Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, Новая версия круговой симметризации
с приложениями к p -листным функциям, *Матем. сб.*,
2012, том 203, номер 7, 79–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7891>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:30:21

УДК 517.54

В. Н. Дубинин

Новая версия круговой симметризации с приложениями к p -листным функциям

Предлагается новая версия круговой симметризации множеств, функций и конденсаторов, отличающаяся от классической круговой симметризации тем, что симметризованные множества и конденсаторы располагаются на римановой поверхности функции, обратной полиному Чебышёва. В качестве приложений дополняются известные результаты В. К. Хеймана для p -листных голоморфных функций, не обращающихся в нуль, а также p -листных в круге функций, имеющих нуль порядка p в начале координат.

Библиография: 20 названий.

Ключевые слова: круговая симметризация, емкость конденсатора, риманова поверхность, p -листная функция, полином Чебышёва.

Введение

Функция f , заданная в некоторой области G комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}_z$, называется p -листной, $p = 1, 2, \dots$, в этой области, если она принимает в G каждое комплексное значение w не более чем p раз. По-видимому, впервые это понятие использовал П. Монтель при изучении нормальных семейств и их обобщений. В дальнейшем для различных классов p -листных функций были получены оценки начальных коэффициентов и аналоги теорем площадей, теорем покрытия и теорем искажения, хорошо известных для однолистных функций (см., например, [1]–[9]). Многие авторы изучали также обобщения p -листных функций: слабо однолистные функции, функции, p -листные в среднем по окружности, p -листные в среднем по площади и т.д. (см. [4]–[6], [10]–[14]). Наиболее распространенные классы p -листных функций:

S_p – класс функций вида

$$f(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + \dots, \quad (1)$$

голоморфных и p -листных в круге $|z| < 1$;

D_p – класс функций вида

$$f(z) = a_0 + a_1z + \dots, \quad (2)$$

голоморфных p -листных и не принимающих значение $w = 0$ в круге $|z| < 1$. (Обозначения классов не являются общепринятыми.) Значительных успехов в получении точных оценок для p -листных функций классов S_p и D_p добился В. К. Хейман (см. [4]–[6]). В его работах существенную роль играет метод

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00038) и Дальневосточного отделения РАН (грант № 12-II-CO-01M-002).

круговой симметризации (см. [6], [13]). Некоторые применения других видов симметризации к p -листным функциям даны в [15]–[17]. В настоящее время имеется обширная литература по p -листным функциям, касающаяся изучения весьма специфических подклассов таких функций, связанных с линейными операторами и др. Вместе с тем многие классические задачи для p -листных функций (в естественной постановке) остаются нерешенными (см., например, [18]). Более тонкий, чем в случае классов S_p и D_p , учет листности накрытия требует изучения свойств римановых поверхностей $\mathcal{R}(f)$ функций, обратных f . Вопросы покрытия и искажения при отображении функцией f с учетом точек ветвления поверхности $\mathcal{R}(f)$ мало изучены даже для полиномов степени p – простейших p -листных функций (см. теоремы о критических точках и критических значениях полиномов в [19]). Например, хорошо известен аналог теоремы Кёбе–Бибераха: *любая функция f класса S_p принимает каждое значение из круга $|w| < 4^{-p}$ точно p раз в круге $|z| < 1$* (см. [6; с. 150]). Пример функции

$$f(z) = \frac{z^p}{(1 - \alpha z)^{2p}}, \quad |\alpha| = 1,$$

показывает, что константу 4^{-p} нельзя заменить на большую. Легко видеть, что голоморфную функцию f в этом утверждении нельзя заменить на мероморфную. Даже если ограничить суммарную кратность полюсов функции f в круге $|z| < 1$ величиной, например, $p - 1$, нельзя указать единый круг, p -кратно покрываемый всеми функциями. При $p > 1$ величина такого круга для данной функции f зависит от расположения точек ветвления поверхности $\mathcal{R}(f)$. В этой связи возникают следующие вопросы. При каких ограничениях на точки ветвления существует единый круг, p -кратно покрываемый всеми функциями? Чему равен радиус максимального круга? Каковы оценки $|f|$ и $|f'|$ при рассматриваемых ограничениях на точки ветвления $\mathcal{R}(f)$? Методы, развитые в работах [2], [6], [13], ответов на поставленные вопросы не дают. Далее, функция f класса D_p не принимает в круге $|z| < 1$ двух значений: $w = 0$ и $w = \infty$. Этот факт можно интерпретировать следующим образом: для любого $r \geq 0$ множество $f^{-1}(\gamma(r))$, $\gamma(r) := \{w : |w| = r\}$, не содержит замкнутую кривую в круге $|z| < 1$ (точнее, не содержит носитель такой кривой). Естественно поставить вопрос о покрытии и искажении при отображении функцией f , для которой указанное выше свойство выполняется только при $r \geq \lambda$, $\lambda > 0$. В этом случае допускается накрытие начала координат, что делает невозможным применение методов из [6], [13].

В настоящей работе рассматриваются следующие классы функций:

$S_p(\tau)$ – класс мероморфных p -листных в круге $|z| < 1$ функций вида (1), для которых суммарная кратность полюсов в круге $|z| < 1$ не превосходит $p - 1$, а расстояние от точки $w = 0$ до ближайшего ненулевого критического значения равно τ (под критическим значением понимается величина $f(z)$ в точке, где $f'(z) = 0$; ниже будет показано, что величина τ может меняться в любых пределах от нуля до бесконечности);

$D_p(\lambda)$, $0 \leq \lambda < \infty$, – класс голоморфных p -листных в круге $|z| < 1$ функций f вида (2), для которых при любом $r \geq \lambda$ прообраз $f^{-1}(\gamma(r))$ не содержит замкнутую кривую в круге $|z| < 1$.

В § 2 и § 3 устанавливаются оценки для $|f|$, $|f'|$ и оценки модулей начальных коэффициентов функций f классов $S_p(\tau)$ и $D_p(\lambda)$. В частности, мы отвечаем

на некоторые из поставленных выше вопросов для p -листных функций. Доказательства всех этих оценок вытекают из свойств новой версии круговой симметризации (Sym) конденсаторов, расположенных на римановых поверхностях $\mathcal{R}(f)$, лежащих над w -плоскостью (см. § 1). Эти свойства суть аналоги соответствующих свойств круговой симметризации плоских конденсаторов (см. [6], [15]) и вытекают из последних. Новизна состоит в построении преобразования Sym на основе круговой симметризации. Ранее результат круговой симметризации располагался в основном на плоскости, а иногда – на римановых поверхностях $\mathcal{R}(e^z)$ или $\mathcal{R}(z^p)$ (см. [13]). В настоящей работе симметризованный конденсатор лежит на поверхности $\mathcal{R}(T_p)$, где T_p – полином Чебышёва первого рода степени $p > 1$. Предельный случай суперпозиции некоторых растяжений и преобразования Sym приводит к результатам В. К. Хеймана для функций классов S_p и D_p . Для простоты изложения мы пропускаем некоторые оценки, которые можно получить при помощи преобразования Sym для функций p -листных в среднем по окружности, а также доказательства единственности экстремальных функций.

§ 1. Симметризация множеств, функций и конденсаторов

Обозначим через $\gamma(r)$ окружность $|w| = r$ в случае $0 < r < \infty$ и положим по определению окружности $\gamma(0) = 0$ и $\gamma(\infty) = \infty$. Напомним определения круговой симметризации множеств и функций, заданных в круге $\bar{U}$, $U := \{w : |w| < 1\}$ (см., например, [6], [13]). Пусть B – открытое в $\bar{U}$ множество. Круговая симметризация относительно вещественной положительной полуоси сопоставляет множеству B кругосимметричное множество B^* , определенное следующим образом. Если при данном r , $0 \leq r \leq 1$, окружность $\gamma(r)$ не пересекается с множеством B , то она не пересекается и с множеством B^* . Если $\gamma(r) \subset B$, то $\gamma(r) \subset B^*$. В остальных случаях множество B^* пересекается с $\gamma(r)$ по открытой дуге с центром на вещественной положительной полуоси и линейной мерой, равной мере пересечения множества B с $\gamma(r)$. Нетрудно видеть, что множество B^* открыто в $\bar{U}$. Рассмотрим вещественнозначную функцию v , непрерывную в $\bar{U}$, и открытые в $\bar{U}$ множества $B_a = \{w \in \bar{U} : v(w) > a\}$, $-\infty < a < +\infty$. Результатом круговой симметризации (относительно вещественной положительной полуоси) функции v называют функцию v^* :

$$v^*(w) = \sup\{a : w \in B_a^*\}, \quad w \in \bar{U}.$$

Для достаточно гладкой функции v , заданной на открытом множестве G , введем обозначение

$$I(v, G) = \int_G |\nabla v|^2 d\sigma.$$

ЛЕММА 1. Пусть функция v определена выше и удовлетворяет условию Липшица в замкнутом круге $\bar{U}$. Тогда функция v^* удовлетворяет условию Липшица в $\bar{U}$ и выполняется неравенство

$$I(v, U) \geq I(v^*, U).$$

Доказательство этого утверждения лишь в деталях отличается от соответствующих доказательств в монографии [6].

Определим теперь круговую симметризацию множеств и функций, заданных на римановой поверхности. Всюду ниже под римановой поверхностью будем понимать компактную риманову поверхность с краем. Мы представляем такую поверхность “склеенной” из конечного числа плоских областей с естественным определением проекций, локальных параметров и окрестностей для точек на такой поверхности (см. [20]). Пусть $\mathcal{R}$ – риманова поверхность, лежащая над сферой $\overline{\mathbb{C}}_w$ и покрывающая каждую точку w не более чем p раз. Будем говорить, что множество $\mathcal{B}$ поверхности $\mathcal{R}$ *удовлетворяет условию (A)*, если для любого r , $1 \leq r < \infty$, оно не содержит замкнутую жорданову кривую, лежащую над окружностью $\gamma(r)$ и не покрывающую p -кратно эту окружность. Пусть $\mathcal{B}$ – множество на $\mathcal{R}$, открытое относительно $\mathcal{R}_e := \{W \in \mathcal{R} : |\operatorname{pr} W| \geq 1\}$ и удовлетворяющее условию (A). Обозначим через $\mathcal{U}$ p -листный круг, лежащий над $|w| > 1$, с центром в бесконечно удаленной точке, и пусть $\mathcal{L}$ – один из лучей на $\overline{\mathcal{U}}$, лежащий над лучом $[1, +\infty]$. Круговая симметризация относительно луча $\mathcal{L}$ сопоставляет множеству $\mathcal{B}$ кругосимметричное множество $\mathcal{B}^* \subset \overline{\mathcal{U}}$, определенное следующим образом. Если при данном r , $1 \leq r \leq \infty$, над окружностью $\gamma(r)$ нет точек множества $\mathcal{B}$, то над ней нет также и точек множества $\mathcal{B}^*$. Если множество $\mathcal{B}$ содержит замкнутую кривую, p -кратно лежащую над $\gamma(r)$, то $\mathcal{B}^*$ содержит замкнутую жорданову кривую, p -кратно лежащую над $\gamma(r)$. В остальных случаях часть множества $\mathcal{B}^*$, лежащая над $\gamma(r)$, представляет собой открытую жорданову дугу на $\overline{\mathcal{U}}$, симметричную относительно луча $\mathcal{L}$ (с центром на $\mathcal{L}$) и линейной меры, равной суммарной мере всех дуг на $\mathcal{B}$, лежащих над $\gamma(r)$. Рассмотрим неотрицательную непрерывную функцию $\mathcal{V}$ в $\mathcal{R}_e$, для которой множества $\mathcal{B}_a(\mathcal{V}) \equiv \mathcal{B}_a := \{W \in \mathcal{R}_e : \mathcal{V}(W) > a\}$, $0 \leq a < +\infty$, удовлетворяют условию (A) и которая в точках границы поверхности $\mathcal{R}$ обращается в нуль. Результатом круговой симметризации (относительно $\mathcal{L}$) функции $\mathcal{V}$ назовем такую функцию $\mathcal{V}^*$, что: $\mathcal{V}^*(W) = \sup\{a \geq 0 : W \in \mathcal{B}_a^*\}$, если $\{a \geq 0 : W \in \mathcal{B}_a^*\} \neq \emptyset$, и $\mathcal{V}^*(W) = 0$ в противном случае; $W \in \overline{\mathcal{U}}$.

ЛЕММА 2. Пусть функция $\mathcal{V}$ определена выше и удовлетворяет следующим условиям:

- (i) $0 \leq \mathcal{V} \leq 1$ на $\overline{\mathcal{R}}_e$;
- (ii) $\mathcal{V} = 0$ в некоторой окрестности каждой точки ветвления поверхности $\mathcal{R}$, лежащей в $\overline{\mathcal{R}}_e$, и каждой точки $\mathcal{R}$, лежащей над $w = \infty$;
- (iii) функция $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию Липшица локально на $\overline{\mathcal{R}}_e$.

Тогда функция $\mathcal{V}^*$ удовлетворяет условию Липшица локально на множестве $\overline{\mathcal{U}}$ и выполняется неравенство

$$I(\mathcal{V}, \mathcal{R}_e) \geq I(\mathcal{V}^*, \mathcal{U}).$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1 и поэтому здесь не приводится.

Рассмотрим симметризацию функции $\mathcal{V}$, заданной на замыкании римановой поверхности $\mathcal{R}$, как переход от этой функции к симметричной функции $\operatorname{Sym} \mathcal{V}$ на поверхности отображения, обратного полиному Чебышёва $T_p(z) := \cos(p \arccos z) = 2^{p-1}z^p + \dots$. Напомним, что в терминах конформных отображений полином $T_p(z)$ можно определить как суперпозицию обратной функции

Жуковского, степенной функции и функции Жуковского:

$$T_p(z) = \frac{1}{2} \left(\left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)^p + \left(z - \sqrt{z^2 - 1} \right)^p \right), \quad z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Гиперболы с фокусами в точках $z = \pm 1$, проходящие через критические точки полинома Чебышёва $z = \cos(k\pi/p)$, $k = 1, \dots, p-1$, разбивают z -плоскость на p попарно непересекающихся областей. Обозначим эти области, пронумерованные справа налево, как $B_1, \dots, B_p$. Полином T_p отображает область B_1 конформно и однолистно на область D_1 – w -плоскость с разрезом по лучу $L^- := [-\infty, -1]$. Области $B_2, \dots, B_{p-1}$ отображаются этим полиномом на области $D_2, \dots, D_{p-1}$ – w -плоскости с разрезами вдоль лучей L^- и $L^+ := [1, +\infty]$. Наконец, область B_p отображается на область D_p – w -плоскость с разрезом по лучу L^- в случае четного p и по лучу L^+ в случае, когда p нечетное. Риманову поверхность $\mathcal{R}(T_p)$ функции, обратной полиному T_p , можно получить склеиванием областей D_k , $k = 1, \dots, p$, следующим образом. Область D_1 склеивается “крест-накрест” с областью D_2 по берегам разрезов вдоль луча L^- . Область D_2 склеивается с областью D_3 по берегам разрезов вдоль луча L^+ и т.д. Область D_{p-1} склеивается с областью D_p по берегам разрезов вдоль луча L^- в случае четного p и луча L^+ в случае, когда p нечетное. Склеиваемые области D_k , рассматриваемые как подмножества поверхности $\mathcal{R}(T_p)$, будем обозначать буквами $\mathcal{D}_k$ соответственно, $k = 1, \dots, p$. Мы представляем p -листный круг $\mathcal{U}$ лежащим на поверхности $\mathcal{R}(T_p)$ над множеством $|w| > 1$, а луч $\mathcal{L}$ – это тот луч на $\overline{\mathcal{U}}$, который лежит над L^+ и принадлежит области $\mathcal{D}_1$.

Пусть $\mathcal{R}$ – риманова поверхность над сферой $\overline{\mathbb{C}}_w$, покрывающая каждую точку w не более чем p раз, и пусть $\mathcal{V}$ – неотрицательная непрерывная функция на $\mathcal{R}$, для которой множество $\mathcal{B}_0(\mathcal{V})$ удовлетворяет условию (A) и которая в точках границы поверхности $\mathcal{R}$ обращается в нуль. Результатом симметризации функции $\mathcal{V}$ назовем функцию $\text{Sym } \mathcal{V}$, заданную на поверхности $\mathcal{R}(T_p)$, которая в круге $\overline{\mathcal{U}}$ совпадает с функцией $\mathcal{V}^*$:

$$\text{Sym } \mathcal{V}(W) := \mathcal{V}^*(W), \quad W \in \overline{\mathcal{U}}.$$

В остальных точках поверхности $\mathcal{R}(T_p)$ функция $\text{Sym } \mathcal{V}$ определяется следующим образом. Пусть w – произвольная фиксированная точка круга $\overline{\mathcal{U}}$. Значения функции $\mathcal{V}$ в точках W с проекцией $\text{pr } W = w$ обозначим как

$$v_1(w) \geq v_2(w) \geq \dots \geq v_p(w), \quad w \in \overline{\mathcal{U}}. \quad (3)$$

Если для данной точки w не существует точки $W \in \mathcal{R}$ с $\text{pr } W = w$ либо если указанных выше значений (с учетом кратности) меньше чем p , то соответствующие значения $v_k(w)$ полагаем равными нулю. Поступая так в каждой точке $w \in \overline{\mathcal{U}}$, определим в $\overline{\mathcal{U}}$ p непрерывных функций $v_k(w)$, $k = 1, \dots, p$. Для каждой пары функций (v_k, v_l) , $1 \leq k < l \leq p$, определим F -преобразование, которое сопоставляет этой паре пару других функций (v'_k, v'_l) :

$$\begin{aligned} v'_k(w) &= (\max(v_k^*(w), v_l^*(-w)))^*, & w \in \overline{\mathcal{U}}, \\ v'_l(w) &= (\min(v_k^*(w), v_l^*(-w)))^*, & w \in \overline{\mathcal{U}}, \end{aligned}$$

где $*$ означает круговую симметризацию относительно вещественной положительной полуоси. Положим

$$M(v) = \max\{v(w) : |w| = 1\}, \quad m(v) = \min\{v(w) : |w| = 1\}$$

и заметим, что в результате F -преобразования выполняются неравенства

$$M(v'_k) = M(v_k), \quad m(v'_k) \geq m(v_k), \quad m(v'_k) \geq M(v'_l).$$

Проведем F -преобразование над парой (v_1, v_2) , затем над парой (v'_1, v_3) , над $((v'_1)', v_4)$ и т.д. В результате получим совокупность функций

$$(\dots((v'_1)')'\dots)', v'_2, v'_3, \dots, v'_p,$$

которую перенумеруем вновь соответственно как

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_p,$$

считая при этом, что

$$M(v_1) \geq m(v_1) \geq M(v_2) \geq M(v_3) \geq \dots \geq M(v_p).$$

Далее повторим предыдущую процедуру с набором функций $v_2, \dots, v_p$, затем с $v_3, \dots, v_p$, пока, наконец, не получим совокупность функций $v_1, v_2, \dots, v_p$, удовлетворяющих неравенствам

$$M(v_k) \geq m(v_k) \geq M(v_{k+1}) \geq m(v_{k+1}), \quad k = 1, \dots, p-1.$$

Перераспределяя значения функций $v_k(w)$ в каждой точке w внутри круга U , можно считать, что выполняются неравенства (3) и $v_k = v_k^*$, $k = 1, \dots, p$.

Доопределим теперь функцию $\text{Sym } \mathcal{V}$ в точках поверхности $\mathcal{R}(T_p)$, лежащих над кругом $\bar{U}$, по правилу

$$\text{Sym } \mathcal{V}(W) := v_k((-1)^{k+1} \text{pr } W), \quad W \in \bar{\mathcal{D}}_k, \quad |\text{pr } W| \leq 1, \quad k = 1, \dots, p.$$

Над окружностью $|w| = 1$ функция $\text{Sym } \mathcal{V}$ определялась нами разными способами. Однако оба способа приводят к одним и тем же значениям функции $\text{Sym } \mathcal{V}$ над $|w| = 1$. Действительно, при каждом преобразовании функций v_k , проведенном выше, выполняется равенство линейных мер

$$\text{mes}\{W \in \mathcal{R} : |\text{pr } W| = 1, \mathcal{V}(W) > a\} = \sum_{k=1}^p \text{mes}\{w : |w| = 1, v_k(w) > a\}$$

для любого $a \geq 0$. Отсюда следует, что функция $\text{Sym } \mathcal{V}$, определенная с помощью функций v_k , $k = 1, \dots, p$, совпадает над окружностью $|w| = 1$ с симметричной равноизмеримой перестановкой функции $\mathcal{V}$. Поэтому она совпадает над окружностью $|w| = 1$ с функцией $\mathcal{V}^*$.

ЛЕММА 3. Пусть функция $\mathcal{V}$ определена выше и удовлетворяет следующим условиям:

- (i) $0 \leq \mathcal{V} \leq 1$ на $\bar{\mathcal{R}}$;
- (ii) $\mathcal{V} = 0$ в некоторой окрестности каждой точки ветвления поверхности $\mathcal{R}$ и каждой точки $\mathcal{R}$, лежащей над $w = \infty$;
- (iii) функция $\mathcal{V}$ локально липшицева на $\bar{\mathcal{R}}$.

Тогда функция $\text{Sym } \mathcal{V}$ удовлетворяет условию Липшица локально на поверхности $\mathcal{R}(T_p)$ и выполняется неравенство

$$I(\mathcal{V}, \mathcal{R}) \geq I(\text{Sym } \mathcal{V}, \mathcal{R}(T_p)).$$

Доказательство вытекает из леммы 1, применяемой при построении функций $v_k(w)$, $k = 1, \dots, p$, а также из леммы 2.

Конденсатором на римановой поверхности $\mathcal{R}$ называется упорядоченная пара $C = (\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1)$ непустых непересекающихся замкнутых множеств $\mathcal{E}_k \subset \overline{\mathcal{R}}$, $k = 0, 1$. Множества $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1$ называются *пластинами* конденсатора C . Емкость конденсатора C определяется равенством

$$\text{cap } C = \inf I(\mathcal{V}, \mathcal{R} \setminus (\mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1)),$$

где нижняя грань берется по всем функциям $\mathcal{V}$, липшицевым на любом компактном подмножестве множества $\mathcal{R} \setminus (\mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1)$, равным нулю на множестве $\mathcal{E}_0$ и единице на $\mathcal{E}_1$. Известно, что если одна из пластин конденсатора содержит границу $\partial\mathcal{R}$ и если существует потенциальная функция $\mathcal{P}$, т.е. функция, непрерывная в $\overline{\mathcal{R}}$, гармоническая в $\mathcal{R} \setminus (\mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1)$ и равная k на $\mathcal{E}_k$, $k = 0, 1$, то

$$\text{cap } C = I(\mathcal{P}, \mathcal{R} \setminus (\mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1))$$

(принцип Дирихле).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{R}$ – риманова поверхность над сферой $\overline{\mathbb{C}_w}$, покрывающая каждую точку w не более чем p раз, и пусть $C = (\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1)$ – конденсатор на поверхности $\mathcal{R}$, имеющий потенциальную функцию $\mathcal{P}$, причем пластина $\mathcal{E}_0$ содержит $\partial\mathcal{R}$, а множество $\mathcal{R} \setminus \mathcal{E}_0$ удовлетворяет условию (A). Тогда

$$\text{cap } C \geq \text{cap Sym } C,$$

где $\text{Sym } C = (\text{Sym } \mathcal{E}_0, \text{Sym } \mathcal{E}_1)$, $\text{Sym } \mathcal{E}_k = \{W \in \mathcal{R}(T_p) : \text{Sym } \mathcal{P}(W) = k\}$ и $k = 0, 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что множества $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_1$ ограничены конечным числом аналитических жордановых кривых, а точки ветвления поверхности $\mathcal{R}$ и точки, лежащие над $w = \infty$, являются внутренними для пластины $\mathcal{E}_0$. Тогда функция $\mathcal{P}$ удовлетворяет условиям леммы 3. Отсюда

$$\begin{aligned} \text{cap } C &= I(\mathcal{P}, \mathcal{R} \setminus (\mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1)) \\ &\geq I(\text{Sym } \mathcal{P}, \{W \in \mathcal{R}(T_p) : 0 < \text{Sym } \mathcal{P}(W) < 1\}) \geq \text{cap Sym } C. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Заметим, что выполняются следующие включения:

$$(\text{pr } \mathcal{E}_1)^* \subset \text{pr Sym } \mathcal{E}_1, \quad \{w : (-1)^p w \in (\text{pr } \mathcal{E}_0)^*\} \subset \text{pr Sym } \mathcal{E}_0.$$

Приведем также два полезных в дальнейшем примера симметризации конденсаторов.

ПРИМЕР 1. Предположим, что пластина $\mathcal{E}_0$ конденсатора $C = (\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1)$ из теоремы 1 представляет собой континуум на поверхности $\mathcal{R}$, соединяющий точки W_1 и W_2 , $|\text{pr } W_1| < |\text{pr } W_2|$, а пластина $\mathcal{E}_1$ есть круг достаточно малого радиуса с центром в точке W_3 , отличной от точки ветвления. Тогда пластина $\text{Sym } \mathcal{E}_0$ конденсатора $\text{Sym } C$ содержит отрезок $[\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_2]$, лежащий на листе $\mathcal{D}_p$; $\text{pr } \widetilde{W}_1 = |\text{pr } W_1|$, $\text{pr } \widetilde{W}_2 = |\text{pr } W_2|$ при четном p и $\text{pr } \widetilde{W}_1 = -|\text{pr } W_2|$, $\text{pr } \widetilde{W}_2 = -|\text{pr } W_1|$ при p нечетном. Пластина $\text{Sym } \mathcal{E}_1$ лежит на листе $\mathcal{D}_1$ и является кругом с центром в точке $\widetilde{W}_3$, $\text{pr } \widetilde{W}_3 = |\text{pr } W_3|$, того же радиуса, что и $\mathcal{E}_1$.

ПРИМЕР 2. Предположим, что пластина $\mathcal{E}_0$ конденсатора $C = (\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1)$ из теоремы 1 такая же, как в примере 1, а пластина $\mathcal{E}_1$ есть континуум, соединяющий точки W_3 и W_4 , $|\operatorname{pr} W_3| < |\operatorname{pr} W_4|$. Тогда пластина $\operatorname{Sym} \mathcal{E}_0$ содержит отрезок $[\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_2]$, указанный в примере 1, а пластина $\operatorname{Sym} \mathcal{E}_1$ содержит отрезок $[\widetilde{W}_3, \widetilde{W}_4]$ на листе $\mathcal{D}_1$, причем $\operatorname{pr} \widetilde{W}_3 = |\operatorname{pr} W_3|$ и $\operatorname{pr} \widetilde{W}_4 = |\operatorname{pr} W_4|$ при любом p .

§ 2. Функции, имеющие нуль порядка p в начале координат

Покажем сначала, как с помощью преобразования Sym можно получить известные оценки в классе S_p . Пусть $f \in S_p$ и t – произвольное положительное число. Риманова поверхность $\mathcal{R}(t/f)$ удовлетворяет условию (А). Действительно, предположим, что существует замкнутая жорданова кривая Γ , лежащая над окружностью $\gamma(r)$, $1 \leq r < \infty$, и не покрывающая ее p -кратно. Эта кривая разбивает односвязную поверхность $\mathcal{R}(t/f)$ на две области, одна из которых не имеет на своей границе точек $\partial \mathcal{R}(t/f)$. Это противоречит следующему наблюдению. С одной стороны, точки кривой Γ можно соединить с границей $\partial \mathcal{R}(t/f)$, двигаясь по поверхности $\mathcal{R}(t/f)$ так, что соответствующая проекция смещается вдоль радиального луча к началу координат ($f \neq \infty$ в круге $|z| < 1$). С другой стороны, мы рано или поздно встретим граничную точку поверхности $\mathcal{R}(t/f)$, двигаясь в противоположном направлении так, что соответствующая проекция смещается вдоль радиального луча к бесконечности и затем, если понадобится, вновь к началу координат. Фиксируем произвольную точку z_0 , $0 < |z_0| < 1$, и рассмотрим конденсатор

$$C(s) = \left(\left[z_0, \frac{z_0}{|z_0|} \right] \cup \{z : |z| = 1\}, \{z : |z| \leq s\} \right),$$

где $s > 0$ достаточно мало. Образ этого конденсатора $C_f(s)$ при отображении t/f , рассматриваемый на поверхности $\mathcal{R}(t/f)$, удовлетворяет условиям теоремы 1. Поэтому

$$\operatorname{cap} C_f(s) \geq \operatorname{cap} \operatorname{Sym} C_f(s).$$

Обозначим через $\widetilde{C}(s)$ образ конденсатора $\operatorname{Sym} C_f(s)$ при отображении T_p^{-1} . Первая пластина конденсатора $C_f(s)$ содержит континуум, проекция которого соединяет точки $w = 0$ и $w = t/f(z_0)$. Отсюда следует, что первая пластина конденсатора $\operatorname{Sym} C_f(s)$ содержит отрезок на листе $\mathcal{D}_p$, соединяющий точку над началом координат с точкой над $(-1)^p t/|f(z_0)|$. Поэтому первая пластина конденсатора $\widetilde{C}(s)$ содержит отрезок $[T_p^{-1}((-1)^p t/|f(z_0)|), -\cos(\pi/(2p))]$, $T_p^{-1}(\cdot) \in B_p$. Следовательно, емкость этого конденсатора не меньше емкости конденсатора $C_0(s)$, получающегося из $\widetilde{C}(s)$ заменой первой пластины на указанный отрезок. Учитывая конформную инвариантность емкости, получаем

$$\operatorname{cap} C(s) \geq \operatorname{cap} C_0(s). \quad (4)$$

Неравенство (4) при $s \rightarrow 0$ дает неравенство

$$\frac{|z_0|}{(1 + |z_0|)^2} \leq \frac{(t2^{1-p})^{1/p}}{-\cos \frac{\pi}{2p} - T_p^{-1}\left(\frac{(-1)^p t}{|f(z_0)|}\right)} \quad (5)$$

(см., например, формулы (1.6) и (1.8) в работе [15]).

Устремляя в (5) t к ∞ , после несложных преобразований получаем известное неравенство

$$|f(z)| \geq \frac{|z|^p}{(1 + |z|)^{2p}}, \quad (6)$$

справедливое для любой точки z из круга $|z| < 1$ (см. [6; теорема 5.3]). Отсюда вытекает оценка

$$|a_{p+1}| \leq 2p$$

(см. [1]). Кроме того, из оценки (6) следует, что любая функция f класса S_p p -кратно покрывает круг $|w| < 4^{-p}$. Последнее означает, что если $|w| < 4^{-p}$, то уравнение $f(z) = w$ имеет в точности p корней в круге $|z| < 1$. Это классическое утверждение можно дополнить, допуская наличие полюсов функции f в круге $|z| < 1$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $f(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + \dots$, $p \geq 1$, мероморфна и p -листна в круге $|z| < 1$, и пусть суммарная кратность полюсов этой функции в круге $|z| < 1$ не превосходит $p - 1$. Предположим, что все критические значения функции f , отличные от нуля, лежат вне максимального круга с центром в начале координат, p -кратно покрываемого функцией f . Тогда для радиуса ρ_f этого круга справедливо неравенство

$$\rho_f \geq \frac{1}{2} \sin^{2p} \frac{\pi}{4p}. \quad (7)$$

Равенство в (7) имеет место в случае

$$f(z) = \frac{\alpha^{-p} \frac{1}{2} \sin^{2p} \frac{\pi}{4p}}{T_p\left(\frac{1}{2}\left(\alpha z + \frac{1}{\alpha z}\right) \sin^2 \frac{\pi}{4p} - \cos^2 \frac{\pi}{4p}\right)} = z^p + \dots$$

для любого комплексного числа α , $|\alpha| = 1$. Здесь T_p – полином Чебышёва первого рода.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия теоремы и определения величины ρ_f следует, что для любого $r \geq 1$ над окружностью $\gamma(r)$ лежит замкнутая жорданова кривая поверхности $\mathcal{R}(\rho_f/f)$, p -кратно покрывающая эту окружность. Поэтому к конденсатору

$$C(s) = (\{z : |z| = 1\}, \{z : |z| \leq s\})$$

применимы рассуждения перед теоремой 2, где необходимо положить $z_0 = 1$ и $t = |f(z_0)| = \rho_f$. В результате таких рассуждений получим неравенство, аналогичное неравенству (5):

$$\frac{1}{4} \leq \frac{(\rho_f 2^{1-p})^{1/p}}{1 - \cos \frac{\pi}{2p}}.$$

Отсюда следует неравенство (7). Случай равенства виден из представления полинома Чебышёва в виде суперпозиции элементарных функций. Теорема доказана.

Заметим, что экстремальная функция в теореме 2 p -кратно покрывает каждую точку w -плоскости, за исключением точек луча

$$\left\{ w = \left(\frac{-1}{\alpha} \right)^p \frac{t}{2} \sin^{2p} \frac{\pi}{4p} : 1 \leq t \leq \infty \right\},$$

которые она покрывает $(p-1)$ -кратно. В случае $p = 1$ теорема 2 сводится к известной теореме Кёбе–Бибераха.

Легко проверить, что функция

$$f(z; p, \tau) := \frac{\tau}{T_p \left(-\cos \frac{\pi}{2p} + \frac{(1-z)^2}{2z} (2\tau)^{1/p} \right)}$$

принадлежит классу $S_p(\tau)$. Она p -кратно покрывает круг с центром в начале координат радиуса $|f(-1; p, \tau)|$, который стремится к нулю при τ , стремящемся к нулю, и который стремится к 4^{-p} при $\tau \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 3. Для любой функции f класса $S_p(\tau)$ и для любого z , $|z| < 1$, справедлива оценка

$$|f(z)| \geq |f(-|z|; p, \tau)|.$$

Равенство достигается для функции $f(z; p, \tau)$ в точках z , $-1 < z \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольную точку z_0 , $0 < |z_0| < 1$. Из определения класса $S_p(\tau)$ следует, что к конденсаторам $C(s)$, $C_f(s)$ и т.д. применимы рассуждения перед теоремой 2, где необходимо положить $t = \tau$. Повторяя эти рассуждения, получаем неравенство (5), где $t = \tau$ и значение обратной функции $T_p^{-1}(\cdot)$ выбирается в области B_p . Отсюда следует требуемое неравенство. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $f \in S_p(\tau)$, то радиус ρ_f максимального круга с центром в начале координат, p -кратно покрываемого функцией f , удовлетворяет неравенству

$$\rho_f \geq \frac{\tau}{\left| T_p \left(-\cos \frac{\pi}{2p} - 2(2\tau)^{1/p} \right) \right|}.$$

Равенство достигается в случае $f(z) \equiv f(z; p, \tau)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если функция $f(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + \dots$ принадлежит классу $S_p(\tau)$, то

$$|a_{p+1}| \leq 2p \left[1 + (2\tau)^{-1/p} \cos \frac{\pi}{2p} \right].$$

Равенство имеет место в случае $f(z) \equiv f(z; p, \tau)$.

Доказательство вытекает из неравенства теоремы 3, примененного к точкам z , достаточно близким к началу координат.

ТЕОРЕМА 4. Для функции f класса $S_p(\tau)$ при любом z , $0 < |z| < 1$, справедливо неравенство

$$\tau |z| \frac{1 - |z|}{1 + |z|} \left| \frac{f'(z)}{f^2(z)} \right| \leq \left| T_p' \left(T_p^{-1} \left(\frac{\tau}{|f(z)|} \right) \right) \right| \left(T_p^{-1} \left(\frac{\tau}{|f(z)|} \right) + \cos \frac{\pi}{2p} \right), \quad (8)$$

где значение $T_p^{-1}(\tau/|f(z)|)$ берется из области B_1 . Равенство в (8) имеет место для функции $f(z; p, \tau)$ при любом z , $0 < z < \tilde{z}$, где $\tilde{z}$, $0 < \tilde{z} < 1$, – корень уравнения

$$(1 - z)^2 (2\tau)^{1/p} = 4z \cos \frac{\pi}{2p}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольную точку z_0 , $0 < |z_0| < 1$, и рассмотрим конденсатор

$$C(s) = \left(\left[0, -\frac{z_0}{|z_0|} \right] \cup \{z : |z| = 1\}, \{z : |z - z_0| \leq s\} \right)$$

для достаточно малого $s > 0$. Образ этого конденсатора $C_f(s)$ при отображении τ/f , рассматриваемый на поверхности $\mathcal{R}(\tau/f)$, удовлетворяет условиям теоремы 1. Обозначим через $\tilde{C}(s)$ образ конденсатора $\text{Sym } C_f(s)$ при отображении T_p^{-1} . Заметим, что первая пластина конденсатора $C_f(s)$ содержит континуум, проекция которого соединяет точки $w = 0$ и $w = \infty$, а проекция второй пластины есть “почти круг” с центром в точке $\tau/f(z_0)$ радиуса $|s\tau f'(z_0)f^{-2}(z_0)|$. Отсюда следует, что первая пластина конденсатора $\tilde{C}(s)$ содержит луч $[-\infty, -\cos(\pi/(2p))]$ на вещественной оси, а вторая есть “почти круг” с центром в точке $T_p^{-1}(\tau/|f(z_0)|) \in B_1$ радиуса

$$|s\tau f'(z_0)f^{-2}(z_0)| \left| T_p' \left(T_p^{-1} \left(\frac{\tau}{|f(z_0)|} \right) \right) \right|^{-1}$$

(ср. пример 1). Обозначим через $C_0(s)$ конденсатор, получающийся из конденсатора $\tilde{C}(s)$ заменой первой пластины на луч $[-\infty, -\cos(\pi/(2p))]$. Применение конформной инвариантности емкости, теоремы 1 и монотонности емкости дает

$$\text{cap } C(s) = \text{cap } C_f(s) \geq \text{cap } \text{Sym } C_f(s) = \text{cap } \tilde{C}(s) \geq \text{cap } C_0(s). \quad (10)$$

Для сравнения асимптотик емкостей конденсаторов $C(s)$ и $C_0(s)$ при $s \rightarrow 0$ проще всего заметить, что конденсатор $C(s)$ конформно эквивалентен конденсатору

$$([-\infty, 0], E_1(s)),$$

где $E_1(s)$ – “почти круг” с центром в точке $|z_0|(1 - |z_0|)^{-2}$ радиуса

$$s \frac{1 + |z_0|}{(1 - |z_0|)^3}.$$

Применяя формулы (1.6), (1.8) работы [15], получаем из (10) неравенство (8) для $z = z_0$.

В точках интервала $(0, \tilde{z})$ функция $f(z; p, \tau)$ строго положительная. Поэтому при $z \in (0, \tilde{z})$

$$\begin{aligned} T_p^{-1} \left(\frac{\tau}{|f(z)|} \right) &= T_p^{-1} \left(\frac{\tau}{f(z)} \right) = T_p^{-1} \left(T_p \left(-\cos \frac{\pi}{2p} + \frac{(1-z)^2}{2z} (2\tau)^{1/p} \right) \right) \\ &= -\cos \frac{\pi}{2p} + \frac{(1-z)^2}{2z} (2\tau)^{1/p} \in B_1. \end{aligned}$$

Подставляя это значение $T_p^{-1}(\cdot)$ в неравенство (8) и полагая $f(z) = f(z; p, \tau)$, после элементарных выкладок приходим к равенству в (8). Теорема доказана.

Интегрируя неравенство (8), можно получить некоторую оценку сверху для модуля $|f(z)|$. Приведем здесь самостоятельное доказательство подобного результата.

ТЕОРЕМА 5. *Для функции f класса $S_p(\tau)$ при любом z , $0 < |z| < 1$, справедливо неравенство*

$$T_p^{-1}\left(\frac{\tau}{|f(z)|}\right) \geq \frac{(1-|z|)^2}{2|z|}(2\tau)^{1/p} - \cos \frac{\pi}{2p}, \quad (11)$$

где значение $T_p^{-1}(\tau/|f(z)|)$ берется из области B_1 . В частности, при $0 < |z| < \tilde{z}$, где $\tilde{z}$, $0 < \tilde{z} < 1$, – корень уравнения (9), имеем неравенство

$$|f(z)| \leq f(|z|; p, \tau). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем точку z_0 , $0 < |z_0| < 1$, и рассмотрим конденсатор

$$C(s) = \left(\left[0, -\frac{z_0}{|z_0|} \right] \cup \{z : |z| = 1\}, \left[\frac{sz_0}{|z_0|}, z_0 \right] \right),$$

где $s > 0$ достаточно мало. Пусть конденсаторы $C_f(s)$, $\text{Sym } C_f(s)$ и $\tilde{C}(s)$ определены в доказательстве теоремы 4, но с новой версией конденсатора $C(s)$. Вновь первая пластина конденсатора $\tilde{C}(s)$ содержит луч $[-\infty, -\cos(\pi/(2p))]$. Вторая пластина этого конденсатора содержит отрезок

$$\left[T_p^{-1}\left(\frac{\tau}{|f(z_0)|}\right), T_p^{-1}\left(\frac{\tau}{|f(sz_0/|z_0|)|}\right) \right], \quad T_p^{-1}(\cdot) \in B_1,$$

поскольку вторая пластина конденсатора $C_f(s)$ содержит континуум, проекция которого соединяет точки $\tau/f(z_0)$ и $\tau/f(sz_0/|z_0|)$ (ср. пример 2). Обозначим через $C_0(s)$ конденсатор, получающийся из конденсатора $\tilde{C}(s)$ заменой первой пластины на указанный выше луч, а второй – на указанный отрезок. Как и выше, приходим к неравенству

$$\text{cap } C(s) \geq \text{cap } C_0(s). \quad (13)$$

Заметим, что емкость конденсатора $C(s)$ равна емкости конденсатора

$$[-\infty, 0], [s(1-s)^{-2}, |z_0|(1-|z_0|)^{-2}].$$

Привлекая линейную функцию, из неравенства (13) получаем

$$\frac{T_p^{-1}\left(\frac{\tau}{|f(z_0)|}\right) + \cos \frac{\pi}{2p}}{T_p^{-1}\left(\frac{\tau}{|f(sz_0/|z_0|)|}\right) + \cos \frac{\pi}{2p}} \frac{|z_0|}{(1-|z_0|)^2} \geq \frac{s}{(1-s)^2}.$$

В силу разложения функции f в начале координат имеем

$$T_p^{-1}\left(\frac{\tau}{|f(sz_0/|z_0|)|}\right) = (\tau 2^{1-p})^{1/p} \frac{1}{s} + O(1), \quad s \rightarrow 0.$$

Поэтому последнее неравенство дает неравенство (11) при $z = z_0$. В частности, если $0 < |z| < \tilde{z}$, то правая часть (11) больше либо равна $\cos(\pi/(2p))$. Из монотонности полинома Чебышёва на промежутке $[\cos(\pi/(2p)), +\infty)$ и неравенства (11) получаем неравенство (12). Теорема доказана.

Как и в случае круговой симметризации (см. [6], [13]), преобразование Sym приводит к геометрическим свойствам образа круга $|z| < 1$ при отображении функциями класса $S_p(\tau)$. Вместе с тем многие вопросы остаются открытыми. Например, не известны точные оценки $|f|$ и $|f'|$ во всем круге $|z| < 1$, оценки последующих коэффициентов в классе $S_p(\tau)$, теоремы искажения в зависимости от радиуса максимального круга с центром в начале координат, p -кратно покрываемого функцией f (а не от τ , как в случае класса $S_p(\tau)$). Не известны также точные оценки для функций класса $S_p(\tau)$, у которых суммарная кратность полюсов в круге $|z| < 1$ не превосходит k , $1 \leq k \leq p - 2$.

§ 3. Функции с ограничениями на покрытие концентрических окружностей

Как уже отмечалось во введении, класс функций $D_p(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, является естественным обобщением класса $D_p = D_p(0)$.

ТЕОРЕМА 6. *Если функция f принадлежит классу $D_p(\lambda)$, $\lambda > 0$, то для любого z в круге $|z| < 1$ имеет место точная оценка*

$$(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq 4\lambda \left(1 + T_p^{-1} \left(\left| \frac{f(z)}{\lambda} \right| \right) \right) T_p' \left(T_p^{-1} \left(\left| \frac{f(z)}{\lambda} \right| \right) \right), \quad (14)$$

где значение $T_p^{-1}(|f(z)/\lambda|)$ берется из области B_1 . Равенство в (14) выполняется для функций

$$f(z) = \lambda T_p \left(c \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right) \quad (15)$$

при любом $c \geq 1 + \cos(\pi/(2p))$ и любом z , $0 < z < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим конденсатор

$$C(s) = (\{z : |z| = 1\}, \{z : |z - z_0| \leq s\}),$$

где $s > 0$ достаточно мало, а z_0 — произвольная фиксированная точка круга $|z| < 1$. Образ этого конденсатора $C_f(s)$ на поверхности $\mathcal{R}(f/\lambda)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Обозначим через $\tilde{C}(s)$ образ конденсатора $\text{Sym } C_f(s)$ при отображении T_p^{-1} . Нетрудно убедиться, что первая пластина конденсатора $\tilde{C}(s)$ содержит луч $[-\infty, -1]$, а вторая представляет собой “почти круг” с центром в точке $T_p^{-1}(|f(z_0)/\lambda|) \in B_1$ радиуса

$$s|f'(z_0)| \left[\lambda T_p' \left(T_p^{-1} \left(\left| \frac{f(z_0)}{\lambda} \right| \right) \right) \right]^{-1}.$$

Поэтому емкость конденсатора $\tilde{C}(s)$ не меньше емкости конденсатора $C_0(s)$, получающегося из $\tilde{C}(s)$ заменой его первой пластины на луч $[-\infty, -1]$. Учитывая конформную инвариантность емкости и теорему 1, получаем

$$\text{cap } C(s) \geq \text{cap } C_0(s).$$

Сравнение асимптотик этих емкостей приводит к неравенству (14) при $z = z_0$ (мы вновь воспользовались формулами (1.6), (1.8) работы [15]). Случай равенства проверяется непосредственно подстановкой функции (15) в соотношение (14). Теорема доказана.

Устремляя в неравенстве (14) λ к 0, получаем неравенство В. К. Хеймана

$$(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq 4p|f(z)|,$$

справедливое для любой функции f класса D_p (см. [6; с. 145]).

СЛЕДСТВИЕ 3. Если функция $f(z) = a_0 + a_1z + \dots$ принадлежит классу $D_p(\lambda)$, $\lambda > 0$, то

$$|a_1| \leq 4\lambda \left(1 + T_p^{-1} \left(\left| \frac{a_0}{\lambda} \right| \right) \right) T'_p \left(T_p^{-1} \left(\left| \frac{a_0}{\lambda} \right| \right) \right),$$

где $T_p^{-1}(\cdot) \in B_1$. Равенство выполняется для функций (15).

ТЕОРЕМА 7. Пусть функция f принадлежит $D_p(\lambda)$, $\lambda > 0$, и пусть для данного числа ω , $0 < |\omega| < \lambda$, суммарная кратность нулей функции $f - \omega$ в круге $|z| < 1$ не превосходит p . Тогда для любого z , $|z| < 1$, справедливо неравенство

$$(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq 4\lambda(\alpha - \beta)T'_n(\alpha),$$

где $\alpha = T_p^{-1}(|f(z)/\lambda|) \in B_1$, а $\beta = T_p^{-1}((-1)^p|\omega/\lambda|) \in B_p$. Равенство имеет место для функций

$$f(z) = (-1)^p \frac{\lambda\omega}{|\omega|} T_p \left(c \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 + \beta \right)$$

при любых $c \geq \cos(\pi/(2p)) - \beta$ и z , $0 < z < 1$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы и во многом его повторяет.

Теорема 7 остается справедливой при замене условия $|\omega| < \lambda$ на $|\omega| > \lambda$. Однако в этом случае она дает худшую оценку, чем теорема 6.

ТЕОРЕМА 8. Если функция $f(z) = a_0 + a_1z + \dots$ принадлежит классу $D_p(\lambda)$, $\lambda > 0$, то при любом z , $|z| < 1$, справедливо неравенство

$$|f(z)| \leq \lambda T_p \left(T_p^{-1} \left(\left| \frac{a_0}{\lambda} \right| \right) + \frac{4|z|}{(1-|z|)^2} \left(T_p^{-1} \left(\left| \frac{a_0}{\lambda} \right| \right) + 1 \right) \right), \quad (16)$$

где значение $T_p^{-1}(|a_0/\lambda|)$ берется из области B_1 . Равенство в (16) достигается для функций (15) при любом $c \geq 1 + \cos(\pi/(2p))$ и любом z , $0 < z < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если для данной точки z из круга $|z| < 1$ выполняется $|a_0| \geq |f(z)|$, то

$$T_p^{-1} \left(\left| \frac{a_0}{\lambda} \right| \right) \geq T_p^{-1} \left(\left| \frac{f(z)}{\lambda} \right| \right).$$

Следовательно, значение полинома Чебышёва в правой части (16) больше, чем $|f(z)/\lambda|$, и неравенство (16) имеет место. Предположим теперь, что при фиксированном z_0 , $0 < |z_0| < 1$, выполняется $|a_0| < |f(z_0)|$, и рассмотрим конденсатор

$$C = (\{z : |z| = 1\}, [0, z_0]).$$

Емкость этого конденсатора равна емкости конденсатора

$$\overline{C} = ([-\infty, -1], [0, 4|z_0|(1 - |z_0|)^2]).$$

Введем обозначения:

C_f – образ конденсатора C на поверхности $\mathcal{R}(f/\lambda)$ при отображении функции f/λ ;

$\tilde{C}$ – образ конденсатора $\text{Sym } C_f$ при отображении T_p^{-1} ;

$C_0 = ([-\infty, -1], [T_p^{-1}(|a_0/\lambda|), T_p^{-1}(|f(z_0)/\lambda|)])$, где значения $T_p^{-1}(\cdot)$ берутся из области B_1 .

Конформная инвариантность емкости, теорема 1 и монотонность емкости приводят к неравенствам

$$\text{cap } \overline{C} = \text{cap } C = \text{cap } C_f \geq \text{cap } \text{Sym } C_f = \text{cap } \tilde{C} \geq \text{cap } C_0.$$

В силу монотонности емкости итоговое неравенство равносильно неравенству

$$\frac{T_p^{-1}(|f(z_0)/\lambda|) - T_p^{-1}(|a_0/\lambda|)}{T_p^{-1}(|a_0/\lambda|) + 1} \leq 4 \frac{|z_0|}{(1 - |z_0|)^2}.$$

Отсюда следует (16) при $z = z_0$. Случай равенства проверяется непосредственным вычислением. Теорема доказана.

Устремляя в неравенстве (16) λ к 0, получаем, как и ожидалось, результат В. К. Хеймана

$$|f(z)| \leq |a_0| \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^{2p}$$

(см. [6; с. 145]). Данный подход позволяет также получить оценки модуля $|f|$ снизу, геометрические свойства образа круга $|z| < 1$ при отображении f , аналогичные рассмотренным в [6], и оценки для функций, p -листных в среднем по окружности при ограничениях на радиусы этих окружностей.

Список литературы

- [1] Г. М. Голузин, “О p -листных функциях”, *Матем. сб.*, **8(50)**:2 (1940), 277–284.
- [2] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966; англ. пер.: G. M. Goluzin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Transl. Math. Monogr., **26**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.
- [3] Ю. Е. Аленицын, “О коэффициентах p -листных функций”, *Матем. сб.*, **10(52)**:1–2 (1942), 51–58.
- [4] W. K. Hayman, *Symmetrization in the theory of functions*, Tech. Rep. №. 11, Stanford University, CA, 1950.
- [5] W. K. Hayman, “Some applications of the transfinite diameter to the theory of functions”, *J. Analyse Math.*, **1**:1 (1951), 155–179.
- [6] W. K. Hayman, *Multivalent functions*, Cambridge Tracts in Math., **110**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [7] J. Krzyż, “Distortion theorems for bounded p -valent functions”, *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A*, **12** (1958), 29–38.
- [8] A. W. Goodman, “On the critical points of a multivalent function”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **89**:2 (1958), 295–309.

- [9] С. А. Гельфер, “О p -листных функциях”, *Изв. вузов. Матем.*, 1977, № 5, 15–24; англ. пер.: S. A. Gel’fer, “ p -valent functions”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **21**:5 (1977), 12–20.
- [10] D. C. Spencer, “On finitely mean valent functions”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **47** (1941), 201–211.
- [11] P. R. Garabedian, H. L. Royden, “The one-quarter theorem for mean univalent functions”, *Ann. of Math.* (2), **59**:2 (1954), 316–324.
- [12] J. A. Jenkins, “On circumferentially mean p -valent functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **79**:2 (1955), 423–428.
- [13] Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: J. A. Jenkins, *Univalent functions and conformal mapping*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1958.
- [14] В. А. Шлык, “О теоремах искажения для одного семейства слабо однолистных функций в круге”, *Матем. заметки*, **27**:6 (1980), 927–933; англ. пер.: V. A. Shlyk, “Distortion theorems for a family of weakly univalent functions in the disk”, *Math. Notes*, **27**:6 (1980), 446–449.
- [15] В. Н. Дубинин, “Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного”, *УМН*, **49**:1 (1994), 3–76; англ. пер.: V. N. Dubinin, “Symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable”, *Russian Math. Surveys*, **49**:1 (1994), 1–79.
- [16] В. Н. Дубинин, “Принцип мажорации для p -листных функций”, *Матем. заметки*, **65**:4 (1999), 533–541; англ. пер.: V. N. Dubinin, “A majorization principle for p -valent functions”, *Math. Notes*, **65**:4 (1999), 447–453.
- [17] В. Н. Дубинин, В. Ю. Ким, “Усредняющее преобразование множеств и функций на римановых поверхностях”, *Изв. вузов. Матем.*, 2001, № 5, 21–29; англ. пер.: V. N. Dubinin, V. Yu. Kim, “Averaging transformation of sets and functions on Riemann surfaces”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **45**:5 (2001), 19–27.
- [18] A. W. Goodman, “Open problems on univalent and multivalent functions”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **74**:6 (1968), 1035–1050.
- [19] Q. I. Rahman, G. Schmeisser, *Analytic theory of polynomials*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **26**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2002.
- [20] А. Гурвиц, Р. Курант, *Теория функций*, Наука, М., 1968; пер. с нем.: A. Hurwitz, R. Courant, *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1964.

В. Н. Дубинин (V. N. Dubinin)

Дальневосточный федеральный университет,

г. Владивосток

E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию

19.05.2011