}{l-l(\xi)} \in J(\tilde{\xi})$ влечет включение $\frac{f}{l-l(\xi)} \in J$. В силу [3; лемма 7] это условие влечет существование элемента $\psi \in I_0[l]$ такого, что $\frac{f}{l-l(\xi)} = \psi + sg$, где $g \in \mathbf{P}, g \in J(\tilde{\xi}) \quad \forall \xi \in \mathbb{C}$. Согласно [3; предложение 9] $sg \in I(\tilde{\lambda}) \quad \forall \lambda \in \Lambda$. При этом

$$sg = \frac{sf - s(l-l(\xi))\psi}{s(l-l(\xi))}, \quad sf \in sJ \subset I, \quad s(l-l(\xi))\psi \in I_0[\pi] \subset I.$$

В силу импликации (5) $sg \in I$. Значит, $\frac{f}{l-l(\xi)} = \psi + sg \in J$. Следовательно, $\mathbb{C}[l]$ -подмодуль J является устойчивым.

Обратно, предположим, что $\mathbb{C}[l]$ -подмодуль J является устойчивым. Выберем произвольный многочлен $r \in \mathbb{C}[\pi]$. Нужно доказать, что справедлива импликация (5). Пусть $f \in I, f/r \in I(\tilde{\lambda}) \quad \forall \lambda \in \Lambda$. В силу [3; лемма 8] это условие влечет существование элемента $\psi \in I_0[\pi]$ такого, что $f/r = \psi + sg$, где $g \in \mathbf{P}, g \in J(\tilde{\xi}) \quad \forall \xi \in \mathbb{C}$. Значит, $(f - r\psi)/(sr) \in J(\tilde{\xi}) \quad \forall \xi \in \mathbb{C}$. При этом $f \in I \subset J, r\psi \in I_0[\pi] \subset I \subseteq J$, т.е. $f - r\psi \in J$. Устойчивость подмодуля J влечет включение $g = (f - r\psi)/(sr) \in J$. Значит, $f/r = \psi + sg \in I$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Замыкание устойчивого $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуля в $\mathbf{P}$ является устойчивым $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулем в $\mathbf{P}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I_0 – устойчивый $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$, I – замыкание I_0 в топологии $\mathbf{P}$. Покажем, что подмодуль I является устойчивым. Обозначим через $I_0[l]$ минимальный $\mathbb{C}[l]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$, включающий I_0 , а через J – замыкание $I_0[l]$ в топологии $\mathbf{P}$. Прежде всего убедимся, что $\mathbb{C}[l]$ -подмодуль $I_0[l]$ является устойчивым. Для этого нужно доказать, что условие $f \in I_0[l]$, $\frac{f}{l-l(\xi)} \in I_0[l](\tilde{\xi})$ влечет включение $\frac{f}{l-l(\xi)} \in I_0[l]$. Так как $I_0[l] \subseteq J$, то $I_0[l](\tilde{\xi}) \subseteq J(\tilde{\xi}) \forall \xi \in \mathbb{C}$. Значит, $\frac{f}{l-l(\xi)} \in J(\tilde{\xi}) \forall \xi \in \mathbb{C}$. В силу [3; лемма 7] существует элемент $\psi \in I_0[l]$ такой, что $\frac{f}{l-l(\xi)} = \psi + sg$, где $g \in \mathbf{P}$, $g \in J(\tilde{\xi}) \forall \xi \in \mathbb{C}$. Согласно [3; предложение 9] $sg \in I(\tilde{\lambda}) \forall \lambda \in \Lambda$, а ввиду [3; лемма 5] $I(\tilde{\lambda}) = I_0(\tilde{\lambda}) \forall \lambda \in \Lambda$. Значит, $sg \in I_0(\tilde{\lambda}) \forall \lambda \in \Lambda$. При этом

$$sg = \frac{sf - s(l-l(\xi))\psi}{s(l-l(\xi))}, \quad sf \in sI_0[l] \subset I_0[\pi] = I_0, \quad s(l-l(\xi))\psi \in I_0[\pi] = I_0.$$

В силу импликации (5) $sg \in I_0$. Значит, $\frac{f}{l-l(\xi)} = \psi + sg \in I_0[l]$. Таким образом, устойчивость $\mathbb{C}[l]$ -подмодуля $I_0[l]$ доказана. В силу [10; предложение 3.2] $\mathbb{C}[l]$ -подмодуль J является устойчивым. Осталось сослаться на теорему 2.1 и заключить, что $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль I является устойчивым.

Пусть $\tilde{\lambda}$ – π -слой. Система элементов $u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \in \mathbf{O}(\tilde{\lambda})$ называется *независимой над кольцом $O_\pi(\tilde{\lambda})$* , если справедлива импликация

$$c_1 u^{(1)} + \dots + c_k u^{(k)} = 0, \quad c_i \in O_\pi(\tilde{\lambda}) \quad \Rightarrow \quad c_i = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

В противном случае система $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ называется *зависимой над кольцом $O_\pi(\tilde{\lambda})$* . Система элементов $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)} \in \mathbf{P}$ π -*независима*, если эта система независима над любым кольцом $O_\pi(\tilde{\lambda})$, $\lambda \in \Lambda$. В противном случае система $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}$ называется π -*зависимой*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Если система элементов $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)} \in \mathbf{P}$ зависима над фиксированным кольцом $O_\pi(\tilde{\lambda}_0)$, то она зависима над любым другим кольцом $O_\pi(\tilde{\lambda})$, $\lambda \in \Lambda$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть система элементов $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)} \in \mathbf{P}$ зависима над кольцом $O_\pi(\tilde{\lambda}_0)$. Значит, найдется открытая π -симметричная окрестность U_0 π -слоя $\tilde{\lambda}_0$, на которой выполняется тождество $c_1 \varphi^{(1)} + \dots + c_k \varphi^{(k)} \equiv 0$, где коэффициенты $c_1, \dots, c_k$ принадлежат кольцу $O_\pi(U_0)$ и не все из них являются тождественными нулями. Найдется точка $\zeta' \in U_0$, в которой многочлен s и хотя бы один из коэффициентов $c_1, \dots, c_k$ отличны от нуля. Выберем открытую l -симметричную окрестность $U \subseteq U_0$ l -слоя $\tilde{\xi}' = l^{-1}(l(\zeta'))$, лежащую вне нулевого

множества многочлена s . Согласно [3; предложение 4] множество U является π -симметричным. При этом $c_1, \dots, c_k \in O_\pi(U)$. Из [3; предложение 5] имеем $O_\pi(U) = O_l(U)$, значит, $c_1, \dots, c_k \in O_l(U)$. Следовательно, система $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}$ зависима над кольцом $O_l(\tilde{\xi}')$. В силу [14; предложение 3.2, следствие 2] эта система зависима над любым кольцом $O_l(\tilde{\xi})$, $\tilde{\xi} \subset \mathbb{C}$. Выберем произвольный π -слой $\tilde{\lambda}$. Он состоит из конечной совокупности l -слоев $\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_m$. Система $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}$ зависима над каждым кольцом $O_l(\tilde{\xi}_1), \dots, O_l(\tilde{\xi}_m)$. Значит, найдутся попарно не пересекающиеся открытые l -симметричные множества $U_1 \supset \tilde{\xi}_1, \dots, U_m \supset \tilde{\xi}_m$, на которых выполняются тождества

$$c_1^{(1)}\varphi^{(1)} + \dots + c_k^{(1)}\varphi^{(k)} \equiv 0, \quad \dots, \quad c_1^{(m)}\varphi^{(1)} + \dots + c_k^{(m)}\varphi^{(k)} \equiv 0.$$

Здесь $c_1^{(j)}, \dots, c_k^{(j)} \in O_l(U_j)$ и в каждой совокупности $c_1^{(j)}, \dots, c_k^{(j)}$ имеется элемент, отличный от тождественного нуля. Определим на открытом l -симметричном множестве $U = U_1 \cup \dots \cup U_m$ l -симметричные функции $c_1, \dots, c_k$, полагая $c_1(\zeta) = c_1^{(j)}(\zeta), \dots, c_k(\zeta) = c_k^{(j)}(\zeta)$ для $\zeta \in U_j$. Замечаем, что на U выполняется тождество $c_1\varphi^{(1)} + \dots + c_k\varphi^{(k)} \equiv 0$. Множество U содержит π -слой $\tilde{\lambda}$. Значит, найдется открытое π -симметричное множество V такое, что $\tilde{\lambda} \subset V \subseteq U$ [3; §1, п. 1.2]. Функции $c_1, \dots, c_k$ принадлежат кольцу $O_l(V)$. Значит, $sc_1, \dots, sc_k \in O_\pi(V)$ [3; предложение 6]. При этом на V выполняется тождество $sc_1\varphi^{(1)} + \dots + sc_k\varphi^{(k)} \equiv 0$. Следовательно, система $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}$ зависима над кольцом $O_\pi(\tilde{\lambda})$. Предложение доказано.

Рассмотрим некоторые следствия предложения 2.2.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Система элементов $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)} \in \mathbf{P}$ π -независима тогда и только тогда, когда она l -независима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольный π -слой $\tilde{\lambda}$, не пересекающийся с нулевым множеством многочлена s . Он совпадает с l -слоем $l^{-1}(l(\zeta))$, $\zeta \in \tilde{\lambda}$ [3; предложение 3]. Из предложения 2.2 вытекает, что π -независимость системы элементов $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)} \in \mathbf{P}$ эквивалентна ее независимости над кольцом $O_\pi(\tilde{\lambda})$, а l -независимость этой системы эквивалентна ее независимости над кольцом $O_l(\tilde{\lambda})$. Но из [3; предложение 5] следует, что эти кольца совпадают. Значит, π -независимость и l -независимость системы $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}$ эквивалентны.

Следуя И. Ф. Красичкову-Терновскому [6], максимальное число элементов в π -независимых системах из множества $I_0 \subseteq \mathbf{P}$ называем π -рангом множества I_0 и обозначаем $\pi\text{-Rank} I_0$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Для любого множества $I_0 \subseteq \mathbf{P}$ выполняются соотношения

$$\pi\text{-Rank} I_0 = l\text{-Rank} I_0 \leq \nu t,$$

где t — степень многочлена l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $\pi\text{-Rank} I_0 = l\text{-Rank} I_0$ вытекает из следствия 2.1. Неравенство $l\text{-Rank} I_0 \leq \nu t$ выполняется в силу [14; предложение 3.2, следствие 1].

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть I – замкнутый $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$, порожденный множеством $I_0 \subseteq \mathbf{P}$, J – замкнутый $\mathbb{C}[l]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$, порожденный множеством I_0 . Тогда

$$\pi\text{-Rank} I = l\text{-Rank} J = l\text{-Rank} I_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $\pi\text{-Rank} I \leq l\text{-Rank} J$ вытекает из следствия 2.1 и вложения $I \subseteq J$ (см. (4)). Докажем выполнимость обратного неравенства. Пусть $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}$ – l -независимая система элементов из J . Из левого включения в (4) вытекает, что $s\varphi^{(1)}, \dots, s\varphi^{(k)}$ – l -независимая система элементов из I . По следствию 2.1 система $s\varphi^{(1)}, \dots, s\varphi^{(k)}$ является π -независимой. Таким образом, $l\text{-Rank} J$ не может быть больше $\pi\text{-Rank} I$ и выполнимость равенства $\pi\text{-Rank} I = l\text{-Rank} J$ доказана. С другой стороны, в силу [3; лемма 6] локальные подмодули $J(\tilde{\xi})$ и $I_0(\tilde{\xi})$, ассоциированные с произвольным l -слоем $\tilde{\xi}$, совпадают. Отсюда [14; предложение 3.3] следует равенство $l\text{-Rank} J = l\text{-Rank} I_0$. Следствие доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Замкнутый $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль I , порожденный π -независимой системой $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)} \in \mathbf{P}$, является устойчивым, в частности каждый главный $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$ является устойчивым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}$ – π -независимая система элементов из $\mathbf{P}$, и пусть $I_0 = \{\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}\}$, I – замкнутый $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$, порожденный множеством I_0 , J – замкнутый $\mathbb{C}[l]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$, порожденный множеством I_0 . По следствию 2.1 система элементов $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}$ является l -независимой. Значит, $\mathbb{C}[l]$ -подмодуль J является устойчивым [10; предложение 3.3]. Следовательно, по теореме 2.1 $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль I является устойчивым.

Далее нам потребуется понятие l -индекса множества $I_0 \subseteq \mathbf{P}$ [14; п. 3.3]. Пусть I_0 – произвольное множество в $\mathbf{P}$ π -ранга k ; $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}$ – π -независимая система элементов из I_0 ; m – степень многочлена l . Согласно [14; предложение 3.1] элемент $\varphi^{(n)}$, $n = 1, \dots, k$, представляется единственным образом в виде

$$\varphi^{(n)}(\zeta) = \sum_{i=0}^{m-1} \zeta^i \psi_i^{(n)}(l(\zeta)), \quad \psi_i^{(n)} = (\psi_{i,1}^{(n)}, \dots, \psi_{i,\nu}^{(n)}) \in O^\nu(\mathbb{C}).$$

Обозначим через $(\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)})$ матрицу размера $m\nu \times k$, составленную из k столбцов, состоящих из $\psi_{0,1}^{(n)}, \dots, \psi_{0,\nu}^{(n)}, \dots, \psi_{m-1,1}^{(n)}, \dots, \psi_{m-1,\nu}^{(n)}$ соответственно. Минор k -го порядка матрицы $(\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)})$, составленный из строк с номерами $i_1, \dots, i_k$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m\nu$, обозначается

$$\begin{bmatrix} \varphi^{(1)} & \dots & \varphi^{(k)} \\ i_1 & \dots & i_k \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Выберем произвольный l -слой $\tilde{\xi} = l^{-1}(l(\xi))$; l -индекс $l\text{-Ind}_{\tilde{\xi}} I_0$ множества $I_0 \subseteq \mathbf{P}$ π -ранга k в точке $\omega \in \tilde{\xi}$ есть минимальная кратность нуля в точке ξ определителей (6) по всевозможным π -независимым системам $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)} \in I_0$ и всевозможным наборам $i_1, \dots, i_k$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m\nu$.

Рассмотрим конечную совокупность $I^{(1)}, \dots, I^{(k)}$ замкнутых $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулей в $\mathbf{P}$ и обозначим через I замыкание в топологии $\mathbf{P}$ множества элементов вида $\varphi^{(1)} + \dots + \varphi^{(k)}$, $\varphi^{(i)} \in I^{(i)}$. Множество I является замкнутым $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулем в $\mathbf{P}$ и называется *суммой $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулей $I^{(1)}, \dots, I^{(k)}$* [15]. Легко проверить, что подмодуль I совпадает с замкнутым $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулем в $\mathbf{P}$, порождаемым множеством $I_0 = I^{(1)} \cup \dots \cup I^{(k)}$ (см. п. 1.4). Если $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодули $I^{(1)}, \dots, I^{(k)}$ — главные с образующими $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}$ соответственно, то подмодуль I — конечно порожденный $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль, порождаемый множеством $\{\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}\}$. Устойчивость сумм $\mathbb{C}[l]$ -подмодулей исследована И. Ф. Красичковым-Терновским в [10]. Два следующих предложения являются аналогами предложений 3.4 и 3.5 из [10].

Зафиксируем простой π -слой, не пересекающийся с нулевым множеством многочлена s . В силу [3; предложение 3] фиксированный π -слой является и l -слоем. Обозначим его через $\tilde{\xi}$. Функция $\alpha^{(i)}: \tilde{\xi} \rightarrow \mathbb{C}^\nu$ называется *допустимой относительно подмодуля $I^{(i)} \subseteq \mathbf{P}$* , если существует элемент $\varphi \in I^{(i)}$ такой, что $\alpha^{(i)}(\omega) = \varphi(\omega) \forall \omega \in \tilde{\xi}$. Рассмотрим набор $\alpha = \{\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)}\}$ функций $\tilde{\xi} \rightarrow \mathbb{C}^\nu$, допустимых относительно $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулей $I^{(1)}, \dots, I^{(k)}$ соответственно. Положим

$$T(I, \alpha, \tilde{\xi}) = \{\varphi = \varphi^{(1)} + \dots + \varphi^{(k)} : \varphi^{(i)} \in I^{(i)}, \\ \varphi^{(i)}(\omega) = \alpha^{(i)}(\omega) \forall \omega \in \tilde{\xi}, i = 1, \dots, k\}.$$

В предположении, что $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодули $I^{(1)}, \dots, I^{(k)}$ являются устойчивыми, оказывается справедливым следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть

$$l\text{-Ind}_{\tilde{\xi}} I^{(1)} = \dots = l\text{-Ind}_{\tilde{\xi}} I^{(k)} = 0.$$

Для того чтобы подмодуль I был устойчив, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: для любого набора $\alpha = \{\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)}\}$, $\alpha^{(1)} + \dots + \alpha^{(k)} = 0$, функций, допустимых относительно $I^{(1)}, \dots, I^{(k)}$ соответственно, замыкание множества $T(I, \alpha, \tilde{\xi})$ в топологии $\mathbf{P}$ содержит нулевой элемент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть I — сумма $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулей $I^{(1)}, \dots, I^{(k)}$; $\hat{I}^{(1)}, \dots, \hat{I}^{(k)}$ — замкнутые $\mathbb{C}[l]$ -подмодули в $\mathbf{P}$, порождаемые $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулями $I^{(1)}, \dots, I^{(k)}$ соответственно. Считаем, что подмодуль I является устойчивым. Обозначим через J сумму $\mathbb{C}[l]$ -подмодулей $\hat{I}^{(1)}, \dots, \hat{I}^{(k)}$. Как уже отмечалось, замкнутый $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$, порождаемый множеством $I_0 = I^{(1)} \cup \dots \cup I^{(k)}$, совпадает с I . С другой стороны, замкнутый $\mathbb{C}[l]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$, порождаемый множеством I_0 , содержится в J и, в то же время, включает множество $\hat{I}_0 = \hat{I}^{(1)} \cup \dots \cup \hat{I}^{(k)}$. Это означает, что он совпадает с J . Таким образом, замкнутые подмодули I и J порождаются одним и тем же множеством I_0 . По теореме 2.1 устойчивость подмодуля I влечет устойчивость подмодуля J . Выберем произвольный набор $\alpha = \{\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)}\}$, $\alpha^{(1)} + \dots + \alpha^{(k)} = 0$, функций, допустимых относительно подмодулей $I^{(1)}, \dots, I^{(k)}$ соответственно. Из включений $I^{(1)} \subseteq \hat{I}^{(1)}, \dots, I^{(k)} \subseteq \hat{I}^{(k)}$ вытекает, что функции $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)}$ являются допустимыми относительно подмодулей $\hat{I}^{(1)}, \dots, \hat{I}^{(k)}$ соответственно и при этом

$$l\text{-Ind}_{\tilde{\xi}} \hat{I}^{(i)} = l\text{-Ind}_{\tilde{\xi}} I^{(i)} = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

В силу [10; предложение 3.4] замыкание множества $T(J, \alpha, \tilde{\xi})$ в топологии $\mathbf{P}$ содержит нулевой элемент. Из непрерывности в $\mathbf{P}$ операции умножения на множитель следует, что тем же свойством обладает множество $\frac{s}{s(\tilde{\xi})}T(J, \alpha, \tilde{\xi})$. Левое включение в (4) влечет включения $s\hat{I}^{(1)} \subseteq I^{(1)}, \dots, s\hat{I}^{(k)} \subseteq I^{(k)}$. Значит, последнее множество является частью множества $T(I, \alpha, \tilde{\xi})$. Следовательно, замыкание множества $T(I, \alpha, \tilde{\xi})$ в топологии $\mathbf{P}$ содержит нулевой элемент. Необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что для любого набора $\alpha = \{\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)}\}$, $\alpha^{(1)} + \dots + \alpha^{(k)} = 0$, функций, допустимых относительно подмодулей $I^{(1)}, \dots, I^{(k)}$ соответственно, замыкание множества $T(I, \alpha, \tilde{\xi})$ в топологии $\mathbf{P}$ содержит нулевой элемент. Выберем произвольный набор $\alpha = \{\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)}\}$, $\alpha^{(1)} + \dots + \alpha^{(k)} = 0$, функций, допустимых относительно подмодулей $\hat{I}^{(1)}, \dots, \hat{I}^{(k)}$ соответственно. По определению набора α существуют $\varphi^{(1)} \in \hat{I}^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)} \in \hat{I}^{(k)}$ такие, что $\alpha^{(1)}(\omega) = \varphi^{(1)}(\omega), \dots, \alpha^{(k)}(\omega) = \varphi^{(k)}(\omega) \quad \forall \omega \in \tilde{\xi}$. При этом

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)}(\omega) &= \frac{s(\omega)}{s(\tilde{\xi})}\varphi^{(1)}(\omega), \dots, \alpha^{(k)}(\omega) = \frac{s(\omega)}{s(\tilde{\xi})}\varphi^{(k)}(\omega) \quad \forall \omega \in \tilde{\xi}, \\ \frac{s}{s(\tilde{\xi})}\varphi^{(1)} &\in I^{(1)}, \dots, \frac{s}{s(\tilde{\xi})}\varphi^{(k)} \in I^{(k)}. \end{aligned}$$

Следовательно, функции $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)}$ являются допустимыми относительно подмодулей $I^{(1)}, \dots, I^{(k)}$ соответственно. По предположению замыкание множества $T(I, \alpha, \tilde{\xi})$ в топологии $\mathbf{P}$ содержит нулевой элемент. Но множество $T(I, \alpha, \tilde{\xi})$ является частью множества $T(J, \alpha, \tilde{\xi})$. Значит, замыкание множества $T(J, \alpha, \tilde{\xi})$ в топологии $\mathbf{P}$ содержит нулевой элемент. Согласно [10; предложение 3.4] подмодуль J является устойчивым. По теореме 2.1 таковым же является подмодуль I . Предложение доказано.

Предположим, что в условиях предыдущего предложения замкнутые $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодули $I^{(1)}, \dots, I^{(k)}$ — главные $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодули в $\mathbf{P}$, порождаемые $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}$ соответственно. Положим

$$A(\tilde{\xi}) = \{a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{C}^k : a_1\varphi^{(1)}(\omega) + \dots + a_k\varphi^{(k)}(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \tilde{\xi}\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Для того чтобы подмодуль I был устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы для каждого вектора $a \in A(\tilde{\xi})$ существовали обобщенные последовательности $\{p_{1\sigma}\}, \dots, \{p_{k\sigma}\}$, $\sigma \in \Sigma$, многочленов из кольца $\mathbb{C}[l]$ такие, что:*

- 1) $p_{1\sigma}(\tilde{\xi}) = a_1, \dots, p_{k\sigma}(\tilde{\xi}) = a_k$;
- 2) $p_{1\sigma}\varphi^{(1)} + \dots + p_{k\sigma}\varphi^{(k)} \rightarrow 0$ в топологии $\mathbf{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{I}^{(1)}, \dots, \hat{I}^{(k)}$ — $\mathbb{C}[l]$ -подмодули в $\mathbf{P}$, порождаемые подмодулями $I^{(1)}, \dots, I^{(k)}$ соответственно. Так как подмодули $I^{(1)}, \dots, I^{(k)}$ — главные $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодули в $\mathbf{P}$, порождаемые элементами $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}$ соответственно, то $\hat{I}^{(1)}, \dots, \hat{I}^{(k)}$ — главные $\mathbb{C}[l]$ -подмодули в $\mathbf{P}$, порождаемые теми же элементами. Пусть J — сумма $\mathbb{C}[l]$ -подмодулей $\hat{I}^{(1)}, \dots, \hat{I}^{(k)}$. Как уже отмечалось при доказательстве предложения 2.4, подмодуль I совпадает с замкнутым

$\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулем в $\mathbf{P}$, порождаемым множеством $I^{(1)} \cup \dots \cup I^{(k)}$, а подмодуль J совпадает с замкнутым $\mathbb{C}[l]$ -подмодулем в $\mathbf{P}$, порождаемым тем же множеством. По теореме 2.1 устойчивость подмодуля I эквивалентна устойчивости подмодуля J . С другой стороны, в силу [10; предложение 3.5] устойчивость подмодуля J эквивалентна существованию обобщенных последовательностей $\{p_{1\sigma}\}, \dots, \{p_{k\sigma}\}$, $\sigma \in \Sigma$, многочленов из кольца $\mathbb{C}[l]$, удовлетворяющих условиям 1) и 2), для каждого вектора $a \in A(\tilde{\xi})$. Тем самым предложение доказано.

2.2. Насыщенные подмодули. Пусть $I - \mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$ ранга k , $\varphi \in \mathbf{P}$. Рассмотрим локальное представление

$$\varphi = \sum_{i=1}^k c_i u^{(i)} \quad (7)$$

в точке ζ . Здесь $u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \in I$, $c_1, \dots, c_k \in O_\pi(\tilde{\lambda})$, $\tilde{\lambda} - \pi$ -слой, содержащий ζ . Локальное представление такого типа будем называть π -представлением. Пусть ρ – непрерывная полунорма на $\mathbf{P}$. Представление (7) называется ρ -допустимым, если $\rho(u^{(1)}) \leq 1, \dots, \rho(u^{(k)}) \leq 1$. Далее, обозначим через $c(\zeta)$ значение ростка $c \in O_\pi(\tilde{\lambda})$ в точке ζ . Введем функцию

$$\rho_I(\zeta, \varphi) = \inf \left\{ 1 + \sum |c_i(\zeta)| \right\},$$

где инфимум берется по всем ρ -допустимым π -представлениям φ в точке ζ . Если такого представления не существует, то полагаем $\rho_I(\zeta, \varphi) = \infty$. Подмодуль I насыщен относительно элемента $\varphi \in \mathbf{P}$, если для любой непрерывной полунормы ρ на $\mathbf{P}$ справедлива импликация:

$$\Phi - \text{целая функция, } |\Phi(\zeta)| \leq \rho_I(\zeta, \varphi) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \Phi = \text{const.}$$

Подмодуль I насыщен, если он насыщен относительно любого элемента $\varphi \in \mathbf{P}$, $\varphi \in I(\tilde{\lambda}) \quad \forall \lambda \in \Lambda$.

Рассмотрим теперь $\mathbb{C}[l]$ -подмодуль J также ранга k . Представление вида (7), где $u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \in J$, $c_1, \dots, c_k \in O_l(\tilde{\xi})$, $\tilde{\xi} - l$ -слой, содержащий ζ , называется l -представлением. Аналогично тому, как это делалось выше, определяется понятие ρ -допустимого l -представления. Вводится функция

$$\rho_J(\zeta, \varphi) = \inf \left\{ 1 + \sum |c_i(\zeta)| \right\},$$

где инфимум берется по всем ρ -допустимым l -представлениям $\varphi \in \mathbf{P}$ в точке ζ . Подмодуль J насыщен относительно элемента $\varphi \in \mathbf{P}$, если для любой непрерывной полунормы ρ на $\mathbf{P}$ справедлива импликация:

$$\Phi - \text{целая функция, } |\Phi(\zeta)| \leq \rho_J(\zeta, \varphi) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \Phi = \text{const.}$$

Подмодуль J насыщен, если он насыщен относительно любого элемента $\varphi \in \mathbf{P}$, $\varphi \in J(\tilde{\xi}) \quad \forall \xi \in \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль I и $\mathbb{C}[l]$ -подмодуль J связаны соотношением $sJ \subseteq I \subseteq J$. Тогда подмодули I, J насыщены или нет одновременно.

Доказательство распадается на две части. В первой части устанавливается, что насыщенность I влечет насыщенность J ; во второй части проверяется обратное утверждение: насыщенность J влечет насыщенность I .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Насыщенность подмодуля I влечет насыщенность подмодуля J .

ЛЕММА 2.1. Пусть $\varphi \in \mathbf{P}$, s – многочлен. Если $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль I насыщен относительно $s\varphi$, то он насыщен относительно φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть подмодуль I насыщен относительно $s\varphi$, ρ – непрерывная полунорма на $\mathbf{P}$. Рассмотрим целую функцию Φ , удовлетворяющую условию

$$|\Phi(\zeta)| \leq \rho_I(\zeta, \varphi) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}. \quad (8)$$

Нужно показать, что $\Phi = \text{const}$. Оценим $\rho_I(\zeta, \varphi)$, через $\rho_I(\zeta, s\varphi)$. По определению

$$\rho_I(\zeta, s\varphi) = \inf \left\{ 1 + \sum |c_i(\zeta)| \right\},$$

где инфимум берется по всем ρ -допустимым π -представлениям $s\varphi$

$$s\varphi = \sum_{i=1}^k c_i u^{(i)} \quad (9)$$

в точке ζ . Из (9) следует

$$\varphi = \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{s} u^{(i)},$$

откуда

$$\rho_I(\zeta, \varphi) \leq \inf \left\{ 1 + \frac{1}{s(\zeta)} \sum |c_i(\zeta)| \right\},$$

где инфимум берется по всем ρ -допустимым π -представлениям (9). Пусть D – замкнутый круг с центром в нуле, вне которого $s(\zeta) \geq 1$. При $\zeta \in \mathbb{C} \setminus D$ имеем

$$\rho_I(\zeta, \varphi) \leq \inf \left\{ 1 + \sum |c_i(\zeta)| \right\} = \rho_I(\zeta, s\varphi).$$

В силу (8)

$$|\Phi(\zeta)| \leq \rho_I(\zeta, s\varphi) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus D.$$

Далее, существует число $M \geq 1$, для которого $\max_{\zeta \in D} |\Phi(\zeta)| \leq M$. Учитывая, что $\rho_I(\zeta, s\varphi) \geq 1$, выводим $|\Phi(\zeta)| \leq M \rho_I(\zeta, s\varphi) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}$ или $|\Phi(\zeta)|/M \leq \rho_I(\zeta, s\varphi) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}$. Поскольку подмодуль I насыщен относительно $s\varphi$, заключаем, что $\Phi = \text{const}$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.6. Покажем, что для любого элемента $\varphi \in \mathbf{P}$ выполняется неравенство

$$\rho_J(\zeta, \varphi) \leq \rho_I(\zeta, \varphi) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus \sigma, \quad (10)$$

где σ — нулевое множество многочлена s . Пусть $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \sigma$. Рассмотрим ρ -допустимое π -представление

$$\varphi = \sum_{i=1}^k c_i u^{(i)}.$$

Так как $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \sigma$ и $I \subseteq J$, то это представление будет и l -представлением. Таким образом, множество ρ -допустимых π -представлений является частью множества ρ -допустимых l -представлений. Отсюда следует неравенство (10). Теперь предположим, что I — насыщенный подмодуль. Пусть $\varphi \in \mathbf{P}$, $\varphi \in J(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{C}$. Рассмотрим целую функцию Φ , удовлетворяющую условию

$$|\Phi(\zeta)| \leq \rho_J(\zeta, \varphi) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}.$$

Нужно доказать, что $\Phi = \text{const}$. В силу (10)

$$|\Phi(\zeta)| \leq \rho_I(\zeta, \varphi) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus \sigma. \quad (11)$$

Из определения $\rho_I(\zeta, \varphi)$ следует, что эта функция полунепрерывна сверху. С другой стороны, функция $|\Phi(\zeta)|$ непрерывна. Поэтому неравенство (11) распространяется с $\mathbb{C} \setminus \sigma$ на все $\mathbb{C}$. Итак

$$|\Phi(\zeta)| \leq \rho_I(\zeta, \varphi) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}. \quad (12)$$

По предположению выполняется соотношение $sJ \subseteq I$. Из этого соотношения вытекает, что условие $\varphi \in J(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{C}$ влечет $s\varphi \in I(\tilde{\lambda}) \quad \forall \lambda \in \Lambda$. Так как подмодуль I насыщен, то он будет насыщен относительно $s\varphi$. По лемме 2.1 подмодуль I насыщен и относительно φ . На основании неравенства (12) заключаем, что $\Phi = \text{const}$. Это справедливо для любой непрерывной полунормы ρ на $\mathbf{P}$ и любого элемента $\varphi \in \mathbf{P}$, $\varphi \in I(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{C}$. Следовательно, J — насыщенный подмодуль. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. *Насыщенность подмодуля J влечет насыщенность подмодуля I .*

ЛЕММА 2.2. *Пусть s — многочлен. Для любой непрерывной полунормы ρ на $\mathbf{P}$ существует другая непрерывная полунорма ρ' такая, что справедлива импликация*

$$\rho'(f) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \rho(sf) \leq 1. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$U = \{f : \rho(f) \leq 1\},$$

U — абсолютно выпуклая замкнутая окрестность нуля в $\mathbf{P}$. Так как операция умножения на многочлен непрерывна в $\mathbf{P}$, то существует абсолютно выпуклая замкнутая окрестность нуля U' такая, что $sU' \subseteq U$. Пусть $\rho'(f) = \inf\{\lambda > 0 : f \in \lambda U'\}$, ρ' — непрерывная полунорма на $\mathbf{P}$. Покажем, что выполняется импликация (13). Действительно, если $\rho'(f) \leq 1$, то $f \in U'$. Тогда $sf \in U$, что равносильно $\rho(sf) \leq 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. Пусть D – замкнутый круг с центром в нуле, вне которого $|s(\zeta)| \geq 1$. Для любой непрерывной полунормы ρ на $\mathbf{P}$ существует другая непрерывная полунорма ρ' такая, что

$$\rho_I(\zeta, \varphi) \leq \rho'_J(\zeta, \varphi) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.2 подбираем непрерывную полунорму ρ' , для которой выполняется импликация (13). Пусть $\zeta \in \mathbb{C} \setminus D$. Рассмотрим ρ' -допустимое l -представление

$$\varphi = \sum_{i=1}^k c_i u^{(i)} \quad (14)$$

в точке ζ . Запишем это представление в виде

$$\varphi = \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{s} v^{(i)}, \quad (15)$$

где $v^{(1)} = su^{(1)}, \dots, v^{(k)} = su^{(k)}$. В силу включения $sJ \subseteq I$

$$v^{(1)}, \dots, v^{(k)} \in I.$$

Кроме того, при $\zeta \notin \sigma$ коэффициенты $c_i/s \in O_\pi(\tilde{\lambda})$, где $\tilde{\lambda}$ – π -слой, содержащий ζ . Таким образом, (15) есть π -представление φ в точке ζ . В силу импликации (13) это представление является ρ -допустимым. Множество всех ρ -допустимых π -представлений шире, чем множество представлений вида (15), поэтому

$$\rho_I(\zeta, \varphi) \leq \inf \left\{ 1 + \frac{1}{s(\zeta)} \sum |c_i(\zeta)| \right\},$$

где инфимум берется по всем l -представлениям вида (14). Далее, при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus D$ $|s(\zeta)| \geq 1$, поэтому при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus D$ имеем

$$\rho_I(\zeta, \varphi) \leq \inf \left\{ 1 + \frac{1}{s(\zeta)} \sum |c_i(\zeta)| \right\} \leq \inf \left\{ 1 + \sum |c_i(\zeta)| \right\} = \rho'_J(\zeta, \varphi).$$

Итак, $\rho_I(\zeta, \varphi) \leq \rho'_J(\zeta, \varphi) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus D$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.7. Пусть подмодуль J насыщен и $\varphi \in \mathbf{P}$, $\varphi \in I(\tilde{\lambda}) \quad \forall \lambda \in \Lambda$. Рассмотрим целую функцию Φ , удовлетворяющую условию

$$|\Phi(\zeta)| \leq \rho_I(\zeta, \varphi) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}.$$

Нужно показать, что $\Phi = \text{const}$. По лемме 2.3 существует непрерывная полунорма ρ' такая, что

$$\rho_I(\zeta, \varphi) \leq \rho'_J(\zeta, \varphi) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus D,$$

поэтому $|\Phi(\zeta)| \leq \rho'_J(\zeta, \varphi) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus D$. Пусть $M \geq \max_D |\Phi|$, $M \geq 1$. Так как $\rho'_J(\zeta, \varphi) \geq 1$ и $M \geq 1$, то $|\Phi(\zeta)| \leq M \rho'_J(\zeta, \varphi) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}$ или

$$\frac{|\Phi(\zeta)|}{M} \leq \rho'_J(\zeta, \varphi) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}. \quad (16)$$

По условию $\varphi \in \mathbf{P}$, $\varphi \in I(\tilde{\lambda}) \quad \forall \lambda \in \Lambda$. Учитывая включение $I \subseteq J$, получаем, что $\varphi \in J(\tilde{\xi}) \quad \forall \xi \in \mathbb{C}$. Насыщенность подмодуля J влечет его насыщенность относительно φ . Это значит, что неравенство (16) влечет $\Phi = \text{const}$. Насыщенность I установлена.

2.3. Критерий обильности. Как и в случае $q = 1$, проверка обильности замкнутого $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуля в $\mathbf{P}$ сводится к проверке его устойчивости и насыщенности.

КРИТЕРИЙ ОБИЛЬНОСТИ. Для того чтобы замкнутый $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль I был обильным, необходимо и достаточно, чтобы он был устойчив и насыщен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – произвольный замкнутый $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$, J – замкнутый $\mathbb{C}[l]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$, порождаемый подмодулем I . По теореме редукции подмодули I , J обильны или нет одновременно. По критерию обильности замкнутых $\mathbb{C}[l]$ -подмодулей в $\mathbf{P}$ [11] обильность $\mathbb{C}[l]$ -подмодуля J равносильна его устойчивости и насыщенности. Из теорем 2.1 и 2.2, в свою очередь, вытекает, что обильность $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуля I равносильна его устойчивости и насыщенности. Утверждение доказано.

§3. π -свертка

3.1. Дуальные отображения. Пусть Ω – область Рунге в $\mathbb{C}^q$; $H(\Omega)$ – пространство функций, голоморфных в Ω , с топологией компактной сходимости; $H^*(\Omega)$ – пространство, сильное сопряженное к $H(\Omega)$; T – преобразование Лапласа функционалов из $H^*(\Omega)$, которое каждому функционалу $S \in H^*(\Omega)$ ставит в соответствие целую функцию экспоненциального типа $\varphi(\lambda) = \langle S, e^{\langle \lambda, h \rangle} \rangle$; $P(\Omega)$ – полный образ T . Известно, что отображение T является взаимно однозначным [16; §12, лемма 12.1]. Считаем, что $P(\Omega)$ наделено локально выпуклой топологией, индуцированной отображением T из $H^*(\Omega)$.

Если Ω – выпуклая область в $\mathbb{C}^q$, то пространство $P(\Omega)$ относится к пространствам типа (LN^*) . Его топология может быть описана как топология индуктивного предела банаховых пространств

$$P(d_k) = \{\varphi \in O(\mathbb{C}^q) : \|\varphi\|_k < \infty\}$$

с нормами

$$\|\varphi\|_k = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}^q} \frac{|\varphi(\lambda)|}{\exp H_{d_k}(\lambda)},$$

где $d_1 \subseteq d_2 \subseteq \dots$ – последовательность компактов, исчерпывающая Ω , $H_{d_k}(\lambda) = \sup_{\omega \in d_k} \operatorname{Re} \langle \lambda, \omega \rangle$ – опорная функция компакта d_k в смысле комплексного анализа [16; §12, п. 7].

В случае одной переменной будем использовать другое описание этой топологии. Пусть G – выпуклая область в $\mathbb{C}$; $H_G(\zeta)$ – опорная функция области G в смысле комплексного анализа; $\mathfrak{M}_G$ – класс положительных на $\mathbb{C}$ функций $m(\zeta)$ со свойствами:

- 1) $m(\zeta) \exp\{-H_d(\zeta)\} \rightarrow \infty$ при $\zeta \rightarrow \infty$ для любого компакта $d \subset G$;
- 2) $\inf_{\zeta \in d} m(\zeta) > 0$ для любого компакта $d \subset \mathbb{C}$.

Совокупность множеств $V_m = \{\varphi \in P(G) : |\varphi(\zeta)| \leq m(\zeta)\}$, $m \in \mathfrak{M}_G$, образует фундаментальную систему окрестностей нуля в пространстве $P(G)$ [4; §3, п. 3].

Пространство $H(\Omega)$ является рефлексивным, значит, существует линейный топологический изоморфизм $\omega: H(\Omega) \rightarrow P^*(\Omega)$ [17; §1]. При этом если $f^\odot = \omega(f)$ и $\varphi = T(S)$, то

$$\langle f^\odot, \varphi \rangle = \langle S, f \rangle \quad (17)$$

(см. [17; предложение 1.1]).

Пусть $u: H(\Omega) \rightarrow H(G)$ – произвольное линейное непрерывное отображение. Сопряженное отображение $u^*: H^*(G) \rightarrow H^*(\Omega)$ функционалу $S \in H^*(G)$ ставит в соответствие функционал из $H^*(\Omega)$, действующий по правилу $f \rightarrow \langle S, u(f) \rangle$. Преобразование Лапласа T индуцирует операцию $u^\odot: P(G) \rightarrow P(\Omega)$, которая функцию $\varphi \in P(G)$, $\varphi(\lambda) = \langle S, e^{\langle \lambda, h \rangle} \rangle$, переводит в функцию $\psi \in P(\Omega)$, $\psi(\zeta) = \langle S, u(e^{\zeta z}) \rangle$. Отображение $u^\odot$ называют *дуальным* по отношению к *прямому* отображению u [17; §1, п. 1.3]. Прямая и дуальная операции связаны соотношением:

$$\langle f^\odot, u^\odot(\varphi) \rangle = \langle S, u(f) \rangle,$$

где $f \in H(\Omega)$, $S \in H^*(G)$, $f^\odot = \omega(f)$, $\varphi = T(S)$ [17; предложение 1.2]. Стандартным образом [17], [18] доказывается следующее утверждение.

1°. Пусть $\{u_k\}$ – семейство линейных непрерывных отображений из $H(\Omega)$ в $H(G)$. Для того чтобы семейство $\{u_k\}$ было равностепенно непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы равностепенно непрерывным было семейство дуальных отображений $\{u_k^\odot\}$.

Следующее утверждение для дуальных операций проистекает от соответствующего утверждения для сопряженных операций.

2°. Если v – линейный непрерывный оператор, действующий в $H(\Omega)$, $v^\odot$ – дуальный по отношению к v оператор, действующий в $P(\Omega)$, то

$$(u \circ v)^\odot = v^\odot \circ u^\odot. \quad (18)$$

3.2. π -симметризация. Понятие π -симметризации для одного многочлена π введено И. Ф. Красичковым-Терновским в [19]. Ниже определяется аналог этого понятия для случая системы многочленов $\pi_1, \dots, \pi_q$.

Пусть $\Phi = \Phi(\lambda)$ – целая функция q переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_q$. Выберем $\zeta \in \mathbb{C}$ и обозначим через $\langle \zeta \rangle$ декартово произведение $\langle \zeta \rangle_1 \times \dots \times \langle \zeta \rangle_q$, упорядоченное произвольным образом, где $\langle \zeta \rangle_p$ – произвольное упорядочение π_p -слоя, содержащего ζ , причем каждая точка слоя присутствует в $\langle \zeta \rangle_p$ столько раз, какова ее кратность. Рассмотрим функцию

$$F(\zeta) = \frac{1}{m} \sum_{\lambda \in \langle \zeta \rangle} \Phi(\lambda),$$

где $m = m_1 \times \dots \times m_q$, m_p – степень многочлена π_p . Из определения множества $\langle \zeta \rangle$ вытекает, что эту функцию можно представить в виде

$$F(\zeta) = \frac{1}{m} \sum_{\lambda_1 \in \langle \zeta \rangle_1} \dots \sum_{\lambda_q \in \langle \zeta \rangle_q} \Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_q). \quad (19)$$

Функция

$$\frac{1}{m_p} \sum_{\lambda_p \in \langle \zeta \rangle_p} \Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \dots, \lambda_q)$$

является целой функцией переменных $\lambda_1, \dots, \pi_p(\zeta), \dots, \lambda_q$ [14; предложение 2.2]. Из представления (19) вытекает, что функция $F(\zeta)$ является целой функцией переменных $\pi_1(\zeta), \dots, \pi_q(\zeta)$. Последнее означает, что функция $F(\zeta)$ π -симметрична

на $\mathbb{C}$. Следуя И. Ф. Красичкову-Терновскому [14], функцию $F(\zeta)$ будем называть π -симметризацией функции Φ и обозначать $(\text{sym } \Phi(\lambda))(\zeta)$, или $(\text{sym}_\lambda \Phi(\lambda))(\zeta)$, если необходимо указать переменный вектор, по которому осуществляется симметризация.

Если $\Phi(\lambda) = \Phi_1(\lambda_1) \times \cdots \times \Phi_q(\lambda_q)$, где Φ_p — целая функция одной переменной, то из представления (19) вытекает, что $\text{sym } \Phi = \text{sym } \Phi_1 \times \cdots \times \text{sym } \Phi_q$. Здесь $\text{sym } \Phi_p$ — π_p -симметризация функции Φ_p . В частности, π -симметризация π_γ одночлена $\lambda^\gamma = \lambda_1^{\gamma_1} \times \cdots \times \lambda_q^{\gamma_q}$ совпадает с произведением $\pi_{\gamma_1} \times \cdots \times \pi_{\gamma_q}$, где π_{γ_p} — π_p -симметризация одночлена $\lambda_p^{\gamma_p}$. Заметим, что для всех $\lambda_p \in \langle \zeta \rangle_p$ имеет место оценка

$$|\lambda_p| \leq |\zeta|(1 + \varepsilon_p(\zeta)) + \text{const}, \quad (20)$$

где $\varepsilon_p(\zeta)$ — неотрицательные ограниченные на $\mathbb{C}$ функции, $\varepsilon_p(\zeta) \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$. Следовательно, при $\zeta \neq 0$ имеем

$$|\pi_{\gamma_p}(\zeta)| \leq \frac{1}{m_p} \sum_{\lambda_p \in \langle \zeta \rangle_p} |\lambda_p^{\gamma_p}| \leq |\zeta|^{\gamma_p} \left(1 + \varepsilon_p(\zeta) + \frac{\text{const}}{|\zeta|} \right)^{\gamma_p}.$$

Из этой оценки вытекает, что π_{γ_p} — многочлен, степень которого не превосходит числа γ_p . Значит, степень многочлена π_γ не превосходит числа $|\gamma| = \gamma_1 + \cdots + \gamma_q$.

Пусть O — открытая круговая окрестность нуля в $\mathbb{C}$; $\mathbf{O}$ — открытая поликруговая окрестность нуля в $\mathbb{C}^q$, столь “малая”, что

$$\{\zeta : \zeta = \lambda_1 + \cdots + \lambda_q, \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q) \in \mathbf{O}\} \subseteq O. \quad (21)$$

При этом полирадиус $(\sigma, \dots, \sigma)$ поликруга $\mathbf{O}$ и радиус ρ круга O связаны неравенством $\sigma q \leq \rho$.

При доказательстве следующего предложения символом $P(U)$, где U — замкнутая поликруговая окрестность нуля в $\mathbb{C}^q$ (соответственно $P(V)$, где V — замкнутая круговая окрестность нуля в $\mathbb{C}$), обозначаем банахово пространство

$$\{\Phi \in O(\mathbb{C}^q) : \|\Phi\| < \infty\} \quad (\text{соответственно } \{F \in O(\mathbb{C}) : \|F\| < \infty\})$$

с нормой

$$\|\Phi\| = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}^q} \frac{|\Phi(\lambda)|}{\exp H_U(\lambda)} \quad \left(\text{соответственно } \|F\| = \sup_{\zeta \in \mathbb{C}} \frac{|F(\zeta)|}{\exp H_V(\zeta)} \right).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Оператор π -симметризации $\text{sym} : P(\mathbf{O}) \rightarrow P(O)$ является линейным и непрерывным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейность оператора π -симметризации очевидна. Сначала докажем его секвенциальную непрерывность. Пусть $\Phi_k(\lambda) \rightarrow 0$ в $P(\mathbf{O})$. Нам достаточно показать, что $F_k(\zeta) = (\text{sym } \Phi_k(\lambda))(\zeta) \rightarrow 0$ в $P(O)$. По свойствам пространств типа (LN^*) [16; теорема 2.2, следствие 2.3] найдется $\sigma_1 < \sigma$ такое, что $\Phi_k(\lambda) \rightarrow 0$ по норме пространства $P(U)$, где $U \subset \mathbf{O}$ — замкнутая поликруговая окрестность нуля полирадиуса $(\sigma_1, \dots, \sigma_1)$. Значит, справедливы оценки:

$$|\Phi_k(\lambda)| \leq \|\Phi_k\| \exp H_U(\lambda) = \|\Phi_k\| \exp \left(\sigma_1 \sum_p |\lambda_p| \right),$$

где $\|\Phi_k\| \rightarrow 0$. Отсюда получаем

$$|F_k(\zeta)| \leq \frac{1}{m} \sum_{\lambda \in \langle \zeta \rangle} |\Phi_k(\lambda)| \leq \frac{1}{m} \sum_{\lambda \in \langle \zeta \rangle} \|\Phi_k\| \exp\left(\sigma_1 \sum_p |\lambda_p|\right).$$

Из оценки (20) вытекает, что

$$\begin{aligned} |F_k(\zeta)| &\leq \|\Phi_k\| \exp\left(\sigma_1 \sum_p |\zeta|(1 + \varepsilon_p(\zeta)) + \text{const}\right) \\ &\leq \|\Phi_k\| \exp(\sigma_1 q |\zeta|(1 + \varepsilon(\zeta)) + \text{const}) \leq M \|\Phi_k\| \exp \rho_1 |\zeta|, \end{aligned}$$

где $\varepsilon(\zeta) = \max_p \varepsilon_p(\zeta)$, $M > 0$, $\sigma_1 < \rho_1 < \rho$. Следовательно, $F_k \rightarrow 0$ по норме пространства $P(V)$. Здесь V – замкнутая круговая окрестность нуля в $\mathbb{C}$ радиуса ρ_1 . Так как отображение вложения $P(V) \rightarrow P(O)$ непрерывно, то $F_k \rightarrow 0$ в топологии $P(O)$. Секвенциальная непрерывность оператора π -симметризации $\text{sym}: P(\mathbf{O}) \rightarrow P(O)$ доказана. Осталось напомнить, что пространство $P(\mathbf{O})$ является пространством типа (LN^*) . Следовательно, секвенциальная непрерывность этого оператора влечет его непрерывность [20], [16; теорема 3.3]. Предложение доказано.

3.3. π -сдвиг. Пусть G, Ω – односвязные области в $\mathbb{C}$; O – открытая круговая окрестность нуля в $\mathbb{C}$ радиуса $\rho > 0$. При этом $G + O \subset \Omega$. Обозначим через $\mathbf{O}$ открытую поликруговую окрестность нуля в $\mathbb{C}^q$ полирадиуса $(\sigma, \dots, \sigma)$, $\sigma > 0$, удовлетворяющую условию (21).

Рассмотрим последовательность $\{F_k(\zeta, h)\}_{k=0}^\infty$ целых функций одной переменной ζ , зависящих от параметра h , принимающего значения из компакта $d \subset \mathbf{O}$. Следующая лемма навеяна контактами с И. Ф. Красичковым-Терновским.

ЛЕММА 3.1. Пусть $F_k(\zeta, h) \rightarrow F_0(\zeta, h)$ в $P(O)$ равномерно по h из компакта $d \subset \mathbf{O}$. Тогда для любого компакта $d' \subset G$

$$e^{\zeta z} F_k(\zeta, h) \rightarrow e^{\zeta z} F_0(\zeta, h)$$

в $P(\Omega)$ равномерно по $h \in d$ и $z \in d'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольный компакт $d' \subset G$ и круговую окрестность o нуля радиуса $\varepsilon > 0$ столь малую, что $d' + o \subseteq G$. Совокупность множеств $V_m = \{\varphi \in P(o + O) : |\varphi(\zeta)| \leq m(\zeta)\}$, $m \in \mathfrak{M}_{o+O}$, образует фундаментальную систему окрестностей нуля в пространстве $P(o + O)$ (см. п. 3.1). Выберем произвольную окрестность V_m , $m \in \mathfrak{M}_{o+O}$. Положительная функция $\hat{m}(\zeta) = m(\zeta) \exp(-\varepsilon|\zeta|)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}_O$. Значит, множество $V_{\hat{m}} = \{\varphi \in P(O) : |\varphi(\zeta)| \leq m(\zeta) \exp(-\varepsilon|\zeta|)\}$ является окрестностью нуля в пространстве $P(O)$. Так как $F_k(\zeta, h) \rightarrow F_0(\zeta, h)$ в $P(O)$ равномерно по $h \in d$, то для всех $k \geq k_0$ и $h \in d$ имеем $|F_k(\zeta, h) - F_0(\zeta, h)| \leq m(\zeta) \exp(-\varepsilon|\zeta|)$. Отсюда вытекает, что для всех $k \geq k_0$, $h \in d$ и $z \in o$ выполнено $|e^{\zeta z}(F_k(\zeta, h) - F_0(\zeta, h))| \leq m(\zeta)$, т.е. $e^{\zeta z}(F_k(\zeta, h) - F_0(\zeta, h)) \in V_m$. Следовательно, $e^{\zeta z} F_k(\zeta, h) \rightarrow e^{\zeta z} F_0(\zeta, h)$ в топологии пространства $P(o + O)$. Причем сходимость равномерная по $h \in d$ и $z \in o$. Подберем точки $a_1, \dots, a_n \in d'$ так, чтобы множества $a_1 + o, \dots, a_n + o$ покрывали компакт d' . Отображение $P(o + O) \rightarrow P(a_i + o + O)$, $F \rightarrow e^{a_i \zeta} F$, является линейным топологическим изоморфизмом. Следовательно, $e^{\zeta(a_i + z)} F_k(\zeta, h) \rightarrow e^{\zeta(a_i + z)} F_0(\zeta, h)$

в топологии $P(a_i + o + O)$, причем сходимость равномерная по $h \in d$ и $z \in o$. Отсюда вытекает, что $e^{\zeta z} F_k(\zeta, h) \rightarrow e^{\zeta z} F_0(\zeta, h)$ в топологии $P(a_i + o + O)$, причем сходимость равномерная по $h \in d$ и $z \in a_i + o$. Вложения $P(a_i + o + O) \subseteq P(\Omega)$ являются непрерывными, значит, $e^{\zeta z} F_k(\zeta, h) \rightarrow e^{\zeta z} F_0(\zeta, h)$ в топологии $P(\Omega)$, причем сходимость равномерная по $h \in d$ и $z \in d'$. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $\omega: H(\Omega) \rightarrow P^*(\Omega)$ — линейный топологический изоморфизм, $f \in H(\Omega)$, $f^\odot = \omega(f)$ (см. п. 3.1). Ряд

$$\sum_{|\gamma|=0}^{\infty} \frac{(\pi_\gamma(D)f)(z)}{\gamma!} h^\gamma$$

сходится к $f(z, h) := \langle f^\odot, e^{\zeta z} (\text{sym}_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle})(\zeta) \rangle$ равномерно на компактах из $G \times \mathbf{O}$, и, следовательно, его сумма является аналитической функцией на $G \times \mathbf{O}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi_\gamma^*(D)$ — оператор $H^*(\Omega) \rightarrow H^*(\Omega)$, сопряженный к дифференциальному оператору $\pi_\gamma(D)$; δ_z — функционал из $H^*(\Omega)$, действующий по правилу $f \rightarrow f(z)$, $z \in \Omega$. Напомним, что преобразование Лапласа $T: H^*(\Omega) \rightarrow P(\Omega)$ функционалу $S \in H^*(\Omega)$ ставит в соответствие целую функцию $\varphi(\zeta) = \langle S, e^{\zeta z} \rangle$. Из равенств

$$\left\langle \frac{\pi_\gamma^*(D)\delta_{z_0}}{\gamma!}, e^{\zeta z} \right\rangle = \frac{1}{\gamma!} \langle \delta_{z_0}, \pi_\gamma(D)e^{\zeta z} \rangle = \frac{\pi_\gamma(\zeta)}{\gamma!} e^{\zeta z_0}$$

вытекает, что

$$T\left(\frac{\pi_\gamma^*(D)\delta_{z_0}}{\gamma!}\right) = \frac{\pi_\gamma(\zeta)}{\gamma!} e^{\zeta z_0}.$$

Используя это соотношение и соотношение (17), для любого $z \in \Omega$ имеем

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z, h) &:= \sum_{|\gamma|=0}^k \frac{(\pi_\gamma(D)f)(z)}{\gamma!} h^\gamma = \left\langle \delta_z, \sum_{|\gamma|=0}^k \frac{(\pi_\gamma(D)f)}{\gamma!} h^\gamma \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{|\gamma|=0}^k \frac{\pi_\gamma^*(D)\delta_z}{\gamma!} h^\gamma, f \right\rangle = \left\langle f^\odot, \sum_{|\gamma|=0}^k \frac{\pi_\gamma(\zeta) h^\gamma}{\gamma!} e^{\zeta z} \right\rangle. \end{aligned}$$

Пусть d — компакт в $\mathbf{O}$. Частичные суммы

$$\Phi_k(\lambda, h) = \sum_{|\gamma|=0}^k \frac{\lambda^\gamma h^\gamma}{\gamma!}$$

сходятся к $e^{\langle \lambda, h \rangle}$ в топологии пространства $H(\mathbb{C}^q)$ равномерно по $h \in d$. Здесь $\langle \lambda, h \rangle = \sum_{p=1}^q \lambda_p h_p$. При этом для любого $h \in d$ выполняются неравенства

$$|\Phi_k(\lambda, h) - e^{\langle \lambda, h \rangle}| \leq \exp\left(\sum_{p=1}^q |\lambda_p h_p|\right) \leq \exp\left(\sigma_d \sum_{p=1}^q |\lambda_p|\right),$$

где $\sigma_d = \max_{h \in d} \max_{p=1, \dots, q} |h_p| < \sigma$. Следовательно, равномерно по $h \in d$

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}^q} \frac{|\Phi_k(\lambda, h) - e^{\langle \lambda, h \rangle}|}{\exp H_U(\lambda)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Здесь U – замкнутая поликруговая окрестность нуля полирадиуса $(\sigma', \dots, \sigma')$, $\sigma_d < \sigma' < \sigma$; $H_U(\lambda) = \sigma' \sum_{p=1}^q |\lambda_p|$ – опорная функция U в смысле комплексного анализа. Таким образом, частичные суммы $\Phi_k(\lambda, h)$ сходятся к $e^{\langle \lambda, h \rangle}$ по норме пространства $P(U)$ равномерно по $h \in d$. Значит, $\Phi_k(\lambda, h) \rightarrow e^{\langle \lambda, h \rangle}$ в топологии $P(\mathbf{O})$ равномерно по $h \in d$. По предложению 3.1

$$(\text{sym}_\lambda \Phi_k(\lambda, h))(\zeta) = \sum_{|\gamma|=0}^k \frac{\pi_\gamma(\zeta)}{\gamma!} h^\gamma \rightarrow (\text{sym}_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle})(\zeta)$$

в топологии $P(O)$ равномерно по $h \in d$. Пусть d' – компакт в G . В силу леммы 3.1 $e^{\zeta z}(\text{sym}_\lambda \Phi_k(\lambda, h))(\zeta) \rightarrow e^{\zeta z}(\text{sym}_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle})(\zeta)$ в топологии пространства $P(\Omega)$. При этом сходимость равномерна по $(z, h) \in d' \times d$. Непрерывность функционала $f^\odot$ влечет

$$f^{(k)}(z, h) = \sum_{|\gamma|=0}^k \frac{(\pi_\gamma(D)f)(z)}{\gamma!} h^\gamma \rightarrow \langle f^\odot, e^{\zeta z}(\text{sym}_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle})(\zeta) \rangle,$$

сходимость равномерна по $(z, h) \in d' \times d$. Это верно для любых компактов $d' \subset G$, $d \subset \mathbf{O}$. Поэтому функция $\langle f^\odot, e^{\zeta z}(\text{sym}_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle})(\zeta) \rangle$ голоморфна на декартовом произведении $G \times \mathbf{O}$. Предложение доказано.

Функция $f(z, h)$ называется π -сдвигом f на шаг h , а отображение $T_h: H(\Omega) \rightarrow H(G)$, которое функции $f \in H(\Omega)$ ставит в соответствие функцию $f(z, h) \in H(G)$ (h фиксировано в $\mathbf{O}$), называется *оператором π -сдвига на шаг h* . Оператор π -сдвига в ситуации $q = 1$ введен И. Ф. Красичковым-Терновским в работе [19].

Наиболее простой вид π -сдвиг функции $f \in H(\Omega)$ на шаг h приобретает в условиях, когда $\pi_1(\zeta) = \zeta^{m_1}, \dots, \pi_q(\zeta) = \zeta^{m_q}$, где $\mu = (m_1, \dots, m_q)$ – фиксированный вектор из $\mathbb{Z}_+^q$ с ненулевыми компонентами. В этом случае для любого $\zeta \in \mathbb{C}$ имеем

$$\langle \zeta \rangle_1 = \{\zeta, \varepsilon_1 \zeta, \dots, \varepsilon_1^{m_1-1} \zeta\}, \quad \dots, \quad \langle \zeta \rangle_q = \{\zeta, \varepsilon_q \zeta, \dots, \varepsilon_q^{m_q-1} \zeta\},$$

где $\varepsilon_p = \exp \frac{2\pi}{m_p} i$. Следовательно, для произвольного $\gamma \in \mathbb{Z}_+^q$ получим

$$\pi_\gamma(\zeta) = \frac{1}{m} \sum_{\lambda \in \langle \zeta \rangle} \lambda^\gamma = \frac{1}{m} \zeta^{|\gamma|} \sum_{\alpha < \mu} \varepsilon^{\alpha \gamma},$$

где $m = \prod_p m_p$, $\lambda^\gamma = \prod_p \lambda_p^{\gamma_p}$, $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_q$. При этом

$$\sum_{\alpha < \mu} \varepsilon^{\alpha \gamma} = \sum_{\alpha_1=0}^{m_1-1} \dots \sum_{\alpha_q=0}^{m_q-1} \varepsilon_1^{\alpha_1 \gamma_1} \times \dots \times \varepsilon_q^{\alpha_q \gamma_q} = \prod_{p=1}^q \sum_{\alpha_p=0}^{m_p-1} \varepsilon_p^{\alpha_p \gamma_p}.$$

Число $\varepsilon_p^{\alpha_p \gamma_p}$ является корнем многочлена $z^{m_p} - 1$. Причем если γ_p делится на m_p , то $\varepsilon_p^{\alpha_p \gamma_p} = 1$, $\alpha_p = 0, 1, \dots, m_p - 1$. Следовательно, $\sum_{\alpha_p=0}^{m_p-1} \varepsilon_p^{\alpha_p \gamma_p} = m_p$. Если же γ_p не делится на m_p , то все числа $\varepsilon_p^{\alpha_p \gamma_p}$, $\alpha_p = 0, 1, \dots, m_p - 1$, различны. Это означает, что совокупность $\{\varepsilon_p^{\alpha_p \gamma_p} : \alpha_p = 0, 1, \dots, m_p - 1\}$ представляет собой множество всех корней многочлена $z^{m_p} - 1$. Понятно, что их сумма равна нулю: $\sum_{\alpha_p=0}^{m_p-1} (\varepsilon_p)^{\alpha_p \gamma_p} = 0$. Пишем $\mu \mid \gamma$, если для всех p γ_p делится на m_p , в противном случае пишем $\mu \nmid \gamma$. Таким образом,

$$\sum_{\alpha < \mu} \varepsilon^{\alpha \gamma} = \begin{cases} m, & \text{если } \mu \mid \gamma, \\ 0, & \text{если } \mu \nmid \gamma, \end{cases} \quad \pi_\gamma(\zeta) = \begin{cases} \zeta^{|\gamma|}, & \text{если } \mu \mid \gamma, \\ 0, & \text{если } \mu \nmid \gamma. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f(z, h) &= \sum_{|\gamma|=0}^{\infty} \frac{(\pi_\gamma(D)f)(z)}{\gamma!} h^\gamma = \sum_{\substack{\gamma=k\mu \\ k=0,1,\dots}} \frac{(D^{|\gamma|}f)(z)}{\gamma!} h^\gamma \\ &= \sum_{|\gamma|=0}^{\infty} \frac{(D^{|\gamma|}f)(z)}{\gamma!} h^\gamma \frac{1}{m} \sum_{\alpha < \mu} \varepsilon^{\alpha \gamma} = \frac{1}{m} \sum_{\alpha < \mu} \sum_{|\gamma|=0}^{\infty} \frac{(D^{|\gamma|}f)(z)}{\gamma!} (\varepsilon^\alpha h)^\gamma, \end{aligned}$$

где $(\varepsilon^\alpha h)^\gamma = (\varepsilon_1^{\alpha_1 \gamma_1} h_1^{\gamma_1}) \times \dots \times (\varepsilon_q^{\alpha_q \gamma_q} h_q^{\gamma_q})$. Зафиксируем $z \in \Omega$ и рассмотрим функцию $F(z_1, \dots, z_q) := f(z_1 + \dots + z_q)$. Она голоморфна в некоторой окрестности точки $z' = (\underbrace{0, \dots, 0}_{q-1}, z)$ и при этом $(D^\gamma F)(z') = (D^{|\gamma|}f)(z)$. Значит,

$$\begin{aligned} f(z, h) &= \frac{1}{m} \sum_{\alpha < \mu} \sum_{|\gamma|=0}^{\infty} \frac{(D^\gamma F)(z')}{\gamma!} (\varepsilon^\alpha h)^\gamma \\ &= \frac{1}{m} \sum_{\alpha < \mu} F(z' + \varepsilon^\alpha h) = \frac{1}{m} \sum_{\alpha < \mu} f(z + \langle \varepsilon^\alpha h \rangle), \end{aligned}$$

где $\varepsilon^\alpha h = (\varepsilon_p^{\alpha_p} h_p)$, $\langle \varepsilon^\alpha h \rangle = \sum_{p=1}^q \varepsilon_p^{\alpha_p} h_p$. Таким образом, оператор π -сдвига превращается в оператор m -стороннего сдвига:

$$f(z, h) = \frac{1}{m} \sum_{\alpha < \mu} f(z + \langle \varepsilon^\alpha h \rangle).$$

При $m_1 = \dots = m_q = 1$ π -сдвиг — это обычный сдвиг: $f(z, h) = f(z+h)$. Оператор m -стороннего сдвига введен и изучен автором в работе [13] в ситуации $q = 1$.

3.4. Свойства оператора π -сдвига. Отметим некоторые свойства оператора π -сдвига $T_h: H(\Omega) \rightarrow H(G)$ (h фиксировано в $\mathbf{O}$).

Свойство 3.1. Для любого $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ выполняется соотношение

$$T_h(e^{\zeta_0 z}) = e^{\zeta_0 z} (\text{sym}_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle})(\zeta_0). \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 3.2 имеем

$$T_h(e^{\zeta_0 z}) = \langle (e^{\zeta_0 z})^\odot, e^{\zeta z}(\text{sum}_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle})(\zeta) \rangle.$$

Учитывая (17), получаем $(e^{\zeta_0 z})^\odot = \delta_{\zeta_0}$, где δ_{ζ_0} — функционал из $P^*(\Omega)$, действующий по правилу $\psi \rightarrow \psi(\zeta_0)$. Следовательно,

$$T_h(e^{\zeta_0 z}) = \langle \delta_{\zeta_0}, e^{\zeta z}(\text{sum}_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle})(\zeta) \rangle = e^{\zeta_0 z}(\text{sum}_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle})(\zeta_0).$$

Тем самым свойство доказано.

Свойство 3.2. *Отображение $T_h^\odot: P(G) \rightarrow P(\Omega)$, дуальное по отношению к $T_h: H(\Omega) \rightarrow H(G)$, действует по правилу*

$$\varphi \rightarrow \varphi(\zeta)(\text{sum}_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle})(\zeta). \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольную функцию $\varphi \in P(G)$. Отображение $T_h^\odot$ переводит функцию φ в функцию $\langle S, T_h(e^{\zeta z}) \rangle$, где S — функционал $T^{-1}(\varphi) \in H^*(G)$. В силу (22) $\langle S, T_h(e^{\zeta z}) \rangle = \langle S, e^{\zeta z}(\text{sum}_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle})(\zeta) \rangle$. По определению отображения T имеем $\langle S, e^{\zeta z} \rangle = \varphi(\zeta)$. Значит, $\langle S, T_h(e^{\zeta z}) \rangle = \varphi(\zeta)(\text{sum}_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle})(\zeta)$. Свойство доказано.

По предложению 3.2 π -сдвиг $f(z, h)$ функции $f \in H(\Omega)$ на шаг h как функция переменного вектора (z, h) является элементом пространства $H(G \times \mathbf{O})$ и, значит, допускает дифференцирование по переменным $h_1, \dots, h_q$. Обозначим через D_p оператор частного дифференцирования по переменной h_p , и пусть $\pi_p(D_p)T_h$ — оператор, который функции $f \in H(\Omega)$ ставит в соответствие функцию $\pi_p(D_p)f(z, h)$. Здесь после дифференцирования векторная переменная h фиксируется в $\mathbf{O}$, т.е. функция $\pi_p(D_p)f(z, h)$ рассматривается как элемент пространства $H(G)$.

Свойство 3.3. *Для любого $p = 1, \dots, q$ выполняется соотношение*

$$\pi_p(D_p)T_h = T_h \circ \pi_p(D).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить, что совпадают дуальные операции

$$(\pi_p(D_p)T_h)^\odot = (T_h \circ \pi_p(D))^\odot.$$

Учитывая (18), получаем $(T_h \circ \pi_p(D))^\odot = \pi_p(D)^\odot \circ T_h^\odot$. В силу (23) $T_h^\odot$ — операция умножения на $(\text{sum}_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle})(\zeta)$. Легко проверить, что $\pi_p(D)^\odot$ — операция умножения на $\pi_p(\zeta)$. Значит, для любой $\varphi(\zeta) \in P(G)$ выполнено

$$(T_h \circ \pi_p(D))^\odot \varphi(\zeta) = \varphi(\zeta)\pi_p(\zeta)(\text{sum}_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle})(\zeta). \quad (24)$$

С другой стороны, операция $(\pi_p(D_p)T_h)^\odot$ переводит функцию $\varphi(\zeta) = \langle S, e^{\zeta z} \rangle \in P(G)$ в функцию $\langle S, \pi_p(D_p)T_h(e^{\zeta z}) \rangle$. В силу (22) имеем

$$\begin{aligned} (\pi_p(D_p)T_h)^\odot \varphi(\zeta) &= \langle S, e^{\zeta z} \pi_p(D_p)(\text{sum}_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle})(\zeta) \rangle \\ &= \varphi(\zeta)\pi_p(D_p)(\text{sum}_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle})(\zeta). \end{aligned}$$

При этом для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ выполняется очевидное соотношение

$$\pi_p(D_p) \sum_{\lambda \in \langle \zeta \rangle} e^{\langle \lambda, h \rangle} = \pi_p(\zeta) \sum_{\lambda \in \langle \zeta \rangle} e^{\langle \lambda, h \rangle}.$$

Значит, $\pi_p(D_p)(\text{sum}_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle})(\zeta) = \pi_p(\zeta)(\text{sum}_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle})(\zeta)$. Следовательно,

$$(\pi_p(D_p)T_h)^\odot \varphi(\zeta) = \varphi(\zeta)\pi_p(\zeta)(\text{sum}_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle})(\zeta). \quad (25)$$

Таким образом, из (24) и (25) вытекает выполнимость требуемого соотношения. Свойство доказано.

Свойство 3.4. Пусть d – компакт в $\mathbf{O}$. Тогда семейство отображений $T_h: H(\Omega) \rightarrow H(G)$, $h \in d$, является равностепенно непрерывным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить, что семейство дуальных отображений $T_h^\odot: P(G) \rightarrow P(\Omega)$, $\varphi \rightarrow \varphi\psi_h$, является равностепенно непрерывным (п. 3.1, утверждение 1°). Здесь $\psi_h = \sum_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle}$. Известно, что операция умножения $P(G) \times P(O) \rightarrow P(\Omega)$, $(\varphi, \psi) \rightarrow \varphi\psi$, является непрерывной [16; теорема 14.1]. Значит, для любой окрестности нуля $U \subseteq P(\Omega)$ найдутся абсолютно выпуклые окрестности нуля $V_1 \subseteq P(G)$, $V_2 \subseteq P(O)$ такие, что $V_1V_2 \subseteq U$. Учитывая оценку (20), для любого $h = (h_1, \dots, h_q) \in d$ имеем

$$\left| \frac{1}{m_p} \sum_{\lambda_p \in \langle \zeta \rangle_p} e^{\lambda_p h_p} \right| \leq \frac{1}{m_p} \sum_{\lambda_p \in \langle \zeta \rangle_p} e^{\sigma_d |\lambda_p|} \leq M e^{\sigma_1 |\zeta|},$$

где $\sigma_d = \max_{h \in d} \max_{p=1, \dots, q} |h_p| < \sigma_1 < \sigma$, $M > 0$. Значит, для любого $h \in d$ справедлива оценка $|\psi_h(\zeta)| \leq M^q e^{\rho_1 |\zeta|}$, где $\rho_1 = q\sigma_1 < \rho$. Это означает, что множество $B = \{\psi_h : h \in d\}$ является ограниченным в $P(O)$. Значит, при некотором $t > 0$ выполняется включение $B \subseteq tV_2$. Следовательно, $VB \subseteq U$. Здесь $V = \frac{1}{t}V_1$. В силу произвольности выбора окрестности U вложение $VB \subseteq U$ означает равностепенную непрерывность семейства отображений $T_h: H(\Omega) \rightarrow H(G)$, $h \in d$. Свойство доказано.

3.5. π -свертка. Пусть Ω – односвязная область в $\mathbb{C}$; S – фиксированный элемент $H^*(\Omega)$. Действие функционала S на элементы $f \in H(\Omega)$ осуществляется по правилу:

$$\langle S, f \rangle = \int_K f d\mu,$$

где μ – некоторая комплексная мера, сосредоточенная на компакте $K \subset \Omega$. Подберем односвязную область G и круговую окрестность O нуля в $\mathbb{C}$ так, чтобы имели место вложения $K \subseteq G$, $G + O \subset \Omega$, и обозначим через $\mathbf{O}$ поликруговую окрестность нуля в $\mathbb{C}^q$, удовлетворяющую условию (21).

Пусть $f \in H(\Omega)$. По предложению 3.2 функция $f(z, h)$ будет аналитической на множестве $G \times \mathbf{O}$. Поэтому имеет смысл выражение

$$(S * f)(h) := \int_K f(z, h) d\mu.$$

Это выражение представляет собой функцию h , голоморфную в $\mathbf{O}$, и называется π -сверткой функционала S и функции f . Если $\pi(\zeta) = (\zeta_1^{m_1}, \dots, \zeta_1^{m_q})$, $\mu = (m_1, \dots, m_p)$ – фиксированный вектор из $\mathbb{Z}_+^q$ с ненулевыми компонентами, то π -свертка превращается в m -стороннюю свертку

$$(S * f)(h) = \frac{1}{m} \sum_{\alpha < \mu} \langle S, f(z + \langle \varepsilon^\alpha h \rangle) \rangle,$$

а при $\pi = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ – в обычную свертку $(S * f)(h) = \langle S, f(z + h) \rangle$.

Обозначим через π -свертку $f \rightarrow S * f$, действующий из пространства $H(\Omega)$ в пространство $H(\mathbf{O})$. Исследуем свойства оператора π -свертки.

СВОЙСТВО 3.5. *Оператор $u: H(\Omega) \rightarrow H(\mathbf{O})$ есть линейное непрерывное отображение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейность оператора π -свертки вытекает из линейности оператора π -сдвига. Докажем непрерывность оператора π -свертки. Множества вида $V_{d,\varepsilon} = \{f \in H(\mathbf{O}) : \max_d |f| \leq \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$, d – компакт в $\mathbf{O}$, образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в $H(\mathbf{O})$. Поэтому достаточно доказать следующее утверждение: для любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $d \subset \mathbf{O}$ существует окрестность нуля $U \subseteq H(\Omega)$ такая, что $u(U) \subseteq V_{d,\varepsilon}$. Мера μ , определяющая функционал S , сосредоточена на компакте $K \subset \Omega$. Пусть

$$V_K = \left\{ f \in H(\Omega) : \sup_K |f| \leq 1 \right\}, \quad \|S\| = \sup\{|\langle S, f \rangle| : f \in V_K\}.$$

Можно предполагать, что $\|S\| > 0$. Семейство операторов π -сдвига $T_h: H(\Omega) \rightarrow H(G)$, $h \in d$, является равномерно непрерывным (свойство 3.4). Поэтому существует окрестность нуля $U \subseteq H(\Omega)$ такая, что $T_h(U) \subseteq \frac{\varepsilon}{\|S\|} V_K \quad \forall h \in d$, т.е. для $f \in U$ и $h \in d$ имеем $\sup_{z \in K} |f(z, h)| \leq \frac{\varepsilon}{\|S\|}$. Значит,

$$|(S * f)(h)| \leq \|S\| \sup_{z \in K} |f(z, h)| \leq \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\max_d |(S * f)| \leq \varepsilon$. Последнее означает, что $u(f) \in V_{d,\varepsilon}$. Это верно для любой $f \in U$. Значит, $u(U) \subseteq V_{d,\varepsilon}$. Свойство доказано.

Пусть D_p – оператор частного дифференцирования по переменной h_p .

СВОЙСТВО 3.6. *Для любого $f \in H(\Omega)$ имеет место соотношение*

$$\pi_p(D_p)(S * f) = S * (\pi_p(D)f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из линейности и непрерывности функционала S вытекает

$$\pi_p(D_p)\langle S, T_h(f) \rangle = \langle S, \pi_p(D_p)T_h(f) \rangle.$$

В силу свойства 3.3 оператора π -сдвига $\pi_p(D_p)T_h(f) = T_h(\pi_p(D)f)$. Значит,

$$\begin{aligned} \pi_p(D_p)(S * f) &= \pi_p(D_p)\langle S, T_h(f) \rangle = \langle S, \pi_p(D_p)T_h(f) \rangle \\ &= \langle S, T_h(\pi_p(D)f) \rangle = S * (\pi_p(D)f). \end{aligned}$$

Таким образом, свойство доказано.

СВОЙСТВО 3.7. *Дуальная операция $u^\odot: P(\mathbf{O}) \rightarrow P(\Omega)$ имеет вид $\phi \rightarrow \varphi \text{ sym } \phi$, где φ – преобразование Лапласа функционала S .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дуальная операция переводит функцию $\phi(\lambda) = \langle s, e^{\langle \lambda, h \rangle} \rangle$ в функцию $\psi(\zeta) = \langle s, \langle S, T_h(e^{\zeta z}) \rangle \rangle$. По свойству 3.1 оператора π -сдвига имеем

$$\psi(\zeta) = \langle s, \langle S, (e^{\zeta z} \text{sym}_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle})(\zeta) \rangle \rangle = \varphi(\zeta) \langle s, (\text{sym}_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle})(\zeta) \rangle.$$

При этом очевидно, что

$$\langle s, (\text{sym}_\lambda e^{\langle \lambda, h \rangle})(\zeta) \rangle = (\text{sym}_\lambda \langle s, e^{\langle \lambda, h \rangle} \rangle)(\zeta) = (\text{sym}_\lambda \phi(\lambda))(\zeta).$$

Значит, $\psi = \varphi \text{ sym } \phi$. Тем самым свойство доказано.

3.6. Однородное уравнение π -свертки. Пусть $\Omega = \{\Omega_1, \dots, \Omega_\nu\}$ – некоторая система односвязных областей в $\mathbb{C}$; $H_j = H(\Omega_j)$ – пространство функций, голоморфных в Ω_j , с топологией компактной сходимости; $\mathbf{H}$ – топологическое произведение $H_1 \times \dots \times H_\nu$; $S = (S_1, \dots, S_\nu)$ – фиксированный элемент $\mathbf{H}^*$. Действие функционала S на элементы $f = (f_1, \dots, f_\nu) \in \mathbf{H}$ осуществляется по правилу:

$$\langle S, f \rangle = \sum_{j=1}^{\nu} \langle S_j, f_j \rangle = \sum_{j=1}^{\nu} \int_{K_j} f_j d\mu_j,$$

где μ_j – некоторая комплексная мера, сосредоточенная на компакте $K_j \subset \Omega_j$. Подберем односвязные области G_j и круговую окрестность O нуля так, чтобы имели место вложения $K_j \subset G_j$, $G_j + O \subset \Omega_j$, и обозначим через $\mathbf{O}$ поликруговую окрестность нуля в $\mathbb{C}^q$, удовлетворяющую условию (21):

$$\{\zeta : \zeta = \lambda_1 + \dots + \lambda_q, \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q) \in \mathbf{O}\} \subseteq O.$$

По предложению 3.2 π -сдвиги $f_1(z, h), \dots, f_\nu(z, h)$ будут аналитическими на множествах $G_1 \times \mathbf{O}, \dots, G_\nu \times \mathbf{O}$ соответственно. Поэтому имеет смысл выражение

$$S * f := \sum_{j=1}^{\nu} \int_{K_j} f_j(z, h) d\mu_j.$$

Выражение $S * f$ представляет собой функцию h , голоморфную в $\mathbf{O}$, и называется π -сверткой функционала S и элемента f . Рассмотрим однородное уравнение π -свертки

$$S * f = 0, \quad f \in \mathbf{H}. \quad (26)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Множество W решений $f \in \mathbf{H}$ однородного уравнения (26) есть замкнутое инвариантное подпространство в $\mathbf{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что W – замкнутое подпространство $\mathbf{H}$, следует из линейности и непрерывности оператора π -свертки (свойство 3.5). Далее, пусть $f \in W$, значит, $(S * f)(h) \equiv 0$. Действуя оператором $\pi_p(D_p)$ и используя свойство 3.6 оператора π -свертки, получаем $\pi_p(D_p)(S * f)(h) \equiv (S * \pi_p(D)f)(h) \equiv 0$. Это значит, что $\pi_p(D)f \in W$. Таким образом, $f \in W \Rightarrow \pi_p(D)f \in W$, $p = 1, \dots, q$. Предложение доказано.

Корневые элементы системы операторов (1), удовлетворяющие уравнению (26), называются *элементарными* решениями этого уравнения. Задача спектрального синтеза для подпространства W решений этого уравнения принимает форму классической задачи: *каждое ли решение уравнения (26) можно аппроксимировать в $\mathbf{H}$ линейными комбинациями элементарных решений?*

Следующее предложение раскрывает строение аннуляторного подмодуля подпространства W .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Аннуляторный подмодуль I инвариантного подпространства решений однородного уравнения π -свертки (26) есть главный $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$, порожденный элементом $\varphi = \mathbf{T}(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подпространство W решений уравнения (26) есть ядро оператора π -свертки $u: \mathbf{H} \rightarrow H(\mathbf{O}), f = (f_j) \rightarrow \sum_{j=1}^{\nu} u_j(f_j)$, где $u_j: H_j \rightarrow H(\mathbf{O})$ – оператор π_j -свертки. Оператор u является непрерывным. Так как пространство $\mathbf{H}$ является рефлексивным, то ортогональное подпространство $W^0 \subseteq \mathbf{H}^*$ совпадает с замыканием в $\mathbf{H}^*$ образа $u^*(H^*(\mathbf{O}))$ [21; 8.6]. Последнее равносильно тому, что $I = \mathbf{T}(W^0)$ совпадает с замыканием в $\mathbf{P}$ образа $u^\odot(P(\mathbf{O}))$, где $u^\odot$ – дуальная к u операция. Легко убедиться, что сопряженная операция $u^*: H^*(\mathbf{O}) \rightarrow \mathbf{H}^*$ действует по правилу $s \rightarrow (u_1^*(s), \dots, u_\nu^*(s))$, а дуальная операция $u^\odot: P(\mathbf{O}) \rightarrow \mathbf{P}$ – по правилу $\phi \rightarrow (u_1^\odot(\phi), \dots, u_\nu^\odot(\phi))$. Значит, I есть замыкание в $\mathbf{P}$ множества элементов вида $\varphi \text{ sum } \phi$, где $\phi \in P(\mathbf{O})$ (см. свойство 3.7). Путем элементарных оценок легко убедиться, что частичные суммы $\sum_{|\gamma|=0}^n c_\gamma \lambda^\gamma$ ряда Тейлора функции ϕ сходятся к ней в топологии $P(\mathbf{O})$ (см., например, [22; §12]). По предложению 3.1 $r_n = \sum_{|\gamma|=0}^n c_\gamma \pi_\gamma \rightarrow \text{sum } \phi$ в топологии $P(\mathbf{O})$. Билинейная операция $P(G_j) \times P(\mathbf{O}) \rightarrow P(\Omega_j), (\phi_j, \psi) \rightarrow \phi_j \psi$, является раздельно непрерывной [16; теорема 14.1]. Значит, $\varphi_j r_n \rightarrow \varphi_j \text{ sum } \phi$ в топологии $P(\Omega_j)$. Поэтому элементы вида $\varphi \text{ sum } \phi$ можно аппроксимировать в топологии $\mathbf{P}$ элементами вида φr , где $r \in \text{sum } \mathbb{C}[\lambda] = \mathbb{C}[\pi]$. Это и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Аннуляторный подмодуль инвариантного подпространства решений системы однородных уравнений π -свертки*

$$\begin{cases} S^{(1)} * f = 0, \\ \dots\dots\dots f \in \mathbf{H}, \\ S^{(k)} * f = 0, \end{cases} \quad (27)$$

есть конечно порожденный $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$, порожденный элементами $\varphi^{(1)} = \mathbf{T}(S^{(1)}), \dots, \varphi^{(k)} = \mathbf{T}(S^{(k)})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $W^{(1)}, \dots, W^{(k)}$ – подпространства решений однородных уравнений π -свертки $S^{(1)} * f = 0, \dots, S^{(k)} * f = 0$ соответственно. Тогда пересечение $W = W^{(1)} \cap \dots \cap W^{(k)}$ является подпространством решений системы (27). По свойствам поляр аннулятор $V = W^0 \subset \mathbf{H}^*$ совпадает с замыканием в $\mathbf{H}^*$ множества $V^{(1)} + \dots + V^{(k)}$, где $V^{(i)}$ – аннулятор подпространства $W^{(i)}$, $i = 1, \dots, k$. Значит, аннуляторный подмодуль $I = \text{An } W$ совпадает с замыканием в $\mathbf{P}$ множества $I^{(1)} + \dots + I^{(k)}$, где $I^{(i)}$ – аннуляторный подмодуль подпространства $W^{(i)}$, $i = 1, \dots, k$. Таким образом, любой элемент из I можно аппроксимировать в топологии $\mathbf{P}$ суммами $f^{(1)} + \dots + f^{(k)}$, $f^{(i)} \in I^{(i)}$. Из предложения 3.4 вытекает, что любой элемент из I можно аппроксимировать элементами вида $r^{(1)}\varphi^{(1)} + \dots + r^{(k)}\varphi^{(k)}$, $r^{(i)} \in \mathbb{C}[\pi]$. Согласно определению это означает, что I – $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$, порожденный совокупностью элементов $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}$. Следствие доказано.

§ 4. Спектральный синтез

4.1. Основные следствия критерия обильности. Выберем произвольное замкнутое $\pi(D)$ -инвариантное подпространство $W \subseteq \mathbf{H}$ и обозначим через I его аннуляторный подмодуль. Из теоремы двойственности (см. п. 1.3) вытекает, что допустимость спектрального синтеза подпространством W эквивалентна обильности I . Пусть $\Omega_1, \dots, \Omega_\nu$ – выпуклые области. Тогда по критерию обильности

(см. п. 2.3) свойство обильности замкнутого $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуля в $\mathbf{P}$ расщепляется на два свойства – устойчивость и насыщенность. Таким образом, справедлив следующий критерий.

ТЕОРЕМА 4.1. *Замкнутое $\pi(D)$ -инвариантное подпространство $W \subseteq \mathbf{H}$ допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль $I \subseteq \mathbf{P}$ устойчив и насыщен.*

Теорема 4.1 сводит исследование замкнутого $\pi(D)$ -инвариантного подпространства на предмет допустимости им спектрального синтеза к проверке устойчивости и насыщенности его аннуляторного подмодуля. Следующая теорема посвящена ситуации, в которой эту проверку можно упростить.

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть W – замкнутое $\pi(D)$ -инвариантное подпространство $\mathbf{H}$, аннуляторный подмодуль $I \subseteq \mathbf{P}$ которого имеет π -ранг равный единице. Для того чтобы подпространство W допускало спектральный синтез, необходимо и достаточно, чтобы подмодуль I был устойчив.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть W – замкнутое $\pi(D)$ -инвариантное подпространство $\mathbf{H}$, допускающее спектральный синтез. По теореме двойственности аннуляторный подмодуль I подпространства W является обильным. По критерию обильности подмодуль I является устойчивым. Необходимость доказана.

Достаточность. Допустим, что аннуляторный подмодуль I подпространства $W \subseteq \mathbf{H}$ является устойчивым и имеет π -ранг 1. В силу теоремы двойственности нам достаточно доказать, что подмодуль I является обильным. Непосредственная проверка показывает, что $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодули в $\mathbf{P}$ π -ранга 1 автоматически являются насыщенными [11; §3, п. 3.5]. Значит, по критерию обильности устойчивые подмодули π -ранга 1 являются обильными. Но легче доказать обильность подмодуля I , опираясь на теорему редукции (см. п. 1.4) и теорему 3.2 из [11]. Пусть l – многочлен Люрота системы многочленов $\pi_1, \dots, \pi_q$. По следствию 2.3 замкнутый $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль $J \subseteq \mathbf{P}$, порождаемый I , имеет l -ранг 1. По теореме 2.1 подмодуль J устойчив. Следовательно, по теореме 3.2 из [11] подмодуль J является обильным. В то же время, по теореме редукции обильность подмодуля J влечет обильность подмодуля I . Теорема доказана.

Из теоремы 4.2 вытекает, что теория спектрального синтеза для системы дифференциальных операторов $\pi_1(D), \dots, \pi_q(D)$ в случае $\pi\text{-Rank } I = 1$ повторяет теорию спектрального синтеза для обычного оператора дифференцирования.

Рассмотрим два следствия теоремы 4.2.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Пусть система $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}$ элементов из $\mathbf{P}$ имеет π -ранг равный единице. Замкнутое $\pi(D)$ -инвариантное подпространство $W \subseteq \mathbf{H}$ решений системы однородных уравнений π -свертки (27) допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль $I \subseteq \mathbf{P}$ устойчив.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 3.4 (см. следствие 3.1) аннуляторный подмодуль $I \subseteq \mathbf{P}$ замкнутого $\pi(D)$ -инвариантного подпространства $W \subseteq \mathbf{H}$ решений системы однородных уравнений π -свертки (27) является конечно порожденным $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулем в $\mathbf{P}$ с образующими $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}$. Так как эта система элементов из $\mathbf{P}$ имеет π -ранг 1, то по следствию 2.3 $\pi\text{-Rank } I = 1$. Осталось сослаться на теорему 4.2. Следствие доказано.

Пусть Ω – выпуклая область в $\mathbb{C}$; $m_1 = \deg \pi_1, \dots, m_q = \deg \pi_q$. Если наибольший общий делитель (НОД) чисел $m_1, \dots, m_q$ равен единице, то справедливо следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Замкнутое $\pi(D)$ -инвариантное подпространство $W \subseteq H(\Omega)$ допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль $I \subseteq P(\Omega)$ устойчив.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть W – замкнутое $\pi(D)$ -инвариантное подпространство $H(\Omega)$, $I \subseteq P(\Omega)$ – его аннуляторный подмодуль. Достаточно показать, что при условии $\text{НОД}(m_1, \dots, m_q) = 1$ выполняется равенство $\pi\text{-Rank} I = 1$. Пусть l – многочлен Люрота для системы многочленов $\pi_1, \dots, \pi_q$. В силу правого включения из (3) степень m многочлена l является делителем чисел $m_1, \dots, m_q$. Поэтому если $\text{НОД}(m_1, \dots, m_q) = 1$, то $m = 1$ и, значит, по следствию 2.2, учитывая, что $\nu = 1$, имеем $\pi\text{-Rank} I = 1$. Тем самым следствие доказано.

С другой стороны, по предложению 2.3 $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль $I \subseteq \mathbf{P}$, порожденный π -независимой системой элементов, всегда является устойчивым. В силу теоремы 4.1 справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Пусть система $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}$ элементов из $\mathbf{P}$ является π -независимой. Замкнутое $\pi(D)$ -инвариантное подпространство $W \subseteq \mathbf{H}$ решений системы однородных уравнений π -свертки (27) допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль $I \subseteq \mathbf{P}$ насыщен.*

Пусть $I^{(1)}, \dots, I^{(k)}$ – главные $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодули в $\mathbf{P}$, порождаемые элементами $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}$ соответственно. Зафиксируем простой l -слой ξ , не пересекающийся с нулевым множеством многочлена s , для которого

$$l\text{-Ind}_{\xi} I^{(1)} = \dots = l\text{-Ind}_{\xi} I^{(k)} = 0. \quad (28)$$

Положим

$$A(\tilde{\xi}) = \{a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{C}^k : a_1 \varphi^{(1)}(\omega) + \dots + a_k \varphi^{(k)}(\omega) = 0 \forall \omega \in \tilde{\xi}\}.$$

Комбинируя предложение 2.5, предложение 3.4 и теорему 4.1, получаем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Пусть для каждого вектора $a \in A(\tilde{\xi})$ существуют обобщенные последовательности $\{p_{1\sigma}\}, \dots, \{p_{k\sigma}\}$, $\sigma \in \Sigma$, многочленов из кольца $\mathbb{C}[l]$ такие, что:*

- 1) $p_{1\sigma}(\tilde{\xi}) = a_1, \dots, p_{k\sigma}(\tilde{\xi}) = a_k$;
- 2) $p_{1\sigma} \varphi^{(1)} + \dots + p_{k\sigma} \varphi^{(k)} \rightarrow 0$ в топологии $\mathbf{P}$.

Тогда для того чтобы подпространство $W \subseteq \mathbf{H}$ решений системы однородных уравнений свертки (26) допускало спектральный синтез, необходимо и достаточно, чтобы аннуляторный подмодуль I подпространства W был насыщен.

Пусть $W^{(1)}, \dots, W^{(k)}$ – замкнутые $\pi(D)$ -инвариантные подпространства $\mathbf{H}$; $I^{(1)}, \dots, I^{(k)}$ – их аннуляторные подмодули. Аннуляторный подмодуль I замкнутого $\pi(D)$ -инвариантного подпространства $W = W^{(1)} \cap \dots \cap W^{(k)} \subseteq \mathbf{H}$ совпадает

с суммой подмодулей $I^{(1)}, \dots, I^{(k)}$. Выберем простой l -слой $\tilde{\xi}$, не пересекающийся с нулевым множеством многочлена s , для которого имеют место соотношения (28). Рассмотрим набор $\alpha = (\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)})$ функций $\tilde{\xi} \rightarrow \mathbb{C}^\nu$, допустимых относительно подмодулей $I^{(1)}, \dots, I^{(k)}$ соответственно (см. п. 2.1). Положим

$$T(I, \alpha, \tilde{\xi}) = \{\varphi = \varphi^{(1)} + \dots + \varphi^{(k)} : \varphi^{(i)} \in I^{(i)}, \\ \varphi^{(i)}(\omega) = \alpha^{(i)}(\omega) \forall \omega \in \tilde{\xi}, i = 1, \dots, k\}.$$

Комбинация предложения 2.4 и теоремы 4.1 приводит к следующему результату.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть $I^{(1)}, \dots, I^{(k)}$ – устойчивые $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодули в $\mathbf{P}$ и для любого набора $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)}, \alpha^{(1)} + \dots + \alpha^{(k)} = 0$, функций $\alpha^{(i)}: \tilde{\xi} \rightarrow \mathbb{C}^\nu$, допустимых относительно $I^{(1)}, \dots, I^{(k)}$ соответственно, замыкание множества $T(I, \alpha, \tilde{\xi})$ в топологии $\mathbf{P}$ содержит нулевой элемент. Тогда для того чтобы пересечение $W = W^{(1)} \cap \dots \cap W^{(k)}$ допускало спектральный синтез, необходимо и достаточно, чтобы сумма подмодулей $I^{(1)}, \dots, I^{(k)}$ была насыщена.

4.2. Двойственный эквивалент теоремы редукции. Пусть l – многочлен Люрота системы многочленов $\pi_1, \dots, \pi_q$; $l(D)$ – соответствующий дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, действующий в $\mathbf{H}$ покомпонентно. Теорема редукции допускает двойственную интерпретацию в терминах задачи спектрального синтеза для систем дифференциальных операторов.

Выберем произвольное замкнутое подпространство W_0 в $\mathbf{H}$. Обозначим через W замкнутое $\pi(D)$ -инвариантное подпространство в $\mathbf{H}$, содержащееся в W_0 и обладающее свойством *максимальности*: всякое замкнутое $\pi(D)$ -инвариантное подпространство в $\mathbf{H}$, вложенное в W_0 , вложено в W . Аналогично, обозначим через V замкнутое $l(D)$ -инвариантное подпространство в $\mathbf{H}$, содержащееся в W_0 и обладающее свойством *максимальности*: всякое замкнутое $l(D)$ -инвариантное подпространство в $\mathbf{H}$, вложенное в W_0 , вложено в V .

ТЕОРЕМА 4.3. Замкнутое $\pi(D)$ -инвариантное подпространство W допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда замкнутое $l(D)$ -инвариантное подпространство V допускает спектральный синтез.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I_0 = \text{An } W_0$, $I = \text{An } W$, $J = \text{An } V$. Аннуляторный подмодуль I включает множество I_0 и обладает свойством минимальности: всякий замкнутый $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$, включающий I_0 , включает I . Действительно, пусть I' – произвольный замкнутый $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$, включающий I_0 ; $W' = \pi(D)$ -инвариантное подпространство в $\mathbf{H}$, аннуляторный подмодуль которого совпадает с I' . Из включения $I_0 \subseteq I'$ вытекает, что подпространство W' является подмножеством W_0 . В силу свойства максимальной W выполняется включение $W' \subseteq W$. Следовательно, $I \subseteq I'$. Таким образом, свойство минимальности подмодуля I доказано. С другой стороны, минимальный замкнутый $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$, включающий множество I_0 , совпадает с замкнутым $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулем $\overline{I_0[\pi]} \subseteq \mathbf{P}$, порождаемым множеством I_0 . Значит, $I = \overline{I_0[\pi]}$. Аналогичным образом доказывается соотношение $J = \overline{I_0[l]}$. Здесь $\overline{I_0[l]}$ – замкнутый $\mathbb{C}[l]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$, порождаемый множеством I_0 . По теореме редукции подмодули I и J обильны или нет

одновременно. В силу теоремы двойственности подпространства W и V допускают спектральный синтез или нет одновременно. Тем самым теорема доказана.

4.3. Основные следствия теоремы редукции. Пусть $S^{(1)}, \dots, S^{(k)}$ – фиксированные элементы $\mathbf{H}^*$; W – подпространство решений системы однородных уравнений π -свертки (27); V – подпространство решений системы однородных уравнений l -свертки

$$\begin{cases} S^{(1)} \underset{*}{\overset{(l)}{f}} = 0, \\ \dots\dots\dots f \in \mathbf{H}. \\ S^{(k)} \underset{*}{\overset{(l)}{f}} = 0, \end{cases} \quad (29)$$

По предложению 3.4 (см. следствие 3.1) аннуляторный подмодуль $I = \mathbf{T}(W^0)$ – замкнутый конечно порожденный $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$ с образующими $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}$; аннуляторный подмодуль $J = \mathbf{T}(V^0)$ – замкнутый конечно порожденный $\mathbb{C}[l]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$ с теми же образующими. По теореме редукции подмодули I, J обильны или нет одновременно. В силу теоремы двойственности справедлива

ТЕОРЕМА 4.4. *Каждое решение системы однородных уравнений π -свертки (27) можно аппроксимировать линейными комбинациями элементарных решений тогда и только тогда, когда аналогичную аппроксимацию допускает каждое решение системы однородных уравнений l -свертки (29).*

В работе [19] доказано, что замкнутое $l(D)$ -инвариантное подпространство решений одного однородного уравнения l -свертки всегда допускает спектральный синтез. Значит, из теоремы 4.4 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Каждое решение однородного уравнения π -свертки можно аппроксимировать линейными комбинациями элементарных решений.*

Теорема 4.4 имеет еще одно важное следствие в случае $l(\zeta) = \zeta^m, m \in \mathbb{N}$. Элемент $\varphi \in \mathbf{P}$ делит элемент $\Phi \in \mathbf{P}$ в классе целых l -симметричных функций, если существует целая l -симметричная функция f такая, что $f\varphi = \Phi$. Привлекая теорему 7.5 из [13], получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Пусть $l(\zeta) = \zeta^m, m \in \mathbb{N}$, и каждый элемент $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)} \in \mathbf{P}$ делит некоторый элемент $\Phi \in \mathbf{P}, \Phi \neq 0$, в классе целых l -симметричных функций. Тогда каждое решение системы однородных уравнений π -свертки (27) можно аппроксимировать линейными комбинациями элементарных решений.*

Отметим, что условие $l(\zeta) = \zeta^m, m \in \mathbb{N}$, выполняется, если кольцо $\mathbb{C}[\pi]$ содержит хотя бы один одночлен, например хотя бы один из многочленов $\pi_1, \dots, \pi_q$ является одночленом. Убедимся в этом. Пусть $\pi_1(\zeta) = \zeta^{m_1}, m_1 \in \mathbb{N}$. Так как $\mathbb{C}[\pi] \subseteq \mathbb{C}[l]$, то $\zeta^{m_1} \in \mathbb{C}[l]$. Следовательно, найдется многочлен p такой, что $\zeta^{m_1} = p(l(\zeta))$. Если l – многочлен Люрота, то $al + b, a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$, – тоже многочлен Люрота. Значит, мы вправе считать, что старший коэффициент многочлена $l(\zeta)$ равен единице и $l(0) = 0$. Следовательно, $p(0) = 0$. Отсюда вытекает, что любой корень многочлена $l(\zeta)$ является корнем одночлена ζ^{m_1} . Значит, $l(\zeta)$ – одночлен вида $\zeta^m, m \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим еще одну важную ситуацию: $\pi_1(\zeta) = \zeta^{m_1}, \dots, \pi_q(\zeta) = \zeta^{m_q}, m_i \in \mathbb{N}$. В этом случае $l(\zeta) = \zeta^m$, где $m = \text{НОД}(m_1, \dots, m_q)$. Действительно, пусть $\mathbb{C}(\zeta^{m_1}, \dots, \zeta^{m_q})$ – поле частных кольца $\mathbb{C}[\zeta^{m_1}, \dots, \zeta^{m_q}]$, $\mathbb{C}(\zeta^m)$ – поле частных кольца $\mathbb{C}[\zeta^m]$. По определению элемента Люрота нам достаточно показать, что выполняется равенство $\mathbb{C}(\zeta^{m_1}, \dots, \zeta^{m_q}) = \mathbb{C}(\zeta^m)$. Вложение $\mathbb{C}(\zeta^{m_1}, \dots, \zeta^{m_q}) \subseteq \mathbb{C}(\zeta^m)$ очевидно, так как каждый из одночленов $\zeta^{m_1}, \dots, \zeta^{m_q}$ является в то же время одночленом от ζ^m . С другой стороны, известно, что наибольший общий делитель m чисел $m_1, \dots, m_q$ представляется в виде $m = n_1 m_1 + \dots + n_q m_q$, где $n_1, \dots, n_q \in \mathbb{Z}$. Отсюда вытекает, что $\zeta^m = (\zeta^{m_1})^{n_1} \times \dots \times (\zeta^{m_q})^{n_q}$. Это означает, что одночлен ζ^m является рациональной функцией от $\zeta^{m_1}, \dots, \zeta^{m_q}$. Следовательно, $\mathbb{C}(\zeta^m) \subseteq \mathbb{C}(\zeta^{m_1}, \dots, \zeta^{m_q})$.

Пусть $\Omega_1 = \mathbb{C}, \dots, \Omega_\nu = \mathbb{C}, \mathbf{H}$ – топологическое произведение $H(\mathbb{C}) \times \dots \times H(\mathbb{C})$ ν копий пространства $H(\mathbb{C})$. Из теоремы 4.3 и [19; теорема 3.7] вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. *Всякое замкнутое $\pi(D)$ -инвариантное подпространство $W \subseteq \mathbf{H}$ допускает спектральный синтез.*

Для случая $\nu = 1, q = 1, \pi(D) = D$ этот результат получен Л. Шварцем [23], для случая $\nu = 1, q = 1, \pi(D) = D^m$ – С. Г. Мерзляковым [24]. Случай $q = 1$ рассмотрен И. Ф. Красичковым-Терновским [15].

Если $\nu = 1, l(\zeta) = \zeta^m, m \in \mathbb{N}$, то это предложение допускает существенное развитие. Пусть Ω – неограниченная выпуклая область. Обозначим через $\Theta(G)$ множество направлений звездности области G , через ω – оператор поворота комплексной плоскости на угол $2\pi/m$. Следующее предложение является аналогом теоремы 4.1 из [19].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. *Пусть для некоторого целого числа $n, 0 \leq n < m$, выполняется условие*

$$\bigcap_{k=0}^n \Theta(\omega^k \Omega) \neq \emptyset.$$

Если аннуляторный подмодуль $I \subseteq P(\Omega)$ замкнутого $\pi(D)$ -инвариантного подпространства $W \subseteq H(\Omega)$ удовлетворяет условию $\pi\text{-Rank} I \leq n + 1$, то подпространство W допускает спектральный синтез.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме двойственности достаточно доказать, что аннуляторный подмодуль $I = \text{An } W$ является обильным. Обозначим через J замкнутый $\mathbb{C}[l]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$, порождаемый подмодулем I . По следствию 2.3 $\pi\text{-Rank} I = l\text{-Rank} J \leq n + 1$.

Значит, по теореме 4.1 из [19] подмодуль J является обильным. По теореме редукции таковым же является подмодуль I . Предложение доказано.

Сформулируем основные следствия предложения 4.7.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Пусть Ω – неограниченная выпуклая область. Тогда всякое замкнутое $\pi(D)$ -инвариантное подпространство $W \subseteq H(\Omega)$, аннуляторный подмодуль которого имеет π -ранг 1, допускает спектральный синтез.*

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *Пусть Ω – неограниченная выпуклая область, содержащая угол раствора $2\pi n/m$. Тогда всякое замкнутое $\pi(D)$ -инвариантное подпространство $W \subseteq H(\Omega)$, аннуляторный подмодуль которого имеет π -ранг не больше $n + 1$, допускает спектральный синтез.*

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Пусть $l(\zeta) = \zeta^2$, Ω – плоскость, полуплоскость или прямая молинейная полоса. Тогда всякое замкнутое $\pi(D)$ -инвариантное подпространство $W \subseteq H(\Omega)$ допускает спектральный синтез.

Последнее предложение для случая $\pi(\zeta) = \zeta^2$ получено впервые С. Г. Мерзляковым [25].

В заключение исправим досадную ошибку в формулировке леммы 4 из работы [3]. Пусть σ – объединение конечного множества π -слоев.

ЛЕММА. Если $f \in O_\pi(\tilde{\lambda}) \quad \forall \tilde{\lambda} \subseteq \sigma$, то в некоторой открытой π -симметричной окрестности U множества σ имеет место представление $f = F \circ \pi$, в котором F – функция, голоморфная в некотором открытом полицилиндрическом множестве $V \subseteq \mathbb{C}^q$, содержащем $\pi(U)$.

Автор благодарит И. Ф. Красичкова-Терновского за внимание к работе и обсуждение результатов.

Список литературы

1. Шишкин А. Б. Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. 1997. Т. 355. № 1. С. 28–30.
2. Шишкин А. Б. Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Теорема двойственности // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 9. С. 143–160.
3. Красичков-Терновский И. Ф., Шишкин А. Б. Локальное описание замкнутых подмодулей в специальном модуле целых функций экспоненциального типа // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 11. С. 35–54.
4. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 87. № 4. С. 459–489.
5. Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969.
6. Красичков-Терновский И. Ф. Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 1. С. 44–66.
7. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. Л.: ОГИЗ, 1948.
8. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез аналитических функций на системах выпуклых областей // Матем. сб. 1980. Т. 111(153). № 1. С. 3–41.
9. Красичков-Терновский И. Ф. Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 2. С. 309–341.
10. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. II. Метод модулей // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 1. С. 3–19.
11. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. III. Обильные подмодули // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 6. С. 55–86.
12. Шишкин А. Б. Локальное описание замкнутых подмодулей в специальном модуле целых функций экспоненциального типа // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 6. С. 94–100.
13. Шишкин А. Б. Спектральный синтез для оператора, порождаемого умножением на степень независимой переменной // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 6. С. 828–848.
14. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. I. Теорема двойственности // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 11. С. 1559–1588.

15. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 88. № 1. С. 3–30.
16. Напалков В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.
17. Красичков-Терновский И. Ф. Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств аналитических функций. II // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 6. С. 57–98.
18. Дьедонне Ж., Шварц Л. Двойственность в пространствах (F) и (LF) // Математика. Сб. пер. 1958. Т. 2. № 2. С. 77–107.
19. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. IV. Синтез // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 8. С. 23–46.
20. Себастьян-и-Силва Ж. О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Математика. Сб. пер. 1957. Т. 1. № 1. С. 60–77.
21. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969.
22. Кривошеев А. С., Напалков В. В. Комплексный анализ и операторы свертки // УМН. 1992. Т. 47. № 6(288). С. 3–58.
23. Schwartz L. Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques // Ann. of Math. (2). 1947. V. 48. P. 857–929.
24. Мерзляков С. Г. Инвариантные подпространства оператора кратного дифференцирования // Матем. заметки. 1983. Т. 33. № 5. С. 701–713.
25. Мерзляков С. Г. О подпространствах аналитических функций, инвариантных относительно оператора кратного дифференцирования // Матем. заметки. 1986. Т. 40. № 5. С. 635–639.