Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Рыжиков, Спектральные кратности степеней слабо перемешивающего автоморфизма, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 7, 149–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7895>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:00:23

УДК 517.987

В. В. Рыжиков

Спектральные кратности степеней слабо перемешивающего автоморфизма

Изучается поведение максимальных спектральных кратностей $m(R^n)$ степеней слабо перемешивающего автоморфизма R . Для некоторых бесконечных множеств A показано существование слабо перемешивающего автоморфизма ранга 1 такого, что выполнено $m(R^n) = n$ и $m(R^{n+1}) = 1$ для всех натуральных $n \in A$, причем для мощностей $\text{cardm}(R^n)$ множеств спектральных кратностей степеней R^n выполнено $\text{cardm}(R^{n+1}) = 1$ и $\text{cardm}(R^n) = 2^{m(n)}$, $m(n) \rightarrow \infty$, $n \in A$. Доказывается существование слабо перемешивающего автоморфизма R , обладающего следующими свойствами: все степени R^n обладают однородным спектром; множество всех предельных точек последовательности $\{m(R^n)/n : n \in \mathbb{N}\}$ бесконечно.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: слабо перемешивающее преобразование, однородный спектр, максимальная кратность спектра.

§ 1. Введение

Максимальная спектральная кратность $m(U)$ унитарного оператора U может быть определена следующим образом. Рассмотрим всевозможные представления оператора U в виде

$$U \equiv W \oplus V \oplus V \oplus \cdots \oplus V \oplus \cdots.$$

Максимальное число копий оператора $V \neq 0$ обозначается через $m(U)$. В случае

$$U \equiv V \oplus V \oplus \cdots \oplus V$$

говорят, что оператор U обладает однородным спектром; в этом случае для кратности однородного спектра ниже мы используем обозначение $\mathfrak{h}(U)$ вместо $m(U)$.

Автоморфизм T , действующий на пространстве (X, μ) , $\mu(X) = 1$, индуцирует унитарный оператор $Uf = fT$ (действующий на $L_2(X, \mu)$, $f \in L_2$). Мы пишем далее $m(T)$ вместо $m(U)$. Напомним, что свойство слабого перемешивания означает непрерывность спектральной меры оператора U , ограниченного на пространство, ортогональное к константам. Также слабое перемешивание можно определить как существование (перемешивающей) последовательности t_i такой, что для любых $f, g \in L_2(X, \mu)$

$$\int f U^{m_i} g \, d\mu \rightarrow \int f \, d\mu \int g \, d\mu.$$

В эргодической теории известны примеры слабо перемешивающих преобразований со следующими свойствами:

- 1) $m(T^n) = k, n = 1, 2, \dots;$
- 2) $m(T^n) = 2kn, n = 1, 2, \dots.$

Свойство 1) при $k = 1$ выполнено для гауссовских систем с простым спектром, орнштейновских стохастических конструкций (см. [1]) и некоторых лестничных конструкций (см. [2]). Свойство 2) получено О.Н. Агеевым (см. [3]). Цель нашей работы – дать следующие примеры необычного поведения $m(T^n)$.

ТЕОРЕМА 1. *Для некоторого бесконечного множества A натуральных чисел и некоторого слабо перемешивающего автоморфизма R выполнено $m(R^n) = n$ и $m(R^{n+1}) = 1$ для всех $n \in A$, кроме того мощности множеств кратностей автоморфизмов R^n не ограничены. Существует слабо перемешивающий автоморфизм S такой, что все степени S^n обладают однородным спектром, а множество предельных точек последовательности $\{h(S^n)/n\}$ бесконечно.*

Такое необычное поведение $m(R^n)$ можно увидеть в классе эргодических автоморфизмов с дискретным спектром. Мы приходим к следующей гипотезе: для эргодического автоморфизма H с дискретным спектром можно найти автоморфизм R с непрерывным спектром такой, что $m(R^n) = m(H^n)$. В статье будет доказана часть этой гипотезы. Для этого мы используем типичные групповые действия (см. [4]) и метод контроля спектра при помощи слабых пределов степеней автоморфизмов (по этой тематике см., например, статьи [5]–[7] и обзоры [8]–[10]). Для автоморфизмов с дискретным спектром известны следующие типы поведения максимальной кратности:

$$m(R^n) = n, n = 1, 2, \dots;$$

$$m(\tilde{R}^{q3^n}) = 3^n \text{ для всех } n \text{ при } q, \text{ не делящемся на } 3.$$

Реализация подобного поведения кратностей для слабо перемешивающих действий приведет к полному подтверждению гипотезы.

§ 2. Максимальные спектральные кратности степеней. Периодический случай

В доказательстве основных результатов ключевую роль играют следующие групповые действия. Рассмотрим сохраняющее меру действие группы G_p , порожденное двумя элементами s, φ , удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$1) \varphi^p = e;$$

$$2) \text{ элементы } s, \varphi s \varphi^{-1}, \varphi^2 s \varphi^{-2}, \dots, \varphi^{p-1} s \varphi^{-p+1} \text{ коммутируют.}$$

Обозначим соответствующие элементы G_p -действия через S, Φ и положим

$$R := S\Phi, \quad T := R^p.$$

В [11] доказано, что автоморфизм R имеет простой спектр в случае типичного G_p -действия, а автоморфизм T и все его положительные степени обладают однородным спектром кратности p . Доказательство теоремы 1.1 из [11] показывает, что все автоморфизмы R^n имеют простой спектр, если $n \perp p$ (обозначение того, что n взаимно просто с p). Мы должны только убедиться в том, что модель 1 из [11] обеспечивает простоту спектра R^n при $n \perp p$.

В работе [11] слабо перемешивающий автоморфизм T был оснащен следующим G_p -типичным свойством: слабое замыкание степеней T содержит все

допустимые полиномы от T . Это обеспечило степеням T^N , $N > 0$, однородный спектр кратности p . Работа [12] содержит примеры тотально эргодических автоморфизмов со свойством: $\mathfrak{m}(T^n)$ периодически принимает значения 1, 2. Слабо перемешивающие и перемешивающие автоморфизмы с подобным свойством были обнаружены автором (см. [2]). Для этого рассматривалось преобразование $R(x, y) = (y, Tx)$ такое, что выполнялось $\mathfrak{m}(R^{2n}) = \mathfrak{m}(T^n \otimes T^n) = 2$ и $\mathfrak{m}(R^{2n+1}) = 1$.

Случай $\{1, 1, \dots, 1, p, 1, 1, \dots, 1, p, 1, \dots\}$. Следуя работам [2], [11], для простого числа p и типичного G_p -действия получаем: $\mathfrak{m}(R^n) = 1$ для всех $n \perp p$ (нет общих делителей) и $\mathfrak{m}(R^{np}) = p$ для всех $n > 0$. Второй случай вытекает из следующего наблюдения из [2]: если оператор U с простым спектром обладает достаточным запасом полиномиальных слабых пределов, то степени U^n также обладают простым спектром. В нашем же случае R^p обладает всеми полиномиальными пределами его степеней.

Случай $\{1, \dots, 1, p, 1, \dots, 1, q, 1, \dots, 1, pq, 1, \dots\}$. Пусть p, q – различные простые числа. Желаемое поведение последовательности $\mathfrak{m}(R^n)$, $n = 1, 2, \dots$, имеет место для R из типичного G_{pq} -действия, что несложно доказать. Однако мы рассмотрим более сложную ситуацию как начало построения нужной нам бесконечной конструкции.

Зафиксируем простые числа p, q и рассмотрим преобразования R_1, R_2 , взятые из некоторых типичных действий G_p, G_q соответственно. Пусть $T_1 = R_1^p$, $T_2 = R_2^q$. Наша цель – обеспечить простоту спектра произведения $R = R_1 \times R_2$ и выполнение следующих свойств:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}(R^n) &= pq, \quad n = n'pq, \quad n' > 0; \\ \mathfrak{m}(R^n) &= 1, \quad n \perp pq; \\ \mathfrak{m}(R^n) &= p, \quad n = n'p \text{ и } n' \perp q; \\ \mathfrak{m}(R^n) &= q, \quad n = n'q \text{ и } n' \perp p. \end{aligned}$$

Чтобы обеспечить такое спектральное свойство степеней, воспользуемся для некоторой последовательности n_i и некоторого числа r , $0 < r < q$, следующим слабым пределом:

$$(R_1 \otimes R_2)^{pn_i} \rightarrow I \otimes R_2^r.$$

Это свойство (обозначение $WL(2)$) влечет за собой выполнение

$$(R_1 \otimes R_2)^{Npn_i} \rightarrow I \otimes R_2^{Nr}$$

для любого фиксированного $N > 1$.

ЛЕММА 1. Пусть R и R'' имеют простой спектр. Если найдется последовательность n_i такая, что для некоторого R' выполнено $(R \otimes R')^{n_i} \rightarrow I \otimes R''$, то $R \otimes R'$ имеет простой спектр.

Лемма аналогична лемме 3.2 из [11].

Итак, для всех $N \perp pq$ из свойства $WL(2)$ в силу леммы 1 получим

$$\mathfrak{m}(R_1^N \otimes R_2^N) = 1,$$

так как спектры автоморфизмов R_1^{Nr} и R_2^{Nr} простые. В частности, мы получим

$$\mathfrak{m}(R) = \mathfrak{m}(R^{pq-1}) = \mathfrak{m}(R^{pq+1}) = 1, \quad \mathfrak{m}(R^{pq}) = pq.$$

Последнее является следствием следующих фактов:

- 1) $R^{pq} = T_1^q \otimes T_2^p$ есть произведение двух автоморфизмов с кратностями спектра, равными p и q соответственно, поэтому $\mathfrak{m}(R^{pq}) \geq pq$;
- 2) $\mathfrak{m}(R^{pq}) \leq pq$, так как $\mathfrak{m}(R) = 1$.

Неравенства из 1) и 2) приводят к $\mathfrak{m}(R^{pq}) = pq$.

Теперь объясним, как обеспечить свойство WL(2). Мы ищем последовательность $n_i \rightarrow \infty$ и последовательность $\tilde{n}_i$, связанные равенством

$$pn_i = q\tilde{n}_i + r,$$

где $r \perp q$. Как показано в [11], типичное G_p -действие обладает свойством

$$T_1^{n_i} \rightarrow I$$

для некоторой подпоследовательности индексов i . А для типичного G_q -действия имеем

$$T_2^{\tilde{n}_i} \rightarrow I$$

для некоторой вновь выбранной подпоследовательности индексов i . Обозначая соответствующую подпоследовательность последовательности n_i снова через n_i , получаем свойство WL(2). Действительно,

$$R_1^{pn_i} = T_1^{n_i} \rightarrow I, \quad R_2^{pn_i} = R_2^{q\tilde{n}_i+r} = T_2^{\tilde{n}_i} R_2^r \rightarrow R_2^r.$$

§ 3. Свойства WL(k) и их следствия

Определим свойство WL(k). Для набора из действий $G_{p_1}, \dots, G_{p_k}$ найдутся последовательности $n_i(1), \dots, n_i(k)$ такие, что имеют место сходимости

$$(R_1 \otimes R_2)^{p_1 n_i(1)} \rightarrow I \otimes R_2^{r(2)}, \quad r(2) \perp p_2,$$

.....

$$(R_1 \otimes \dots \otimes R_k)^{p_1 \dots p_{k-1} n_i(k-1)} \rightarrow I \otimes \dots \otimes I \otimes R_k^{r(k)}, \quad r(k) \perp p_k.$$

Если бесконечный набор операторов $R_1, R_2, \dots$ удовлетворяет условиям WL(k), $k > 1$, и все операторы $R_k^{r(k)}$ имеют простой спектр, то тензорное произведение $R = R_1 \otimes R_2 \otimes \dots$ также имеет простой спектр:

$$\mathfrak{m}(R_1 \otimes R_2 \otimes \dots) = 1.$$

При $N \perp p_1, p_2, \dots$ степени R^N также имеют простой спектр. Действительно, заменяя в условиях WL(k) последовательности $n_i(k)$ на последовательности $Nn_i(k)$, мы получаем условия WL(k) для набора операторов $R_1^N, R_2^N, \dots$, поскольку R_1^N и $R_2^{Nr(2)}, R_3^{Nr(3)}, \dots$ также имеют простой спектр.

Теперь покажем, что

$$\mathfrak{m}(R^{p_1 \dots p_k}) = p_1 \dots p_k.$$

Так как $\mathfrak{m}(R) = 1$, мы имеем неравенство

$$\mathfrak{m}(R^{p_1 \dots p_k}) \leq p_1 \dots p_k.$$

Пусть

$$q(m) = \frac{p_1 p_2 p_3 \dots p_k}{p_m}.$$

Нам известно, что

$$\mathfrak{m}(T_1^{q(m)}) = p_m.$$

Таким образом, из представления

$$R^{p_1 \cdots p_k} = T_1^{q(1)} \otimes T_2^{q(2)} \otimes \cdots \otimes T_k^{q(k)} \otimes Q_k$$

получаем

$$\mathfrak{m}(R^{p_1 \cdots p_k}) \geq p_1 \cdots p_k,$$

следовательно,

$$\mathfrak{m}(R^{p_1 \cdots p_k}) = p_1 \cdots p_k.$$

§ 4. Как получить свойства $WL(k)$

ЛЕММА 2. Пусть $A, \tilde{A}$ суть бесконечные подмножества натуральных чисел. Тогда для любого $p > 1$ найдутся последовательности $n_i \in A, \tilde{n}_i \in \tilde{A}$ и автоморфизм T из типичного G_p -действия такой, что $T^{\tilde{n}_i} \rightarrow I$ и $T^{n_i} \rightarrow I$.

Лемма доказывается аналогично лемме 2.1 из [11]. На самом деле мы можем доказать больше: $T^{\tilde{n}_i} \rightarrow P(T)$ и $T^{n_i} \rightarrow Q(T)$ для произвольных допустимых полиномов P, Q . (Полином $P(T) = \sum_i a_i T^i$ называется допустимым, если $a_i \geq 0$ и $\sum a_i = 1$.) В лемме 2 для дальнейшего удобно предположить, что множество A состоит из простых чисел.

Применив лемму 2, найдем жесткую последовательность $n_i(1)$ для автоморфизма T_1 (т.е. $T_1^{n_i(1)} \rightarrow I$) из типичного G_{p_1} -действия. Затем находим T_2 из G_{p_2} -действия с жесткими последовательностями $\tilde{n}_i(2)$ и $n_i(2) \subset n_i(1)$, причем последовательность $\tilde{n}_i(2)$ связана с $n_i(1)$ соотношением

$$p_1 n_i(1) = p_2 \tilde{n}_i(2) + r(2), \quad 0 < r(2) < p_2.$$

Отсюда следует

$$(R_1 \otimes R_2)^{p_1 n_i(1)} = (T_1^{n_i(1)} \otimes T_2^{\tilde{n}_i(2)} R_2^{r(2)}) \rightarrow I \otimes R_2^{r(2)}.$$

Далее находим T_3 с жесткими последовательностями $\tilde{n}_i(3)$ и $n_i(3) \subset n_i(2)$ при условии, что $\tilde{n}_i(3)$ связана с $n_i(2)$ условием $p_1 p_2 n_i(2) = p_3 \tilde{n}_i(3) + r(3)$. Теперь получаем

$$(R_1 \otimes R_2 \otimes R_3)^{p_1 p_2 n_i(2)} = (T_1^{p_2 n_i(2)} \otimes T_2^{p_1 n_i(2)} \otimes T_3^{\tilde{n}_i(3)} R_3^{r(3)}) \rightarrow (I \otimes I \otimes R_3^{r(3)}).$$

По индукции, используя лемму 2, находим автоморфизм T_k с жесткими последовательностями $\tilde{n}_i(k)$ и $n_i(k) \subset n_i(k-1)$ такими, что

$$p_1 p_2 \cdots p_{k-1} n_i(k-1) = p_k \tilde{n}_i(k) + r(k), \quad 0 < r(k) < p_k.$$

Отметим, что для произвольной последовательности $n_i(k-1)$ такое соотношение не всегда осуществимо (нельзя найти $\tilde{n}_i(k)$, если p_k делит $n_i(k-1)$). Поэтому с самого начала следует в качестве $n_i(1)$ взять возрастающую последовательность из простых чисел, тогда $\tilde{n}_i(k)$ подбирается автоматически на каждом этапе k .

Итак, мы доказали существование автоморфизмов $T_1, T_2, \dots$, для которых соответствующий набор $R_1, R_2, \dots$ обладает свойствами $WL(k)$. В § 4 установлено, что $R^N = (R_1 \otimes R_2 \otimes R_3 \otimes \dots)^N$ имеет простой спектр, если $N \perp p_k$ для всех k , и то, что $\mathfrak{m}(R^{p_1 \cdots p_k}) = p_1 \cdots p_k$. Совершенно аналогично для нашего автоморфизма R доказывается более общее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $N = p_{k_1}^{d_1} p_{k_2}^{d_2} \cdots p_{k_m}^{d_m} q$, $d_j > 0$, и $q \perp P$. Тогда $\mathfrak{m}(R^N) = p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m}$ и $\mathfrak{m}(R^q) = 1$. Например, в случае $p_{k+1} > p_1 p_2 \cdots p_k$ выполняется $\mathfrak{m}(R^{p_1 p_2 \cdots p_{k+1}}) = 1$.

Обратим внимание на то, что мощности $\text{cardm}(R^N)$ наборов кратностей степеней R^N также ведут себя немонотонно.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $N = p_{k_1}^{d_1} p_{k_2}^{d_2} \cdots p_{k_m}^{d_m} q$, $d_j > 0$ и $q \perp P$. Тогда

$$\text{cardm}(R^N) = 2^m, \quad \text{cardm}(R^q) = 1.$$

Например, множество кратностей для $R^{p_1 p_2}$ есть $\{1, p_1, p_2, p_1 p_2\}$.

Доказательство является несложной адаптацией теоремы 3.3 из [11] на случай бесконечных произведений. Действительно, из работы [11] мы знаем, что $(R_{k_1} \otimes R_{k_2} \otimes \cdots \otimes R_{k_m})^N$ имеет набор кратностей

$$\{p_{k_1}, p_{k_2}, \dots, p_{k_m}, p_{k_1} p_{k_2}, p_{k_1} p_{k_3}, \dots, p_{k_{m-1}} p_{k_m}, \dots, p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m}\}.$$

Число кратностей в этом наборе равно $2^m - 1$. Представим R^N в виде

$$R^N = (R_{k_1} \otimes R_{k_2} \otimes \cdots \otimes R_{k_m})^N \otimes Q^N,$$

где “хвост” Q^N имеет простой спектр и сильно дизъюнктен (терминология из [11]) с $(R_{k_1} \otimes \cdots \otimes R_{k_m})^N$. Поэтому к упомянутому набору кратностей добавляется только кратность 1, отвечающая пространству, являющемуся тензорным произведением констант на пространство фактора Q^N . Мощность полученного набора кратностей равна 2^m .

§ 5. Однородные спектральные кратности степеней

Обозначим через R_p циклическую перестановку на пространстве $\{1, 2, \dots, p\}$. Рассмотрим произведение

$$R = R_{p_1} \times R_{p_2} \times R_{p_k} \times \cdots,$$

где $p_i \in P$ суть различные простые числа. В качестве пространства с мерой рассмотрим (X, μ) , где группа

$$X = \mathbf{Z}_{p_1} \times \mathbf{Z}_{p_2} \times \mathbf{Z}_{p_k} \times \cdots$$

оснащена мерой Хаара μ . Преобразование R имеет ранг 1 (обладает циклической аппроксимацией), следовательно, эргодично, поэтому имеет простой дискретный спектр. То же самое верно для степени R^n , когда $n \perp P$. Но, например, в случае $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ имеем $\mathfrak{m}(R^n) = n$. Мы получили, тем самым, эргодический автоморфизм R с поведением $\mathfrak{m}(R^n) = n$, описанным в теореме 2. Но здесь спектр дискретный и не все его степени являются эргодическими.

Группа X допускает следующую естественную группу автоморфизмов, которую мы отождествим с

$$A = \mathbf{Z}_{p_1-1} \otimes \mathbf{Z}_{p_2-1} \otimes \mathbf{Z}_{p_k-1} \otimes \cdots.$$

Циклические группы $\mathbf{Z}_{p_k-1}$ здесь отождествляются с мультипликативными циклическими группами в поле $\mathbf{Z}_{p_k}$. Группа A действует очевидным образом на X , сохраняя меру μ ; обозначим это действие и группу одинаково. Пусть $Q \perp P$; зафиксируем для каждого $q \in Q$ автоморфизм $\Psi_q \in A$ такой, что

$$\Psi_q^{-1} R \Psi_q = R^q.$$

Обозначим через A_{QR} группу и действие, порожденное автоморфизмом R и всеми автоморфизмами Ψ_q , $q \in Q$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть Q , P – два непересекающихся подмножества множества простых чисел, причем P бесконечно. Тогда существует слабо перемешивающее преобразование R , сопряженное со всеми степенями R^n при $n \in Q$.

На основе метода работ [13], [14] доказательство утверждения проводится следующим образом. Действие A_{QR} является свободным действием аменабельной группы. Свойство автоморфизма R обладать рангом 1 типично. Рассматривая бернуллиевскую модель действия группы A_{QR} , получаем, что свойство слабого перемешивания автоморфизма R является типичным. Условия сопряжения указанных степеней автоморфизма R выполняются автоматически.

Вероятно, эти свойства сопряжения степеней совместимы со свойствами однородности спектров степеней, которые мы наблюдаем для приведенного выше автоморфизма $R = R_{p_1} \times R_{p_2} \times \cdots \times R_{p_k} \times \cdots$ с дискретным спектром. Отметим, что здесь степень R^n не является эргодической при $n = p_i N$. В то же время эти степени обладают однородным спектром, причем степени с одинаковой кратностью спектра изоморфны (сопряжены). Вероятно, такая же ситуация возможна и для слабо перемешивающего автоморфизма. Ниже мы ограничимся исследованием однородности спектра. Будем писать $\mathfrak{h}(T) = n$ в случае, если T обладает однородным спектром кратности n .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $P = \{p_1, p_2, \dots\}$ – некоторое бесконечное множество простых чисел. Существует слабо перемешивающий автоморфизм R такой, что $\mathfrak{h}(R^q) = 1$ для всех $q \perp P$, а для $N = p_k$ выполнено $\mathfrak{h}(R^N) = N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сейчас мы немного обобщим подход из работы [11]. Вместо $\mathbf{Z}_p$ -поддействия (которое индуцировало однородную кратность спектра) в действии G_p мы будем рассматривать поддействие группы

$$\mathbf{Z}_{p_1} \oplus \mathbf{Z}_{p_2} \oplus \mathbf{Z}_{p_3} \oplus \cdots.$$

Итак, пусть G_P – группа, порожденная элементами $R, F_1, F_2, F_3, \dots$, удовлетворяющими соотношениям:

- 1) $F_i F_j = F_j F_i$, $F_i^{p_i} = I$;
- 2) элементы $F_i^{-n} R F_i^{n-1}$ коммутируют.

ЛЕММА 3. Типичное G_P -действие обладает следующими свойствами:

- 1) R^q имеет простой непрерывный спектр при $q \perp P$ и $\text{Rank}(R^q) = 1$;

- 2) $F_i^{-1}R$ имеет простой спектр;
- 3) (а) $F_i^{-1}RF_i^{-1}R^{-1}F_i^2$ имеет непрерывный спектр;
 (б) каждому элементу бесконечного порядка соответствует слабо перемешивающий автоморфизм;
- 4) R^{p_i} имеет однородный спектр кратности p_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Модель 1. Свойство 1) реализуется из представления $R = R_1 \otimes R_2 \otimes R_3 \otimes \dots$, фигурирующего в теореме 2. Остается лишь отметить, что используемое произведение $R_1 \otimes R_2 \otimes R_3 \otimes \dots$ непосредственно связано с требуемым действием группы G_P . Действительно, положим

$$F_i = I \otimes I \otimes \dots \otimes \Phi_i \otimes I \otimes \dots,$$

где Φ_i берется из G_{p_i} -действия. Так как G_{p_i} -действие свободно, то свободно и G_P -действие. Эта модель дает также реализацию $\text{Rank}(R^q) = 1$ для $q \perp P$. Если R_i допускают очень хорошую аппроксимацию циклами и длины циклов взаимно просты, то конечные прямые произведения таких R_i также обладают циклической аппроксимацией, т.е. все произведение R имеет ранг 1.

Модель 2. Чтобы реализовать свойство 2), рассмотрим R_i , действующее на $(X_i, \mu_i) = (\tilde{X}^{p_i}, \tilde{\mu}^{p_i})$ так:

$$R_i = F_i \circ (U_1 \otimes U_2 \otimes \dots \otimes U_{p_i}),$$

где F_i – циклическая перестановка координат в кубе $\tilde{X}^{p_i}$. Простота спектра для R_i достигается выбором U_k из типичного потока ранга 1. Тогда

$$F_i^{-1}R = R_1 \otimes \dots \otimes R_{p_i-1} \otimes (U_1 \otimes U_2 \otimes \dots \otimes U_{p_i}) \otimes R_{p_i+1} \otimes \dots.$$

Используя описанный $WL(k)$ -метод, мы обеспечим простоту спектра этого произведения. Таким образом, автоморфизм R и все циклические перестановки F_i порождают свободное действие группы G_P со свойством 2).

Бернуллиевское действие дает свойство 3).

Типичное G_P -действие обладает свойствами 1)–3). Эти свойства вместе влекут за собой свойство 4). Чтобы в этом убедиться, рассмотрим $\mathbf{Z}^{p_i}$ -поддействие, порожденное коммутирующими преобразованиями

$$S_1 = F_i^{-1}R, \quad S_2 = F_i^{-2}RF_i^1, \quad \dots, \quad S_{p_i-1} = F_i^{-p_i+1}RF_i^{p_i-2}, \quad S_{p_i} = RF_i.$$

Спектр этого действия простой, так как простым является спектр автоморфизма S_1 . Повторяя дословно доказательство леммы 1.2 из [11], получаем, что автоморфизм $S_1 S_2 \dots S_{p_i} = R^{p_i}$ имеет однородный спектр кратности p_i . Лемма доказана.

Теорема 4 вытекает из леммы 3.

§ 6. Некоторые замечания и нерешенные задачи

Приведем одно из возможных обобщений теоремы 4.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $P = \{p_1, p_2, \dots\}$ – некоторое бесконечное множество простых чисел. Существует слабо перемешивающий автоморфизм R такой, что $\mathfrak{h}(R^N) = \text{Rank}(R^N) = p_{k_1} p_{k_2} \dots p_{k_m}$ и $\mathfrak{h}(R^q) = 1$ для всех $N = p_{k_1}^{d_1} p_{k_2}^{d_2} \dots p_{k_m}^{d_m} q$, $d_j > 0$, и $q \perp P$.

Доказательство принципиально не отличается от доказательства теоремы 4. Здесь вместо одного элемента F_i рассматривается набор таких элементов. Но они порождают циклическую группу порядка $r = p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m}$, а возникающее G_r -поддействие обеспечивает (как и в [11]) нужную однородность спектра.

Теперь поясним, как можно найти слабо перемешивающий автоморфизм R со следующими свойствами:

$$\mathfrak{h}(R^n) = n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, 2009, 2010, \quad \mathfrak{h}(T^{2011}) = 1.$$

Конечно, мы выбрали число 2011 в силу того, что оно является простым. Рассмотрим все простые числа и положим $d_i = 1$ для $p_i = 2011$ и $d_j = 10$ для всех простых чисел $p_j \neq 2011$. В пространстве

$$X = \mathbf{Z}_{2^{10}} \times \mathbf{Z}_{3^{10}} \times \mathbf{Z}_{5^{10}} \times \cdots \times \mathbf{Z}_{2003^{10}} \times \mathbf{Z}_{2011} \times \mathbf{Z}_{2017^{10}} \times \cdots$$

мы находим преобразование R с дискретным спектром и нужным поведением $\mathfrak{h}(R^n)$. Чтобы получить преобразование с непрерывным спектром и свойствами $\mathfrak{h}(R^n) = n$, $n = 1, 2, \dots, 2009, 2010$, $\mathfrak{h}(T^{2011}) = 1$, достаточно рассмотреть типичное действие группы G_r при $r = 2010!$ (см. [11]). Тогда соответствующий автоморфизм R будет обладать всеми нужными свойствами, но поведение $\mathfrak{h}(R^n)$ будет периодическим (пульсар с периодом 2011!). Непериодическое поведение $\mathfrak{h}(T^n)$ также возможно, но демонстрация этого потребует обобщений теорем 2, 4 на случаи, когда вместо последовательности простых чисел рассматривается последовательность их степеней. Теперь вместо действий групп G_{p_i} надо использовать действия групп $G_{p_i^{d_i}}$ и следующий факт: если $\mathfrak{h}(T) = 1$ и $\mathfrak{h}(T^{p^d}) = p^d$, то $\mathfrak{h}(T^{p^m}) = p^m$ для всех $m < d$.

Нерешенные задачи.

1. Для слабо перемешивающего автоморфизма найти реализации следующих свойств:

- $\mathfrak{m}(T^{p^n}) = 1$, $\mathfrak{m}(T^{p^{n+1}}) = p$ для некоторых $p, n > 1$;
- $\mathfrak{m}(T^n)$ не ограничены, но $\mathfrak{m}(T^n) < \ln \ln(n) + \text{const}$;
- $\text{Rank}(T^{p^n}) = 1$, $\text{Rank}(T^{p^{n+1}}) = p$ для некоторых $p, n > 1$;
- степени T^n имеют однородный спектр кратности n при всех $n > 0$;
- степени $T^{3^m q}$ имеют однородный спектр кратности 3^m при $q \perp 3$, $m \geq 0$.

2. Найти слабо перемешивающий поток T_t такой, что справедливо $\mathfrak{m}(T_1) = 1$, $\mathfrak{m}(T_2) = 2$. (Интересны различные вариации этой задачи, включающие вопросы о рангах.)

3. Найти слабо перемешивающий поток T_t такой, что $\mathfrak{m}(T_r) = \infty$ для всех рациональных r и $\mathfrak{m}(T_a) = 1$ для всех иррациональных a . (Имеющиеся модели с дискретным спектром могут помочь решению этой задачи.)

4. Найти перемешивающие примеры для упомянутых задач.

§ 7. Приложение. Групповые действия, однородные спектры, факторы и самоприсоединения

Напомним, что выше мы использовали сохраняющее меру действие группы G_p , порожденное автоморфизмами S , Φ , для которых выполнялись такие соотношения:

$$\Phi^p = \text{Id};$$

автоморфизмы S , $\Phi S \Phi^{-1}$, $\Phi^2 S \Phi^{-2}$, $\dots$, $\Phi^{p-1} S \Phi^{-p+1}$ коммутируют.

Автоморфизмы S и $R := S\Phi$ для типичных действий обладают простым спектром. Так как $T = R^p$ коммутирует с периодическим преобразованием Φ , у автоморфизма T имеется фактор $\tilde{T}$ – ограничение автоморфизма T на T -инвариантную алгебру $\mathcal{F}$ множеств, неподвижных относительно Φ . (Таким образом, система с однородным спектром может быть конечным расширением автоморфизма с простым спектром. Отметим, что первые примеры с нетривиальным конечнократным спектром были конечными расширениями; см. [5].) Полученный фактор $\tilde{T}$ имеет простой спектр (см. [11]), причем корень R возмущает этот фактор: $\mathcal{F} \neq R\mathcal{F}$ (аналогично $\mathcal{F} \neq S\mathcal{F}$). Таким образом, у фактора $\tilde{T}$ возникает нетривиальное самоприсоединение. Соответствие между факторами и присоединениями (joinings) хорошо известно (см. [15], [16]). Сейчас мы рассмотрим специальный случай и покажем, как подобная система с однородным спектром связана с некоторым самоприсоединением (об этой связи было сказано в [11] без пояснений).

На $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ определим меру ν , положив

$$\nu(A \times B) = \int_X \chi_A \chi_{RA} d\mu$$

при условии $A, B \in \mathcal{F}$. Так как R коммутирует с T , получим

$$\nu(\tilde{T}A \times \tilde{T}B) = \int_X T\chi_A T\chi_{RA} d\mu = \int_X \chi_{\tilde{T}A} \chi_{\tilde{T}B} d\mu = \nu(A \times B).$$

Мера ν является самоприсоединением автоморфизма $\tilde{T}$, так как мера ν инвариантна относительно $\tilde{T} \otimes \tilde{T}$. Заметим также, что мера ν определена на $A \times B$ для всех измеримых множеств A, B . В теории присоединений такая мера называется наддиагональной (off-diagonal). Действие $T \times T$ с этой инвариантной мерой имеет естественный изоморфизм с исходным преобразованием T посредством отображения $x \mapsto (x, Rx)$. Пусть $p = 3$, рассмотрим отображение $x \mapsto (Rx, R\Phi x, R\Phi^2 x)$. Найдется измеримое множество D такое, что X является дизъюнктивным объединением множеств D , ΦD , $\Phi^2 D$. Наш фактор $\tilde{T}$ отождествим с отображением

$$\tilde{T}: D \rightarrow D, \quad \tilde{T}x = \Phi^{n(x)}Tx,$$

где $n(x)$ определено из условия $\Phi^{n(x)}Tx \in D$. Теперь рассмотрим отображение

$$x \mapsto (\Phi^{n_1(x)}Rx, \Phi^{n_2(x)}R\Phi x, \Phi^{n_3(x)}R\Phi^2 x) \in D \times D \times D.$$

Так как соотношение $\Phi^n R \Phi^m = R$ в нашей группе влечет за собой $n = m = 0 \pmod{p}$, замечаем, что точки $\Phi^{n_1(x)}Rx$, $\Phi^{n_2(x)}R\Phi x$, $\Phi^{n_3(x)}R\Phi^2 x$ должны быть различны для почти всех $x \in D$. Итак, мы получили биекцию между наддиагональю в $X \times X$ и графиком трехзначного отображения на D . Следовательно, самоприсоединение расположено на графике трехзначного отображения (полиморфизма).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\tilde{T}$ имеет простой спектр и коммутирует с n -значным полиморфизмом, то сопряженный полиморфизм также n -значен. Действительно, соответствующие марковские операторы J и J^* удовлетворяют равенствам

$$\frac{1}{m}I + \frac{m-1}{m}Q = J^*J = JJ^* = \frac{1}{n}I + \frac{n-1}{n}Q',$$

причем полиморфизмы Q и Q' дизъюнкты с диагональю. Тогда должно выполняться $\frac{1}{m}I = \frac{1}{n}I$, следовательно $m = n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для типичного G_p -действия описанный выше фактор $\tilde{T}$ будет обладать рангом 1. Более того, он будет автоморфизмом ранга 1 с плоской крышей (т.е. будет чрезвычайно хорошо аппроксимироваться периодическими преобразованиями). Дж. Кинг доказал, что в этом случае каждое эргодическое самоприсоединение является слабым пределом внедиагональных мер, что равносильно $\tilde{T}^{n_i} \xrightarrow{w} J$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Можно получить самоприсоединение, являющееся конечнозначным полиморфизмом, для перемешивающего преобразования с простым спектром. Рассмотрим при $n = 3$ перемешивающую симметрическую степень $T^{\odot n}$ с простым спектром (примеры таких T см. в [2]). У произведения $T \otimes T \otimes T$ имеются два фактора: симметрический фактор $\mathcal{F}$ и его возмущение, скажем $(I \otimes I \otimes T)\mathcal{F}$. Эти факторы (как подалгебры) порождают алгебру всех измеримых подмножеств пространства $X \times X \times X$. Соответствующее самоприсоединение ν автоморфизма $T^{\odot 3}$ будет конечнозначным. Преобразование $T^{\odot n} \otimes T^{\odot n}$ с инвариантной мерой ν изоморфно автоморфизму $T \otimes T \otimes T$. Для последнего известно, что $m(T \otimes T \otimes T) = 3!$, причем спектр оператора $T \otimes T \otimes T$ обладает набором кратностей $\{3, 6\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. С.В. Тихонов (см. [17]) использовал G_p -действия для доказательства существования перемешивающего автоморфизма T с однородным спектром кратности $p > 2$. Таким образом, в этой ситуации совершенно аналогично возникает нетривиальное самоприсоединение перемешивающего автоморфизма $\tilde{T}$. Фактор $\tilde{T}$ не может иметь ранг 1, так как в силу хорошо известной теоремы Кинга свойство перемешивания вместе со свойством ранга 1 запрещают нетривиальные самоприсоединения (см. [15]).

В статье представлены некоторые из результатов, полученных автором во время работы в Математической лаборатории Р. Салема Руанского университета в январе 2011 г. Автор благодарит Х. Эль Абдалави и Т. де ля Рю за гостеприимство. Особая признательность – Ж.-П. Туveno и С.В. Тихонову за обсуждения. Автор также благодарит рецензента за полезные замечания.

Список литературы

- [1] Е. Н. El Abdalaoui, “On the spectrum of the powers of Ornstein transformations”, *Sankhya Ser. A*, **62**:3 (2000), 291–306.
- [2] В. В. Рыжиков, “Слабые пределы степеней, простой спектр симметрических произведений и перемешивающие конструкции ранга 1”, *Матем. сб.*, **198**:5 (2007), 137–159; англ. пер.: V. V. Ryzhikov, “Weak limits of powers, simple spectrum of symmetric products, and rank-one mixing constructions”, *Sb. Math.*, **198**:5 (2007), 733–754.
- [3] О. Н. Агеев, “Динамические системы с четнократной лебеговской компонентой в спектре”, *Матем. сб.*, **136(178)**:3(7) (1988), 307–319; англ. пер.: O. N. Ageev, “Dynamical systems with an even-multiplicity Lebesgue component in the spectrum”, *Math. USSR-Sb.*, **64**:2 (1989), 305–317.
- [4] О. Ageev, “The homogeneous spectrum problem in ergodic theory”, *Invent. Math.*, **160**:2 (2005), 417–446.

- [5] В. И. Оселедец, “О спектре эргодических автоморфизмов”, *Докл. АН СССР*, **168**:5 (1966), 1009–1011; англ. пер.: V. I. Oseledets, “The spectrum of ergodic automorphisms”, *Soviet Math. Dokl.*, **7** (1966), 776–779.
- [6] А. М. Степин, “О свойствах спектров эргодических динамических систем с локально компактным временем”, *Докл. АН СССР*, **169**:4 (1966), 773–776; англ. пер.: A. M. Stepin, “Spectral properties of ergodic dynamical systems with locally compact time”, *Soviet Math. Dokl.*, **7** (1966), 1007–1010.
- [7] A. Katok, *Combinatorial constructions in ergodic theory and dynamics*, Univ. Lecture Ser., **30**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [8] A. Katok, J.-P. Thouvenot, “Spectral properties and combinatorial constructions in ergodic theory”, *Handbook of dynamical systems*, v. 1B, Elsevier, Amsterdam, 2006, 649–743.
- [9] M. Lemańczyk, *Spectral theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Complexity and System Science, Springer-Verlag, 2009.
- [10] A. I. Danilenko, *A survey on spectral multiplicities of ergodic actions*, arXiv: 1104.1961.
- [11] В. В. Рыжиков, “Спектральные кратности и асимптотические операторные свойства действий с инвариантной мерой”, *Матем. сб.*, **200**:12 (2009), 107–120; англ. пер.: V. V. Ryzhikov, “Spectral multiplicities and asymptotic operator properties of actions with invariant measure”, *Sb. Math.*, **200**:12 (2009), 1833–1845.
- [12] О. Н. Агеев, “Спектральный тип перекладываний $T_{\alpha, \beta}$ ”, *Матем. сб.*, **188**:8 (1997), 13–44; англ. пер.: O. N. Ageev, “The spectral type of the rearrangements $T_{\alpha, \beta}$ ”, *Sb. Math.*, **188**:8 (1997), 1119–1152.
- [13] O. N. Ageev, “Spectral rigidity of group actions: applications to the case $\text{gr}(t, s; ts = st^2)$ ”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **134**:5 (2006), 1331–1338.
- [14] A. I. Danilenko, “Weakly mixing rank-one transformations conjugate to their squares”, *Studia Math.*, **187**:1 (2008), 75–93.
- [15] В. В. Рыжиков, “Перемешивание, ранг и минимальное самоприсоединение действий с инвариантной мерой”, *Матем. сб.*, **183**:3 (1992), 133–160; англ. пер.: V. V. Ryzhikov, “Mixing, rank, and minimal self-joining of actions with an invariant measure”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **75**:2 (1993), 405–427.
- [16] J.-P. Thouvenot, *Some properties and applications of joinings in ergodic theory*, Ergodic theory and its connections with harmonic analysis (Alexandria, 1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **205**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [17] С. В. Тихонов, “Перемешивающие преобразования с однородным спектром”, *Матем. сб.*, **202**:8 (2011), 139–160; англ. пер.: S. V. Tikhonov, “Mixing transformations with homogeneous spectrum”, *Sb. Math.*, **202**:8 (2011), 1231–1252.

В. В. Рыжиков (V. V. Ryzhikov)

Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: vryzh@mail.ru

Поступила в редакцию
 03.06.2011 и 04.02.2012