Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Концентрация частот захваченных волн
в задачах о свободно плавающих телах, *Матем. сб.*,
2012, том 203, номер 9, 41–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7894>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:43:11

УДК 517.958+517.984.46+539.327.13

С. А. Назаров

Концентрация частот захваченных волн в задачах о свободно плавающих телах

Показано, что путем подбора формы двух идентичных тел, свободно плавающих в канале с симметричным сечением, можно образовать любое наперед заданное количество линейно независимых захваченных волн (локализованных решений).

Библиография: 27 названий.

Ключевые слова: захваченные поверхностные волны, ловушечные моды, локализованные решения, свободно плавающее тело, концентрация точечного спектра.

§ 1. Введение

1.1. Предмет и методы исследования. В 1950 г. Ф. Йон (см. [1], [2]) сформулировал задачу о волнах на поверхности весоной жидкости, взаимодействующих со свободно плавающим телом. В этом случае гармонические во времени колебания системы “жидкость/тело” моделируются спектральной краевой задачей Стеклова для потенциала скоростей φ и системой шести алгебраических уравнений для столбца $a = (a_1, \dots, a_6)^T$ жестких смещений тела (T – знак транспонирования). Помимо членов с обычным спектральным параметром ω^2 (квадрат частоты колебаний) в задаче появляются “перекрестные” члены, имеющие множитель ω и делающие оператор задачи квадратичным пучком. Последнее обстоятельство значительно усложняет спектральный и численный анализ задачи, и на протяжении последующих пятидесяти лет исследования касались в основном случая закрепленного тела, положение которого фиксируется требованием $a = 0$. Для такой, упрощенной, но физически осмысленной, задачи получено множество разнообразных результатов, подробное описание которых можно найти, например, в обзорах [3], [4], монографиях [5], [6] и других публикациях.

В последнее десятилетие интерес к изучению свободно плавающих тел возродился и появилась серия статей (см. [7]–[9] и др.), посвященных численному решению двумерных задач Йона или теоретическому исследованию гармонических колебаний поплавок. В последнем случае по-прежнему на столбец a налагаются априорные ограничения, обусловленные постановкой задачи: допускаются лишь вертикальные смещения поплавок. Во всех этих публикациях предметом исследования были захваченные волны (другие названия: локализованные решения, ловушечные моды), т.е. решения однородной задачи, обладающие конечной энергией и попадающие в подходящее пространство Соболева.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00348).

Пример волны, локализованной двумя плавающими полупогруженными плоскими телами, указан в работе [10], где было замечено, что в некоторых ситуациях известные (см., например, [5; гл. 4]) поверхностные волны, захваченные двумя закрепленными симметричными телами специально подобранной формы, порождают действующие на тело гидродинамические силы, обладающие нулевыми главным вектором и моментом, а значит, к известной затухающей поверхностной волне φ , вызванной закрепленными телами, достаточно добавить столбец¹ $a = (a_1, a_2, a_3)^\top = 0$ и получить решение полной задачи о свободно плавающем, но оказывающемся неподвижным теле.

В настоящей работе установлено, что два свободно плавающих тела в симметричном трехмерном канале могут породить любое наперед заданное количество линейно независимых захваченных волн. Для достижения цели используется несколько методов и приемов. Во-первых, привлекается следовой оператор (см. [11]), который позволил (см. [12], [13]) свести задачу о взаимодействии волн с фиксированными препятствиями к изучению спектра некоторого положительного самосопряженного оператора и, тем самым, получить путем несложных рассуждений элементарные доказательства известных результатов, а также вывести новые достаточные условия захвата поверхностных волн. Во-вторых, применяется разработанная в статьях [14], [15] схема сведения квадратичного пучка, отвечающего задаче о свободно плавающих телах, к линейному пучку с самосопряженным матричным оператором. В-третьих, метод (см. [16]) постановки искусственных условий Дирихле на плоскости геометрической симметрии позволяет создать положительную точку отсечки непрерывного спектра и образовать непустой интервал, на котором может располагаться дискретный спектр построенного вспомогательного самосопряженного оператора. В-четвертых, на основе асимптотического анализа (см. [17]) эллиптических задач в тонких областях выстраивается набор подходящих пробных функций, локализованных в слое жидкости над погруженной частью тела. В результате всех этих действий появляется возможность применить максимальный принцип (см. [18; теорема 10.2.2]) и установить в конце концов существование захваченных волн в исходной весьма сложной задаче о свободно плавающих телах без сколько-нибудь явного решения последней.

1.2. Постановка задачи о свободно плавающих телах. Пусть $\varpi \subset \mathbb{R}^2$ – область на плоскости, ограниченная отрезком прямой $\gamma = \{x' = (x_2, x_3) : x_3 = 0, |x_2| < l\}$ и липшицевой дугой ς , которая соединяет точки $(\pm l, 0)$ внутри нижней полуплоскости $\mathbb{R}_-^2 = \{x' : x_3 < 0\}$ и является симметричной относительно вертикальной оси $x_3 = z$ (рис. 1, а). Пусть еще $\Pi = R \times \varpi$ – цилиндрический канал с плоскостью симметрии $\{x = (x_1, x') : x_2 = 0\}$, а Θ_+ – тело, т.е. замкнутое ограниченное связное множество положительного объема. Считаем, что $\Theta_+ \subset \mathbb{R}_+^3 = \{x : x_2 > 0\}$ и, в частности, подмножество $\Xi_+ = \{x \in \Theta_+ : x_3 < 0\}$ (погруженная часть тела) располагается внутри половины канала

$$\Pi_+ = \{x \in \Pi : x_2 > 0\}. \quad (1.1)$$

Масштабированием сведем полуширину канала l к единице и сделаем координаты и геометрические параметры безразмерными.

¹В двумерной задаче столбец смещений включает только три компоненты.

Рис. 1. Сечение канала (а) и два идентичных тела (b)

Канал Π заполнен весомой жидкостью (водой), и в нем свободно плавают два тела, а именно тело Θ_+ и его зеркальное отражение

$$\Theta_- = \{x : (x_1, -x_2, x_3) \in \Theta_+\} \quad (1.2)$$

(рис. 1, b). Предполагаемая симметрия позволяет применить уже упомянутый метод (см. [16]) образования искусственной положительной точки отсечки. Обозначим через φ потенциал скоростей в области $\Omega = \Pi \setminus (\Theta_+ \cup \Theta_-)$, липшицевой по предположению, и выпишем уравнения линейной теории поверхностных волн (см., например, [2], [19]), суженные на половину области, но дополненные искусственными условиями Дирихле (см. [16]) на срединной плоскости:

$$-\Delta_x \varphi(x) = 0, \quad x \in \Omega_+, \quad (1.3)$$

$$\partial_z \varphi(x) = \lambda \varphi(x), \quad x \in \Gamma_+^\vartheta = \Gamma_+ \setminus \vartheta_+, \quad (1.4)$$

$$\partial_\nu \varphi(x) = 0, \quad x \in \Sigma_+, \quad (1.5)$$

$$\partial_\nu \varphi(x) = f(a; x), \quad x \in \xi_+, \quad (1.6)$$

$$\varphi(x) = 0, \quad x \in \Upsilon. \quad (1.7)$$

Здесь Δ_x – оператор Лапласа в декартовой системе координат x , множества Ω_+ , Γ_+ и Σ_+ определены по множествам Ω , $\Gamma = \mathbb{R} \times \gamma$ и $\Sigma = \mathbb{R} \times \varsigma$ (соответственно объем жидкости, ее горизонт, включающий сечение тела $\vartheta_+ = \{x \in \Theta_+ : x_3 = 0\}$, а также дно и стенки канала) при помощи аналогичных (1.1) формул, λ – спектральный параметр,

$$\lambda = \frac{\omega^2}{g}. \quad (1.8)$$

При этом ω – частота гармонических колебаний и $g > 0$ – ускорение свободного падения. Кроме того, ∂_ν – производная вдоль внешней нормали, определенная почти всюду на липшицевой поверхности $\partial\Omega$ и совпадающая с $\partial_z = \partial/\partial z$ на свободной поверхности жидкости $\Gamma_+ \setminus \vartheta_+$, а $\xi_+ = \partial\Xi_+ \setminus \vartheta_+ = \partial\Theta_+ \cap \Pi$ – смоченная поверхность тела. Наконец, $\Upsilon = \{x \in \Pi : x_2 = 0\}$ – срединная плоскость канала, на которой и были поставлены искусственные условия Дирихле (см. [16]). Причины возникновения условия (1.6) и уточнение геометрической картины пояснены в п. 1.4.

С телом Θ_+ свяжем столбец жестких смещений $a \in \mathbb{R}^6$. Правая часть $f(a; x)$ краевого условия Неймана (1.6), указывающего скорость жидкости в нормальном направлении к погруженной поверхности ξ_+ тела, вычисляется по формуле (см. [2], [19])

$$f(a; x) = -i\omega \nu(x)^\top D(x - x^\bullet)a, \quad x \in \xi_+. \quad (1.9)$$

Здесь i – мнимая единица², ν – единичный вектор внешней нормали, $\top$ – знак транспонирования, D – линейная матрица-функция размера 3×6 , $x^\bullet$ – центр тяжести тела, а m и ρ – его масса и плотность,

$$D(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_2 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & -x_1 & 0 & -x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & -x_1 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

$$x^\bullet = m^{-1} \int_{\Theta_+} x \rho(x) dx, \quad m = \int_{\Theta_+} \rho(x) dx, \quad \int_{\Theta_+} (x - x^\bullet) \rho(x) dx = 0 \in \mathbb{R}^3. \quad (1.11)$$

Плотность ρ считается неотрицательной нетривиальной измеримой функцией. Аналогичной (1.11) формулой определяется центр плавучести:

$$x^\ominus = (\text{mes}_3 \Xi_+)^{-1} \int_{\Xi_+} x dx, \quad (1.12)$$

где $\text{mes}_3 \Xi_+$ – объем погруженной части тела, т.е. масса вытесненной жидкости, плотность ρ_0 которой приравнена к единице.

Далее ссылаемся на краевое условие (1.6), подразумевая всегда, что в нем правая часть найдена по формуле (1.9).

На столбец $a \in \mathbb{C}^6$ наложены (см. [1], [2], [19]) линейные связи

$$gKa - \omega^2 Ma = i\omega S\varphi, \quad (1.13)$$

описывающие (малые) колебательные – с частотой ω – движения тела и происходящие из закона сохранения линейных и угловых моментов. Введем обозначения:

$$S\varphi = \int_{\xi_+} \varphi(x) D(x - x^\bullet)^\top \nu(x) ds_x \in \mathbb{C}^6, \quad (1.14)$$

ds_x – элемент площади поверхности, K и M – вещественные симметричные матрицы размера 6×6 ,

$$K = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_3 & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & K' \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

$$M = \int_{\Theta_+} D(x - x^\bullet)^\top D(x - x^\bullet) \rho(x) dx,$$

$\mathbb{O}_3$ – нулевая (3×3) -матрица, а K' – (3×3) -блок. Матрица Грама M положительно определена, так как столбцы матрицы-функции (1.10) линейно независимы. Она содержит массу m (средняя часть формулы (1.11)) и тензор моментов инерции тела $I = (I_{jk}^3)_{j,k=1}$,

$$I_{jk} = \int_{\Theta_+} (x_j - x_j^\bullet)(x_k - x_k^\bullet) \rho(x) dx.$$

²Захваченные волны, разумеется, характеризуются вещественными потенциалом скоростей и смещениями тела, однако удобно считать, что φ – вещественная функция и a – чисто мнимый столбец, что согласуется с появлением множителя i в правых частях уравнений (1.9) и (1.13).

Отметим, что столбец (1.14) образован главным вектором и главным моментом гидродинамических сил, приложенных к поверхности $\xi_+ = \partial\Theta_+ \cap \Pi$, а вектор $D(x - x^\bullet)a$ – поступательными (компоненты a_1, a_2 и a_4 вектора a) и вращательными (компоненты a_3 и a_5, a_6) смещениями тела. Расположение столбцов в матрице (1.10) согласовано с упрощенным строением матрицы K из формулы (1.15), нижний правый блок которой принимает вид

$$K' = K^\vartheta + K^\Xi, \quad K^\vartheta = \int_{\vartheta_+} d(y - y^\bullet)^\top d(y - y^\bullet) dy, \quad K^\Xi = \text{diag}\{0, I^\Xi, I^\Xi\}. \quad (1.16)$$

При этом $d(x) = (1, x_2, -x_1)$ – фрагмент матрицы (1.10), $y^\bullet = (x_1^\bullet, x_2^\bullet)$, т.е. $x^\bullet = (y^\bullet, z^\bullet)$, и

$$I^\Xi = \int_{\Xi} (z - z^\bullet) dx. \quad (1.17)$$

Плавающее тело должно находиться в устойчивом положении равновесия и, кроме того, подчиняться закону Архимеда

$$m = \text{mes}_3 \Xi := \int_{\Xi} dx, \quad (1.18)$$

т.е. масса тела совпадает с массой вытесненной воды (напоминаем, что $\rho_0 = 1$). Кроме того, в случае погруженного тела его устойчивость требует выполнения соотношений

$$y^\bullet = y^\ominus, \quad z^\bullet < z^\ominus, \quad (1.19)$$

т.е. центр тяжести $x^\bullet$ должен находиться строго под центром плавучести $x^\ominus = (y^\ominus, z^\ominus)$. Сравнивая формулы (1.11), (1.12) и (1.17), видим, что при ограничении (1.19) величина I^Ξ положительна, т.е. ранг положительной диагональной матрицы K' равен 2, так как $\vartheta = \emptyset$ и $K^\vartheta = \mathbb{O}_3$.

Для полупогруженного тела, т.е. при $\vartheta \neq \emptyset$ и $\Theta \neq \Xi$, матрица Грама K' из формулы (1.16) положительно определена, и устойчивость плавающего тела может сохраниться даже при нарушении последнего требования (1.19). Классические условия устойчивости Эйлера (см. [20]) сформулированы, например, в [2], [19], а также в других публикациях. Избегая повторов, в настоящей статье укажем только, что названные условия обеспечивают положительную определенность матрицы K' и ранг 3 у всей матрицы K – эти свойства и только они будут востребованы далее (см. высказывание 2° в п. 2.3).

1.3. Вспомогательная задача для инертного тела и ее спектр. Следуя [15], предположим (формально – без каких-либо физических соображений), что $K = \mathbb{O}_6$ в алгебраической системе (1.13), а значит, столбец смещений тела приобретает вид

$$a = -i\omega^{-1}M^{-1}S\varphi. \quad (1.20)$$

Теперь в силу равенства (1.9) краевое условие (1.6) превращается в интегро-дифференциальное из-за присутствия оператора (1.14):

$$\partial_\nu \varphi(x) = -\nu(x)^\top D(x - x^\bullet)M^{-1} \int_{\xi_+} \varphi(\mathbf{x}) D(\mathbf{x} - x^\bullet)^\top \nu(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}}, \quad x \in \xi_+. \quad (1.21)$$

Задачу (1.3)–(1.5), (1.21), (1.7) называем вспомогательной, а соотношение (1.21) соотносим с телом, не закрепленным, но обладающим инерцией, хотя и не подверженным воздействию сил плавучести.

Интегро-дифференциальное краевое условие (1.21) включено в симметричную формулу Грина, т.е. вспомогательная задача допускает вариационную постановку (см. п. 3.1) и ее собственные числа исследуются по схеме из [11], [13], реализованной в п. 3.2. Именно, непрерывным спектром служит луч $[\Lambda_+, +\infty)$, где $\Lambda_+ > 0$ – первое (наименьшее) собственное число следующей модельной задачи Стеклова на полусечении $\varpi_+ = \{x' \in \varpi : x_2 > 0\}$ канала:

$$\begin{aligned} -\Delta_{x'} \Phi(x') &= 0, & x' \in \varpi_+, & \quad \partial_z \Phi(x') = \Lambda \Phi(x'), & x' \in \gamma_+, \\ \partial_\nu \Phi(x') &= 0, & x' \in \varsigma_+, & \quad \Phi(x') = 0, & x' \in \nu. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Здесь ν – средняя линия $\{x' \in \varpi : x_2 = 0\}$ фигуры ϖ , а последнее условие Дирихле проистекает из искусственного краевого условия (1.7). Отметим, что тело Θ_+ и соотношение (1.21) на его смоченной поверхности ξ_+ можно интерпретировать как компактное возмущение задачи Стеклова в прямом цилиндре (1.1), которая переходит в модельную задачу при исключении продольной переменной, точнее, после преобразования Фурье и фиксации двойственной переменной $\xi = 0$.

В п. 3.1 понадобится собственная функция Φ_+ задачи (1.22), отвечающая собственному числу Λ_+ . Согласно строгому принципу максимума эту функцию можно взять положительной в $\overline{\varpi_+} \setminus \nu$. Кроме того, она допускает нормировку в пространстве Лебега $L_2(\gamma_+)$ на отрезке $\gamma_+ = \{x' : x_2 \in (0, 1), x_3 = 0\}$.

1.4. Предварительное описание результатов. Пусть у задачи (1.3)–(1.7), (1.13) имеется захваченная волна (φ^+, a^+) , т.е. $a^+ \in \mathbb{C}^6$, а потенциал скоростей φ^+ принадлежит пространству Соболева $\dot{H}^1(\Omega_+; \Upsilon)$ функций, обращающихся в нуль на срединной поверхности Υ канала Π . Благодаря условию Дирихле (1.7) нечетное относительно переменной x_2 продолжение φ функции φ^+ через плоскость $\{x : x_2 = 0\}$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi^+(x) \quad \text{при } x_2 \geq 0, \\ \varphi(x_1, x_2, x_3) &= -\varphi^+(x_1, -x_2, x_3) \quad \text{при } x_2 < 0, \end{aligned} \quad (1.23)$$

сохраняет гармоничность всюду в области Ω , а также краевые условия (1.4) на $\Gamma^\vartheta = \Gamma \setminus \vartheta$ и (1.5) на Σ . Кроме того, определим центр тяжести $x_{(-)}^\bullet = (x_1^\bullet, -x_2^\bullet, x_3^\bullet)$ двойника (1.2) и положим

$$a^- = (a_1^+, -a_2^+, -a_3^+, a_4^+, -a_5^+, a_6^+)^T. \quad (1.24)$$

Приписав жесткое смещение $D(x - x_{(-)}^\bullet)a^-$ телу Θ^+ , получим решение задачи (см. [2]) о двух плавающих телах Θ^+ и Θ^- в канале Π . Соответствующая захваченная волна $(\varphi, a^+, a^-) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{C}^6 \times \mathbb{C}^6$ обладает зеркальной симметрией относительно срединной плоскости канала, т.е. в соответствии со связями (1.24) и (1.23) движения тел согласованы, а течение жидкости антисимметричное.

В § 2 реализована схема (см. [14], [15]) сведения задачи о плавающем теле к изучению спектра некоторого самосопряженного ограниченного оператора $\mathcal{A}$ в специальном образом сооруженном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (уточнение см. в п. 2.3). Это позволило в § 3 при помощи максиминимального принципа

сравнить спектры задач (1.3)–(1.7), (1.13) и (1.3)–(1.5), (1.21), (1.7) (теорема 1). Полученный принцип сравнения следует признать неполным (ср. результаты статьи [15]), так как ему подчиняются только те собственные частоты вспомогательной задачи, которые удовлетворяют дополнительному требованию (3.26), включающему норму q (наибольшее собственное число) симметричной положительной матрицы

$$Q = M^{-1/2} K M^{-1/2}. \quad (1.25)$$

Говоря нестрого, новый – неполный – принцип сравнения учитывает только те собственные числа задачи (1.3)–(1.7), (1.13), которые попадают на сегмент

$$[\delta_{\dagger}^-, \Lambda_{\dagger} - \delta_{\dagger}^+], \quad (1.26)$$

где $\delta_{\dagger}^{\pm}$ – положительные величины, зависящие от искусственной точки отсечки $\Lambda_{\dagger}$ непрерывного спектра в канале Π_+ и от характеристики (1.25) тел $\Theta_{\pm}$. Если $q \rightarrow +0$, то величины $\delta_{\dagger}^{\pm}$ также становятся бесконечно малыми, но никогда не превращаются в нуль.

Рис. 2. Примеры свободно плавающих тел, способных вместе с их двойниками захватить любое заданное наперед количество поверхностных волн

В § 4 для построения примера захвата N волн привлекается идея (см. [11]) применения локального асимптотического анализа (процедуры понижения размерности; ср. книгу [17]) совместно с максиминимальным принципом. Как и в работе [11] (см. также [21]–[23]), предполагается, что над погруженной частью тела Θ_+ имеется тонкий слой жидкости

$$G_0 \times (-h, 0) \subset \mathbb{R}^3 \ni (y, z). \quad (1.27)$$

Здесь G_0 – фиксированная область на плоскости с гладкой границей ∂G_0 и компактным замыканием $\overline{G_0}$, а h – варьируемый малый положительный параметр. Из-за особенностей строения спектров задач, выразившихся в неполноте принципа сравнения, далее вводится дополнительное геометрическое требование, однако также локальное и легко выполнимое (рис. 2): весь приповерхностный слой жидкости

$$\{x \in \Omega_+ : -h < z = x_3 < 0\} \quad (1.28)$$

имеет цилиндрическое строение, т.е. его горизонтальные сечения $\{x \in \Omega_+ : z = \zeta\}$ не зависят от величины заглубления $\zeta \in (-h, 0)$. Кроме того, нужны еще два ограничения: масса тела m , т.е. объем вытесненной жидкости (см. закон Архимеда (1.18)), достаточно велика, но центры тяжести $x^\bullet$ и плавучести $x^\ominus$ расположены на малом расстоянии один от другого. Второе требование всегда можно соблюсти вариацией плотности ρ , т.е. перераспределением масс в теле, а первое также не обременительно, например, потому что согласно одному из результатов работы [11] при неограниченном заглублении канала с вертикальными или сближающимися стенками точка отсечки $\Lambda_\dagger$ остается равномерно ограниченной и отделенной от нуля. В совокупности указанные ограничения позволяют сделать малой норму q матрицы (1.25), а вместе с ней и величины $\delta_\dagger^\pm$ в формуле (1.26).

Окончательный результат о возможности сгущения точечного спектра задачи Ф. Йона (см. [1], [2]) о плавающих телах сформулирован в теореме 3. Доступные обобщения и открытые вопросы обсуждаются в п. 4.5.

§ 2. Операторная формулировка задачи о свободно плавающих телах

2.1. Вариационная постановка. Умножим уравнение (1.3) на пробную функцию ψ , гладкую, имеющую компактный носитель и подчиненную условию Дирихле (1.7). Воспользуемся формулой интегрирования по частям при учете краевых условий (1.4)–(1.6) и равенств (1.8), (1.9). К результату прибавим систему (1.13), умноженную скалярно на пробный столбец $b \in \mathbb{C}^\top$. Поскольку

$$\int_{\xi_+} \overline{\psi(x)} f(a; x) ds_x = -i\omega \left(\int_{\xi_+} \overline{\psi(x)} D(x - x^\bullet)^\top \nu(x) ds_x \right)^\top a = -i\omega (\overline{S\psi})^\top a,$$

приходим к интегральному тождеству (см. [24]), или вариационной формулировке задачи о плавающем теле (см. [14])

$$\begin{aligned} (\nabla_x \varphi, \nabla_x \psi)_{\Omega_+} - i\omega (S\varphi, b)_\mathbb{C} + i\omega (a, S\psi)_\mathbb{C} + g(Ka, b)_\mathbb{C} \\ = \omega^2 (g^{-1}(\varphi, \psi)_{\Gamma_+^\vartheta} + (Ma, b)_\mathbb{C}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

При этом $\nabla_x = \text{grad}$, $(\cdot, \cdot)_{\Omega_+}$ и $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_+}$ – натуральные скалярные произведения в пространствах Лебега $L_2(\Omega_+)$ и $L_2(\Gamma_+)$ соответственно, а $(\cdot, \cdot)_\mathbb{C}$ – скалярное произведение в комплексном пространстве $\mathbb{C}^N$. Отметим, что размерность пространств не указывается в обозначениях скалярных произведений и норм. По замыканию пробный вектор (ψ, b) в тождестве (2.1) можно брать из прямого произведения пространств

$$\mathcal{H} = \dot{H}^1(\Omega_+; \Upsilon) \times \mathbb{C}^6.$$

2.2. Следовой оператор. В пространстве Соболева $\dot{H}^1(\Omega_+; \Upsilon)$ введем скалярное произведение, порождающее интеграл Дирихле,

$$\langle \varphi, \psi \rangle = (\nabla_x \varphi, \nabla_x \psi)_{\Omega_+} \quad (2.2)$$

и аналогично [11] – следовой оператор $\mathcal{T}$, заданный тождеством

$$\langle \mathcal{T}\varphi, \psi \rangle = (\varphi, \psi)_{\Gamma_+^\vartheta}, \quad \varphi, \psi \in \dot{H}^1(\Omega_+; \Upsilon). \quad (2.3)$$

Следовой оператор $\mathcal{T}$ положительный, непрерывный и симметрический, а значит самосопряженный. Необходимые свойства полуторалинейной формы (2.2) и оператора (2.3) обеспечены неравенствами Фридрихса и Стеклова, двумерным

$$\|\Phi_+; L_2(\varpi_+)\|^2 + \|\Phi_+; L_2(\gamma_+)\|^2 \leq C_\varpi \|\nabla_{x'} \Phi_+; L_2(\varpi_+)\|^2, \quad \Phi_+ \in \dot{H}^1(\varpi; v), \quad (2.4)$$

проинтегрированным дополнительно по $x_1 \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$, и трехмерным

$$\|\varphi_+; L_2(\Omega_+^R)\|^2 + \|\varphi_+; L_2(\Gamma_+^R)\|^2 \leq c_R \|\nabla_x \varphi_+; L_2(\Omega_+^R)\|^2, \quad \varphi_+ \in \dot{H}^1(\Omega_+^R; \Upsilon^R). \quad (2.5)$$

Здесь $\Omega_+^R = \{x \in \Omega_+ : |x_1| < R\}$ – часть области Ω_+ , примыкающая к погруженной поверхности тела Ξ_+ , а множества Γ_+^R и Υ^R определены аналогичными равенствами по прежним множествам Γ_+ и Υ . Отметим, что соотношения (2.4) и (2.5) справедливы именно благодаря искусственному условию Дирихле (1.7).

Спектр непрерывного самосопряженного положительного оператора $\mathcal{T}$ лежит на интервале $[0, t]$, где t – норма оператора. При этом $\tau = 0$ – бесконечнократное собственное число с собственным подпространством $\dot{H}^1(\Omega_+; \Upsilon \cup \Gamma_+^\vartheta)$, а непрерывный спектр занимает полуинтервал $(0, \Lambda_+^{-1}]$, где Λ_+ – первое собственное число модельной задачи (1.22) на полусечении ϖ_+ . Таким образом, $[0, \Lambda_+^{-1}]$ – существенный спектр.

Сопряженный S^* для оператора

$$S: \dot{H}^1(\Omega_+; \Upsilon) \rightarrow \mathbb{C}^6, \quad (2.6)$$

определенного формулой (1.14), задан соотношением

$$\langle S^* a, \psi \rangle = (a, S\psi)_{\mathbb{C}}, \quad a \in \mathbb{C}^6, \quad \psi \in \dot{H}^1(\Omega_+; \Upsilon). \quad (2.7)$$

Оба оператора компактные, так как пространство $\mathbb{C}^6$ конечномерно и вложение $\dot{H}^1(\Omega_+; \Upsilon) \subset L_2(\xi_+)$ компактно.

В итоге интегральное тождество (2.1), т.е. задача Ф. Йона о свободно плавающих телах, переписывается как система уравнений

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & gK \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ a \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} 0 & iS^* \\ -iS & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ a \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} g^{-1}\mathcal{T} & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ a \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Здесь $\mathbb{I}$ – тождественное отображение в каком-либо пространстве.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если формально положить $S = 0$, то система (2.8) распадется на два независимых уравнения со спектральным параметром (1.8)

$$\varphi = \lambda \mathcal{T} \varphi, \quad Ka = \lambda Ma. \quad (2.9)$$

Приведенная выше информация (см. [11], [13]) о спектре следового оператора $\mathcal{T}$ показывает, что непрерывная компонента λ -спектра задачи (2.9) совпадает с лучом $[\Lambda_+, +\infty)$, а значит, в силу связи (1.8) непрерывная компонента ω -спектра задачи занимает множество

$$(-\infty, -\omega_+] \cup [\omega_+, +\infty), \quad (2.10)$$

где

$$\omega_{\dagger} = \sqrt{\Lambda_{\dagger} g}. \quad (2.11)$$

Поскольку “возмущение” в абстрактном уравнении (2.8), т.е. множитель при частоте ω из левой части, образовано компактными операторами (2.6) и (2.7), непрерывный ω -спектр (2.10) сохраняется и у всей задачи (2.8) (см., например, [25; гл. 1]).

2.3. Сведение к линейному пучку. Спектральная задача (2.8) характерна квадратичным вхождением параметра ω , т.е. левая часть системы порождает квадратичный пучок (полиномиальное спектральное семейство). Обозначив через $\mathcal{T}^{1/2}$ положительный квадратный корень (см. [18; § 10.3]) из положительного самосопряженного оператора $\mathcal{T}$, введем функцию и столбец

$$u = \omega g^{-1/2} \mathcal{T}^{1/2} \varphi, \quad \alpha = \omega M a \quad (2.12)$$

и перепишем задачу (2.8) как систему четырех уравнений:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & gK & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ u \\ a \\ \alpha \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 & g^{-1/2} \mathcal{T}^{1/2} & -iS^* & 0 \\ g^{-1/2} \mathcal{T}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ iS & 0 & 0 & \mathbb{I} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ u \\ a \\ \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

При этом $N = M^{-1}$ – обратная матрица для матрицы M из списка (1.15), симметричная и положительно определенная.

Спектральная задача (2.13) порождает линейный пучок. Укажем некоторые его свойства, уже отмеченные в статье [14] и легко проверяемые.

1°. Если $(\varphi, u, a, \alpha)^{\top}$ – собственный вектор системы (2.13), отвечающий собственному числу ω , то $-\omega$ есть собственное число с собственным вектором $(\varphi, -u, -a, \alpha)^{\top}$. Иными словами, спектр линейного пучка обладает центральной симметрией.

2°. С собственным числом $\omega = 0$ пучка ассоциировано собственное подпространство

$$\{(\varphi, u, a, \alpha)^{\top} : \varphi = u = 0 \in \dot{H}^1(\Omega_+; \Upsilon), \alpha = 0 \in \mathbb{C}^6, a_{(1)} \in \mathbb{C}^{6-r}, a_{(2)} = 0 \in \mathbb{C}^r\}$$

с размерностью $6 - r$, где r – ранг матрицы K из формулы (1.15). При этом $r = 3$ и $a_{(1)} = (a_1, a_2, a_3)^{\top}$, $a_{(2)} = (a_4, a_5, a_6)^{\top}$ в случае полупогруженного тела, но $r = 4$ и $a_{(1)} = (a_1, a_2, a_3, a_4)^{\top}$, $a_{(2)} = (a_5, a_6)^{\top}$ в случае полностью погруженного тела.

3°. Если $\omega \neq 0$ и (φ, u, a, α) – соответствующий собственный вектор, то

$$\alpha_{(1)} = -iS_{(1)}\varphi. \quad (2.14)$$

2.4. Сведение к самосопряженному оператору. В соответствии с введенными в п. 2° обозначениями перепишем последнюю строку системы (2.13) в виде

$$N_{(11)}\alpha_{(1)} + N_{(12)}\alpha_{(2)} = \omega a_{(1)}, \quad (2.15)$$

$$N_{(21)}\alpha_{(1)} + N_{(22)}\alpha_{(2)} = \omega a_{(2)}. \quad (2.16)$$

Здесь $N_{(11)}$ и $N_{(22)}$ – блоки матрицы N с размерами $(6 - r) \times (6 - r)$ и $r \times r$ соответственно, а $N_{(12)} = N_{(21)}^\top - ((6 - r) \times r)$ -блок.

Применив к равенству (2.15) оператор $iS_{(1)}^*$ и воспользовавшись соотношением (2.14), получим формулу

$$i\omega S_{(1)}^* a_{(1)} = S_{(1)}^* N_{(11)} S_{(1)} \varphi + iS_{(1)}^* N_{(12)} \alpha_{(2)},$$

позволяющую преобразовать первую строку системы (2.13) и удалить из нее “ненужное” слагаемое $i\omega S_{(1)}^* a_{(1)}$. То же соотношение (2.14) переделывает третью строку в равенство

$$gK_{(22)} a_{(2)} = \omega(-iS_{(2)} \varphi + \alpha_{(2)}),$$

а строку (2.16) – в равенство

$$iN_{(21)} S_{(1)} \varphi + N_{(22)} \alpha_{(2)} = \omega a_{(2)},$$

заменяющее четвертую строку системы (2.13).

В итоге спектральная задача (2.13) принимает вид

$$\mathcal{B}\mathcal{X} = \omega \mathcal{D}\mathcal{X}, \quad (2.17)$$

где $\mathcal{X} = (\varphi, u, a_{(2)}, \alpha_{(2)})^\top \in \mathcal{H}^{(2)} := \dot{H}^1(\Omega_+; \Upsilon)^2 \times (\mathbb{C}^r)^2$, а матричные операторы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{D}$ заданы соответственно формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \begin{pmatrix} \mathbb{I} + S_{(1)}^* N_{(11)} S_{(1)} & 0 & 0 & -iS_{(1)}^* N_{(12)} \\ 0 & \mathbb{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & gK_{(22)} & 0 \\ iN_{(21)} S_{(1)} & 0 & 0 & N_{(22)} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{D} &= \begin{pmatrix} 0 & g^{-1/2} \mathcal{T}^{1/2} & -iS_{(2)}^* & 0 \\ g^{-1/2} \mathcal{T}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ iS_{(2)} & 0 & 0 & \mathbb{I} \\ 0 & 0 & \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Нетрудно убедиться в том, что оба оператора (2.18) самосопряженные. Кроме того, $\mathcal{B}$ положительно определен, так как

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}, \mathcal{X}, \mathcal{X})_{\mathcal{H}} &= \langle \varphi + S_{(1)}^* N_{(11)} S_{(1)} \varphi, \varphi \rangle - i \langle S_{(1)}^* N_{(12)} \alpha_{(2)}, \varphi \rangle + \langle u, u \rangle \\ &\quad + g(K_{(22)} a_{(2)}, a_{(2)})_{\mathbb{C}} + i(N_{(21)} S_{(1)} \varphi, \alpha_{(2)})_{\mathbb{C}} + (N_{(22)} \alpha_{(2)}, \alpha_{(2)})_{\mathbb{C}} \\ &= \langle \varphi, \varphi \rangle + \langle u, u \rangle + g(K_{(22)} a_{(2)}, a_{(2)})_{\mathbb{C}} \\ &\quad + (N_{(11)} S_{(1)} \varphi, S_{(1)} \varphi)_{\mathbb{C}} - i(N_{(12)} \alpha_{(2)}, S_{(1)} \varphi)_{\mathbb{C}} + (N_{(22)} \alpha_{(2)}, \alpha_{(2)})_{\mathbb{C}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Теперь, положив

$$\mathcal{Y} = \mathcal{B}^{1/2} \mathcal{X}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{B}^{-1/2} \mathcal{D} \mathcal{B}^{-1/2}, \quad \beta = \frac{1}{\omega}, \quad (2.20)$$

преобразуем спектральную задачу (2.17) для линейного пучка $\omega \mapsto \mathcal{B} - \omega \mathcal{D}$ в абстрактное уравнение

$$\mathcal{A}\mathcal{Y} = \beta \mathcal{Y} \quad (2.21)$$

с самосопряженным ограниченным оператором $\mathcal{A}$. Именно такое уравнение и является целью процедуры (см. [14], [15]) сведения вариационной задачи (2.1) о свободно плавающих телах (краевой задачи (1.3)–(1.7), (1.9), (1.13) в дифференциальной форме).

Отметим, наконец, что последнее соотношение в списке (2.20) и формулы (2.10), (2.11) показывают, что существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ занимает сегмент

$$[-\omega_{\dagger}^{-1}, \omega_{\dagger}^{-1}]. \quad (2.22)$$

§ 3. Вспомогательная задача и принцип сравнения

3.1. Вариационная и операторные постановки вспомогательной задачи. Как обычно (см. [24]), умножим уравнение (1.3) на гладкую пробную функцию ψ с компактным носителем, обращающуюся в нуль на поверхности Υ . Применим формулу интегрирования по частям. При учете краевых условий (1.4), (1.5), (1.21) и соотношения

$$\int_{\xi_+} \overline{\psi(x)} \nu(x)^\top D(x - x^\bullet) M^{-1} \int_{\xi_+} D(\mathbf{x} - x^\bullet)^\top \nu(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}} ds_x = (M^{-1} S \varphi, S \psi)_{\mathbb{C}}$$

приходим к интегральному тождеству

$$(\nabla_x \varphi, \nabla_x \psi)_{\Omega_+} + (M^{-1} S \varphi, S \psi)_{\mathbb{C}} = \lambda(\varphi, \psi)_{\Gamma_+}, \quad \psi \in \mathring{H}^1(\Omega_+; \Upsilon). \quad (3.1)$$

Оно отвечает сформулированной в п. 1.3 вспомогательной задаче (1.3)–(1.5), (1.21), (1.7) для инертного тела. Отметим, что по замыканию пробные функции можно брать из пространства Соболева $\mathring{H}^1(\Omega_+; \Upsilon)$, в котором, следуя [11], [15], введем скалярное произведение

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\xi} = (\nabla_x \varphi, \nabla_x \psi)_{\Omega_+} + (M^{-1} S \varphi, S \psi)_{\mathbb{C}}. \quad (3.2)$$

Еще определим оператор $\mathcal{T}_{\xi}$, положительный, симметрический и ограниченный, а значит самосопряженный:

$$\langle \mathcal{T}_{\xi} \varphi, \psi \rangle_{\xi} = (\varphi, \psi)_{\Gamma_+^{\vartheta}}, \quad \varphi, \psi \in \mathring{H}^1(\Omega_+; \Upsilon) \quad (3.3)$$

(ср. формулу (2.3)). В результате вариационная задача (3.1) принимает вид абстрактного уравнения

$$\mathcal{T}_{\xi} \varphi = \mu \varphi \quad \text{в} \quad \mathcal{H}_{\xi} = \mathring{H}^1(\Omega_+; \Upsilon)$$

с новым спектральным параметром

$$\mu = \frac{1}{\lambda}. \quad (3.4)$$

Спектр оператора лежит на сегменте $[0, t_{\xi}]$, где t_{ξ} – норма оператора $\mathcal{T}_{\xi}$. Согласно сведениям из п. 1.3 и связи (3.4) спектральных параметров непрерывный спектр оператора представляет собой полуинтервал $(0, \Lambda_{\dagger}^{-1}]$, а точка $\mu = 0$ является собственным числом бесконечной кратности с собственным

подпространством $\dot{H}^1(\Omega_+; \Upsilon \cup \Gamma_+^\vartheta)$. Таким образом, существенный спектр занимает сегмент $[0, \Lambda_+^{-1}]$ и в случае

$$\begin{aligned} \Lambda_+^{-1} < t_\xi &= \sup_{\varphi \in \dot{H}^1(\Omega_+; \Gamma_+)} \frac{\langle T_\xi \varphi, \varphi \rangle_\xi}{\langle \varphi, \varphi \rangle_\xi} \\ &= \sup_{\varphi \in \dot{H}^1(\Omega_+; \Gamma_+)} \frac{\|\varphi; L_2(\Gamma_+^\vartheta)\|^2}{\|\nabla_x \varphi; L_2(\Omega_+)\|^2 + \|M^{-1/2} S \varphi; \mathbb{C}\|^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

(первое равенство в цепочке есть не что иное, как определение нормы) дискретный спектр заведомо не пуст, а $\mu_1 = t_\xi$ – наибольшее собственное число. Это простое наблюдение позволяет по схеме из [13] проверить следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если справедливо неравенство*

$$\|\nabla_x \Phi_\dagger; L_2(\Theta_+)\|^2 - (M^{-1} S \Phi_\dagger, S \Phi_\dagger)_\mathbb{C} > \Lambda_+ \|\Phi_\dagger; L_2(\vartheta)\|^2 \quad (3.6)$$

или соотношения

$$\begin{aligned} \|\nabla_x \Phi_\dagger; L_2(\Theta_+)\|^2 - (M^{-1} S \Phi_\dagger, S \Phi_\dagger)_\mathbb{C} &= \Lambda_+ \|\Phi_\dagger; L_2(\vartheta)\|^2, \\ \partial_\nu \Phi_\dagger &\neq 0 \quad \text{на } \xi_+, \end{aligned} \quad (3.7)$$

то верна формула (3.5) и дискретный спектр оператора $\mathcal{T}_\xi$ не пуст, а значит, задача (3.1) (или задача (1.3)–(1.5), (1.21), (1.7) в дифференциальной форме) имеет собственное число $\lambda_1 = t_\xi^{-1} \in (0, \Lambda_+)$, порождающее захваченную волну φ_1 , принадлежащую пространству $\dot{H}^1(\Omega_+; \Upsilon)$ и потому экспоненциально затухающую на бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Норма t_ξ оператора $\mathcal{T}_\xi$ находится согласно средней части формулы (3.5). Подставим в фигурирующую там дробь Рэлея пробную функцию

$$U^\delta(x) = e^{-\delta|x_1|} \Phi_\dagger(x'), \quad (3.8)$$

попадающую в пространство $\dot{H}^1(\Omega_+; \Upsilon)$ благодаря экспоненциально затухающему при $x_1 \rightarrow \pm\infty$ множителю: показатель $\delta > 0$ можно взять сколь угодно малым. Вычислив числитель и знаменатель дроби Рэлея при помощи определений (3.2) и (3.3), находим

$$\begin{aligned} \langle T_\xi U^\delta, U^\delta \rangle_\xi &= (U^\delta, U^\delta)_{\Gamma_+^\vartheta} = (U^\delta, U^\delta)_{\Gamma_+} - (U^\delta, U^\delta)_{\vartheta_+} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\delta|x_1|} dx_1 \int_0^1 |\Phi_\dagger(x_2, 0)|^2 dx_2 - \int_{\vartheta_+} |\Phi_\dagger(x_2, 0)|^2 dx' + O(\delta), \\ \langle U^\delta, U^\delta \rangle_\xi &= (\nabla_x U^\delta, \nabla_x U^\delta)_{\Omega_+} + (M^{-1} S U^\delta, S U^\delta)_\mathbb{C} \\ &= (\nabla_x U^\delta, U^\delta)_{\Pi_+} - (\nabla_x \varphi_+^\varepsilon, \nabla_x \varphi_+^\varepsilon)_{\Theta_+} + (M^{-1} S U^\delta, S U^\delta)_\mathbb{C} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\delta|x_1|} dx_1 \int_{\varpi_+} (|\nabla'_x \Phi_\dagger(x')|^2 + \delta^2 |\Phi_\dagger^\dagger(x')|^2) dx' \\ &\quad - \int_{\Theta_+} |\nabla_{x'} \Phi_\dagger(x')|^2 dx + (M^{-1} S \Phi_\dagger, S \Phi_\dagger)_\mathbb{C} + O(\delta). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь применена формула Тейлора $e^{-2\delta|x_1|} = 1 + O(\delta)$ на компактных множествах ϑ_+ и Θ_+ , а также разбиения цилиндра $\Pi_+ = \mathbb{R} \times \varpi_+$ и поверхности $\Gamma_+ = \mathbb{R} \times \gamma_+$ на пары дизъюнктивных множеств Ω_+ , Θ_+ и Γ_+^ϑ , ϑ_+ соответственно. Заметив, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\delta|x_1|} dx_1 = \frac{1}{\delta}, \quad \int_{\varpi_+} |\nabla_{x'} \Phi_\dagger(x')|^2 dx' = \Lambda_\dagger \int_{\gamma_+} |\Phi_\dagger(x_2, 0)|^2 dx_2,$$

и приняв условие нормировки³ $\|\Phi_\dagger; L_2(\gamma_+)\| = 1$, преобразуем дробь Рэлея следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\langle T\xi U^\delta, U^\delta \rangle_\xi}{\langle U^\delta, U^\delta \rangle_\xi} \\ & \geq \frac{1/\delta - \|\Phi_\dagger; L_2(\vartheta_+)\|^2 - c_1\delta}{\Lambda^\dagger/\delta - \|\nabla_{x'} \Phi_\dagger; L_2(\Pi_+)\|^2 - \|\nabla_{x'} \Phi_\dagger; L_2(\Theta_+)\|^2 + (M^{-1}S\Phi_\dagger, S\Phi_\dagger)_\mathbb{C} + c_2\varepsilon} \\ & \geq \frac{1}{\Lambda^\dagger} \left(1 - \delta \|\Phi_\dagger; L_2(\vartheta_+)\|^2 + \frac{\delta}{\Lambda^\dagger} (\|\nabla_{x'} \Phi_\dagger; L_2(\Theta_+)\|^2 + (M^{-1}S\Phi_\dagger, S\Phi_\dagger)_\mathbb{C}) - C\delta^2 \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

В результате обнаруживаем, что при условии (3.6) правая часть (3.10) равна $(\Lambda^\dagger)^{-1}(1 + \delta C_1 - \delta^2 C_2)$, где C_1 – положительное число. Таким образом, при достаточно малом $\delta > 0$ дробь из левой части (3.10), а значит, и норма t_ξ строго больше точки отсечки $(\Lambda_\dagger)^{-1}$. Поскольку норма оператора всегда принадлежит его спектру, число t_ξ должно быть собственным числом, как и каждая точка спектра выше верхней грани непрерывного спектра. Первая часть предложения доказана.

При выполнении первого равенства (3.7) использованные выше рассуждения не приводят к успеху. Поэтому, следуя работе [26], изменим пробную функцию и положим

$$V^\delta(x) = U^\delta(x) + \sqrt{\delta} v(x), \quad (3.11)$$

где первое слагаемое U^δ по-прежнему имеет вид (3.8), а второе слагаемое v – произвольная гладкая в $\overline{\Pi_+}$ функция с компактным носителем, обращающаяся в нуль при $x_2 = 0$. Соотношения (3.9) сохраняются и для функции (3.11), если в правые части формул для

$$\langle \mathcal{T}_\xi V^\delta, V^\delta \rangle_\xi = (V^\delta, V^\delta)_{\Gamma_+}, \quad \langle V^\delta, V^\delta \rangle_\xi = (\nabla_x V^\delta, \nabla_x V^\delta)_{\Omega_+}$$

добавить выражения

$$2\sqrt{\delta} \int_{\Gamma_+} v(y, 0) \Phi_\dagger(x_2, 0) dy, \quad 2\sqrt{\delta} \int_{\Omega_+} (\nabla_{x'} v(x))^\top \nabla_{x'} \Phi_\dagger(x') dx \quad (3.12)$$

соответственно. Отметим, что другие члены, порожденные слагаемым $\sqrt{\delta} v(x)$, присоединены к остаткам $O(\delta)$. Интегралы (3.12) сходятся, потому что носитель $\text{supp } v$ функции v – компактное множество. В результате незначительно

³Оно нужно лишь для сокращения обозначений и в формулировке предложения не используется.

изменяем преобразования (3.10) и находим

$$\begin{aligned}
 \frac{\langle \mathcal{T}_\xi V^\delta, V^\delta \rangle_\xi}{\langle V^\delta, V^\delta \rangle_\xi} &\geq \frac{1}{\Lambda_\dagger} \left(1 + 2\delta^{3/2} \left(\int_{\Gamma_+} v(y, 0) \Phi_\dagger(x_2, 0) dy \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{\Lambda_\dagger} \int_{\Omega_+} (\nabla_{x'} v)^\top \nabla_{x'} \Phi_\dagger(x') dx \right) + O(\delta^2) \right) \\
 &= \frac{1}{\Lambda_\dagger} \left(1 + \frac{2\delta^{3/2}}{\Lambda_\dagger} \left(\Lambda_\dagger \int_{\Gamma_+} v(y, 0) \Phi_\dagger(x_2, 0) dy \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \int_{\Omega_+} (\nabla_{x'} v(x))^\top \nabla_{x'} \Phi_\dagger(x') dx \right) + O(\delta^2) \right). \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

При помощи формулы Грина преобразуем множитель при $2\delta^{3/2}\Lambda_\dagger^{-1}$ из правой части (3.13) к виду

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega_+} v(x) \Delta_{x'} \Phi_\dagger(x') dx - \int_{\Gamma_+} v(y, 0) (\partial_z \Phi_\dagger(x_2, 0) - \Lambda_\dagger \Phi_\dagger(x_2, 0)) dy \\
 & - \int_{\xi_+} v(x) \partial_\nu \Phi_\dagger(x') ds_x. \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

Здесь ξ_+ – смоченная поверхность тела Θ_+ (см. краевое условие (1.6)). Два первых подынтегральных выражения в формуле (3.14) обращаются в нуль, так как пара $\{\Lambda_\dagger, \Phi_\dagger\}$ – решение модельной спектральной задачи Стеклова (1.22). В силу последнего условия (3.7) находим точку $x^0 \in \xi_+$, в которой $\partial_\nu \Phi_\dagger(x^0) \neq 0$. Теперь третьему интегралу (3.14) можно придать любой знак путем подбора пробной функции v с малым носителем. В итоге получаем, что при достаточно малом $\delta > 0$ дробь из левой части (3.13) расположена строго выше точки отсечки $\Lambda_\dagger^{-1}$, а значит, приходим к неравенству $t_\xi > \Lambda_\dagger^{-1}$ и тем самым заканчиваем проверку второй части предложения.

В предложении фигурируют первое собственное число $\Lambda_\dagger > 0$ модельной задачи (1.22) и отвечающая ему собственная функция $\Phi_\dagger$ двух переменных $x' = (x_2, x_3) \in \varpi_+$. Последнее условие в списке (3.7) означает, что нормальная производная

$$\partial_\nu \Phi_\dagger(x) = \nu_2(x) \frac{\partial \Phi_\dagger}{\partial x_2}(x') + \nu_3(x) \frac{\partial \Phi_\dagger}{\partial x_3}(x'),$$

определенная почти всюду на липшицевой поверхности ξ_+ , не обращается в нуль тождественно на области своего определения. Равенство $\partial_\nu \Phi_\dagger \equiv 0$ невозможно в случае тела Θ_+ с погруженной частью Ξ_+ положительного объема. Поэтому в отличие от статей [12], [13], где в качестве препятствий допускались экраны (части двумерных поверхностей), предложение не изменит своего содержания, если убрать из него группу формул (3.7), но одновременно вместо знака $>$ написать в условии (3.6) знак $\geq$.

3.2. Принцип сравнения. Пусть оператор $\mathcal{T}_\xi$ имеет собственные числа, подчиненные условию

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_J \in (\Lambda_\dagger^{-1}, +\infty). \tag{3.15}$$

Собственные функции $\varphi^1, \dots, \varphi^J \in \mathring{H}^1(\Omega_+; \Upsilon)$, отвечающие точкам (3.15) дискретного спектра оператора, можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$\langle \mathcal{T}_\xi \varphi^j, \varphi^k \rangle_\xi = g \omega_j^{-2} \delta_{j,k}, \quad j, k = 1, \dots, J, \quad (3.16)$$

где $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера, а левая часть в силу соотношения (3.3) равна $(\varphi^j, \varphi^k)_{\Gamma_+^\vartheta}$.

В соответствии с формулами (1.20) и (1.8), (3.4) положим

$$a^j = -i \omega_j^{-1} M^{-1} S \varphi^j, \quad \omega_j = g^{1/2} \mu_j^{-1/2}. \quad (3.17)$$

Кроме того, согласно (2.12) определим недостающие компоненты

$$u^j = \omega_j g^{-1/2} \mathcal{T}^{1/2} \varphi^j, \quad \alpha^j = \omega_j M a^j = -i S \varphi^j \quad (3.18)$$

столбцов $(\varphi^j, u^j, a^j, \alpha^j)^\top$, а затем, как и в п. 2.4, сократим их следующим образом:

$$\mathcal{X}^j = (\varphi^j, u^j, a_{(2)}^j, \alpha_{(2)}^j)^\top, \quad j = 1, \dots, J. \quad (3.19)$$

В силу условий (3.15) первые компоненты из (3.19) линейно независимы, а значит, линейную независимость сохраняют сами столбцы $\mathcal{X}^1, \dots, \mathcal{X}^J$, а также столбцы

$$\mathcal{Y}^j = \mathcal{B}^{1/2} \mathcal{X}^j, \quad j = 1, \dots, J, \quad (3.20)$$

поскольку $\mathcal{B}^{-1/2}$ – обратимый непрерывный оператор в пространстве $\mathcal{H}^{(2)}$.

Применим к оператору $-\mathcal{A}$ (со знаком минус) из абстрактного спектрального уравнения (2.21) максиминимальный принцип (см., например, [18; теорема 10.2.2])

$$-\beta_J = \max_{\mathcal{E}_J} \inf_{\mathcal{Y} \in \mathcal{E}_J \setminus \{0\}} \frac{\langle -\mathcal{A} \mathcal{Y}, \mathcal{Y} \rangle_{\mathcal{H}}}{\langle \mathcal{Y}, \mathcal{Y} \rangle_{\mathcal{H}}}. \quad (3.21)$$

При этом $\mathcal{E}_J$ – произвольное подпространство в $\mathcal{H}^{(2)}$ с коразмерностью $J - 1$, т.е. $\dim(\mathcal{H}^{(2)} \ominus \mathcal{E}_J) = J - 1$, и, в частности, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{H}^{(2)}$. Благодаря упомянутой линейной независимости векторов (3.20) каждое подпространство $\mathcal{E}_J$ содержит их нетривиальную комбинацию

$$\mathcal{Y} = \sum_{j=1}^J b_j \mathcal{Y}^j, \quad \sum_{j=1}^J |b_j|^2 = 1. \quad (3.22)$$

Разумеется, коэффициенты b_j зависят от выбранного подпространства $\mathcal{E}_J$, но это обстоятельство не отражено в обозначениях.

Теорема 10.2.2 из [18] утверждает, что в том случае, когда правая часть формулы (3.21) строго меньше $-\omega_\dagger^{-1}$ (нижняя грань непрерывного спектра оператора $-\mathcal{A}$; ср. комментарий к формуле (2.22)), оператор $-\mathcal{A}$ имеет не менее J точек дискретного спектра на луче $(-\infty, -\omega_\dagger^{-1}]$. Следовательно, в предположении, что полная кратность дискретного спектра на указанном луче строго меньше J , получаем, что для всех элементов какого-то подпространства $\mathcal{E}_J$ справедливо соотношение

$$(\mathcal{B} \mathcal{X}, \mathcal{X})_{\mathcal{H}} = (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})_{\mathcal{H}} \geq \omega_\dagger(\mathcal{A} \mathcal{Y}, \mathcal{Y})_{\mathcal{H}} = \omega_\dagger(\mathcal{D} \mathcal{X}, \mathcal{X})_{\mathcal{H}}. \quad (3.23)$$

Отметим, что левое и правое равенства верны в силу определений (2.20) и свойства самосопряженности оператора $\mathcal{B}^{\pm 1/2}$.

Убедимся в том, что формула (3.23) ложная для пробного вектора $\mathcal{X} = (\varphi, u, a, \alpha)^\top$, построенного по вектору (3.22) с любым нормированным столбцом $b = (b_1, \dots, b_J)^\top$ коэффициентов, в частности, по тому, который принадлежит указанному выше подпространству. Заметим, что $\alpha^j = -iS\varphi^j$ согласно определениям (3.17) и (3.18), а значит, $\alpha = -iS\varphi$, и поэтому соотношение (2.19) принимает вид

$$(\mathcal{B}\mathcal{X}, \mathcal{X})_{\mathcal{H}} = \langle \varphi, \varphi \rangle + (M^{-1}S\varphi, S\varphi)_{\mathbb{C}} + \langle u, u \rangle + g(Ka, a)_{\mathbb{C}}. \quad (3.24)$$

Кроме того, при учете условий ортогональности и нормировки (3.16) выводим формулы

$$\begin{aligned} \langle u^j, u^k \rangle &= g^{-1}\omega_j\omega_k \langle \mathcal{T}\varphi^j, \varphi^k \rangle = \delta_{j,k} \implies \langle u, u \rangle = \sum_{j=1}^J |b_j|^2 = 1, \\ \langle \varphi^j, \varphi^k \rangle + (M^{-1}S\varphi^j, S\varphi^k)_{\mathbb{C}} &= g^{-1}\omega_j^2 \langle \varphi^j, \varphi^k \rangle_{\Gamma_+ \setminus \vartheta_+} \\ \implies \langle \varphi, \varphi \rangle + (M^{-1}S\varphi, S\varphi)_{\mathbb{C}} &= 1. \end{aligned}$$

Принимая во внимание строение (2.18) матрицы $\mathcal{D}$ и последнее равенство (3.18), аналогично выкладке (3.24) получаем

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\mathcal{Y}, \mathcal{Y})_{\mathcal{H}} &= (\mathcal{D}\mathcal{X}, \mathcal{X})_{\mathcal{H}} = g^{-1/2} \langle \mathcal{T}^{1/2}u, \varphi \rangle + g^{-1/2} \langle \mathcal{T}^{1/2}\varphi, u \rangle \\ &\quad - i(a_{(2)}, S_{(2)}\varphi)_{\mathbb{C}} + i(S_{(2)}\varphi, a_{(2)})_{\mathbb{C}} + (\alpha_{(2)}, a_{(2)})_{\mathbb{C}} + (a_{(2)}, \alpha_{(2)})_{\mathbb{C}} \\ &= 2 \sum_{j=1}^J \frac{1}{\omega_j} |b_j|^2 - i(a_{(2)}, i\alpha_{(2)})_{\mathbb{C}} + i(i\alpha_{(2)}, a_{(2)})_{\mathbb{C}} + (\alpha_{(2)}, a_{(2)})_{\mathbb{C}} + (a_{(2)}, \alpha_{(2)})_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Последние четыре слагаемых взаимно уничтожаются. В результате соотношение (3.23) приводится к виду

$$\begin{aligned} g(Ka, a)_{\mathbb{C}} &\geq 2 \sum_{j=1}^J \left(\frac{\omega_{\dagger}}{\omega_j} - 1 \right) |b_j|^2 \geq 2 \min\{(\omega_{\dagger} - \omega_j)\omega_j\} \sum_{j=1}^J \frac{1}{\omega_j^2} |b_j|^2 \\ &= 2 \min\{(\omega_{\dagger} - \omega_j)\omega_j\} (\langle \zeta, \zeta \rangle + (M^{-1}S\zeta, S\zeta)_{\mathbb{C}}). \end{aligned}$$

Здесь минимум вычисляется по индексам $j = 1, \dots, J$ и, кроме того,

$$\zeta = \sum_{j=1}^J \frac{1}{\omega_j} b_j \varphi^j, \quad a = -iM^{-1}S \sum_{j=1}^J \frac{1}{\omega_j} b_j \varphi^j = -iM^{-1}S\zeta, \quad s = M^{1/2}a.$$

В итоге приходим к оценке

$$(Qs, s)_{\mathbb{C}} > 2 \min\{(\omega_{\dagger} - \omega_j)\omega_j\} |s|^2 \quad (3.25)$$

с матрицей (1.25), причем знак строгого неравенства возник, потому что $\zeta \neq 0$ и $\langle \zeta, \zeta \rangle > 0$.

Если $q \leq \omega_{\dagger}^2/2$ и

$$\omega_j \in \left[\frac{1}{2} \left(\omega_{\dagger} - \sqrt{\omega_{\dagger}^2 - 2q} \right), \frac{1}{2} \left(\omega_{\dagger} + \sqrt{\omega_{\dagger}^2 - 2q} \right) \right], \quad (3.26)$$

то неравенство (3.25), а значит, и соотношение (3.23) невозможны. Итак, проверена

ТЕОРЕМА 1. Пусть у вспомогательной задачи (1.3)–(1.5), (1.21), (1.7) имеются собственные числа

$$\lambda_1^M \leq \lambda_2^M \leq \dots \leq \lambda_J^M < \Lambda_{\dagger}, \quad (3.27)$$

причем соответствующие собственные частоты $\omega_1^M = \sqrt{g\lambda_j^M}$, $j = 1, \dots, J$, удовлетворяют включениям (3.26), в которых q – норма матрицы (1.25) и $q \leq \omega_{\dagger}^2/2$ по предположению. Тогда у задачи (1.3)–(1.7), (1.13) есть не менее J собственных частот, попадающих на интервал $(0, \omega_{\dagger})$ и принадлежащих дискретному спектру задачи.

Отметим, что правая часть краевого условия (1.6) на смоченной поверхности тела вычисляется по формуле (1.9) и что в список (3.27) включены только те собственные числа, которые удовлетворяют введенным в теореме 1 условиям, т.е. λ_1^M не обязательно первое (наименьшее) собственное число задачи. В силу связей (1.8) и (2.11) сегмент (3.26) для собственных частот переделывается в сегмент (1.26) для собственных чисел.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. По доказанному в теореме 1 и в силу свойств 1° и 2° полная кратность точечного ω -спектра задачи о двух свободно плавающих телах $\Theta_{\pm}$ не меньше $2J + 6 - r$, где r – ранг матрицы K из (1.15).

§ 4. Концентрация собственных частот

4.1. Оценка снизу собственных частот вспомогательной задачи.

Предположим, что

- (i) приповерхностный слой жидкости (1.28) является цилиндром $\mathbb{Q}_+^h = G_+ \times (-h, 0)$,

и рассмотрим смешанную краевую задачу для уравнения Лапласа со спектральным условием Стеклова

$$\begin{aligned} -\Delta_x u^h(x) &= 0, & x &\in \mathbb{Q}_+^h(R_{\Theta}), \\ \partial_z u^h(y, 0) &= \varepsilon^h u^h(y, 0), & -\partial_z u^h(y, -h) &= 0, & y &\in G_+(R_{\Theta}), \\ u^h(x) &= 0, & y &\in \partial G_+(R_{\Theta}), & x_2 &= 0, & x_3 &\in (-h, 0), \\ \partial_\nu u^h(x) &= 0, & y &\in \partial G_+(R_{\Theta}), & x_2 &> 0, & x_3 &\in (-h, 0). \end{aligned} \quad (4.1)$$

При этом $\mathbb{Q}_+^h(R_{\Theta}) = \{x \in \mathbb{Q}_+^h : |x_1| < R_{\Theta}\} = G_+(R_{\Theta}) \times (-h, 0)$ – конечный цилиндр с сечением $G_+(R_{\Theta}) = \{y \in G_+ : |y_1| < R_{\Theta}\}$, а размер R_{Θ} подобран так, чтобы $\Theta_+ \subset \{x \in \Pi_+ : |x_1| < R_{\Theta}\}$.

В задаче (4.1) возможно разделение переменных, а первое собственное число и соответствующая собственная функция принимают вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^h &= E_1 \frac{1 - e^{-2h\sqrt{E_1}}}{1 + e^{-2h\sqrt{E_1}}} = 2hE_1 + O(h^2 E_1), \\ u_1^h(y, z) &= U_1(y)(e^{z\sqrt{E_1}} + e^{-(z+2h)\sqrt{E_1}}).\end{aligned}\quad (4.2)$$

Здесь $E_1 > 0$ и U_1 – первое собственное число и собственная функция двумерной задачи

$$\begin{aligned}-\Delta_y U(y) &= EU(y), \quad y \in G_+(R_\Theta), \\ U(y) &= 0, \quad y \in \partial G_+(R_\Theta), \quad y_2 = 0, \\ \partial_\nu U(y) &= 0, \quad y \in \partial G_+(R_\Theta), \quad y_2 > 0.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Собственное число E_1 простое в силу строгого принципа максимума. Оно, разумеется, зависит от R_Θ , но это не отражено в его обозначении. В силу первой формулы (4.2) при малом h выполнено соотношение

$$\varepsilon_1^h \geq C_E h, \quad C_E > 0. \quad (4.4)$$

Рассмотрим интегральное тождество (3.1) с пробной функцией $\psi = \varphi$ и применим неравенство Стеклова (2.4), содержащее постоянную $C_\varpi > 0$ и проинтегрированное дополнительно по $x_1 \in (-\infty, -R_\Theta) \cup (R_\Theta, +\infty)$. В результате находим, что при малом h выполнено соотношение

$$\begin{aligned}\lambda \|\varphi; L_2(\Gamma_+^\vartheta)\|^2 &= \|\nabla_x \varphi; L_2(\Omega_+)\|^2 + \|M^{-1/2} S \varphi; \mathbb{C}\|^2 \\ &\geq \|\nabla_x \varphi; L_2(\mathbb{Q}_+(R_\Theta))\|^2 + \|\nabla_x \varphi; L_2(\Omega_+ \setminus \Omega_+(R_\Theta))\|^2 \\ &\geq \min\{\varepsilon_1^h, C_\varpi^{-1}\} \|\varphi; L_2(\Gamma_+)\|^2 \geq C_E h \|\varphi; L_2(\Gamma_+^\vartheta)\|^2,\end{aligned}$$

приводящее к следующему утверждению.

ЛЕММА. *Спектр задачи (3.1) расположен на луче $[C_E h, +\infty)$, где C_E – положительная постоянная из неравенства (4.4).*

4.2. Оценка снизу полной кратности дискретного спектра вспомогательной задачи. Предположим, что

- (ii) тонкая цилиндрическая пластина (1.27) с гладкой боковой поверхностью $\partial G_0 \times (-h, 0)$ содержится в области Ω_+ , ее нижнее основание $G_0 \times \{-h\}$ лежит на смоченной поверхности тела ξ_+ , а верхнее $G_0 \times \{0\}$ – на свободной поверхности жидкости Γ_+^ϑ ,

и рассмотрим спектральную задачу Дирихле

$$-\Delta_y v(y) = \varepsilon v(y), \quad y \in G_0, \quad v(y) = 0, \quad y \in \partial G_0. \quad (4.5)$$

Собственные числа этой задачи образуют неограниченную монотонную последовательность

$$0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_3 \leq \dots \leq \varepsilon_p \leq \dots \rightarrow +\infty,$$

а собственные функции $v_p \in H^2(G_0)$ подчинены условиям ортогональности и нормировки

$$(v_p, v_j)_{G_0} = \delta_{p,j}, \quad p, j \in \mathbb{N}. \quad (4.6)$$

К следовому оператору (3.3), взятому с противоположным знаком, применим максиминимальный принцип

$$\begin{aligned} -\mu_n &= \max_{\mathcal{E}_\xi^n} \inf_{\varphi \in \mathcal{E}_\xi^n \setminus \{0\}} \frac{\langle -\mathcal{T}_\xi \varphi, \varphi \rangle_\xi}{\langle \varphi, \varphi \rangle_\xi} \\ &= \max_{\mathcal{E}_\xi^n} \inf_{\varphi \in \mathcal{E}_\xi^n \setminus \{0\}} \frac{-\|\varphi; L_2(\Gamma_+^\vartheta)\|^2}{\|\nabla_x \varphi; L_2(\Omega_+)\|^2 + \|M^{-1/2} S \varphi; \mathbb{C}\|^2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

При этом $\mathcal{E}_\xi^n$ – любое подпространство в $\mathcal{H}_\xi = \dot{H}^1(\Omega_+; \Upsilon)$ с коразмерностью $n - 1$. Теорема 10.2.2 из [18] утверждает, что в том случае, когда правая часть (4.7) при $n = N$ строго меньше $-\mu_\dagger = -\Lambda_\dagger^{-1}$ (нижняя грань непрерывного спектра оператора $-\mathcal{T}_\xi$), дискретный спектр $\mathcal{T}_\xi$ содержит не менее N собственных чисел

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n \geq \dots \geq \mu_N > \mu_\dagger$$

и каждое из них вычисляется по формуле (4.7). Всякое подпространство $\mathcal{E}_\xi^n$ содержит нетривиальную линейную комбинацию

$$V = \sum_{p=1}^n b_p V_p, \quad \sum_{p=1}^n |b_p|^2 = 1, \quad (4.8)$$

функций, построенных по собственным функциям задачи (4.5) при помощи формулы

$$V_p(x) = \begin{cases} v_p(y), & x \in G_0 \times (-h, 0), \\ 0, & x \in \Omega_+ \setminus (G_0 \times (-h, 0)). \end{cases} \quad (4.9)$$

Коэффициенты b_p , разумеется, зависят от конкретного подпространства $\mathcal{E}_\xi^n$, но это не отражено в обозначениях. Вычислим дробь Рэлея из (4.7) для функции V . При учете соотношения (4.6) и равенства

$$(\nabla_y v_p, \nabla_y v_j)_{G_0} = \varepsilon_p (v_p, v_j)_{G_0} = \varepsilon_p$$

получаем

$$\begin{aligned} \|V; L_2(\Gamma_+^\vartheta)\|^2 &= \left\| \sum_{p=1}^n b_p v_p; L_2(G_0) \right\|^2 = \sum_{p=1}^n |b_p|^2 \|v_p; L_2(G_0)\|^2 = 1, \\ \|\nabla_x V; L_2(\Omega)\|^2 &= h \left\| \sum_{p=1}^n b_p \nabla_y v_p; L_2(G_0) \right\|^2 = h \sum_{p=1}^n \varepsilon_p |b_p|^2 \leq h \varepsilon_n. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Множитель h возник в результате интегрирования по переменной $z \in (-h, 0)$ на множестве (1.27), где $V \neq 0$.

Чтобы оценить еще одно слагаемое из знаменателя дроби Рэлея, сформулируем предположение:

- (iii) наименьшее собственное число матрицы Грама M из (1.15) больше $C_M h^{-1}$, где C_M – положительная постоянная.

Подчеркнем, что благодаря масштабированию малый параметр h безразмерный, а условие (iii) означает, что тело Θ достаточно большое. Возможность соблюсти это условие обсуждается в следующем пункте.

Поскольку для функции V , заданной равенствами (4.8) и (4.9), область интегрирования в правой части (1.14) сужается до нижнего основания $G_0 \times \{-h\}$ пластины, указанной в условии (ii), справедливо следующее соотношение с некоторой постоянной C_S :

$$\|SV; \mathbb{C}\|^2 \leq C_S \|V; L_2(G_0)\|^2 \leq C_S \sum_{p=1}^n |b_p|^2 = C_S.$$

Таким образом,

$$\|M^{-1/2}SV; \mathbb{C}\|^2 \leq C_S C_M^{-1} h. \quad (4.11)$$

Собирая формулы (4.10) и (4.11), получаем

$$\begin{aligned} \max_{\varepsilon_\xi^n} \inf_{\varphi \in \mathcal{E}_\xi^n \setminus \{0\}} \frac{\langle -\mathcal{T}_\xi \varphi, \varphi \rangle_\xi}{\langle \varphi, \varphi \rangle_\xi} &\leq \max_{\varepsilon_\xi^n} \frac{\langle -\mathcal{T}_\xi V, V \rangle_\xi}{\langle V, V \rangle_\xi} \\ &\leq \max_{\varepsilon_\xi^n} \frac{-\|V; L_2(G_0 \times \{0\})\|^2}{\|\nabla_x V; L_2(G_0 \times (-h, 0))\|^2 + \|M^{-1/2}SV; \mathbb{C}\|^2} \leq \frac{-1}{h\varepsilon_n + hC_S C_M^{-1}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Итак, если параметр $h > 0$ достаточно мал, левая часть (4.12), а значит, и само выражение (4.7) действительно не превосходит $-C_n^{-1}h^{-1} < -\mu_\dagger$, где $C_n = \varepsilon_n + C_S C_M^{-1}$. Пользуясь связью (3.4) спектральных параметров, заключаем, что вспомогательная задача имеет не менее n собственных чисел λ_j^h на интервале $(0, \Lambda_\dagger)$.

ТЕОРЕМА 2. Для любого $N \in \mathbb{N}$ найдутся такие $h_N > 0$ и $C_N > 0$, что при $h \in (0, h_N)$ выполнение сформулированных выше условий (i)–(iii) обеспечивает существование по крайней мере N собственных чисел задачи (1.3)–(1.5), (1.21), (1.7), подчиненных неравенствам

$$C_E h \leq \lambda_1^h \leq \lambda_2^h \leq \dots \leq \lambda_N^h \leq C_N h. \quad (4.13)$$

При этом $C_E > 0$ – постоянная из леммы (см. п. 4.1).

Обратим внимание на два обстоятельства: во-первых, $h^{-1}\varepsilon_1^h \rightarrow E_1$ при $h \rightarrow +0$ согласно первой формуле (4.2) и, во-вторых, $E_1 < \varepsilon_1$, так как задача (4.5) поставлена на более узкой области, чем задача (4.3) (следствие минимального принципа; см. [18; теорема 10.2.1]). Таким образом, при малом $h > 0$ справедливо соотношение $\varepsilon_1^h \leq h\varepsilon_1$, которое поясняет левое неравенство (4.13).

4.3. Оценка снизу полной кратности точечного спектра задачи о плавающих телах. Для того чтобы гарантировать наличие дискретного ω -спектра задачи (1.3)–(1.7), (1.13), нужно убедиться в справедливости включений (3.26) для частот

$$\omega_n^h = \sqrt{g\lambda_n^h}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (4.14)$$

отвечающих собственным числам (4.13). Если норма матрицы K имеет единичный порядок, то в силу требования (iii) норма q матрицы (1.25) приобретает порядок h . В этом случае нужные включения для частот (4.14) выполнены при малом $h > 0$, так как верхняя грань сегмента (3.26) больше $\omega_\dagger - c_+ h$, а нижняя меньше $c_- h$.

Таким образом, из предположения

(iv) собственные числа⁴ матрицы K , определенной формулами (1.15), (1.16), оцениваются сверху постоянной c_k , не зависящей от параметра h , вытекает основное утверждение статьи.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены указанные выше требования (i)–(iv). Для любого натурального N найдется такая величина $h_N > 0$, что при $h \in (0, h_N)$ у задачи (1.3)–(1.5), (1.21) с искусственными условиями (1.7) найдется не менее N собственных частот (4.14) на интервале $(0, \omega_+)$. Эти же (положительные) собственные частоты сохраняются и у задачи о двух свободно плавающих телах $\Theta_\pm$ в канале Π , т.е. полная кратность точечного ω -спектра этой задачи не меньше $2N + 6 - r$, где r – ранг матрицы K . Каждой собственной частоте отвечает захваченная волна $(\varphi_n, a_n^+, a_n^-)$, где $a_n^\pm$ – столбцы жестких смещений тел, а потенциал скоростей φ_n принадлежит пространству Соболева $H^1(\Pi \setminus (\Theta_+ \cup \Theta_-))$ и экспоненциально затухает на бесконечности.

Убедимся в том, что все введенные условия можно соблюсти одновременно. Сомнения могут вызвать только положения (iii) и (iv).

Сначала обсудим требование (iii). Как уже упоминалось, собственные числа матрицы M из (1.15) растут при увеличении размеров тела. Несмотря на то, что размер в направлении оси x_2 (поперек канала) ограничен шириной сечения ϖ , препятствий для наращивания тела в направлении оси x_1 (вдоль канала) нет. Можно удлинять тело и в направлении оси x_3 согласованно с изменением (углублением) сечения ϖ , а значит, и точки отсечки Λ_+ . Если $\varpi_+ = (0, 1) \times (-H, 0)$, то первая (потому что положительная) собственная функция задачи (1.22) имеет вид

$$\sin(\pi x_2)(e^{\pi x_3} + e^{-\pi(x_3+2H)}),$$

а собственное число удовлетворяет соотношению

$$\Lambda_+^H = \pi \frac{1 - e^{-2\pi H}}{1 + e^{-2\pi H}} \rightarrow \pi \quad \text{при } H \rightarrow +\infty.$$

Функция $H \rightarrow \Lambda_+^H$ монотонно возрастающая. Таким образом, углубление канала с прямоугольным сечением приводит к смещению точки отсечки вверх, причем возможен переход к $H = +\infty$. Установлены (см. [11]) более общие утверждения о бесконечно глубоких каналах с параллельными или сближающимися стенками (имитация фьордов).

Отметим, что при увеличении надводной части $\Theta_+ \setminus \Xi_+$ требуется сохранить закон Архимеда (1.18) и компенсировать утяжеление тела объемом вытесненной воды.

Составляющая K^ϑ блока K' матрицы K зависит только от сечения ϑ_+ тела Θ_+ плоскостью $\{x : x_3 = 0\}$, которое нужно держать постоянным при увеличении размеров полупогруженного тела или пустым, если тело погружено полностью. Согласно формулам (1.17) и (1.12) вторую составляющую K^Ξ блока K' можно сделать сколь угодно малой путем сближения центров тяжести $x^\bullet$ и плавучести $x^\ominus$. Последнее достигается перераспределением массы тела внутри фиксированного объема.

⁴Напоминаем, что они неотрицательные.

Схематичное изображение тел, удовлетворяющих упомянутому выше условиям, представлено на рис. 2 (см. § 1), причем утяжеленная часть тела глубоко тонирована, а облегченная засветлена.

4.4. Волны, захваченные свободно плавающими телами при сохранении их неподвижности. В теореме 3 концентрация точечного спектра установлена для двух идентичных тел, свободно плавающих в канале с симметричным сечением. Аналогичный эффект возникает и для одного тела Θ , которое симметрично относительно срединной плоскости канала $\{x : x_2 = 0\}$, т.е. выполнены соотношения

$$\Theta = \{x : (x_1, -x_2, x_3) \in \Theta\}, \quad \rho(x) = \rho(x_1, -x_2, x_3). \quad (4.15)$$

Изменения, требуемые при постановке искусственных краевых условий Дирихле, в частности, ограничения

$$a_1 = a_4 = a_6 = 0, \quad (4.16)$$

которые нужно наложить на столбец a жестких смещений тела, подробно обсуждаются в работе [15]. Отметим, что формула (4.16) запрещает движение тела (4.15) в вертикальном направлении и вдоль канала, а также его поворот вокруг оси x_2 (“килевая качка”).

Предположим дополнительно, что тело симметрично относительно плоскости $\{x : x_1 = 0\}$, т.е.

$$\Theta = \{x : (-x_1, x_2, x_3) \in \Theta\}, \quad \rho(x) = \rho(-x_1, x_2, x_3), \quad (4.17)$$

и назначим аналогичные (1.7) искусственные условия Дирихле на поперечном сечении канала

$$\varphi(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad x_1 = 0, \quad (4.18)$$

а значит, будем искать потенциал скоростей, являющийся нечетным относительно двух переменных x_2 и x_1 . Новое предположение о потенциале φ помимо (4.16) налагает еще три требования на столбец жестких смещений тела

$$a_2 = a_3 = a_5 = 0, \quad (4.19)$$

запрещающие его поступательное движение поперек канала, а также вращение вокруг осей x_1 и x_3 (соответственно “бортовую качку” и “рыскание”). Сравнивая (4.16) и (4.19), видим, что столбец a должен быть нулевым, а тело неподвижным. Этот вывод согласуется с исчезновением правой части алгебраической системы (1.13) вследствие обращения в нуль интеграла (1.14), вычисленного для нечетной по x_1 и x_2 функции φ . Иными словами, из операторной записи (2.8) задачи Йона полностью исчезает второе слагаемое слева, линейно зависящее от частоты ω . Тем самым, введение спектрального параметра (1.8) делает соответствующий пучок линейным и устраняет все проблемы, связанные с исследованием квадратичного пучка, характерного для задачи о свободно плавающем теле (см. [2]).

Предложенный в статье [11] и использованный в настоящей работе метод построения пробных функций в максиминимальном принципе (4.7) индифферентен к искусственным краевым условиям (1.7), (4.18) и позволяет установить

существование любого наперед заданного количества захваченных волн при введенных условиях симметрии свободно плавающего тела, которое при этом остается неподвижным. Полученное таким образом утверждение формулировать не будем, так как оно тривиально и малоинтересно.

4.5. Обобщения и открытые вопросы. Предположения (i) и (ii) допускают ослабление. Так, тонкий слой жидкости (1.27) над погруженной частью тела может иметь изогнутое или быстросциллирующее нижнее основание. В этом случае явное решение двумерной задачи (4.5) заменяется асимптотическим решением задачи в тонкой области (см. соответственно работы [21], [23] и [22]). При отсутствии цилиндрического строения у приповерхностного слоя (1.28) теряется явное решение задачи (4.2) и требуется применить асимптотический анализ, включающий построение пограничного слоя, который изучен в достаточной степени (см., например, статью [27]). В итоге результаты, представленные в лемме и теоремах 2, 3, сохраняются, однако их вывод сопровождается значительным усложнением выкладок.

Вопрос о локализации собственных частот задачи (1.3)–(1.7), (1.13) остался нерешенным: теорема 1 указывает оценку снизу для полной кратности дискретного спектра, но не позволяет судить о положении собственных частот, в частности об их малости при $h \rightarrow +0$. В этом проявляется неполнота признака сравнения, сформулированного в теореме 1 и представленного в [15] для другой задачи о свободно плавающем теле. Интересно выяснить, можно ли получить содержательную оценку собственных частот задачи (1.3)–(1.7), (1.13) через собственные частоты (4.14), а также установить, как соотносятся их порядковые номера. Список нерешенных вопросов нетрудно расширить.

Список литературы

- [1] F. John, “On the motion of floating bodies. I”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **2**:1 (1949), 13–57.
- [2] F. John, “On the motion of floating bodies. II. Simple harmonic motions”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **3**:1 (1950), 45–101.
- [3] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, P. Joly, “Mathematical analysis of guided water waves”, *SIAM J. Appl. Math.*, **53**:6 (1993), 1507–1550.
- [4] C. M. Linton, P. McIver, “Embedded trapped modes in water waves and acoustics”, *Wave Motion*, **45**:1–2 (2007), 16–29.
- [5] N. Kuznetsov, V. Maz'ya, B. Vainberg, *Linear water waves*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [6] Д. А. Индейцев, Н. Г. Кузнецов, О. В. Мотыгин, Ю. А. Мочалова, *Локализация линейных волн*, Изд-во С.-Петерб. ун-та, СПб., 2007.
- [7] P. McIver, M. McIver, “Trapped modes in the water-wave problem for a freely floating structure”, *J. Fluid Mech.*, **558** (2006), 53–67.
- [8] R. Porter, D. V. Evans, “Examples of trapped modes in the presence of freely floating structures”, *J. Fluid Mech.*, **606** (2008), 189–207.
- [9] R. Porter, D. V. Evans, “Water-wave trapping by floating circular cylinders”, *J. Fluid Mech.*, **633** (2009), 311–325.
- [10] N. Kuznetsov, “On the problem of time-harmonic water waves in the presence of a freely-floating structure”, *Алгебра и анализ*, **22**:6 (2009), 185–199; англ. пер.: N. Kuznetsov, “On the problem of time-harmonic water waves in the presence of a freely-floating structure”, *St. Petersburg Math. J.*, **22**:6 (2011), 985–995.

- [11] С. А. Назаров, “Концентрация ловушечных мод в задачах линейной теории волн на поверхности жидкости”, *Матем. сб.*, **199**:12 (2008), 53–78; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Concentration of trapped modes in problems of the linearized theory of water waves”, *Sb. Math.*, **199**:12 (2008), 1783–1807.
- [12] С. А. Назаров, “Простой способ обнаружения ловушечных мод в задачах линейной теории поверхностных волн”, *Докл. РАН*, **429**:6 (2009), 746–749; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Simple method for finding trapped modes in problems of the linear theory of surface waves”, *Dokl. Math.*, **80**:3 (2009), 914–917.
- [13] С. А. Назаров, “Достаточные условия появления ловушечных мод в задачах линейной теории поверхностных волн”, *Математические вопросы теории распространения волн*. 38, Зап. научн. сем. ПОМИ, **369**, ПОМИ, СПб., 2009, 202–223; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Sufficient conditions on the existence of trapped modes in problems of the linear theory of surface waves”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **167**:5 (2010), 713–725.
- [14] S. A. Nazarov, J. H. Videman, “Trapping of water waves by freely floating structures in a channel”, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **467**:2136 (2011), 3613–3632.
- [15] С. А. Назаров, “Неполный принцип сравнения в задачах о поверхностных волнах, захваченных фиксированными и свободно плавающими телами”, *Проблемы матем. анализа*, **56** (2011), 83–114; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Incomplete comparison principle in problems about surface waves trapped by fixed and freely floating bodies”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **175**:3 (2011), 309–348.
- [16] D. V. Evans, M. Levitin, D. Vassiliev, “Existence theorems for trapped modes”, *J. Fluid Mech.*, **261** (1994), 21–31.
- [17] С. А. Назаров, *Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки*, Научная книга, Новосибирск, 2002.
- [18] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Изд-во ЛГУ, Л., 1980; англ. пер.: M. S. Birman, M. Z. Solomyak, *Spectral-theory of self-adjoint operators in Hilbert space*, Math. Appl. (Soviet Ser.), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1987.
- [19] Ch. C. Mei, M. Stiassnie, D. K.-P. Yue, *Theory and applications of ocean surface waves. Part 1. Linear aspects*, Adv. Ser. Ocean Eng., **23**, World Scientific, Hackensack, NJ, 2005.
- [20] L. Euler, *Theorie complete (sic) de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux*, Imperial Academy of Sciences, St.-Petersburg, 1773.
- [21] С. А. Назаров, “О сгущении точечного спектра на непрерывном в задачах линейной теории волн на поверхности идеальной жидкости”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 38, Зап. научн. сем. ПОМИ, **348**, ПОМИ, СПб., 2007, 98–126; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Concentration of the point spectrum on the continuous one in problems of linear water-wave theory”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **152**:5 (2008), 674–689.
- [22] G. Cardone, T. Durante, S. A. Nazarov, “Water-waves modes trapped in a canal by a near-surface rough body”, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, **90**:12 (2010), 983–1004.
- [23] S. A. Nazarov, “A body traps as many water-wave modes in a symmetric channel as it wishes”, *Russ. J. Math. Phys.*, **18**:2 (2011), 183–194.
- [24] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, Appl. Math. Sci., **49**, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [25] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Kreĭn, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Math. Monogr., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.

- [26] И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, “Экспоненциально затухающие решения задачи о дифракции на жесткой периодической границе”, *Матем. заметки*, **73**:1 (2003), 138–140; англ. пер.: I. V. Kamotskii, S. A. Nazarov, “Exponentially decreasing solutions of diffraction problems on a rigid periodic boundary”, *Math. Notes*, **73**:1–2 (2003), 129–131.
- [27] С. А. Назаров, “Асимптотика решения задачи Навье–Стокса о течении тонкого слоя жидкости”, *Сиб. матем. журн.*, **31**:2 (1990), 131–144; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Asymptotic solution of the Navier–Stokes problem on the flow of a thin layer of fluid”, *Siberian Math. J.*, **31**:2 (1990), 296–307.

С. А. Назаров (S. A. Nazarov)

Институт проблем машиноведения РАН,

г. Санкт-Петербург

E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию

01.06.2011