Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Друца, Г. М. Кобельков, О сходимости разностных схем для уравнений динамики океана, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 8, 17–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7896>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 02:55:54

УДК 519.634

А. В. Друца, Г. М. Кобельков

О сходимости разностных схем для уравнений динамики океана

Для решений разностной схемы, аппроксимирующей со вторым порядком по пространственным переменным уравнения крупномасштабной динамики океана в области, являющейся единичным кубом, доказана сходимость к решению дифференциальной задачи. А именно в предположении достаточной гладкости решения доказано, что имеет место оценка

$$\max_{0 \leq m \leq M} \|\mathbf{u}(m\tau) - \mathbf{v}^m\| = O(\tau + h^{3/2}), \quad M\tau = T,$$

где $\|\cdot\|$ – сеточная норма L_2 по пространственным переменным, $\mathbf{v}$ – решение сеточной задачи, а $\mathbf{u}$ – решение дифференциальной задачи.

Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: примитивные уравнения, уравнения динамики океана, нелинейные уравнения в частных производных, конечно-разностная схема, сходимость.

§ 1. Введение

Вопрос сходимости решений разностной задачи к решению дифференциальной является одним из ключевых в обосновании корректности разностной схемы. При этом, как правило, скорость сходимости по порядку совпадает с порядком аппроксимации. Несмотря на то что для многих задач математической физики вопрос сходимости аппроксимирующих их разностных схем детально изучен и соответствующая техника исследований разработана, для уравнений крупномасштабной динамики океана (*примитивных уравнений*) эта проблема оставалась открытой. В работе [1] была сделана попытка обоснования корректности разностных схем для уравнений динамики атмосферы, которые близки по своей структуре к примитивным уравнениям, но при этом накладывались дополнительные условия на существование априорных оценок для решения. Трудность исследования сходимости разностных схем для примитивных уравнений заключалась, прежде всего, в отсутствии соответствующих оценок решения как разностной схемы, так и исходной дифференциальной задачи. В настоящей работе доказана сходимость решений конечно-разностной схемы, аппроксимирующей примитивные уравнения со вторым порядком по пространственным переменным, к решению дифференциальной задачи при естественном предположении гладкости решения исходной задачи. Такой тип схем был

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00767-а) и Программы ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики”, проект “Оптимальные алгоритмы решения задач математической физики”.

выбран в силу того, что именно метод конечных разностей принят в задачах гидро- и газодинамики.

Доказать сходимость удалось на основе работ последних лет [2]–[6], в которых были получены априорные оценки для примитивных уравнений, а также доказано существование решения “в целом”. При доказательстве сходимости использовались методы, предложенные в работах Г. М. Кобелькова [2]–[4] и примененные затем в работе А. В. Друцы [5].

§ 2. Система уравнений крупномасштабной динамики океана

Рассмотрим цилиндр $\Omega \equiv \Omega' \times [0, 1]$, где Ω' – двумерная область с границей, состоящей из конечного числа гладких дуг, пересекающихся под ненулевыми углами. Границу $\partial\Omega$ разобьем на две части: $S = \partial\Omega' \times [0, 1]$ – боковую поверхность и $S_1 = \Omega' \times \{0, 1\}$ – объединение верхнего и нижнего оснований цилиндра Ω . Через $Q_T \equiv \Omega \times [0, T]$ будем, как обычно, обозначать цилиндр по времени.

Пусть $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ – вектор скорости, $U = (U_1, U_2)$ – его горизонтальные компоненты, P и R – давление и плотность соответственно. Тогда система крупномасштабной динамики океана (*примитивных уравнений*), рассматриваемая в области Q_T , состоит из одного векторного и трех скалярных уравнений

$$\partial_t U - \nu \Delta U + (\mathbf{U} \cdot \nabla) U + \ell U + \nabla' P = 0, \quad (2.1)$$

$$\partial_z P = -gR, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (2.3)$$

$$\partial_t R - \nu_1 \Delta R + (\mathbf{U} \cdot \nabla) R = 0. \quad (2.4)$$

Здесь $\nabla' = (\partial_1, \partial_2)$ – двумерный градиент, $\nu, \nu_1, g > 0$ – вещественные константы, ℓ – ограниченный линейный кососимметричный оператор вида $\ell U = \omega(U_2, -U_1)$, где $\omega = \text{const}$.

Уравнения (2.1)–(2.4) дополняются следующими граничными условиями:

$$U \cdot n = 0, \quad \nabla_n U \times n = 0, \quad \nabla_n R = 0 \quad \text{на } S, \quad (2.5)$$

$$U_3 = 0, \quad \partial_z U = 0, \quad \partial_z R = 0 \quad \text{на } S_1, \quad (2.6)$$

где n – вектор нормали к поверхности S , $\nabla_n = n \cdot \nabla'$ – производная вдоль нормали, $a \times b = a_1 b_2 - a_2 b_1$, а также начальными условиями

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad R(x, 0) = R_0(x), \quad \int_0^1 \operatorname{div}' U_0 \, dz = 0, \quad (2.7)$$

$\operatorname{div}' = \nabla'(\cdot)$ – двумерная дивергенция.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В классической записи примитивных уравнений (см. [6]) вместо уравнения для плотности R (2.4) ставятся два аналогичных уравнения: для температуры T и для солености S . А плотность R , в свою очередь, линейно выражается через эти величины: $R = R_0(1 - \beta_T(T - T_r) - \beta_S(S - S_r))$, где $R_0 = \text{const}$. Данное отличие не играет принципиальной роли в доказательстве утверждений настоящей работы.

Имеет место следующая [2]–[4] теорема, устанавливающая существование и единственность обобщенного [3], [4] решения (2.1)–(2.4), (2.5)–(2.7).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $U_0 \in \mathbf{W}_2^2(\Omega)$, $R_0 \in W_2^2(\Omega)$, U_0, R_0 удовлетворяют граничным условиям (2.5)–(2.6) и $\int_0^1 \operatorname{div}' U_0 dz = 0$. Тогда для любых $\nu, \nu_1 > 0$ и произвольного $T > 0$ задача (2.1)–(2.4), (2.5)–(2.7) имеет единственное обобщенное решение (U, R) на Q_T такое, что

$$U^2, U_z^2, UU_x, U_z U_{zx}, U_t, U_{tx} \in \mathbf{L}_2(Q_T), \quad (2.8)$$

и имеет место оценка

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} (&\|R\|_4 + \|U\|_4 + \|U_3\| + \|U_{3z}\| + \|P_z\|_4 + \|R_z\|_4 + \|U_z\|_4 \\ &+ \|R_t\| + \|U_t\| + \|R_{x'}\| + \|U_{x'}\|) \\ &+ \int_0^T (\|RR_x\|^2 + \|UU_x\|^2 + \|P\|_4^4 + \|UU_{3z}\|^2 + \|R_{zx}\|^2 + \|U_{zx}\|^2 \\ &+ \|U_z U_{zx}\|^2 + \|R_{tx}\|^2 + \|U_{tx}\|^2) dt \leq c(U_0, R_0, \Omega', \nu, \nu_1, T), \end{aligned} \quad (2.9)$$

при этом норма $\|U_x\|$ непрерывна по t . Здесь все произведения вектор-функций понимаются как вектор-функции, состоящие из всех комбинаций попарных произведений компонент сомножителей.

§ 3. Разностная схема

В дальнейшем будем считать, что область пространственных переменных Ω является единичным кубом, т.е. $\Omega' = [0, 1]^2$. Занумеруем направления осей координат x, y, z через 1, 2, 3 и для удобства переобозначим границы области Ω следующим образом. Пусть Σ_1 и Σ_2 – это части S , перпендикулярные направлениям 1 и 2 соответственно, а $\Sigma_3 = S_1$. Таким образом, Σ_k – это три пары параллельных граней куба Ω .

Перейдем к построению разностной схемы для задачи (2.1)–(2.4), (2.5)–(2.7). Введем сетку, сеточные функции и операторы, а также рассмотрим основные используемые обозначения, некоторые из которых могут не совпадать с использованными ранее.

3.1. Сетка, сеточные функции и операторы. Для независимых пространственных переменных будем использовать как обозначение $x = (x_1, x_2, x_3)$, так и (x, y, z) . Через $x' = (x_1, x_2)$ будем обозначать первые две (горизонтальные) переменные.

Разбив область Q_T на $M + 1$ временной слой, введем стандартную равномерную сетку по времени с шагом $\tau = T/M$. Всегда далее будем считать, что сеточные функции и сеточные операторы рассматриваются на каком-то фиксированном временном слое $t = m\tau$, если не оговорено противное. При этом с помощью значка $\hat{\cdot}$ ($\hat{u}$, $\hat{r}$ и т.д.) будем обозначать сужение сеточных функций на следующем временном слое (при $t = (m + 1)\tau$). Сетку по времени обозначим через

$$\mathbb{T} = \{m\tau \mid m \in [0, M) \cap \mathbb{Z}\}, \quad \bar{\mathbb{T}} = \mathbb{T} \cup \{T\}.$$

Перейдем теперь к построению сетки по пространственным переменным. Введем параметр шага сетки $h = 1/N$ и равномерно разобьем область Ω на N^3 кубиков со стороной h . Их вершины будут образовывать узлы

$$\Omega_h = \{x = (ih, jh, kh) \mid 0 \leq i, j, k \leq N\}.$$

Через $\bar{\Omega}_h^k$, $k = 1, 2, 3$, будем обозначать сеточную область, полученную сдвигом Ω_h в направлениях $l \neq k$ на $h/2$ и добавлением узлов так, чтобы $\bar{\Omega}_h^k$ была симметрична относительно центра Ω . Нетрудно заметить, что в $\bar{\Omega}_h^k$ входят центры граней кубиков сетки Ω_h , параллельных границе Σ_k , $k = 1, 2, 3$. Кроме того, введем еще одну сеточную область

$$\bar{\mathcal{U}}_h = \left\{ x = \left(ih + \frac{h}{2}, jh + \frac{h}{2}, kh + \frac{h}{2} \right) \mid -1 \leq i, j, k \leq N \right\},$$

которая содержит центры кубиков сетки Ω_h . Помимо трехмерных сеток введем двумерную сетку на Ω'

$$\bar{\mathcal{U}}'_h = \left\{ x' = \left(ih + \frac{h}{2}, jh + \frac{h}{2} \right) \mid -1 \leq i, j \leq N \right\}.$$

Обозначим через Ω_h^k , $k = 1, 2, 3$, $\mathcal{U}_h$ и $\mathcal{U}'_h$ внутренние точки сеток $\bar{\Omega}_h^k$, $k = 1, 2, 3$, $\bar{\mathcal{U}}_h$ и $\bar{\mathcal{U}}'_h$ соответственно. Граничные точки сетки Ω_h^k , $k = 1, 2, 3$, будем обозначать аналогично непрерывному случаю через $\Sigma_{l,h}^k$ для каждого направления $l = 1, 2, 3$. Помимо этого введем еще один набор сеток на границе Σ_l , $l = 1, 2, 3$. А именно через $\Gamma_{l,h}^k$ будем обозначать сеточную границу, полученную сдвигом $\Sigma_{l,h}^k$ в направлении центра Ω на $h/2$ для каждой грани. Всю вышеописанную совокупность сеточных областей и границ, построенных в четырехмерном пространстве, для краткости обозначим через Q^h .

Множество сеточных функций, определенных в узлах $\bar{\mathcal{U}}_h$, обозначим через

$$\bar{\mathcal{P}}^h = \{p \mid p: \bar{\mathcal{U}}_h \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Сеточные вектор-функции $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ представляют из себя тройку скалярных сеточных функций u_k , каждая из которых определена на своей сетке $\bar{\Omega}_h^k$, $k = 1, 2, 3$. Множество таких вектор-функций будем обозначать через

$$\bar{\mathcal{U}}^h = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u}: (\bar{\Omega}_h^1 \rightarrow \mathbb{R}) \times (\bar{\Omega}_h^2 \rightarrow \mathbb{R}) \times (\bar{\Omega}_h^3 \rightarrow \mathbb{R})\}.$$

Сеточные вектор-функции, состоящие из первых двух компонент $\mathbf{u}$, будем обозначать через u – той же буквой, но нежирной, а их множество – через $\bar{\mathcal{U}}'^h$. Множества скалярных и векторнозначных функций, определенных только во внутренних узлах, будем обозначать через $\mathcal{P}^h$, $\mathcal{U}'^h$ и $\mathcal{U}^h$ соответственно.

Произведением $p \cdot q$ двух скалярных сеточных функций p и q будем считать скалярную сеточную функцию, которая равна произведению значений p и q в каждом узле сетки. При этом произведением $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ двух сеточных вектор-функций $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ будем считать сеточную *вектор-функцию*, являющуюся покомпонентным произведением $(u_1 \cdot v_1, u_2 \cdot v_2, u_3 \cdot v_3)$. Если $p \in \bar{\mathcal{P}}^h$ и $\mathbf{u} \in \bar{\mathcal{U}}^h$, то будем формально считать, что $p \cdot \mathbf{u} \equiv [p] \cdot \mathbf{u}$ с учетом введенных выше обозначений, где $[\cdot]$ – оператор усреднения, определенный далее в этом пункте.

В настоящей работе используются стандартные сеточные нормы $l_{s,h}$, $s \in [1, \infty]$ и сеточное скалярное произведение в $l_{2,h}$. Если скалярное произведение берется не по трехмерной сетке, то эта сетка будет указываться в индексе скалярного произведения. Для норм будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{s,\Xi_h} &= \|\cdot\|_{l_{s,h}(\Xi_h)}, & \|\cdot\|_{\Xi_h} &= \|\cdot\|_{2,\Xi_h}, \\ \|\cdot\|_s &= \|\cdot\|_{s,\Omega_h}, & \|\cdot\| &= \|\cdot\|_2, & |\cdot|_s &= \|\cdot\|_{s,\Omega'_h}, & |\cdot| &= |\cdot|_2; \end{aligned}$$

здесь Ξ_h – какая-либо равномерная сетка (например, $\bar{\Omega}_h$, $\bar{\Omega}_h^k$, $\bar{\Omega}_h$, $\bar{\Omega}_h'$, $\dots$), $\bar{\Omega}_h$ – одна из введенных выше трехмерных сеточных областей, а $\bar{\Omega}_h'$ – одна из введенных выше двумерных сеточных областей.

Перейдем к определению сеточных операторов. Введем оператор *усреднения в направлении i* . Пусть ζ – некоторая скалярная сеточная функция, определенная на какой-либо равномерной сетке Ξ_h ($\bar{\Omega}_h$, $\bar{\Omega}_h^k$, $\bar{\Omega}_h$, $\dots$). Тогда через $[\zeta]_{x_i}$ обозначим усреднение ζ на сетку, смещенную на $h/2$ относительно Ξ_h параллельно оси переменной x_i . А именно, значение $[\zeta]_{x_i}$ в узле новой сетки равно среднему арифметическому значений ζ в двух ближайших узлах вдоль направления i . Определим многомерные усреднения от сеточных и векторнозначных сеточных функций как

$$\begin{aligned} [\cdot]: \bar{\mathcal{P}}^h &\rightarrow \mathcal{U}^h, & [p] &= ([p]_{x_1}, [p]_{x_2}, [p]_{x_3}), \\ [\cdot]: \bar{\mathcal{U}}^h &\rightarrow \mathcal{P}^h, & [\mathbf{u}] &= [u_1]_{x_1} + [u_2]_{x_2} + [u_3]_{x_3}. \end{aligned}$$

Рассмотрим *разностные сеточные операторы градиента, дивергенции и Лапласа*, которые здесь и далее будут обозначаться через ∇ , div и Δ соответственно (как соответствующие дифференциальные аналоги). Поскольку сетки $\bar{\Omega}_h$, $\bar{\Omega}_h^k$, $\bar{\Omega}_h$ изометричны (с точностью до граничных узлов), то операторы разделенных разностей первого ∇_{x_i} и второго Δ_{x_i} порядков, $i = 1, 2, 3$, могут быть легко и одинаково определены на каждой из сеток. Используя эти разделенные разности можно, в частности, определить стандартные операторы

$$\begin{aligned} \nabla: \bar{\mathcal{P}}^h &\rightarrow \mathcal{U}^h, \\ \text{div}: \bar{\mathcal{U}}^h &\rightarrow \mathcal{P}^h, \\ \Delta: \bar{\mathcal{U}}^h &\rightarrow \mathcal{U}^h, & \Delta: \bar{\mathcal{P}}^h &\rightarrow \mathcal{P}^h. \end{aligned}$$

Операторы, действующие только в горизонтальной плоскости переменного x' , будем обозначать через ∇' , div' и Δ' :

$$\nabla': \bar{\mathcal{P}}^h \rightarrow \mathcal{U}'^h, \quad \text{div}': \bar{\mathcal{U}}'^h \rightarrow \mathcal{P}^h, \quad \Delta': \bar{\mathcal{U}}'^h \rightarrow \mathcal{U}'^h.$$

В работе также будем использовать обозначения для двумерных сеточных операторов ротора

$$\text{rot}' w = \nabla_{x_1} w_2 - \nabla_{x_2} w_1 \quad \forall w \in \mathcal{U}'^h, \quad \text{rot}' b = (\nabla_{x_2} b, -\nabla_{x_1} b) \quad \forall b \in \mathcal{P}^h.$$

Для простоты изложения мы также будем использовать упрощенную запись сеточного оператора градиента

$$\zeta_{x_i} = \nabla_{x_i} \zeta, \quad i = 1, 2, 3, \quad \zeta_x = \nabla \zeta, \quad \zeta_{x'} = \nabla' \zeta.$$

Помимо вышеперечисленных аппроксимаций элементарных дифференциальных операторов векторного анализа нам необходимо ввести разностный аналог ковариантного дифференцирования. Для этого введем следующие нелинейные операторы:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}: \overline{\mathcal{U}}^h \times \overline{\mathcal{P}}^h &\rightarrow \mathcal{P}^h, & \mathcal{M}(\mathbf{u}, p) &= [\mathbf{u} \cdot \nabla p] \equiv \sum_{k=1}^3 [u_k \cdot \nabla_k p]_{x_k}, \\ \mathcal{N}: \overline{\mathcal{U}}^h \times \overline{\mathcal{U}}^{lh} &\rightarrow \mathcal{U}^{lh}, & \mathcal{N}(\mathbf{u}, v) &= ([[\mathbf{u}]_{x_1} \cdot \nabla v_1], [[\mathbf{u}]_{x_2} \cdot \nabla v_2]) \\ & & &\equiv \left(\sum_{k=1}^3 [[u_k]_{x_1} \cdot \nabla_k v_1]_{x_k}, \sum_{k=1}^3 [[u_k]_{x_2} \cdot \nabla_k v_2]_{x_k} \right).\end{aligned}$$

Через $\mathcal{N}'$ и $\mathcal{M}'$ будем обозначать части операторов $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$ соответственно, действующие только в горизонтальной плоскости.

Перечислим некоторые свойства введенных операторов, которые будут использоваться далее. Во-первых, имеет место неравенство $\|[\zeta]\| \leq c\|\zeta\|$, верное для любой сеточной функции, любых введенных выше норм и усреднений.

Здесь и далее буквой c (с индексами и без них) будем обозначать в неравенствах положительные константы, которые не зависят ни от параметров сетки τ и h , ни от функций в этих неравенствах, но зависят от длины интервала времени T , констант системы уравнений и норм начальных условий. Причем чаще всего разные константы будут обозначаться одной и той же буквой, если это не будет вводить в заблуждение.

Во-вторых, для разностных операторов имеют место следующие утверждения о равенстве скалярных произведений (аналоги формул интегрирования по частям в континуальном случае). Для $p \in \mathcal{P}^h$ и $\mathbf{v} \in \overline{\mathcal{U}}^h$ справедливо соотношение

$$(\nabla p, \mathbf{v}) + (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) = (p, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{\partial \mathcal{U}_h}, \quad (3.1)$$

которое непосредственно следует из преобразования Абеля для конечных сумм. Из (3.1) следует тождество для $p, q \in \mathcal{P}^h$

$$(\Delta p, q) = -(\nabla p, \nabla q) + (q, \nabla p \cdot \mathbf{n})_{\partial \mathcal{U}_h}. \quad (3.2)$$

Из определения оператора ∇ для $\overline{\mathcal{U}}^h$ следует тождество для $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \overline{\mathcal{U}}^h$

$$(\Delta \mathbf{v}, \mathbf{u}) = -(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{\partial \Omega_h^1 \times \partial \Omega_h^2 \times \partial \Omega_h^3}. \quad (3.3)$$

Таким же образом доказываются равенства

$$(\mathcal{M}(\mathbf{u}, p), q) + (\mathcal{M}(\mathbf{u}, q), p) + (\operatorname{div} \mathbf{u}, p \cdot q) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, p \cdot q)_{\partial \Omega_h^1 \times \partial \Omega_h^2 \times \partial \Omega_h^3}, \quad (3.4)$$

$$(\mathcal{N}(\mathbf{w}, u), v) + (\mathcal{N}(\mathbf{w}, v), u) + (\operatorname{div} \mathbf{w}, u \cdot v) = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, u \cdot v)_{\partial \Omega_h^1 \times \partial \Omega_h^2 \times \partial \Omega_h^3}. \quad (3.5)$$

На протяжении всей работы мы будем часто применять следующее утверждение, справедливость которого легко проверить явным применением определений норм.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Пусть $s_1, s_2 \in [1, \infty]$, а $f(z)$ – сеточная функция, определенная на какой-либо одномерной равномерной сетке $\mathbb{Z}_h = \{ih \mid i = 0, \dots, N\}$. И пусть f принимает в одном из узлов этой сетки нулевое значение или принимает на сетке значения разных знаков. Тогда верна цепочка неравенств

$$\|f\|_{s_1, \mathbb{Z}_h} \leq c \|f\|_{C(\mathbb{Z}_h)} \leq c \|\nabla_z f\|_{s_2, \mathbb{Z}_h}, \quad s_1, s_2 \in [1, \infty], \quad (3.6)$$

где $\|f\|_{C(\mathbb{Z}_h)} = \max_{z \in \mathbb{Z}_h} |f(z)|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Построенная выше сетка аналогична смещенным сеткам В. И. Лебедева, которые были впервые описаны в работе [7].

3.2. Уравнения разностной схемы. С учетом введенных выше обозначений неявная разностная схема для уравнений динамики океана примет вид

$$u_\tau - \nu \Delta \hat{u} + \mathcal{N}(\mathbf{u}, \hat{u}) + \ell \hat{u} + \nabla' \hat{p} = 0 \quad \text{на } \Omega_h^1 \times \Omega_h^2 \times \mathbb{T}, \quad (3.7)$$

$$\nabla_z p + g[r]_z = 0 \quad \text{на } \Omega_h^3 \times \overline{\mathbb{T}}, \quad (3.8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{на } \mathcal{U}_h \times \overline{\mathbb{T}}, \quad (3.9)$$

$$r_\tau - \nu_1 \Delta \hat{r} + \mathcal{M}(\mathbf{u}, \hat{r}) = 0 \quad \text{на } \mathcal{U}_h \times \mathbb{T}. \quad (3.10)$$

Эти уравнения дополняются следующими краевыми условиями:

$$u_k = 0, \quad \nabla_k r = 0 \quad \text{на } \Sigma_{k,h}^k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.11)$$

$$\nabla_i u_{3-i} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{i,h}^{3-i}, \quad \nabla_3 u_i = 0 \quad \text{на } \Gamma_{3,h}^i, \quad i = 1, 2, \quad (3.12)$$

и начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x) = U_0(x) + \delta U_0(x) \quad \text{на } \overline{\Omega}_h^1 \times \overline{\Omega}_h^2, \quad r(x, 0) = R_0(x) \quad \text{на } \overline{\mathcal{U}}_h, \quad (3.13)$$

где $\delta U_0(x) = O(h^2)$ выбрана так, что

$$\sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{div}' u \left(x', nh + \frac{h}{2}, 0 \right) = 0.$$

Напомним еще раз, что здесь использовались следующие обозначения:

$$u \equiv u^m \equiv u(x, m\tau), \quad \hat{u} \equiv u^{m+1}, \quad u_\tau \equiv \frac{\hat{u} - u}{\tau}.$$

3.3. Априорные оценки, существование и единственность решения, аппроксимация.

3.3.1. Априорные оценки. Перейдем к доказательству априорных оценок, наличие которых позволяет получить основной результат настоящей работы – сходимость разностной схемы. Сложность получения этих оценок состоит в том, что в дифференциальном случае имеет место соотношение

$$\left(u_k \frac{d}{dx_k} v_j, |v_j|^\alpha v_j \right) = 0 \quad \forall \alpha \geq 0, \quad j = 1, 2, 3;$$

здесь подразумевается суммирование по k от 1 до 3 и $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Для сеточного случая это соотношение имеет место только при $\alpha = 0$, что не дает возможности получить оценки в сеточных пространствах L_q .

ЛЕММА 3.1. Для решения системы (3.7)–(3.10), (3.11)–(3.13) имеют место следующие оценки:

$$\max_{1 \leq m \leq M} \|r^m\| \leq \|r_0\|, \quad \tau \sum_{m=0}^M \|r_x^m\|^2 \leq c. \quad (3.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Техника доказательства данной леммы полностью аналогична технике, применяемой в работах [2]–[5] при получении априорных оценок для примитивных уравнений. Умножим уравнение (3.10) скалярно на $2\tau\hat{r}$:

$$(r_\tau, 2\tau\hat{r}) - \nu_1(\Delta\hat{r}, 2\tau\hat{r}) + (\mathcal{M}(\mathbf{u}, \hat{r}), 2\tau\hat{r}) = 0. \quad (3.15)$$

Используя тождество $2\hat{r} = \tau r_\tau + (\hat{r} + r)$, первое слагаемое (3.15) преобразуем к виду

$$(r_\tau, 2\tau\hat{r}) = \|\hat{r}\|^2 - \|r\|^2 + \tau^2 \|r_\tau\|^2.$$

Второе слагаемое (3.15) преобразуется с помощью разностного аналога формулы интегрирования по частям (3.2)

$$(\Delta\hat{r}, \hat{r}) = -(\nabla\hat{r}, \nabla\hat{r}) = -\|\hat{r}_x\|^2;$$

здесь мы использовали краевое условие (3.11).

Последнее слагаемое (3.15) равно нулю в силу определения оператора $\mathcal{M}$, краевых условий (3.11) на $\mathbf{u}$, сеточного уравнения неразрывности (3.9), а также в силу тождества (3.4):

$$(\mathcal{M}(\mathbf{u}, \hat{r}), \hat{r}) = -\frac{1}{2}(\hat{r}^2, \operatorname{div} \mathbf{u}) = 0.$$

Таким образом, соотношение (3.15) принимает вид

$$\|\hat{r}\|^2 - \|r\|^2 + \tau^2 \|r_\tau\|^2 + 2\tau\nu_1 \|\hat{r}_x\|^2 = 0. \quad (3.16)$$

Просуммировав (3.16) по m от $m = 0$ до $m_1 - 1$, получим

$$\|r^{m_1}\|^2 + \tau^2 \sum_{m=1}^{m_1} \|r_\tau^m\|^2 + 2\tau\nu_1 \sum_{m=1}^{m_1} \|r_x^m\|^2 = \|r_0\|^2,$$

отсюда при $m_1 = M$ следует второе неравенство в (3.14).

Отбрасывая из левой части последнего равенства слагаемые с суммами и беря максимум по $m_1 = 1, \dots, M$, получаем первую оценку в (3.14). Таким образом, лемма доказана.

Из леммы 3.1 и второго уравнения системы (3.8) тривиальным образом вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Имеет место оценка

$$\max_{1 \leq m \leq M} \|\nabla_z p^m\| \leq c. \quad (3.17)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Для третьей компоненты вектора скорости u_3 верно соотношение*

$$\|u_3\| \leq c\|u_{x'}\|. \quad (3.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $u_3(x', 0, \tau m) = 0 \ \forall m \in \overline{\mathbb{T}}$ и, следовательно, $|u_3| = 0$ при $z = 0, t = \tau m$, то имеет место цепочка неравенств

$$\|u_3\| = \left(\sum_{n=0}^N |u_3|^2 \right)^{1/2} \leq c \left(\sum_{n=0}^{N-1} |\nabla_z u_3|^2 \right)^{1/2} = c\|\nabla_z u_3\|.$$

Здесь мы воспользовались утверждением 3.1. Использование уравнения (3.9) завершает доказательство предложения.

ЛЕММА 3.2. *Для решения системы (3.7)–(3.10), (3.11)–(3.13) имеют место неравенства*

$$\max_{1 \leq m \leq M} \|u^m\| \leq c, \quad \tau \sum_{m=0}^M \|u_x^m\|^2 \leq c. \quad (3.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству предыдущей леммы умножим уравнение (3.7) скалярно на $2\tau\hat{u}$. После очевидных преобразований получим

$$\|\hat{u}\|^2 - \|u\|^2 + \tau^2\|u_\tau\|^2 - 2\nu\tau(\Delta\hat{u}, \hat{u}) + 2\tau(\mathcal{N}(\mathbf{u}, \hat{u}), \hat{u}) + 2\tau(\nabla'\hat{p}, \hat{u}) = 0; \quad (3.20)$$

здесь мы воспользовались кососимметричностью оператора ℓ .

Из краевых условий (3.11) и (3.12) и формулы суммирования по частям следует равенство

$$(\Delta\hat{u}, \hat{u}) = -(\nabla\hat{u}, \nabla\hat{u}) = -\|\hat{u}_x\|^2.$$

Нелинейное слагаемое в (3.20) равно нулю в силу определения оператора $\mathcal{N}$, краевых условий (3.11) на $\mathbf{u}$, уравнения (3.9), а также в силу тождества (3.5):

$$(\mathcal{N}(\mathbf{u}, \hat{u}), \hat{u}) = -\frac{1}{2}(\hat{u}^2, \operatorname{div} \mathbf{u}) = 0.$$

Слагаемое с градиентом давления преобразуем следующим образом:

$$(\nabla'\hat{p}, \hat{u}) = -(\hat{p}, \operatorname{div}' \hat{u}) = (\hat{p}, \nabla_z \hat{u}_3) = -(\nabla_z \hat{p}, \hat{u}_3).$$

Таким образом, из равенства (3.20) получаем

$$\|\hat{u}\|^2 - \|u\|^2 + \tau^2\|u_\tau\|^2 + 2\nu\tau\|\hat{u}_x\|^2 = -2\tau(\nabla_z \hat{p}, \hat{u}_3). \quad (3.21)$$

Оценим правую часть с помощью неравенств Гёльдера и Юнга:

$$|(\nabla_z \hat{p}, \hat{u}_3)| \leq \|\nabla_z \hat{p}\| \|\hat{u}_3\| \leq c\|\hat{u}_x\| \leq \varepsilon\|\hat{u}_x\|^2 + \frac{c}{\varepsilon};$$

здесь $\hat{u}_3$ была оценена с помощью неравенства из предложения 3.1. Полагая $\varepsilon = \nu/2$ и подставляя результат в (3.21), получим

$$\|\hat{u}\|^2 - \|u\|^2 + \tau^2\|u_\tau\|^2 + \nu\tau\|\hat{u}_x\|^2 \leq c\tau. \quad (3.22)$$

Просуммировав (3.22) по m от $m = 0$ до $m_1 - 1$, получим

$$\|u^{m_1}\|^2 + \tau^2 \sum_{m=1}^{m_1} \|u_\tau^m\|^2 + \tau\nu \sum_{m=1}^{m_1} \|u_x^m\|^2 \leq \|u_0\|^2 + c \frac{m_1}{M}.$$

Полагая $m_1 = M$, получаем вторую оценку в (3.19).

Отбрасывая из левой части последнего равенства слагаемые с суммами и беря максимум по $m_1 = 1, \dots, M$, получим первую оценку в (3.19). Таким образом, лемма доказана.

Из леммы 3.2 и предложения 3.1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Для третьей компоненты скорости и ее разделенной разности по вертикальной переменной имеет место оценка*

$$\tau \sum_{m=0}^M (\|u_3^m\|^2 + \|\nabla_z u_3^m\|^2) \leq c. \quad (3.23)$$

ТЕОРЕМА 3.1. *Для решения системы (3.7)–(3.10), (3.11)–(3.13) справедливо неравенство*

$$\|\hat{p}\| \leq c(\|\hat{u}_{x'}\| + \|u_{x'}\| + 1). \quad (3.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично дифференциальному случаю представим $\hat{p}$ в виде $\hat{p} = p_1 + p_2$, где

$$p_1(x', t + \tau) = \sum_{n=-1}^N h p\left(x', nh + \frac{h}{2}, t + \tau\right), \quad x' \in \mathcal{U}'_h, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Из этого представления следует, что

$$\sum_{n=-1}^N p_2\left(x', nh + \frac{h}{2}, t + \tau\right) = 0, \quad x' \in \mathcal{U}'_h, \quad t \in \mathbb{T}, \quad \text{и} \quad \nabla_z p = \nabla_z p_2. \quad (3.25)$$

В частности, поскольку сумма в последнем соотношении равна нулю, то имеет место цепочка неравенств

$$\|p_2\| \leq c\|\nabla_z p_2\| = c\|\nabla_z p\| = c,$$

где первая оценка следует из утверждения 3.1.

Поскольку p из уравнений (3.7)–(3.10) определяется с точностью до аддитивной константы, выберем эту константу таким образом, чтобы $(p_1, 1) = 0$. Пусть функция $\tilde{p} = \tilde{p}(x')$ является решением следующей задачи в двумерной сеточной области $\mathcal{U}'_h$:

$$\Delta \tilde{p} = p_1, \quad \nabla_n \tilde{p}|_{\partial \mathcal{U}'_h} = 0, \quad (\tilde{p}, 1)_{\mathcal{U}'_h} = 0.$$

Для нее имеет место оценка $\|\tilde{p}\| \leq c\|p_1\|$.

Умножим первое уравнение системы (3.7) скалярно на $\nabla' \tilde{p}$:

$$(u_\tau, \nabla' \tilde{p}) - \nu(\Delta \hat{u}, \nabla' \tilde{p}) + (\mathcal{N}(\mathbf{u}, \hat{u}), \nabla' \tilde{p}) + (\ell \hat{u}, \nabla' \tilde{p}) + (\nabla' \hat{p}, \nabla' \tilde{p}) = 0.$$

Так как $\tilde{p}$ не зависит от z , а краевые условия (3.11) и (3.12) не зависят от времени, то

$$(u_\tau, \nabla' \tilde{p}) = -(\operatorname{div}' u_\tau, \tilde{p}) = (\nabla_z u_{3\tau}, \tilde{p}) = 0.$$

Далее,

$$(\hat{u}_{\bar{z}z}, \nabla' \tilde{p}) = -(\nabla_z \hat{u}, \nabla' \tilde{p})_{\Gamma_{3,h}^1 \times \Gamma_{3,h}^2} = 0.$$

Представим u в виде $u = e + w$, где

$$e(x', t) = \sum_{n=0}^{N-1} hu\left(x', nh + \frac{h}{2}, t\right) \implies \sum_{n=0}^{N-1} w\left(x', nh + \frac{h}{2}, t\right) = 0 \quad \forall x', \forall t. \quad (3.26)$$

В силу (3.9) и краевых условий (3.11) имеет место тождество

$$\begin{aligned} \operatorname{div}' e(x') &= \sum_{n=0}^{N-1} h \operatorname{div}' u\left(x', nh + \frac{h}{2}\right) \\ &= -\sum_{n=0}^{N-1} h \nabla_z u_3(x', nh) = -u_3(x', nh)\Big|_{n=0}^N = 0 \quad \forall x'. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Оператор Лапласа может быть представлен в следующем виде:

$$\Delta' = \nabla' \operatorname{div}' - \mathbf{rot}' \operatorname{rot}'. \quad (3.28)$$

Тогда из (3.26)–(3.28), а также из краевых условий (3.12) и (3.11) для u на S следует цепочка равенств

$$\begin{aligned} (\Delta' \hat{u}, \nabla' \tilde{p}) &= (\Delta' (\hat{e} + \hat{w}), \nabla' \tilde{p}) = -(\mathbf{rot}' \operatorname{rot}' \hat{e}, \nabla' \tilde{p}) = -(\mathbf{rot}' \operatorname{rot}' \hat{u}, \nabla' \tilde{p}) \\ &= -(\operatorname{rot}' \hat{u}, \mathbf{rot}' \nabla' \tilde{p}) - (\operatorname{rot}' \hat{u}, n \times \nabla' \tilde{p})_S = -(\nabla_{x_1} \hat{u}_2 - \nabla_{x_2} \hat{u}_1, n \times \nabla' \tilde{p})_S = 0. \end{aligned}$$

Используя лемму 3.2, оценим слагаемые в (3.7):

$$\begin{aligned} |(\ell \hat{u}, \nabla' \tilde{p})| &\leq c \|\hat{u}\| \|\nabla' \tilde{p}\| \leq c \|\hat{u}\| \|p_1\| \leq c \|p_1\|, \\ (\nabla' \hat{p}, \nabla' \tilde{p}) &= -(\hat{p}, \operatorname{div}' \nabla' \tilde{p}) = -(\hat{p}, \Delta' \tilde{p}) = -\|p_1\|^2 - (p_2, p_1). \end{aligned}$$

Последний член в этом выражении равен нулю, поскольку

$$(\hat{p}_2, p_1) = \sum_{x' \in \mathcal{U}'_h} \sum_{n=-1}^N p_2\left(x', nh + \frac{h}{2}\right) p_1(x') = \sum_{x' \in \mathcal{U}'_h} p_1(x') \sum_{n=-1}^N p_2\left(x', nh + \frac{h}{2}\right) = 0.$$

Здесь мы воспользовались соотношением (3.25) и тем фактом, что p_1 является функцией только двух пространственных переменных.

Наконец, в силу краевых условий для $\mathbf{u}$ и тождества (3.5) имеем

$$(\mathcal{N}(\mathbf{u}, \hat{u}), \nabla' \tilde{p}) = -(\mathcal{N}(\mathbf{u}, \nabla' \tilde{p}), \hat{u}) - (\operatorname{div} \mathbf{u}, \hat{u} \cdot \nabla' \tilde{p}) = -(\mathcal{N}'(u, \nabla' \tilde{p}), \hat{u}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 |(\mathcal{N}(\mathbf{u}, \widehat{u}), \nabla' \widehat{p})| &= |(\mathcal{N}'(\mathbf{u}, \nabla' \widehat{p}), \widehat{u})| \leq c \sum_{n=0}^{N-1} (|u \widehat{u}|, |\nabla' \nabla' \widehat{p}|)' \\
 &\leq c \sum_{n=0}^{N-1} |u|_4 |\widehat{u}|_4 |p_1| \leq c \|p_1\| \sum_{n=0}^{N-1} (|u_{x'}|^{1/2} + |u|^{1/2}) |u|^{1/2} (|\widehat{u}_{x'}|^{1/2} + |\widehat{u}|^{1/2}) |\widehat{u}|^{1/2} \\
 &\leq c \|p_1\| (\|\widehat{u}_{x'}\| + \|u_{x'}\| + 1).
 \end{aligned}$$

Из вышеперечисленных оценок следует неравенство

$$\|p_1\|^2 \leq c \|p_1\| (\|\widehat{u}_{x'}\| + \|u_{x'}\| + 1), \quad (3.29)$$

которое завершает доказательство теоремы.

Из этой теоремы и второго неравенства леммы 3.2 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Верна следующая оценка для давления:*

$$\tau \sum_{m=0}^M \|p^m\|^2 \leq c. \quad (3.30)$$

3.3.2. Существование и единственность решения разностной схемы. Покажем, что решение задачи (3.7)–(3.10), (3.11)–(3.13) всегда существует и единственно. Вначале докажем единственность решения.

ЛЕММА 3.3. *Если $(\mathbf{u}_1, p_1, r_1)$ и $(\mathbf{u}_2, p_2, r_2)$ – два решения задачи (3.7)–(3.10), (3.11)–(3.13), то они совпадают (с точностью до аддитивной пространственной константы в давлении).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разность двух решений

$$(\mathbf{u}, p, r) = (\mathbf{u}_1, p_1, r_1) - (\mathbf{u}_2, p_2, r_2).$$

Она будет удовлетворять следующей системе уравнений с краевыми и начальными условиями:

$$u_\tau - \nu \Delta \widehat{u} + \mathcal{N}(\mathbf{u}_1, \widehat{u}) + \mathcal{N}(\mathbf{u}, \widehat{u}_2) + \ell \widehat{u} + \nabla' \widehat{p} = 0, \quad (3.31)$$

$$\nabla_z p + g[r]_z = 0, \quad (3.32)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (3.33)$$

$$r_\tau - \nu_1 \Delta \widehat{r} + \mathcal{M}(\mathbf{u}_1, \widehat{r}) + \mathcal{M}(\mathbf{u}, \widehat{r}_2) = 0, \quad (3.34)$$

$$u_k = 0, \quad \nabla_k r = 0 \quad \text{на } \Sigma_{k,h}^k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.35)$$

$$\nabla_i u_{3-i} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{i,h}^{3-i}, \quad \nabla_3 u_i = 0 \quad \text{на } \Gamma_{3,h}^i, \quad i = 1, 2, \quad (3.36)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad r(x, 0) = 0. \quad (3.37)$$

Доказательство настоящей леммы будем проводить по индукции по временным слоям. Из начальных данных (3.37) следует, что на временном слое $t = 0$ решения совпадают, так как давление (с точностью до константы) и третья

компонента скорости однозначно восстанавливаются по r и u . Теперь покажем, что если решения совпадают на временном слое m ,

$$(\mathbf{u}^m, p^m, r^m) = (\mathbf{0}, c, 0), \quad (3.38)$$

то они совпадают и на слое $m + 1$.

Умножим уравнение (3.34) скалярно на $2\tau\hat{r}$:

$$(r_\tau, 2\tau\hat{r}) - \nu_1(\Delta\hat{r}, 2\tau\hat{r}) + (\mathcal{M}(\mathbf{u}_1, \hat{r}), 2\tau\hat{r}) + (\mathcal{M}(\mathbf{u}, \hat{r}_2), 2\tau\hat{r}) = 0. \quad (3.39)$$

Используя тождество $2\hat{r} = \tau r_\tau + (\hat{r} + r)$ и (3.38), преобразуем первое слагаемое (3.39) к виду

$$(r_\tau, 2\tau\hat{r}) = \|\hat{r}\|^2 + \tau^2\|r_\tau\|^2.$$

Второе слагаемое (3.39) преобразуется с помощью (3.2):

$$(\Delta\hat{r}, \hat{r}) = -(\nabla\hat{r}, \nabla\hat{r}) = -\|\hat{r}_x\|^2;$$

здесь мы использовали краевое условие (3.35). Последнее слагаемое (3.39) равно нулю в силу (3.38). Предпоследнее слагаемое также равно нулю по аналогии с леммой 3.1:

$$(\mathcal{M}(\mathbf{u}_2, \hat{r}), \hat{r}) = -\frac{1}{2}(\hat{r}^2, \operatorname{div} \mathbf{u}_2) = 0.$$

Таким образом, уравнение (3.39) принимает вид

$$\|\hat{r}\|^2 + \tau^2\|r_\tau\|^2 + 2\tau\nu_1\|\hat{r}_x\|^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $\|r^{m+1}\| = 0$.

Теперь умножим уравнение (3.31) скалярно на $2\tau\hat{u}$:

$$\begin{aligned} (u_\tau, 2\tau\hat{u}) - 2\nu\tau(\Delta\hat{u}, \hat{u}) + 2\tau(\mathcal{N}(\mathbf{u}_1, \hat{u}), \hat{u}) \\ + 2\tau(\mathcal{N}(\mathbf{u}, \hat{u}), \hat{u}_2) + 2\tau(\ell\hat{u}, \hat{u}) + 2\tau(\nabla'\hat{p}, \hat{u}) = 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Из кососимметричности оператора ℓ следует, что $(\ell\hat{u}, \hat{u}) = 0$. Из тождеств $2\hat{u} = \tau u_\tau + (\hat{u} + u)$, а также (3.38) вытекает, что первое слагаемое (3.40) имеет вид

$$(u_\tau, 2\tau\hat{u}) = \|\hat{u}\|^2 + \tau^2\|u_\tau\|^2.$$

Используя формулу суммирования по частям, краевые условия (3.35) и (3.36), получаем

$$(\Delta\hat{u}, \hat{u}) = -(\nabla\hat{u}, \nabla\hat{u}) = -\|\hat{u}_x\|^2.$$

Оба нелинейных слагаемых в (3.40) равны нулю в силу определения оператора $\mathcal{N}$, краевых условий (3.11) на $\mathbf{u}_1$, уравнения (3.9), тождества (3.5), а также (3.38):

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}(\mathbf{u}_1, \hat{u}), \hat{u}) &= -\frac{1}{2}(\hat{u}^2, \operatorname{div} \mathbf{u}_1) = 0, \\ (\mathcal{N}(\mathbf{u}, \hat{u}), \hat{u}_2) &= (\mathcal{N}(\mathbf{0}, \hat{u}), \hat{u}_2) = 0. \end{aligned}$$

Слагаемое с градиентом давления в (3.40) также равно нулю, поскольку мы уже получили ранее, что $\hat{r} = 0$:

$$(\nabla' \hat{p}, \hat{u}) = -(\hat{p}, \operatorname{div}' \hat{u}) = (\hat{p}, \nabla_z \hat{u}_3) = -(\nabla_z \hat{p}, \hat{u}_3) = (g[\hat{r}]_z, \hat{u}_3) = 0.$$

Таким образом, из равенства (3.40) получаем

$$\|\hat{u}\|^2 + \tau^2 \|u_\tau\|^2 + 2\nu\tau \|\hat{u}_x\|^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $\|u^{m+1}\| = 0$. Как уже отмечалось ранее, поскольку p^{m+1} (с точностью до константы) и u_3^{m+1} однозначно восстанавливаются по r^{m+1} и u^{m+1} , то лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.2. *Решение системы уравнений (3.7)–(3.10), (3.11)–(3.13) существует и единственно (с точностью до пространственной аддитивной константы в давлении).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственность была доказана в лемме 3.3. Существование решения докажем индукцией по временным слоям. Предположим, что решение существует на временном слое m , и покажем, что оно существует на слое $m+1$.

Заметим, что система (3.7)–(3.10), (3.11)–(3.13) является линейной относительно $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}, \hat{r})$. А из леммы 3.3 следует, что оператор этой системы алгебраических уравнений имеет одномерное ядро. Теорема о размерностях ядра и образа линейного отображения завершает доказательство.

3.3.3. Аппроксимация. Разностная схема (3.7)–(3.10), (3.11)–(3.13) аппроксимирует задачу (2.1)–(2.4), (2.5)–(2.7) с порядком $\tau + h^2$. Этот факт непосредственно следует из аппроксимационных свойств операторов ∇ , div , Δ , $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$. Предположим, что решение задачи (2.1)–(2.4), (2.5)–(2.7) достаточно гладко. Пусть $(\mathbf{U}, P, R)$ – проекция этого решения на сетку Q^h . Тогда, подставив ее в (3.7)–(3.10), (3.11)–(3.13), получим

$$U_t - \nu \Delta \hat{U} + \mathcal{N}(\mathbf{U}, \hat{U}) + \ell \hat{U} + \nabla' \hat{P} = \varphi, \quad (3.41)$$

$$\nabla_z P + g[R]_z = \psi, \quad (3.42)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = \xi, \quad (3.43)$$

$$R_\tau - \nu_1 \Delta \hat{R} + \mathcal{M}(\mathbf{U}, \hat{R}) = \eta. \quad (3.44)$$

$$U_k = 0, \quad \nabla_k R = O(h^2) \quad \text{на } \Sigma_{k,h}^k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.45)$$

$$\nabla_i U_{3-i} = O(h^2) \quad \text{на } \Gamma_{i,h}^{3-i}, \quad \nabla_3 U_i = O(h^2) \quad \text{на } \Gamma_{3,h}^i, \quad i = 1, 2, \quad (3.46)$$

где $\varphi = O(h^2 + \tau)$, $\psi = O(h^2)$, $\xi = O(h^2)$ и $\eta = O(h^2 + \tau)$.

§ 4. Сходимость

Перейдем к исследованию сходимости решения разностной схемы (3.7)–(3.10), (3.11)–(3.13) к решению примитивных уравнений (2.1)–(2.4), (2.5)–(2.7). Пусть $(\mathbf{U}, P, R)$ является проекцией решения (2.1)–(2.4), (2.5)–(2.7) на сетку Q^h , а

$(\mathbf{u}, p, r)$ – решением разностной задачи (3.7)–(3.10), (3.11)–(3.13). Рассмотрим ошибку

$$(\mathbf{v}, q, \rho) = (\mathbf{U} - \mathbf{u}, P - p, R - r). \quad (4.1)$$

Она является решением следующей задачи:

$$v_\tau - \nu \Delta \hat{v} + \mathcal{N}(\mathbf{u}, \hat{v}) + \mathcal{N}(\mathbf{v}, \hat{U}) + \ell \hat{v} + \nabla' \hat{q} = \varphi, \quad (4.2)$$

$$\nabla_z q + g[\rho]_z = \psi, \quad (4.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \xi, \quad (4.4)$$

$$\rho_\tau - \nu_1 \Delta \hat{\rho} + \mathcal{M}(\mathbf{u}, \hat{\rho}) + \mathcal{M}(\mathbf{v}, \hat{R}) = \eta. \quad (4.5)$$

$$v_k = 0, \quad \nabla_k \rho = O(h^2) \quad \text{на } \Sigma_{k,h}^k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.6)$$

$$\nabla_i v_{3-i} = O(h^2) \quad \text{на } \Gamma_{i,h}^{3-i}, \quad \nabla_3 v_i = O(h^2) \quad \text{на } \Gamma_{3,h}^i, \quad i = 1, 2, \quad (4.7)$$

$$v(x, 0) = \delta U_0(x), \quad \rho(x, 0) = 0. \quad (4.8)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть ζ, f – сеточные функции, определенные на сетках $\partial\Omega^h$ и $\overline{\Omega}^h$ соответственно, причем $|\zeta|_{\partial\Omega^h, \infty} = O(h^2)$. Тогда имеет место оценка

$$|(\zeta, f)_{\partial\Omega^h}| \leq ch^{3/2} \|f\|. \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедлива цепочка неравенств

$$|(\zeta, f)_{\partial\Omega^h}| \leq |\zeta| |f| \leq ch^2 (\|f\| h^{-1/2}) = ch^{3/2} \|f\|;$$

здесь мы воспользовались определениями $l_{2,h}$ норм для двумерных и трехмерных сеток. Предложение доказано.

Аналогично предложению 3.1 можно доказать следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Для третьей компоненты вектора ошибки скоростей v_3 имеет место соотношение

$$\|v_3\| \leq c \|v_{x'}\| + c \|\xi\|. \quad (4.10)$$

Следующая лемма играет основную роль в получении показателя степени сходимости схемы по h .

ЛЕММА 4.1. Для ошибки давления справедлива оценка

$$\|\hat{q}\| \leq c((\|\hat{v}_{x'}\| + \|\hat{v}\|)(\|u_{x'}\| + 1) + \|v_{x'}\| + \|v\| + \|\hat{\rho}\| + \tau + h^{3/2}). \quad (4.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим q в виде $q = q_1 + q_2$, где

$$q_1(x', t) = \sum_{n=-1}^N h q \left(x', nh + \frac{h}{2}, t \right), \quad x' \in \mathcal{U}'_h, \quad t \in \overline{\mathbb{T}}.$$

Из этого представления следует, что

$$\sum_{n=-1}^N q_2 \left(x', nh + \frac{h}{2}, t \right) = 0, \quad x' \in \mathcal{U}'_h, \quad t \in \overline{\mathbb{T}}, \quad \text{и} \quad \nabla_z q = \nabla_z q_2. \quad (4.12)$$

В частности, поскольку эта сумма равна нулю, то имеет место цепочка соотношений

$$\|q_2\| \leq c\|\nabla_z q_2\| = c\|\nabla_z q\| = c(\|\rho\| + \|\psi\|) \leq c\|\rho\| + ch^2;$$

здесь первое соотношение доказывается аналогично доказательству предложения 3.1.

Поскольку q из уравнений (4.2)–(4.5) определяется с точностью до постоянного слагаемого, выберем эту константу таким образом, чтобы $(q_1, 1) = 0$. Пусть функция $\tilde{q} = \tilde{q}(x')$ является решением следующей задачи в двумерной сеточной области $\mathcal{U}'_h$:

$$\Delta' \tilde{q} = \hat{q}_1, \quad \nabla_n \tilde{q}|_{\partial \mathcal{U}'_h} = 0, \quad (\tilde{q}, 1)_{\mathcal{U}'_h} = 0.$$

Для решения этой задачи имеет место оценка $\|\tilde{q}\| \leq c\|\hat{q}_1\|$.

Умножим первое уравнение системы (4.2) скалярно на $\nabla' \tilde{q}$:

$$\begin{aligned} (v_\tau, \nabla' \tilde{q}) - \nu(\Delta \hat{v}, \nabla' \tilde{q}) + (\mathcal{N}(\mathbf{u}, \hat{v}), \nabla' \tilde{q}) + (\mathcal{N}(\mathbf{v}, \hat{U}), \nabla' \tilde{q}) \\ + (\ell \hat{v}, \nabla' \tilde{q}) + (\nabla' \hat{q}, \nabla' \tilde{q}) = (\varphi, \nabla' \tilde{q}). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Рассмотрим первое слагаемое. Используя тот факт, что $\tilde{q}$ не зависит от z , а краевые условия системы (4.6) и (4.7) не зависят от времени, данное слагаемое преобразуем следующим образом:

$$(v_\tau, \nabla' \tilde{q}) = -(\operatorname{div}' v_\tau, \tilde{q}) = (\nabla_z v_{3\tau}, \tilde{q}) - (\xi_\tau, \tilde{q}) = -(\xi_\tau, \tilde{q}).$$

Из аппроксимационных свойств операторов div и ∇_t и (3.43) следует соотношение

$$\xi_\tau = \nabla_t \operatorname{div} U = O(h^2 + \tau).$$

Таким образом,

$$|(v_\tau, \nabla' \tilde{q})| \leq \|\xi_\tau\| \|\tilde{q}\| \leq c(h^2 + \tau) \|\hat{q}_1\|.$$

Далее, поскольку $\tilde{q}$ не зависит от z , то справедливо равенство

$$(\hat{v}_{\bar{z}z}, \nabla' \tilde{q}) = -(\nabla_z \hat{v}, \nabla' \tilde{q})_{\Gamma_{3,h}^1 \times \Gamma_{3,h}^2}.$$

Отсюда, используя (4.7), получаем

$$|(\hat{v}_{\bar{z}z}, \nabla' \tilde{q})| \leq ch^2 |\nabla' \tilde{q}| = ch^2 \|\nabla' \tilde{q}\| \leq ch^2 \|\hat{q}_1\|.$$

Вторую часть оператора Лапласа преобразуем, используя тождество (3.28):

$$\begin{aligned} (\Delta' \hat{v}, \nabla' \tilde{q}) &= (\nabla' \operatorname{div}' \hat{v}, \nabla' \tilde{q}) - (\mathbf{rot}' \operatorname{rot}' \hat{v}, \nabla' \tilde{q}) \\ &= -(\operatorname{div}' \hat{v}, \Delta' \tilde{q}) - (\operatorname{rot}' \hat{v}, \mathbf{rot}' \nabla' \tilde{q}) - (\operatorname{rot}' \hat{v}, n \times \nabla' \tilde{q})_S \\ &= -(\operatorname{div}' \hat{v}, \hat{q}_1) - (\nabla_{x_1} \hat{v}_2 - \nabla_{x_2} \hat{v}_1, n \times \nabla' \tilde{q})_S. \end{aligned}$$

Полученное выше выражение нетрудно оценить, используя краевые условия (4.7) и предложение 4.1, что дает

$$|(\Delta' \hat{v}, \nabla' \tilde{q})| \leq c\|\hat{v}_{x'}\| \|\hat{q}_1\| + ch^{3/2} \|\hat{q}_1\|.$$

Остальные слагаемые в (4.13) оцениваются следующим образом:

$$\begin{aligned} |(\ell\hat{v}, \nabla' \tilde{q})| &\leq c\|\hat{v}\| \|\nabla' \tilde{q}\| \leq c\|\hat{v}\| \|\hat{q}_1\|, \\ (\nabla' \hat{q}, \nabla' \tilde{q}) &= -(\hat{q}, \operatorname{div}' \nabla' \tilde{q}) = -(\hat{q}, \Delta' \tilde{q}) = -\|\hat{q}_1\|^2 - (\hat{q}_2, \hat{q}_1). \end{aligned}$$

Последний член в этом выражении равен нулю, поскольку

$$(\hat{q}_2, \hat{q}_1) = \sum_{x' \in \mathcal{U}'_h} \sum_{n=-1}^N \hat{q}_2\left(x', nh + \frac{h}{2}\right) \hat{q}_1(x') = \sum_{x' \in \mathcal{U}'_h} \hat{q}_1(x') \sum_{n=-1}^N \hat{q}_2\left(x', nh + \frac{h}{2}\right) = 0.$$

Здесь мы воспользовались первым свойством (4.12) и тем фактом, что $\hat{q}_1$ является функцией только двух пространственных переменных.

Правая часть (4.13) оценивается тривиально:

$$|(\varphi, \nabla' \tilde{q})| \leq \|\varphi\| \|\nabla' \tilde{q}\| \leq c(\tau + h^2) \|\hat{q}_1\|.$$

Наконец, в силу краевых условий на $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, а также тождества (3.5) имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}(\mathbf{u}, \hat{v}), \nabla' \tilde{q}) &= -(\mathcal{N}(\mathbf{u}, \nabla' \tilde{q}), \hat{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{u}, \hat{v} \cdot \nabla' \tilde{q}) = -(\mathcal{N}'(u, \nabla' \tilde{q}), \hat{v}), \\ (\mathcal{N}(\mathbf{v}, \hat{U}), \nabla' \tilde{q}) &= -(\mathcal{N}(\mathbf{v}, \nabla' \tilde{q}), \hat{U}) - (\operatorname{div} \mathbf{v}, \hat{U} \cdot \nabla' \tilde{q}) \\ &= -(\xi, \hat{U} \cdot \nabla' \tilde{q}) - (\mathcal{N}'(v, \nabla' \tilde{q}), \hat{U}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |(\mathcal{N}(\mathbf{u}, \hat{v}), \nabla' \tilde{q})| &= |(\mathcal{N}'(u, \nabla' \tilde{q}), \hat{v})| \leq \|u\|_4 \|\hat{v}\|_4 \|\nabla' \nabla' \tilde{q}\| \\ &\leq c\|\hat{q}_1\| (\|u_{x'}\|^{3/4} + \|u\|^{3/4}) \|u\|^{1/4} (\|\hat{v}_{x'}\|^{3/4} + \|\hat{v}\|^{3/4}) \|\hat{v}\|^{1/4}, \end{aligned}$$

здесь мы воспользовались сеточным аналогом неравенства [2]

$$\|v\|_4 \leq c(\|v_{x'}\|^{3/4} + \|v\|^{3/4}) \|v\|^{1/4}. \quad (4.14)$$

Применяя дважды неравенства Юнга с коэффициентами 4/3 и 4 и лемму 3.2, получаем окончательную оценку данного слагаемого

$$|(\mathcal{N}(\mathbf{u}, \hat{v}), \nabla' \tilde{q})| \leq c\|\hat{q}_1\| (\|u_{x'}\| + 1) (\|\hat{v}_{x'}\| + \|\hat{v}\|).$$

Используя теорему 2.1 об ограниченности норм $\|\hat{U}\|_4$ и $\|\hat{U}\|$, аналогично получаем

$$\begin{aligned} |(\mathcal{N}(\mathbf{v}, \hat{U}), \nabla' \tilde{q})| &\leq |(\xi, \hat{U} \cdot \nabla' \tilde{q})| + |(\mathcal{N}'(v, \nabla' \tilde{q}), \hat{U})| \\ &\leq \|\xi\|_\infty \|\hat{U}\| \|\hat{q}_1\| + \|v\|_4 \|\hat{U}\|_4 \|\nabla' \nabla' \tilde{q}\| \leq c\|\hat{q}_1\| (\|v_{x'}\| + \|v\| + h^2). \end{aligned}$$

Из вышеперечисленных оценок следует неравенство

$$\|\hat{q}_1\|^2 \leq c\|\hat{q}_1\| ((\|\hat{v}_{x'}\| + \|\hat{v}\|)(\|u_{x'}\| + 1) + \|v_{x'}\| + \|v\| + \|\hat{\rho}\| + \tau + h^{3/2}),$$

которое и доказывает лемму.

Имеет место

ТЕОРЕМА 4.1. *Решения разностных схем (3.7)–(3.10), (3.11)–(3.13) сходятся с порядком $O(\tau + h^{3/2})$ к решению примитивных уравнений (2.1)–(2.4), (2.5)–(2.7).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнение (4.2) скалярно на $2\tau\hat{v}$. После очевидных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \|\hat{v}\|^2 - \|v\|^2 + \tau^2\|v_\tau\|^2 - 2\tau\nu(\Delta\hat{v}, \hat{v}) + 2\tau(\mathcal{N}(\mathbf{u}, \hat{v}), \hat{v}) \\ + 2\tau(\mathcal{N}(\mathbf{v}, \hat{U}), \hat{v}) + 2\tau(\nabla'\hat{q}, \hat{v}) = 2\tau(\varphi, \hat{v}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Преобразуем и оценим каждое из слагаемых в (4.15). Применяя формулы суммирования по частям (3.3), получим

$$(\Delta\hat{v}, \hat{v}) = -\|\hat{v}_x\|^2 + (\nabla_n\hat{v}, \hat{v})_{S^h} + (\nabla_z\hat{v}, \hat{v})_{S_1^h}.$$

В силу краевых условий (4.7) и предложения 4.1 имеет место оценка

$$|(\nabla_n\hat{v}, \hat{v})_{S^h} + (\nabla_z\hat{v}, \hat{v})_{S_1^h}| \leq ch^{3/2}\|\hat{v}\| \leq c\|\hat{v}\|^2 + ch^3.$$

Далее, первое нелинейное слагаемое равно нулю, так как уравнение неразрывности (3.9) и краевые условия (3.11) для $\mathbf{u}$ выполняются точно:

$$(\mathcal{N}(\mathbf{u}, \hat{v}), \hat{v}) = -\frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u}, \hat{v}^2) = 0;$$

здесь мы также использовали тождество (3.5).

Учитывая точное выполнение краевых условий (4.6) для ошибки $\mathbf{v}$, следующее слагаемое соотношения (4.15) может быть преобразовано следующим образом:

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}(\mathbf{v}, \hat{U}), \hat{v}) &= (\mathcal{N}'(v, \hat{U}), \hat{v}) + (\mathcal{N}_3(v_3, \hat{U}), \hat{v}) \\ &= -(\operatorname{div}' v, \hat{v} \cdot \hat{U}) - (\mathcal{N}'(v, \hat{v}), \hat{U}) + (\mathcal{N}_3(v_3, \hat{U}), \hat{v}), \end{aligned} \quad (4.16)$$

где $\mathcal{N}_3$ – третья компонента оператора $\mathcal{N}$.

Оценим отдельно каждое слагаемое в (4.16):

$$\begin{aligned} |(\operatorname{div}' v, \hat{v} \cdot \hat{U})| &\leq \|v_{x'}\| \|\hat{v}\|_4 \|\hat{U}\|_4 \leq c\|v_{x'}\| (\|\hat{v}_x\|^{3/4} + \|\hat{v}\|^{3/4}) \|\hat{v}\|^{1/4} \\ &\leq \varepsilon_1 \|\hat{v}_x\|^2 + \varepsilon_2 \|v_x\|^2 + c(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \|\hat{v}\|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(\mathcal{N}'(v, \hat{v}), \hat{U})| &\leq \|\hat{v}_{x'}\| \|v\|_4 \|\hat{U}\|_4 \leq c\|\hat{v}_{x'}\| (\|v_x\|^{3/4} + \|v\|^{3/4}) \|v\|^{1/4} \\ &\leq \varepsilon_1 \|\hat{v}_x\|^2 + \varepsilon_2 \|v_x\|^2 + c(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \|v\|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(\mathcal{N}_3(v_3, \hat{U}), \hat{v})| &\leq \|v_3\| \|\hat{U}_z\|_4 \|\hat{v}\|_4 \leq c(\|v_{x'}\| + \|\xi\|) (\|\hat{v}_x\|^{3/4} + \|\hat{v}\|^{3/4}) \|\hat{v}\|^{1/4} \\ &\leq \varepsilon_1 \|\hat{v}_x\|^2 + \varepsilon_2 \|v_x\|^2 + c(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \|\hat{v}\|^2 + c(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \|\xi\|^2. \end{aligned}$$

Для их вывода мы воспользовались неравенствами Гёльдера, Юнга, (4.14), а также предложением 4.2. Отсюда следует оценка

$$|(\mathcal{N}(\mathbf{v}, \hat{U}), \hat{v})| \leq 3\varepsilon_1 \|\hat{v}_x\|^2 + 3\varepsilon_2 \|v_x\|^2 + c(\varepsilon_1, \varepsilon_2) (\|\hat{v}\|^2 + \|v\|^2 + h^4).$$

Преобразуем слагаемое с градиентом давления:

$$\begin{aligned} (\nabla' \hat{q}, \hat{v}) &= -(\hat{q}, \operatorname{div}' \hat{v}) = (\hat{q}, \nabla_z \hat{v}_3) - (\hat{q}, \hat{\xi}) \\ &= -(\nabla_z \hat{q}, \hat{v}_3) - (\hat{q}, \xi) = (\psi, \hat{v}_3) - ([\hat{\rho}]_z, \hat{v}_3) - (\hat{q}, \hat{\xi}). \end{aligned}$$

Оценим далее получившиеся слагаемые:

$$\begin{aligned} |([\hat{\rho}]_z, \hat{v}_3)| &\leq c \|\hat{\rho}\| \|\hat{v}_3\| \leq c \|\hat{\rho}\| (\|\hat{v}_x\| + \|\hat{\xi}\|) \leq c_{\varepsilon_1} \|\hat{\rho}\|^2 + \varepsilon_1 \|\hat{v}_x\|^2 + c \|\hat{\rho}\|^2 + ch^4, \\ |(\psi, \hat{v}_3)| &\leq c \|\psi\| (\|\hat{v}_x\| + \|\hat{\xi}\|) \leq \varepsilon_1 \|\hat{v}_x\|^2 + c_{\varepsilon_1}^4 h^4. \end{aligned}$$

Для оценки третьего слагаемого применим лемму 4.1. В результате получим

$$\begin{aligned} |(\hat{q}, \hat{\xi})| &\leq \|\hat{q}\| \|\hat{\xi}\| \leq ch^2 ((\|\hat{v}_{x'}\| + \|\hat{v}\|)(\|u_{x'}\| + 1) + \|v_{x'}\| + \|v\| + \|\hat{\rho}\| + \tau + h^{3/2}) \\ &\leq \varepsilon_1 \|\hat{v}_{x'}\|^2 + c \|\hat{v}\|^2 + c_{\varepsilon_1}^4 h^4 \|u_{x'}\|^2 \\ &\quad + \varepsilon_2 \|v_{x'}\|^2 + c \|v\|^2 + \|\hat{\rho}\|^2 + c\tau^2 + c(\varepsilon_1, \varepsilon_2) h^{7/2}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |(\nabla' \hat{q}, \hat{v})| &\leq c_{\varepsilon_1} \|\hat{\rho}\|^2 + 3\varepsilon_1 \|\hat{v}_x\|^2 + c \|\hat{v}\|^2 + c_{\varepsilon_1}^4 h^4 \|u_{x'}\|^2 \\ &\quad + \varepsilon_2 \|v_{x'}\|^2 + c \|v\|^2 + c\tau^2 + c(\varepsilon_1, \varepsilon_2) h^{7/2}. \end{aligned}$$

Правую часть (4.15) оценим тривиальным образом:

$$|(\varphi, \hat{v})| \leq \|\varphi\|_{\infty} \|\hat{v}\|_1 \leq c \|\hat{v}\|^2 + c(h^4 + \tau^2).$$

Учитывая все полученные выше оценки и подставляя их в (4.15), получим

$$\begin{aligned} \|\hat{v}\|^2 - \|v\|^2 + \tau^2 \|v_{\tau}\|^2 + 2\tau\nu \|\hat{v}_x\|^2 &\leq 2\tau(6\varepsilon_1 \|\hat{v}_x\|^2 + 4\varepsilon_2 \|v_x\|^2 \\ &\quad + c_{\varepsilon_1} (\|\hat{\rho}\|^2 + h^4 \|u_x\|^2) + c(\varepsilon_1, \varepsilon_2) (\|\hat{v}\|^2 + \|v\|^2 + h^3) + c\tau^2). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Теперь умножим уравнение (4.5) скалярно на $2\tau\hat{\rho}$. В результате получим

$$\begin{aligned} \|\hat{\rho}\|^2 - \|\rho\|^2 + \tau^2 \|\rho_{\tau}\|^2 - 2\tau\nu_1 (\Delta\hat{\rho}, \hat{\rho}) \\ + 2\tau(\mathcal{M}(\mathbf{u}, \hat{\rho}), \hat{\rho}) + 2\tau(\mathcal{M}(\mathbf{v}, \hat{R}), \hat{\rho}) = 2\tau(\eta, \hat{\rho}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Преобразуем и оценим каждое из слагаемых:

$$(\Delta\hat{\rho}, \hat{\rho}) = -\|\hat{\rho}_x\|^2 + (\nabla_n \hat{\rho}, \hat{\rho})_{\partial\Omega^h}.$$

Поскольку $\hat{\rho}$ удовлетворяет краевым условиям (4.7), то, используя предложение 4.1, получим

$$|(\nabla_n \hat{\rho}, \hat{\rho})_{\partial\Omega^h}| \leq ch^{3/2} \|\hat{\rho}\| \leq c \|\hat{\rho}\|^2 + ch^3.$$

Первое нелинейное слагаемое (4.19) равно нулю, так как уравнения неразрывности (3.9) и краевые условия (3.11) для $\mathbf{u}$ выполняются точно:

$$(\mathcal{M}(\mathbf{u}, \hat{\rho}), \hat{\rho}) = -\frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u}, \hat{\rho}^2) = 0.$$

Учитывая точное выполнение краевых условий (4.6) для ошибки $\mathbf{v}$, второе нелинейное слагаемое (4.19) представим в виде

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}(\mathbf{v}, \hat{R}), \hat{\rho}) &= (\mathcal{M}'(v, \hat{R}), \hat{\rho}) + (\mathcal{M}_3(v_3, \hat{R}), \hat{\rho}) \\ &= -(\operatorname{div}' v, \hat{\rho} \cdot \hat{R}) - (\mathcal{M}'(v, \hat{\rho}), \hat{R}) + (\mathcal{M}_3(v_3, \hat{R}), \hat{\rho}), \end{aligned} \quad (4.20)$$

где $\mathcal{M}_3$ – третья компонента оператора $\mathcal{M}$. Оценим отдельно каждое слагаемое в (4.20):

$$\begin{aligned} |(\operatorname{div}' v, \hat{\rho} \cdot \hat{R})| &\leq \|v_{x'}\| \|\hat{\rho}\|_4 \|\hat{R}\|_4 \leq c \|v_{x'}\| (\|\hat{\rho}_x\|^{3/4} + \|\hat{\rho}\|^{3/4}) \|\hat{\rho}\|^{1/4} \\ &\leq \varepsilon_3 \|\hat{\rho}_x\|^2 + \varepsilon_2 \|v_x\|^2 + c(\varepsilon_3, \varepsilon_4) \|\hat{\rho}\|^2, \\ |(\mathcal{M}'(v, \hat{\rho}), \hat{R})| &\leq \|\hat{\rho}_{x'}\| \|v\|_4 \|\hat{R}\|_4 \leq c \|\hat{\rho}_{x'}\| (\|v_x\|^{3/4} + \|v\|^{3/4}) \|v\|^{1/4} \\ &\leq \varepsilon_3 \|\hat{\rho}_x\|^2 + \varepsilon_2 \|v_x\|^2 + c(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \|v\|^2, \\ |(\mathcal{M}_3(v_3, \hat{R}), \hat{\rho})| &\leq \|v_3\| \|\hat{R}_z\|_4 \|\hat{\rho}\|_4 \leq c (\|v_{x'}\| + \|\xi\|) (\|\hat{\rho}_x\|^{3/4} + \|\hat{\rho}\|^{3/4}) \|\hat{\rho}\|^{1/4} \\ &\leq \varepsilon_3 \|\hat{\rho}_x\|^2 + \varepsilon_2 \|v_x\|^2 + c(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \|\hat{\rho}\|^2 + c(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \|\xi\|^2. \end{aligned}$$

Для их вывода мы воспользовались неравенствами Гёльдера, Юнга, (4.14), а также предложением 4.2. Отсюда следует оценка

$$|(\mathcal{M}(\mathbf{v}, \hat{R}), \hat{\rho})| \leq 3\varepsilon_3 \|\hat{\rho}_x\|^2 + 3\varepsilon_2 \|v_x\|^2 + c(\varepsilon_2, \varepsilon_3) (\|\hat{\rho}\|^2 + \|v\|^2 + h^4).$$

Наконец, оценим правую часть (4.19):

$$|(\eta, \hat{\rho})| \leq \|\eta\|_\infty \|\hat{\rho}\|_1 \leq c \|\hat{\rho}\|^2 + c(h^4 + \tau^2).$$

Учитывая полученные выше оценки, из (4.19) получаем

$$\begin{aligned} \|\hat{\rho}\|^2 - \|\rho\|^2 + \tau^2 \|\rho_\tau\|^2 + 2\tau\nu_1 \|\hat{\rho}_x\|^2 \\ \leq 2\tau(3\varepsilon_3 \|\hat{\rho}_x\|^2 + 3\varepsilon_2 \|v_x\|^2 + c(\varepsilon_2, \varepsilon_3) (\|\hat{\rho}\|^2 + \|v\|^2 + h^3) + c\tau^2). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Сложим неравенства (4.18) и (4.21). Получим

$$\begin{aligned} \|\hat{v}\|^2 - \|v\|^2 + \tau^2 \|v_\tau\|^2 + 2\tau\nu \|\hat{v}_x\|^2 + \|\hat{\rho}\|^2 - \|\rho\|^2 + \tau^2 \|\rho_\tau\|^2 + 2\tau\nu_1 \|\hat{\rho}_x\|^2 \\ \leq 2\tau(6\varepsilon_1 \|\hat{v}_x\|^2 + 7\varepsilon_2 \|v_x\|^2 + 3\varepsilon_3 \|\hat{\rho}_x\|^2 + c(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \|\hat{v}\|^2 \\ + c_{\varepsilon_1}^4 h^4 \|u_x\|^2 + c(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) (\|v\|^2 + \|\hat{\rho}\|^2 + h^3) + c\tau^2), \end{aligned} \quad (4.22)$$

где зависимость констант от $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ имеет вид

$$c(\bar{\varepsilon}) = c \left(1 + \sum_i \varepsilon_i^{-1} \right).$$

Уменьшим левую часть за счет слагаемых $\tau^2(\|v_\tau\|^2 + \|\rho_\tau\|^2)$, а также перенесем в левую часть нормы функций на верхнем слое, а в правую часть – на нижнем:

$$\begin{aligned} (1 - \tau c(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \|\hat{v}\|^2 + (1 - \tau c(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)) \|\hat{\rho}\|^2 \\ + 2\tau(\nu - 6\varepsilon_1) \|\hat{v}_x\|^2 + 2\tau(\nu_1 - 3\varepsilon_3) \|\hat{\rho}_x\|^2 \\ \leq (1 + \tau c(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)) \|v\|^2 + \|\rho\|^2 \\ + 2\tau(7\varepsilon_2 \|v_x\|^2 + c_{\varepsilon_1}^4 h^4 \|u_x\|^2 + c(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) h^3 + c\tau^2). \end{aligned}$$

Полагая в (4.22) $\varepsilon_1 = \nu/12$, $\varepsilon_2 = \nu/14$ и $\varepsilon_3 = \nu_1/3$, получим

$$\begin{aligned} & (1 - \tau c_1)(\|\widehat{v}\|^2 + \|\widehat{\rho}\|^2) + \tau\nu\|\widehat{v}_x\|^2 \\ & \leq (1 + \tau c_2)\|v\|^2 + \|\rho\|^2 + \tau(\nu\|v_x\|^2 + ch^4\|u_x\|^2 + ch^3 + c\tau^2). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Далее будем считать, что $\tau < \tau_0$, где τ_0 выбрано таким образом, чтобы

$$1 - \tau c_1 > 1 - \delta > 0 \quad \forall \tau < \tau_0, \quad \text{т.е.} \quad \tau_0 < \frac{\delta}{c_1}.$$

Тогда (4.23) примет вид

$$\begin{aligned} & \|\widehat{v}\|^2 + \|\widehat{\rho}\|^2 + \tau c_3\|\widehat{v}_x\|^2 \\ & \leq (1 + \tau c_4)(\|v\|^2 + \|\rho\|^2) + \tau(c_3\|v_x\|^2 + ch^4\|u_x\|^2 + ch^3 + c\tau^2). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Рассматривая неравенство (4.24) для $m = 0, \dots, M-1$, применяя дискретный аналог леммы Гронуолла и используя второе неравенство леммы 3.2, выводим неравенство

$$\max_{1 \leq m \leq M} (\|v^m\|^2 + \|\rho^m\|^2) + c\tau \sum_{m=0}^M \|v_x^m\|^2 \leq e^{cT}(\tau^2 + h^3).$$

Таким образом, теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Отметим, что слагаемое (4.17) можно было оценить проще, без использования оценки леммы 4.1. А именно, можно было представить q в виде $q = P - p$, а потом воспользоваться результатом теоремы 2.1: $\|\widehat{P}\| \leq c$, а также теоремой 3.1 и ее следствием 3.3. Однако в этом случае скорость сходимости была бы порядка $O(\tau + h)$. Таким образом, лемма 4.1 позволяет существенным образом улучшить оценку порядка сходимости схемы по h .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Отметим также, что порядок скорости сходимости $h^{3/2}$ принципиально обусловлен наличием погрешности порядка $O(h^2)$ при аппроксимации краевых условий (2.5) и (2.6), а также оценкой в предложении 4.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Отметим, что в условиях доказанной теоремы выражение $O(\tau + h^{3/2})$ имеет вид $C(\tau + h^{3/2})$, где $C = C(T)$.

Авторы благодарны В. П. Дымникову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] В. Л. Зотов, “Об одной разностной схеме для системы уравнений динамики атмосферы”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. кибернет.*, 1988, № 1, 14–22; англ. пер.: V. L. Zotov, “A difference scheme for a set of equations of the atmosphere dynamics”, *Moscow Univ. Comput. Math. Cybernet.*, 1988, № 1, 14–22.
- [2] Г. М. Кобельков, “Существование решения “в целом” для уравнений динамики океана”, *Докл. РАН*, **407**:4 (2006), 457–459; англ. пер.: G. M. Kobelkov, “Global existence of a solution to the ocean dynamics equations”, *Dokl. Math.*, **73**:2 (2006), 296–298.

- [3] G. M. Kobelkov, “Existence of a solution “in the large” for the 3D large-scale ocean dynamics equations”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **343**:4 (2006), 283–286.
- [4] G. M. Kobelkov, “Existence of a solution “in the large” for ocean dynamics equations”, *J. Math. Fluid Mech.*, **9**:4 (2007), 588–610.
- [5] A. V. Drutsa, “Existence “in the large” of a solution to primitive equations in a domain with uneven bottom”, *Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling*, **24**:6 (2009), 515–542.
- [6] C. Cao, E. S. Titi, “Global well-posedness of the three-dimensional viscous primitive equations of large scale ocean and atmosphere dynamics”, *Ann. of Math. (2)*, **166**:1 (2007), 245–267.
- [7] В. И. Лебедев, “Метод конечных сеток для уравнений типа С. Л. Соболева”, *Докл. АН СССР*, **114**:6 (1957), 1166–1169.

А. В. Друца (A. V. Drutsa)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: alexey@adrutsa.ru

Поступила в редакцию
07.06.2011 и 03.02.2012

Г. М. Кобельков (G. M. Kobelkov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова;
Институт вычислительной математики РАН, г. Москва
E-mail: kobelkov@dodo.inm.ras.ru