Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Авдеев, Аффинные сферические однородные пространства с хорошим фактором по максимальной унипотентной подгруппе, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 11, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7897>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 14:33:15

УДК 512.745

Р. С. Авдеев

Аффинные сферические однородные пространства с хорошим фактором по максимальной унипотентной подгруппе

Для аффинного сферического однородного пространства G/H связной полупростой алгебраической группы G рассматривается морфизм факторизации по действию на G/H максимальной унипотентной подгруппы группы G . Доказывается, что этот морфизм равноразмерен тогда и только тогда, когда выполнено некоторое простое условие на полугруппу старших весов однородного пространства G/H .

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: алгебраическая группа, однородное пространство, сферическая подгруппа, равноразмерный морфизм, полугруппа.

§ 1. Введение

Пусть G – связная полупростая комплексная алгебраическая группа, U – ее максимальная унипотентная подгруппа. Рассмотрим однородное пространство G/H с конечно порожденной алгеброй $\mathbb{C}[G/H] = \mathbb{C}[G]^H$ регулярных функций на нем. В этой ситуации алгебра ${}^U\mathbb{C}[G/H]$ тех регулярных функций на G/H , которые инвариантны относительно действия группы U слева, также конечно порождена (см. [1; теорема 3.1]), и поэтому можно рассмотреть соответствующий морфизм факторизации

$$\pi_U: X = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[G/H] \rightarrow Y = \operatorname{Spec} {}^U\mathbb{C}[G/H].$$

Алгебра $\mathbb{C}[G/H]$ является рациональным G -модулем относительно действия группы G слева и разлагается в прямую сумму конечномерных неприводимых G -модулей. Старшие веса неприводимых G -модулей, входящих в это разложение, образуют полугруппу, называемую *полугруппой старших весов* однородного пространства G/H . Обозначим эту полугруппу через $\Lambda_+(G/H)$.

Подгруппа $H \subset G$ называется *сферической* (однородное пространство G/H – *сферическим*), если борелевская подгруппа $B \subset G$ имеет открытую орбиту в G/H . Для сферического однородного пространства G/H алгебра $\mathbb{C}[G/H]$ конечно порождена (см. [2]), поэтому морфизм π_U корректно определен. Далее, известно (см. [3; теорема 1]), что если G/H – сферическое однородное пространство, то G -модуль $\mathbb{C}[G/H]$ имеет простой спектр (а в случае квазиаффинного G/H верно и обратное), т.е. всякий неприводимый подмодуль содержится

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00648-а).

в этом G -модуле с кратностью не выше 1. В этой ситуации, если в каждом неприводимом подмодуле G -модуля $\mathbb{C}[G/H]$ зафиксировать его старший вектор (относительно U), то эти векторы будут образовывать базис алгебры ${}^U\mathbb{C}[G/H]$ (как векторного пространства над $\mathbb{C}$). Более того, нормировав подходящим образом эти векторы, можно установить естественный изоморфизм между алгеброй ${}^U\mathbb{C}[G/H]$ и полугрупповой алгеброй полугруппы $\Lambda_+(G/H)$ (см. [4; теорема 2]).

Пусть $\omega_1, \dots, \omega_l$ – все фундаментальные веса группы G . Для каждого доминантного веса $\lambda = k_1\omega_1 + \dots + k_l\omega_l$, $k_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$, введем его носитель

$$\text{Supp } \lambda = \{\omega_i \mid k_i > 0\}.$$

Сферическое однородное пространство G/H называется *превосходным*, если оно квазиаффинно и полугруппа $\Lambda_+(G/H)$ порождается доминантными весами $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ группы G , удовлетворяющими условию $\text{Supp } \lambda_i \cap \text{Supp } \lambda_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Например, рассмотрим (аффинное) сферическое однородное пространство $\text{SL}_{2n}/\text{S}(\text{L}_n \times \text{L}_n)$, где $\text{S}(\text{L}_n \times \text{L}_n)$ – пересечение группы SL_{2n} с подгруппой $\text{GL}_n \times \text{GL}_n \subset \text{GL}_{2n}$. Его полугруппа старших весов (свободно) порождается весами $\omega_1 + \omega_{2n-1}, \omega_2 + \omega_{2n-2}, \dots, \omega_{n-1} + \omega_{n+1}, 2\omega_n$, где ω_i – i -й фундаментальный вес группы SL_{2n} , в силу чего это пространство превосходно. Из определения следует, что для превосходного сферического однородного пространства G/H полугруппа $\Lambda_+(G/H)$ свободна. Значит, алгебра ${}^U\mathbb{C}[G/H]$ также свободна, а многообразие Y , являющееся спектром этой алгебры, есть не что иное, как аффинное пространство $\mathbb{C}^r$, где r – ранг полугруппы $\Lambda_+(G/H)$.

Сферическое однородное пространство G/H называется *почти превосходным*, если оно квазиаффинно¹ и выпуклый конус $\mathbb{Q}_+\Lambda_+(G/H)$, состоящий из всевозможных линейных комбинаций элементов из $\Lambda_+(G/H)$ с неотрицательными рациональными коэффициентами, порождается (как выпуклый конус) элементами $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \Lambda_+(G/H)$, удовлетворяющими условию $\text{Supp } \lambda_i \cap \text{Supp } \lambda_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Как несложно убедиться (см. [5; следствие 1]), свойство почти превосходности сферического однородного пространства G/H является локальным, т.е. зависит только от касательных алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$.

Превосходные и почти превосходные сферические однородные пространства находятся в тесной взаимосвязи. Во-первых, очевидно, что всякое превосходное сферическое однородное пространство является почти превосходным. Во-вторых, для всякого почти превосходного сферического однородного пространства его односвязное накрывающее однородное пространство является превосходным (см. [5; теорема 3]).

В 1999 г. Д. И. Панюшевым была фактически доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пусть G/H – квазиаффинное сферическое однородное пространство. Тогда:*

(а) (см. [6; теорема 5.5]) *если G/H превосходно, то морфизм π_U равноразмерен;*

¹В работе [5] по ошибке пропущено условие квазиаффинности в определении почти превосходного сферического однородного пространства.

(b) (см. [6; теорема 5.1]) если $Y \simeq \mathbb{C}^r$ для некоторого r и подгруппа H содержит некоторую максимальную унитарную подгруппу группы G , то верно и обратное к (a) утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Говоря о равноразмерности какого-либо морфизма, мы подразумеваем, что он сюръективен.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. На самом деле теоремы 5.1 и 5.5 работы [6] содержат в себе более общие факты, сформулированные в других терминах. Превосходные сферические однородные пространства получили свое название в 2007 г., когда теорема 1 была независимо передоказана Э. Б. Винбергом и С. Г. Гиндикиным (их работа не опубликована).

С учетом упомянутой выше взаимосвязи между превосходными и почти превосходными сферическими однородными пространствами из теоремы 1 вытекает приведенный ниже аналогичный результат для почти превосходных сферических однородных пространств (см. также § 3).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G/H – квазиаффинное сферическое однородное пространство. Тогда:

- (a) если G/H почти превосходно, то морфизм π_U равноразмерен;
- (b) если подгруппа H содержит некоторую максимальную унитарную подгруппу группы G , то верно и обратное к (a) утверждение.

Как видно, теорема 1, (b) (соответственно следствие 1, (b)) является обращением теоремы 1, (a) (соответственно следствия 1, (a)) для сферических однородных пространств G/H , где подгруппа H содержит некоторую максимальную унитарную подгруппу группы G (такие подгруппы H называются *орисферическими*).

Настоящая работа посвящена обращению теоремы 1, (a) и следствия 1, (a) в случае аффинных сферических однородных пространств G/H , т.е. таких, для которых подгруппа H редуктивна. А именно, целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G/H – аффинное сферическое однородное пространство. Тогда:

- (a) если морфизм π_U равноразмерен, то G/H почти превосходно;
- (b) если морфизм π_U равноразмерен и $Y \simeq \mathbb{C}^r$ для некоторого r , то G/H превосходно.

Представляет безусловный интерес вопрос о том, в какой мере этот результат обобщается на случай произвольных квазиаффинных сферических однородных пространств.

Из теоремы 1, (a), следствия 1, (a) и теоремы 2 вытекает следующая геометрическая характеристика превосходных и почти превосходных аффинных сферических однородных пространств.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть G/H – аффинное сферическое однородное пространство. Тогда:

- (a) G/H почти превосходно тогда и только тогда, когда морфизм π_U равноразмерен;

(b) G/H превосходно тогда и только тогда, когда морфизм π_U равноразмерен и $Y \simeq \mathbb{C}^r$ для некоторого r .

Структура настоящей работы такова. В § 3 мы переформулируем теорему 2 в такой форме, которая является более удобной для доказательства (см. теорему 3). В §§ 4–7 приводятся все необходимые понятия и результаты, которые нам потребуются для доказательства теоремы 3. А именно, в § 4 мы напоминаем классификацию аффинных сферических однородных пространств; в § 5 мы доказываем, что при некоторых условиях на однородное пространство G/H нулевой слой морфизма π_U непуст; в § 6 мы рассматриваем симметричные линейные действия торов; в § 7 мы напоминаем понятие расширенной полугруппы старших весов однородного пространства. Доказательство теоремы 3 будет осуществлено в §§ 8, 9. Точнее, в § 8 мы сведем доказательство этой теоремы к случаю строго неприводимых пространств, который в свою очередь рассмотрим в § 9.

Автор выражает благодарность Э. Б. Винбергу за обсуждение работы и ценные замечания.

§ 2. Некоторые соглашения и обозначения

В настоящей работе основным полем является поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел, все топологические термины относятся к топологии Зарисского, все рассматриваемые группы предполагаются алгебраическими, а их подгруппы – замкнутыми. Касательные алгебры групп, обозначенных прописными латинскими буквами, обозначаются соответствующими строчными готическими буквами. Для любой группы L через $\mathfrak{X}(L)$ обозначается решетка ее характеров.

На протяжении всей работы через G обозначается связная полупростая алгебраическая группа. Предполагается, что в G фиксированы борелевская подгруппа B и содержащийся в ней максимальный тор T . Через U обозначается максимальная унипотентная подгруппа группы G , содержащаяся в B . Решетки $\mathfrak{X}(B)$ и $\mathfrak{X}(T)$ отождествляются посредством ограничения характеров с B на T .

Действия группы G самой на себе левыми сдвигами $((g, x) \mapsto gx)$ и правыми сдвигами $((g, x) \mapsto xg^{-1})$ индуцируют ее представления в пространстве $\mathbb{C}[G]$ регулярных функций на G по формулам

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x), \quad (gf)(x) = f(xg)$$

соответственно. Для краткости первое из этих действий мы называем действием *слева*, а второе – действием *справа*. Для любой подгруппы $L \subset G$ через ${}^L\mathbb{C}[G]$ (соответственно $\mathbb{C}[G]^L$) мы обозначаем алгебру функций из $\mathbb{C}[G]$, инвариантных относительно действия L слева (соответственно справа).

Два однородных пространства G_1/H_1 и G_2/H_2 мы называем *локально изоморфными*, если их односвязные накрывающие однородные пространства изоморфны. Это эквивалентно существованию изоморфизма $\mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$, переводящего $\mathfrak{h}_1$ в $\mathfrak{h}_2$.

Для всякого односвязного однородного пространства G/H без ограничения общности предполагаем, что группа G односвязна, а подгруппа H связна.

Для группы L запись $L = L_1 \cdot L_2$ означает, что L является *почти прямым произведением* своих подгрупп L_1, L_2 , т. е. $L = L_1 L_2$, подгруппы L_1, L_2 поэлементно коммутируют между собой и пересечение $L_1 \cap L_2$ конечно.

Список обозначений:

e – единичный элемент произвольной группы;

$\mathbb{C}^\times$ – мультипликативная группа поля $\mathbb{C}$;

V^* – пространство линейных функций на векторном пространстве V ;

$\Lambda_+(G) \subset \mathfrak{X}(B)$ – полугруппа доминантных весов группы G относительно борелевской подгруппы B ;

$V(\lambda)$ – неприводимый G -модуль со старшим весом $\lambda \in \Lambda_+(G)$;

$v_\lambda \in V(\lambda)$ – старший вектор в $V(\lambda)$ относительно борелевской подгруппы B ;

λ^* – старший вес неприводимого G -модуля $V(\lambda)^*$;

L^0 – связная компонента единицы группы L ;

L' – коммутант группы L ;

$Z(L)$ – центр группы L ;

$N_L(K)$ – нормализатор подгруппы K в группе L ;

$\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ – диагональная матрица порядка n с элементами $a_1, \dots, a_n$ на диагонали.

§ 3. Переформулировка основной теоремы

В этом параграфе мы сведем доказательство теоремы 2 к доказательству следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть G/H – односвязное аффинное сферическое однородное пространство, для которого морфизм π_U равноразмерен. Тогда G/H превосходно.

Пусть G/H – односвязное сферическое однородное пространство. Всякое однородное пространство, локально изоморфное пространству G/H , имеет вид $G/\tilde{H}$, где $\tilde{H}$ – конечное расширение подгруппы H , т. е. $\tilde{H}^0 = H$. Положим $\tilde{Y} = \text{Spec } {}^U\mathbb{C}[G/\tilde{H}]$ и рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} G/H & \xrightarrow{\pi_U} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/\tilde{H} & \xrightarrow{\tilde{\pi}_U} & \tilde{Y} \end{array}$$

В этой диаграмме вертикальным стрелкам соответствуют морфизмы факторизации по конечной подгруппе $\tilde{H}/H$, откуда следует, что условие равноразмерности морфизма π_U равносильно условию равноразмерности морфизма $\tilde{\pi}_U$. С учетом этого из теоремы 3 вытекает теорема 2, (а). Теперь выведем пункт (b) теоремы 2 из пункта (а). Для этого заметим, что почти превосходное сферическое однородное пространство G/H является превосходным тогда и только тогда, когда полугруппа $\Lambda_+(G/H)$ свободна. Последнее условие равносильно тому, что алгебра ${}^U\mathbb{C}[G/H]$ свободна, т. е. $Y \simeq \mathbb{C}^r$ для некоторого r .

§ 4. Классификация аффинных сферических однородных пространств

В этом параграфе мы напомним известную классификацию всех с точностью до локального изоморфизма аффинных сферических однородных пространств, или, что эквивалентно, классификацию всех с точностью до изоморфизма односвязных аффинных сферических однородных пространств. Прежде чем это осуществить, напомним некоторые понятия.

Прямое произведение сферических однородных пространств

$$(G_1/H_1) \times (G_2/H_2) = (G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2)$$

также является сферическим однородным пространством. Пространства такого вида, а также локально изоморфные им называются *приводимыми*, остальные называются *неприводимыми*. Сферическое однородное пространство называется *строго неприводимым*, если сферическое однородное пространство $G/N_G(H)^0$ неприводимо (см. [7; п. 1.3.6]).

Список всех с точностью до локального изоморфизма строго неприводимых аффинных сферических однородных пространств G/H известен: в случае простых групп G он получен в [8], а в случае непростых полупростых групп G – в [9] и, независимо и другим способом, в [10]. Во всей полноте этот список собран в таблицах 1 и 2 работы [5] (хотя отдельные элементы этого списка можно найти и во многих других работах, в том числе в упомянутых выше оригинальных работах). Общая процедура, позволяющая строить произвольные аффинные сферические однородные пространства из строго неприводимых, в окончательной форме приведена² в [11] (ее описание см. ниже).

Отметим, что для всех односвязных строго неприводимых аффинных сферических однородных пространств G/H известны их полугруппы старших весов. В случае простых групп G эти полугруппы вычислены в [8], а в случае непростых полупростых групп G – в [12] (точнее, в работе [12] в указанной ситуации для каждого пространства вычислена его расширенная полугруппа старших весов, определение которой см. в § 7).

Строго неприводимые аффинные сферические однородные пространства G/H мы подразделим на следующие три типа.

Тип I: $\dim Z(H) = 1$, пространство G/H' не является сферическим.

Тип II: $\dim Z(H) = 1$, пространство G/H' является сферическим.

Тип III: $\dim Z(H) = 0$.

Теперь опишем общий способ построения произвольных односвязных аффинных сферических однородных пространств из строго неприводимых. Пусть $G_1/H_1, \dots, G_n/H_n$ – односвязные строго неприводимые аффинные сферические однородные пространства. Напомним, что группы $G_1, \dots, G_n$ предполагаются односвязными, а подгруппы $H_1, \dots, H_n$ – связными. Выполнив при необходимости перенумерацию, мы будем считать, что при некоторых p, q , где $0 \leq p \leq q \leq n$, пространства $G_1/H_1, \dots, G_p/H_p$ имеют тип I, пространства

²Изначально такая процедура была предложена в [9], однако она оказалась неверной. В работе [11] сообщается об этой ошибке и приводится правильный вариант процедуры.

$G_{p+1}/H_{p+1}, \dots, G_q/H_q$ имеют тип II, а пространства $G_{q+1}/H_{q+1}, \dots, G_n/H_n$ имеют тип III. Положим

$$G = G_1 \times \dots \times G_n, \quad \tilde{H} = H_1 \times \dots \times H_n.$$

Ясно, что

$$Z(\tilde{H}) = Z(H_1) \times \dots \times Z(H_n), \quad \tilde{H}' = H'_1 \times \dots \times H'_n.$$

Далее, при всех $i = 1, \dots, n$ имеем $\text{rk } \mathfrak{X}(H_i) = \dim Z(H_i)$, откуда $\mathfrak{X}(\tilde{H}) \simeq \mathfrak{X}(H_1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{X}(H_n)$ – решетка ранга q . Обозначим через $\chi_1, \dots, \chi_p$ образы в $\mathfrak{X}(\tilde{H})$ базисных элементов решеток $\mathfrak{X}(H_1), \dots, \mathfrak{X}(H_p)$ соответственно.

Пусть Z – связная подгруппа в $Z(\tilde{H})^0 = Z(H_1) \times \dots \times Z(H_n)$. Положим $H = Z \cdot (H'_1 \times \dots \times H'_n) \subset \tilde{H}$. Тогда можно рассмотреть отображение ограничения характеров $\tau: \mathfrak{X}(\tilde{H}) \rightarrow \mathfrak{X}(H)$.

ТЕОРЕМА 4 (см. [11; теорема 3, лемма 5]). (а) Пространство G/H , полученное описанной выше процедурой, является сферическим тогда и только тогда, когда характеры $\tau(\chi_1), \dots, \tau(\chi_p)$ линейно независимы в $\mathfrak{X}(H)$;

(б) всякое односвязное аффинное сферическое однородное пространство изоморфно одному из пространств G/H , полученных описанной выше процедурой.

§ 5. Нулевой слой морфизма π_U

Основным результатом этого параграфа является предложение 1.

Хорошо известно, что имеется следующий изоморфизм $(G \times G)$ -модулей:

$$\mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_+(G)} V(\lambda) \otimes V(\lambda^*), \quad (1)$$

где в левой части группа $G \times G$ действует слева и справа, а в каждом слагаемом правой части левый (соответственно правый) множитель группы $G \times G$ действует на левом (соответственно правом) тензорном сомножителе. При этом изоморфизме элементу $v \otimes w \in V(\lambda) \otimes V(\lambda^*)$ соответствует функция в $\mathbb{C}[G]$, принимающая на элементе $g \in G$ значение $\langle g^{-1}v, w \rangle = \langle v, gw \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – естественное спаривание между $V(\lambda)$ и $V(\lambda^*) \simeq V(\lambda)^*$.

Как нетрудно убедиться, для фиксированной подгруппы $H \subset G$ подпространству ${}^U\mathbb{C}[G/H]_\lambda \subset {}^U\mathbb{C}[G/H]$, состоящему из всех T -полуинвариантных функций веса λ , при изоморфизме (1) соответствует подпространство $\langle v_\lambda \rangle \otimes V(\lambda^*)^H \subset V(\lambda) \otimes V(\lambda^*)$. Отсюда, в частности, следует, что для элемента $\lambda \in \Lambda_+(G)$ условие $\lambda \in \Lambda_+(G/H)$ равносильно тому, что подпространство $V(\lambda^*)^H \subset V(\lambda^*)$, состоящее из всех H -инвариантных векторов, нетривиально.

Для произвольного однородного пространства G/H через $\mathcal{N}(G/H)$ обозначим множество совместных нулей в G/H всех функций из алгебры ${}^U\mathbb{C}[G/H]$, являющихся T -полуинвариантными ненулевого веса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $G = G_1 \times \dots \times G_s$, где каждая из групп G_i проста. Пусть подгруппа $H \subset G$ такова, что для всякой простой компоненты G_i группы G проекция подгруппы H^0 на G_i не унитарна. Тогда множество $\mathcal{N}(G/H) \subset G/H$ непусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $i = 1, \dots, s$ положим $T_i = T \cap G_i$, так что T_i – максимальный тор в G_i и $T = T_1 \times \dots \times T_s$. Отождествим решетку $\mathfrak{X}(T)$ с подрешеткой в $\mathfrak{t}^*$, сопоставляя каждому характеру $\chi \in \mathfrak{X}(T)$ его дифференциал $d\chi \in \mathfrak{t}^*$. Рассмотрим рациональное подпространство $\mathfrak{t}_{\mathbb{Q}}^* = \mathfrak{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \subset \mathfrak{t}^*$ и зафиксируем в нем скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, инвариантное относительно группы Вейля $W = N_G(T)/T$. При помощи этого скалярного произведения отождествим $\mathfrak{t}_{\mathbb{Q}}^*$ с рациональным подпространством

$$\mathfrak{t}_{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathfrak{t} \mid \xi(x) \in \mathbb{Q} \text{ для всех } \xi \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Q}}^*\} \subset \mathfrak{t}.$$

Заменяв подгруппу H сопряженной, будем считать, что подгруппа $T_H = (T \cap H)^0 \subset H$ является максимальным тором в H . Отметим, что

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{t}_{\mathbb{Q}} \cap \mathfrak{t}_H) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{t}_H.$$

Отсюда и из условия вытекает, что существует элемент $z \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Q}} \cap \mathfrak{t}_H$, проекция которого на каждое из подпространств $\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_s$ отлична от нуля. Элемент z , рассматриваемый как элемент пространства $\mathfrak{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, содержится в некоторой камере Вейля $C \subset \mathfrak{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Снова заменив подгруппу H сопряженной (при помощи подходящего элемента группы $N_G(T)$), далее без ограничения общности будем считать, что C является доминантной камерой Вейля.

Пусть $\lambda \in \Lambda_+(G) \setminus \{0\}$. Рассмотрим неприводимый G -модуль $V(\lambda^*)$, в нем младший вектор w_{λ^*} и T -инвариантное подпространство $V'(\lambda^*)$, дополнительное к w_{λ^*} . Пусть ν – линейная функция на $V(\lambda^*)$, принимающая ненулевое значение на векторе w_{λ^*} и равная тождественно нулю на подпространстве $V'(\lambda^*)$. Тогда ν – старший вектор неприводимого G -модуля $V(\lambda^*)^* \simeq V(\lambda)$. Пусть $f \in {}^U\mathbb{C}[G/H]$ – T -полуинвариантная функция веса λ . При изоморфизме (1) ей соответствует вектор $v_f \in V(\lambda^*)^H$ с условием $f(g) = \nu(gv_f)$ при всех $g \in G$. Покажем, что $v_f \in V'(\lambda^*)$. Для этого достаточно проверить, что вектор w_{λ^*} не является T_H -инвариантным. Последнее будет выполнено, если мы покажем, что $zw_{\lambda^*} \neq 0$. Имеем $zw_{\lambda^*} = (z, -(\lambda^*)^*)w_{\lambda^*} = -(z, \lambda)w_{\lambda^*}$. Напомним следующий хорошо известный факт: для любых двух фундаментальных весов ω, ω' группы G справедливо неравенство $(\omega, \omega') \geq 0$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда ω, ω' являются фундаментальными весами различных простых множителей группы G . Поскольку $\lambda \neq 0, z \in C$ и проекция элемента z на каждое из подпространств $\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_s$ отлична от нуля, с учетом упомянутого факта мы получаем, что $(z, \lambda) > 0$, откуда $zw_{\lambda^*} \neq 0$ и $v_f \in V'(\lambda^*)$. Следовательно, $f(eH) = 0$. В силу произвольности выбора λ и f получаем, что $eH \in \mathcal{N}(G/H)$.

Пусть G/H – однородное пространство с конечно порожденной алгеброй $\mathbb{C}[G/H]$. Нулевым слоем морфизма π_U назовем множество совместных нулей в X всех функций из алгебры ${}^U\mathbb{C}[G/H]$, являющихся T -полуинвариантными ненулевого веса.

СЛЕДСТВИЕ 3. В условиях предложения 1 предположим, что алгебра $\mathbb{C}[G/H]$ конечно порождена. Тогда нулевой слой морфизма π_U непуст и пересекает G/H .

§ 6. Симметричные линейные действия торов

Пусть имеется линейное действие квазитора S на векторном пространстве V . Напомним, что через $V//S$ обозначается категорный фактор для действия $S : V$, т.е. $V//S = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[V]^S$, и что нулевой слой (т.е. слой, содержащий нуль) морфизма факторизации $V \rightarrow V//S$ называется нуль-конусом.

Для каждого характера $\chi \in \mathfrak{X}(S)$ обозначим через V_χ весовое относительно S подпространство в V веса χ . Положим

$$\Phi = \{\chi \in \mathfrak{X}(S) \mid V_\chi \neq 0\} \setminus \{0\} \subset \mathfrak{X}(S).$$

Тогда, очевидно, имеем $V = V_0 \oplus \bigoplus_{\chi \in \Phi} V_\chi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Линейное действие $S : V$ назовем *симметричным*, если $\dim V_\chi = \dim V_{-\chi}$ для всякого $\chi \in \Phi$.

Везде далее в этом параграфе будем предполагать, что S – тор, а действие $S : V$ линейно и симметрично.

Положим $c = \dim V_0$ и $d = (\dim V - c)/2$. Для действия $S : V$ найдутся такие (не обязательно различные) элементы $\chi_1, \dots, \chi_d \in \mathfrak{X}(S)$, что имеет место изоморфизм S -модулей $V \simeq V_0 \oplus \bigoplus_{i=1}^d (\mathbb{C}_{\chi_i} \oplus \mathbb{C}_{-\chi_i})$, где при $\chi \in \mathfrak{X}(S)$ через $\mathbb{C}_\chi$ обозначается одномерный S -модуль, в котором S действует умножением на характер χ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Действие $S : V$ назовем *превосходным*, если элементы $\chi_1, \dots, \chi_d$ линейно независимы в $\mathfrak{X}(S)$.

Из описания линейных действий торов, для которых морфизм факторизации равноразмерен (см. [13; п. 8.1]), вытекает, что действие $S : V$ превосходно тогда и только тогда, когда морфизм факторизации $V \rightarrow V//S$ равноразмерен. Далее, используя метод носителей (см. [13; п. 5.4]), легко показать, что размерность нуль-конуса действия $S : V$ в точности равна d . Поскольку размерность произвольного слоя морфизма $V \rightarrow V//S$ не превосходит размерности нуль-конуса (см. [13; следствие 1 из предложения 5.1]), из сказанного выше и теоремы о размерностях слоев доминантного морфизма вытекает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Имеем $\dim V//S \geq c + d$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда действие $S : V$ превосходно.

§ 7. Расширенная полугруппа старших весов однородного пространства

Пусть $H \subset G$ – произвольная подгруппа. Для каждого характера $\chi \in \mathfrak{X}(H)$ рассмотрим в алгебре $\mathbb{C}[G]$ подпространство

$$V_\chi = \{f \in \mathbb{C}[G] \mid f(gh) = \chi(h)f(g) \text{ для любых } g \in G, h \in H\}.$$

Легко видеть, что действие группы G слева в пространстве $\mathbb{C}[G]$ сохраняет подпространство V_χ при любом $\chi \in \mathfrak{X}(H)$. Все пары вида (λ, χ) , где $\lambda \in \Lambda_+(G)$, $\chi \in \mathfrak{X}(H)$, для которых пространство V_χ содержит неприводимый G -подмодуль

со старшим весом λ , образуют полугруппу. Эта полугруппа называется *расширенной полугруппой старших весов* однородного пространства G/H (более подробное описание см. в [12; п. 1.2] или в [14; п. 1.2]). Обозначим эту полугруппу через $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$. Поскольку $V_0 = \mathbb{C}[G]^H = \mathbb{C}[G/H]$, получаем

$$\Lambda_+(G/H) \simeq \{(\lambda, \chi) \in \widehat{\Lambda}_+(G/H) \mid \chi = 0\}. \quad (2)$$

Определим подгруппу $H_0 \subset H$ как пересечение ядер всех характеров группы H . Эта подгруппа нормальна в H и содержит H' , поэтому группа H/H_0 коммутативна (и, тем самым, является квазитором). Если группа H связна, то группа H/H_0 также связна и потому является тором. Везде ниже мы будем отождествлять группы $\mathfrak{X}(H)$ и $\mathfrak{X}(H/H_0)$ при помощи естественного изоморфизма $\mathfrak{X}(H/H_0) \rightarrow \mathfrak{X}(H)$. Имеем

$$\bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}(H)} V_\chi = \mathbb{C}[G]^{H_0} = \mathbb{C}[G/H_0].$$

Отметим, что действие группы $T \times H/H_0$ задает на алгебре ${}^U\mathbb{C}[G/H_0]$ градуировку полугруппой $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$ (T действует слева, H/H_0 – справа).

Теперь обратимся к ситуации, когда H – сферическая подгруппа в G . Согласно [3; теорема 1] условие сферичности подгруппы H эквивалентно тому, что для всякого $\chi \in \mathfrak{X}(H)$ представление группы G в пространстве V_χ имеет простой спектр. Это означает, что группа $T \times H/H_0$ действует в пространстве ${}^U\mathbb{C}[G/H_0]$ с простым спектром. Далее, для сферической подгруппы H полугруппа $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$ свободна (см. [14; теорема 2], случай связной H см. также в [12; теорема 1]), поэтому алгебра ${}^U\mathbb{C}[G/H_0]$ свободна и изоморфна полугрупповой алгебре полугруппы $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$. Рассмотрим аффинное пространство $Y_0 = \text{Spec } {}^U\mathbb{C}[G/H_0] \simeq \mathbb{C}^n$, где $n = \text{rk } \widehat{\Lambda}_+(G/H)$. Введем на Y_0 структуру векторного пространства таким образом, чтобы $(T \times H/H_0)$ -полуинвариантные функции, свободно порождающие алгебру ${}^U\mathbb{C}[G/H_0]$, соответствовали координатным функциям на Y_0 . Действию группы H/H_0 на ${}^U\mathbb{C}[G/H_0]$ справа естественным образом соответствует действие этой группы на Y_0 .

ЛЕММА 1. *Для сферической подгруппы $H \subset G$ действие $H/H_0 : Y_0$ линейно. Более того, если $(\lambda_1, \chi_1), \dots, (\lambda_n, \chi_n)$ – все неразложимые элементы (свободной) полугруппы $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$, то имеет место изоморфизм H/H_0 -модулей $Y_0 \simeq \mathbb{C}_{-\chi_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}_{-\chi_n}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_1, \dots, f_n \in {}^U\mathbb{C}[G/H_0]$ – ненулевые $(T \times H/H_0)$ -полуинвариантные функции, отвечающие элементам $(\lambda_1, \chi_1), \dots, (\lambda_n, \chi_n)$ полугруппы $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$ соответственно. Эти функции свободно порождают алгебру ${}^U\mathbb{C}[G/H_0]$. Интерпретируя функции $f_1, \dots, f_n$ как координатные функции на Y_0 , мы получаем требуемый результат.

ЛЕММА 2. *Для редуктивной сферической подгруппы $H \subset G$ линейное действие $H/H_0 : Y_0$ симметрично.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя изоморфизм (1), нетрудно показать, что при $\lambda \in \Lambda_+(G)$ и $\chi \in \mathfrak{X}(H)$ элемент (λ, χ) содержится в полугруппе $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$ тогда и только тогда, когда подпространство $V(\lambda^*)_\chi^{(H)} \subset V(\lambda^*)$, состоящее из

H -полуинвариантных векторов веса χ , одномерно. Пусть $(\lambda, \chi) \in \widehat{\Lambda}_+(G/H)$. Поскольку группа H редуктивна, имеем $V(\lambda^*) = V(\lambda^*)_{\chi}^{(H)} \oplus W$ для некоторого H -инвариантного подпространства $W \subset V(\lambda^*)$. Пусть $\xi \in V(\lambda^*)^* \simeq V(\lambda)$ – линейная функция на $V(\lambda^*)$, принимающая значение 1 на базисном векторе пространства $V(\lambda^*)_{\chi}^{(H)}$ и значение 0 на всех элементах из W . Тогда ξ является H -полуинвариантным элементом в $V(\lambda)$ веса $-\chi$. Следовательно, $(\lambda^*, -\chi) \in \widehat{\Lambda}_+(G/H)$. Таким образом, отображение $(\lambda, \chi) \mapsto (\lambda^*, -\chi)$ является автоморфизмом полугруппы $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$. В частности, при этом автоморфизме неразложимые элементы переходят в неразложимые, откуда с учетом леммы 1 и следует требуемое.

§ 8. Сведение доказательства теоремы 3 к случаю строго неприводимых пространств

Пусть группа G односвязна и $H \subset G$ – связная редуктивная сферическая подгруппа. Напомним, что в § 7 мы обозначили через H_0 пересечение ядер всех характеров группы H , а также ввели обозначение Y_0 для аффинного пространства $\text{Spec } U\mathbb{C}[G/H_0] \simeq \mathbb{C}^n$, где $n = \text{rk } \widehat{\Lambda}_+(G/H)$. Положим $X_0 = \text{Spec } \mathbb{C}[G/H_0]$. В рассматриваемой ситуации имеем $X = G/H$, $X_0 = G/H_0$.

Коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[G/H_0] & \xleftarrow{\quad U \quad} & U\mathbb{C}[G/H_0] \\ \uparrow & \swarrow & \uparrow \\ \mathbb{C}[G/H] & \xleftarrow{\quad U \quad} & U\mathbb{C}[G/H] \end{array} \quad (3)$$

инъективных гомоморфизмов алгебр соответствует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G/H_0 = X_0 & \xrightarrow{\varphi_U} & Y_0 \\ \psi_X \downarrow & \searrow \psi & \downarrow \psi_Y \\ G/H = X & \xrightarrow{\pi_U} & Y \end{array} \quad (4)$$

доминантных морфизмов соответствующих многообразий. Напомним, что аффинное пространство Y_0 снабжено структурой векторного пространства (см. § 7) и что действие $H/H_0 : Y_0$ линейно (лемма 1) и симметрично (лемма 2). При этом ψ_Y не что иное, как морфизм факторизации для действия $H/H_0 : Y_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если морфизм π_U равноразмерен, то действие $H/H_0 : Y_0$ превосходно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть морфизм π_U равноразмерен. Поскольку морфизм ψ_X также равноразмерен, отсюда следует, что сквозной морфизм $\psi : X_0 \rightarrow Y$ равноразмерен. Предположим, что действие $H/H_0 : Y_0$ не превосходно. Пусть c и d – соответствующие характеристики этого действия (см. § 6). В силу предложения 2 имеем $\dim Y > c + d$, откуда по теореме о размерностях слоев доминантного морфизма коразмерность общего слоя морфизма ψ больше $c + d$.

Из теоремы 4 следует, что существуют такие односвязные строго неприводимые аффинные сферические однородные пространства $G_1/H_1, \dots, G_n/H_n$, что

$$G = G_1 \times \dots \times G_n, \quad H'_1 \times \dots \times H'_n \subset H \subset H_1 \times \dots \times H_n.$$

Тогда

$$G/H_0 \simeq G_1/H'_1 \times \dots \times G_n/H'_n.$$

При каждом $i = 1, \dots, n$ положим $U_i = U \cap G_i$, $T_i = T \cap G_i$ и зафиксируем в алгебре $U_i \mathbb{C}[G_i/H'_i] \subset U \mathbb{C}[G/H_0]$ набор F_i , состоящий из $(T_i \times H_i/H'_i)$ -полуинвариантных функций, свободно порождающих эту алгебру. Тогда $F = F_1 \cup \dots \cup F_n$ – набор $(T \times H/H_0)$ -полуинвариантных функций, свободно порождающих алгебру $U \mathbb{C}[G/H_0]$.

Пусть $\Phi \subset \mathfrak{X}(H/H_0)$ – множество ненулевых весов относительно H/H_0 всех функций из набора F . Зафиксируем в пространстве $\mathfrak{X}(H/H_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ гиперплоскость h , не содержащую элементов множества Φ . Выберем одно из полупространств, ограниченных гиперплоскостью h , и обозначим через Φ^+ множество тех весов из Φ , которые содержатся в этом полупространстве. Положим $\Phi^- = -\Phi^+$, так что $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$. Пусть F^+ (соответственно F^0 , F^-) – множество функций из F , веса которых относительно H/H_0 принадлежат множеству Φ^+ (соответственно $\{0\}$, Φ^-). При каждом $i = 1, \dots, n$ положим также

$$F_i^+ = F^+ \cap F_i, \quad F_i^0 = F^0 \cap F_i, \quad F_i^- = F^- \cap F_i.$$

Ясно, что $c = |F^+| = |F^-|$ и $d = |F^0|$. Нетрудно убедиться (см. [13; п. 5.4]), что множество совместных нулей всех $c + d$ функций из $F^+ \cup F^0$ содержится в нулевом слое морфизма ψ_Y . Тогда множество $\mathcal{N}$ совместных нулей этих же функций в X_0 содержится в слое $\psi^{-1}(\psi_Y(0))$ морфизма ψ (ниже этот слой мы также будем называть нулевым). Покажем, что $\mathcal{N} \neq \emptyset$. Как легко видеть, для этого достаточно показать, что множество совместных нулей в G_i/H'_i всех функций из $F_i^+ \cup F_i^0$ непусто при каждом $i = 1, \dots, n$. Чтобы это сделать, рассмотрим две возможности.

1) Группа H'_i тривиальна. Тогда H_i – тор. Рассмотрев список всех односвязных строго неприводимых аффинных сферических однородных пространств, мы находим, что такое возможно только при $G_i = \mathrm{SL}_2$, $H_i \simeq \mathbb{C}^\times$. В этом случае множество F_i состоит из двух функций, имеющих ненулевые противоположные веса относительно тора H_i/H'_i . Поскольку $\mathrm{SL}_2/\mathbb{C}^\times$ – строго неприводимое сферическое однородное пространство типа I, по теореме 4, (а) образы этих весов в группе $\mathfrak{X}(H/H_0)$ также ненулевые. Значит, $|F_i^+| = |F_i^-| = 1$ и $F_i = F_i^+ \cup F_i^-$. Непосредственная проверка показывает, что множество нулей в SL_2 единственной функции из F_i^+ непусто.

2) Группа H'_i нетривиальна. Рассмотрев список всех односвязных строго неприводимых аффинных сферических однородных пространств, мы убеждаемся, что в этом случае группа H'_i удовлетворяет условию предложения 1, в силу чего множество совместных нулей в G_i/H'_i вообще всех функций из F_i непусто.

Итак, $\mathcal{N} \neq \emptyset$. Так как $\mathcal{N}$ содержится в нулевом слое морфизма ψ и задается в X_0 обращением в нуль $c + d$ функций, то коразмерность в X_0 нулевого

слоя морфизма ψ не превосходит величины $c + d$ и, тем самым, строго меньше коразмерности общего слоя. Следовательно, морфизм ψ не равноразмерен – противоречие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть G/H – односвязное аффинное сферическое однородное пространство, для которого морфизм π_U равноразмерен. Тогда G/H является прямым произведением нескольких (односвязных) строго неприводимых аффинных сферических однородных пространств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4 существуют такие односвязные строго неприводимые аффинные сферические однородные пространства $G_1/H_1, \dots, G_n/H_n$, что:

- 1) $G = G_1 \times \dots \times G_n$;
- 2) $H'_1 \times \dots \times H'_n \subset H \subset H_1 \times \dots \times H_n$.

Без ограничения общности считаем, что пространство G_i/H_i имеет тип I или II при $i \leq q$ и имеет тип III при $i > q$. При каждом $i = 1, \dots, n$ положим $U_i = G_i \cap U$.

Пусть $\tau: \mathfrak{X}(H_1 \times \dots \times H_n) \rightarrow \mathfrak{X}(H)$ – отображение ограничения характеров. При $i = 1, \dots, q$ обозначим через χ_i базисный характер в группе $\mathfrak{X}(H_i) = \mathfrak{X}(H_i/H'_i)$. Выполнив при необходимости перенумерацию, мы можем считать, что $\tau(\chi_i) \neq 0$ при $i \leq p$ и $\tau(\chi_i) = 0$ при $p < i \leq q$. Поскольку при каждом $i = 1, \dots, p$ (линейное) действие тора H_i/H'_i в аффинном пространстве $\text{Spec } {}^{U_i}\mathbb{C}[G_i/H'_i]$ нетривиально, из предложения 3 вытекает, что веса $\tau(\chi_1), \dots, \tau(\chi_p)$ попарно различны и линейно независимы в $\mathfrak{X}(H)$. Отсюда следует, что

$$H = H_1 \times \dots \times H_p \times H'_{p+1} \times \dots \times H'_n,$$

$$G/H \simeq G_1/H_1 \times \dots \times G_p/H_p \times G_{p+1}/H'_{p+1} \times \dots \times G_n/H'_n.$$

§ 9. Случай строго неприводимых пространств

В силу предложения 4 для завершения доказательства теоремы 3 осталось доказать следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть G/H – односвязное строго неприводимое аффинное сферическое однородное пространство, не являющееся превосходным. Тогда морфизм π_U не равноразмерен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку мы располагаем классификацией (точнее, полным списком) односвязных строго неприводимых аффинных сферических однородных пространств (см. § 4), достаточно перебрать все такие пространства, не являющиеся превосходными, и для каждого из них убедиться в справедливости утверждения непосредственно. Напомним, что список всех с точностью до изоморфизма односвязных строго неприводимых аффинных сферических однородных пространств собран в таблицах 1 и 2 работы [5]. В этих таблицах помимо прочего для каждого из пространств указано, является оно превосходным или нет. Отсюда получается список тех пространств, которые нужно рассмотреть для доказательства предложения. Прежде чем перейти к рассмотрению этого списка, введем дополнительные соглашения и обозначения.

Если группа G является произведением нескольких множителей, то через π_i , φ_i и ψ_i обозначается i -й фундаментальный вес соответственно первого, второго и третьего множителя. При этом используется такая же нумерация фундаментальных весов простых групп, как в книге [15].

Через E_m обозначается единичная матрица порядка m , а через F_m – матрица порядка m с единицами на побочной диагонали и нулями на остальных местах.

Для всякой матрицы, обозначенной прописной буквой, соответствующая строчная буква с двойным индексом $_{ij}$ обозначает элемент этой матрицы, находящийся в i -й строке и j -м столбце. Например, P – матрица, p_{ij} – ее элемент, находящийся в i -й строке и j -м столбце.

Базис $e_1, \dots, e_n$ в пространстве тавтологического линейного представления группы SO_n считается выбранным таким образом, что матрица инвариантной невырожденной симметрической билинейной формы равна F_n . Базис $e_1, \dots, e_{2m}$ в пространстве тавтологического линейного представления группы Sp_{2m} считается выбранным таким образом, что матрица инвариантной невырожденной кососимметрической билинейной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & F_m \\ -F_m & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу такого выбора базисов мы можем (и будем везде ниже) предполагать, что для каждого простого множителя $\overline{G}$ группы G группы $B \cap \overline{G}$, $U \cap \overline{G}$ и $T \cap \overline{G}$ состоят из всех соответственно верхнетреугольных, верхних унитреугольных и диагональных матриц, содержащихся в $\overline{G}$.

Теперь перейдем к рассмотрению всех односвязных строго неприводимых аффинных сферических однородных пространств G/H , не являющихся превосходными. Рассмотрение разобьем на два случая в зависимости от значения $\dim Z(H)$.

Случай 1. $\dim Z(H) = 1$. Для каждого из рассматриваемых ниже пространств G/H мы указываем неразложимые элементы полугруппы $\hat{\Lambda}_+(G/H)$. По лемме 1 эти элементы полностью определяют структуру H/H_0 -модуля в Y_0 . Для каждого пространства G/H легко проверить, что действие $H/H_0 : Y_0$ не является превосходным, откуда в силу предложения 3 вытекает, что морфизм π_U не равноразмерен.

1) $G = \mathrm{SL}_{2n+1}$, $H = \mathbb{C}^\times \times \mathrm{Sp}_{2n}$, $n \geq 2$. Множитель Sp_{2n} группы H вложен в G как левый верхний блок $2n \times 2n$, а тор $\mathbb{C}^\times$ вложен в G посредством отображения $s \mapsto \mathrm{diag}(s, \dots, s, s^{-2n})$.

Информация, содержащаяся в строках 6 и 7 таблицы 1 в [5], позволяет заключить, что полугруппа $\hat{\Lambda}_+(G/H)$ свободно порождается элементами

$$(\pi_1, n\chi), (\pi_2, -\chi), (\pi_3, (n-1)\chi), (\pi_4, -2\chi), \dots, (\pi_{2n-1}, \chi), (\pi_{2n}, -n\chi)$$

для некоторого ненулевого характера $\chi \in \mathfrak{X}(H)$. Поскольку $n \geq 2$, отсюда следует, что действие $H/H_0 : Y_0$ не превосходно, а морфизм π_U не равноразмерен.

2) $G = \mathrm{Spin}_{10}$, $H = \mathbb{C}^\times \times \mathrm{Spin}_7$. Это однородное пространство однозначно определяется локально изоморфным ему пространством $\tilde{G}/\tilde{H}$, где $\tilde{G} = \mathrm{SO}_{10}$, $\tilde{H} = \mathbb{C}^\times \times \mathrm{Spin}_7$. Множитель Spin_7 группы $\tilde{H}$ рассматривается как подгруппа

в группе SO_8 (куда он вложен при помощи спинорного представления), которая в свою очередь вложена в $\tilde{G}$ как центральный блок 8×8 . Тор $\mathbb{C}^\times$ вложен в $\tilde{G}$ посредством отображения $s \mapsto \text{diag}(s, 1, 1, \dots, 1, s^{-1})$.

Информация, содержащаяся в строке 16 таблицы 1 в [5] и в строке 13 таблицы 1 в [16], позволяет заключить, что полугруппа $\hat{\Lambda}_+(G/H)$ свободно порождается элементами

$$(\pi_1, 2\chi), (\pi_1, -2\chi), (\pi_2, 0), (\pi_4, \chi), (\pi_5, -\chi)$$

для некоторого ненулевого характера $\chi \in \mathfrak{X}(H)$. Отсюда следует, что действие $H/H_0 : Y_0$ не превосходно, а морфизм π_U не равноразмерен.

3) $G = SL_n \times SL_{n+1}$, $H = SL_n \times \mathbb{C}^\times$, $n \geq 2$. Множитель SL_n группы H вложен в G диагонально, причем во множитель SL_{n+1} – в виде левого верхнего блока $n \times n$. Тор $\mathbb{C}^\times$ вложен во множитель SL_{n+1} группы G посредством отображения $s \mapsto \text{diag}(s, \dots, s, s^{-n})$.

В строке 1 таблицы 1 в [12] указано, что полугруппа $\hat{\Lambda}_+(G/H)$ свободно порождается элементами

$$(\varphi_1, n\chi), (\pi_{n-1} + \varphi_2, (n-1)\chi), \dots, (\pi_1 + \varphi_n, \chi), \\ (\pi_{n-1} + \varphi_1, -\chi), \dots, (\pi_1 + \varphi_{n-1}, -(n-1)\chi), (\varphi_n, -n\chi)$$

для некоторого ненулевого характера $\chi \in \mathfrak{X}(H)$. Отсюда следует, что действие $H/H_0 : Y_0$ не превосходно, а морфизм π_U не равноразмерен.

4) $G = SL_n \times Sp_{2m}$, $H = \mathbb{C}^\times \cdot SL_{n-2} \times SL_2 \times Sp_{2m-2}$, $n \geq 3$, $m \geq 1$. Множитель SL_{n-2} группы H вложен как левый верхний блок $(n-2) \times (n-2)$ во множитель SL_n группы G . Множитель SL_2 группы H вложен диагонально в G : как правый нижний блок 2×2 во множитель SL_n и как блок 2×2 в первых и последних строках и столбцах во множитель Sp_{2m} . Множитель Sp_{2m-2} группы H вложен во множитель Sp_{2m} группы G как центральный блок $(2m-2) \times (2m-2)$. Наконец, тор $\mathbb{C}^\times$ вложен во множитель SL_n группы G посредством отображения $s \mapsto \text{diag}(s^{-2}, \dots, s^{-2}, s^{n-2}, s^{n-2})$ при нечетном n и отображения $s \mapsto \text{diag}(s^{-1}, \dots, s^{-1}, s^{(n-2)/2}, s^{(n-2)/2})$ при четном n .

В строке 3 таблицы 1 в [12] указано, что полугруппа $\hat{\Lambda}_+(G/H)$ свободно порождается элементами $(\pi_{n-2}, 2\chi)$, $(\varphi_2, 0)$ (присутствует в системе порождающих при $m \geq 2$), $(\pi_{n-1} + \varphi_1, \chi)$, $(\pi_1 + \pi_{n-1}, 0)$ (присутствует в системе порождающих при $n \geq 4$), $(\pi_1 + \varphi_1, -\chi)$, $(\pi_2, -2\chi)$ для некоторого ненулевого характера $\chi \in \mathfrak{X}(H)$. Отсюда следует, что действие $H/H_0 : Y_0$ не превосходно, а морфизм π_U не равноразмерен.

Случай 2. $\dim Z(H) = 0$. Для каждого из рассматриваемых ниже пространств G/H зафиксируем и обозначим через F множество T -полуинвариантных функций, свободно порождающих алгебру ${}^U\mathbb{C}[G/H]$. Весаи этих функций являются неразложимые элементы (свободной) полугруппы $\Lambda_+(G/H) \simeq \hat{\Lambda}_+(G/H)$. Полагаем $|F| = r$. Отметим, что r – коразмерность общего слоя морфизма π_U . Во всех случаях нулевой слой морфизма π_U непуст в силу предложения 1. При рассмотрении пространств серий 2) и 4) нам потребуется следующая вспомогательная лемма, вытекающая из теоремы о размерностях слоев доминантного морфизма.

ЛЕММА 3. Пусть $\gamma: M \rightarrow N$ – морфизм аффинных алгебраических многообразий. Пусть замкнутое подмногообразие $N_0 \subset N$ таково, что множество $\gamma(M) \cap N_0$ плотно в N_0 . Тогда $\text{codim}_M \gamma^{-1}(N_0) \leq \text{codim}_N N_0$.

Далее рассматриваются все требуемые пространства G/H .

1) $G = \text{Spin}_n \times \text{Spin}_{n+1}$, $H = \text{Spin}_n$, $n \geq 3$. Однородное пространство G/H однозначно определяется локально изоморфным ему пространством $\tilde{G}/\tilde{H}$, где $\tilde{G} = \text{SO}_n \times \text{SO}_{n+1}$, $\tilde{H} = \text{SO}_n$ и подгруппа $\tilde{H}$ вложена в $\tilde{G}$ диагонально. Пусть $\theta_m: \text{SO}_m \hookrightarrow \text{SO}_{m+1}$ – вложение, индуцированное вложением $\mathbb{C}^m \hookrightarrow \mathbb{C}^{m+1}$, переводящим базис $e_1, \dots, e_m$ в набор $e_1, \dots, e_{m/2}, e_{m/2+2}, \dots, e_{m+1}$ при четном m и в набор $e_1, \dots, e_{(m-1)/2}, \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{(m+1)/2} + e_{(m+3)/2}), e_{(m+5)/2}, \dots, e_{m+1}$ при нечетном m . Образом вложения θ_m является стабилизатор вектора $e_{m/2+1}$ при четном m и вектора $e_{(m+1)/2} - e_{(m+3)/2}$ при нечетном m . Зафиксируем вложение $\tilde{H}$ в $\tilde{G}$, при котором образ матрицы $P \in \tilde{H}$ в группе $\tilde{G}$ равен $(P, \theta_n(P))$. Накрытие $G/H \rightarrow \tilde{G}/\tilde{H}$ определяет естественное вложение $\mathbb{C}[\tilde{G}/\tilde{H}] \hookrightarrow \mathbb{C}[G/H]$, в силу которого всякую регулярную функцию на $\tilde{G}/\tilde{H}$ мы будем рассматривать также как регулярную функцию на G/H .

При $n = 3$ однородное пространство G/H изоморфно пространству $(\text{SL}_2 \times \text{SL}_2 \times \text{SL}_2)/\text{SL}_2$, где подгруппа SL_2 вложена в группу $\text{SL}_2 \times \text{SL}_2 \times \text{SL}_2$ диагонально. Это пространство изоморфно пространству серии 4) (см. ниже) при $n = m = l = 1$. При $n = 4$ однородное пространство G/H изоморфно пространству серии 5) (см. ниже) при $n = m = 1$. Поэтому далее считаем $n \geq 5$.

Пусть $g = (P, Q) \in \tilde{G}$. Положим $R = Q\theta_n(P)^{-1}$. При $n = 2k$ во множестве F содержатся функции, пропорциональные следующим функциям от элемента g :

$$f_1 = r_{n+1,1}, \quad f_2 = r_{n+1,k+1}, \quad f_3 = f_1 r_{n,k+1} - f_2 r_{n,1};$$

при $n = 2k + 1$ во множестве F содержатся функции, пропорциональные следующим функциям от элемента g :

$$f_1 = r_{n+1,1}, \quad f_2 = r_{n+1,k+1} - r_{n+1,k+2}, \quad f_3 = f_1(r_{n,k+1} - r_{n,k+2}) - f_2 r_{n,1}$$

(см. [12; п. 3.1, случай 2]). Далее без ограничения общности считаем, что $f_1, f_2, f_3 \in F$. Веса относительно T функций f_1, f_2 равны $\pi_1 + \varphi_1$, φ_1 соответственно, вес функции f_3 равен $\pi_1 + \varphi_2$ при $n \geq 6$ и $\pi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$ при $n = 5$. Поскольку из условия $f_1 = f_2 = 0$ следует, что $f_3 = 0$, множество совместных нулей в G/H всех функций из F совпадает с множеством совместных нулей в G/H всех функций из $F \setminus \{f_3\}$. Таким образом, нулевой слой морфизма π_U имеет коразмерность не больше $r - 1$, поэтому морфизм π_U не равноразмерен.

2) $G = \text{SL}_n \times \text{Sp}_{2m}$, $H = \text{SL}_{n-2} \times \text{SL}_2 \times \text{Sp}_{2m-2}$, $n \geq 5$, $m \geq 1$. Множитель SL_{n-2} группы H вложен как левый верхний блок $(n-2) \times (n-2)$ во множитель SL_n группы G . Множитель SL_2 группы H вложен диагонально в G : как правый нижний блок 2×2 во множитель SL_n и как блок 2×2 в первых и последних строках и столбцах во множитель Sp_{2m} . Множитель Sp_{2m-2} группы H вложен во множитель Sp_{2m} группы G как центральный блок $(2m-2) \times (2m-2)$.

Пусть $g = (P, Q) \in G$. Обозначим через P_{ij} алгебраическое дополнение к элементу p_{ij} матрицы P . Во множестве F содержатся функции, пропорциональные следующим функциям от элемента g :

$$\begin{aligned} f_1 &= p_{n,n-1}q_{2m,2m} - p_{n,n}q_{2m,1}, & f_2 &= p_{n,n-1}P_{1,n-1} + p_{n,n}P_{1,n}, \\ f_3 &= q_{2m,1}P_{1,n-1} + q_{2m,2m}P_{1,n} \end{aligned}$$

(см. [12; п. 3.2, случай 4]). Веса относительно T функций f_1, f_2, f_3 равны $\pi_{n-1} + \varphi_1$, $\pi_1 + \pi_{n-1}$, $\pi_1 + \varphi_1$ соответственно. Пусть $\gamma: G/H \rightarrow \mathbb{C}^6$ – морфизм, определяемый функциями $P_{1,n-1}$, $P_{1,n}$, $p_{n,n-1}$, $p_{n,n}$, $q_{2m,1}$, $q_{2m,2m}$. Обозначим через N_0 подмножество в $\mathbb{C}^6$, определяемое условиями $f_1 = f_2 = f_3 = 0$. Как нетрудно убедиться, $\dim N_0 = 4$. Теперь для четверки ненулевых чисел a, b, c, d рассмотрим пару матриц

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b^{-1} \\ \vdots & E_{n-3} & \vdots & \vdots \\ d^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & bd & -ad \end{pmatrix}, \quad Q_0 = \begin{pmatrix} a^{-1}c^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & E_{2m-2} & \vdots \\ -bc & \dots & ac \end{pmatrix}$$

(на месте многоточий стоят нули). Имеем $(P_0, Q_0) \in G$ при любых ненулевых значениях чисел a, b, c, d , причем на этой паре матриц значения функций $P_{1,n-1}$, $P_{1,n}$, $p_{n,n-1}$, $p_{n,n}$, $q_{2m,1}$, $q_{2m,2m}$ равны $a, b, bd, -ad, -bc, ac$ соответственно. Кроме того, легко проверить, что $\gamma((P_0, Q_0)H) \in N_0$. Отсюда следует, что $\dim(\gamma(G/H) \cap N_0) = 4$, т.е. множество $\gamma(G/H) \cap N_0$ плотно в N_0 . Тогда по лемме 3 коразмерность в G/H множества совместных нулей функций f_1, f_2, f_3 не больше 2, а значит, коразмерность в G/H множества совместных нулей всех функций из F не больше $r - 1$. Поэтому морфизм π_U не равноразмерен.

3) $G = \mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{Sp}_4$, $H = \mathrm{Sp}_{2n-4} \times \mathrm{Sp}_4$, $n \geq 3$. Первый множитель группы H вложен в первый множитель группы G в виде центрального блока $(2n - 4) \times (2n - 4)$; второй множитель группы H вложен диагонально в G (в первый множитель вложен как блок 4×4 в строках и столбцах с номерами $1, 2, 2n - 1, 2n$).

Пусть $g = (P, Q) \in G$. Положим $R = PQ^{-1} \in \mathrm{Sp}_{2n}$ (матрица Q вкладывается в Sp_{2n} как блок 4×4 в строках и столбцах с номерами $1, 2, 2n - 1, 2n$). Обозначим через W минор порядка 3 матрицы R , отвечающий трем нижним строкам и столбцам с номерами $1, 2, n$. Во множестве F содержатся функции, пропорциональные функциям f_1, f_2, f_3 от элемента g , где $f_1 = r_{2n,1}$, f_2 – минор порядка 3 матрицы R , отвечающий трем нижним строкам и столбцам с номерами $1, 2, 2n - 1$, и $f_3 = f_1W + f_2r_{2n,2}$ (см. [12; п. 3.2, случай 6]). Далее без ограничения общности считаем, что $f_1, f_2, f_3 \in F$. Веса относительно T функций f_1, f_2, f_3 равны $\pi_1 + \varphi_1$, $\pi_3 + \varphi_1$, $\pi_1 + \pi_3 + \varphi_2$ соответственно. Поскольку из условия $f_1 = f_2 = 0$ следует, что $f_3 = 0$, множество совместных нулей в G/H всех функций из F совпадает с множеством совместных нулей в G/H всех функций из $F \setminus \{f_3\}$. Таким образом, нулевой слой морфизма π_U имеет коразмерность не больше $r - 1$, поэтому морфизм π_U не равноразмерен.

4) $G = \mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{Sp}_{2m} \times \mathrm{Sp}_{2l}$, $H = \mathrm{Sp}_{2n-2} \times \mathrm{Sp}_{2m-2} \times \mathrm{Sp}_{2l-2} \times \mathrm{Sp}_2$, $n, m, l \geq 1$. Каждый из первых трех множителей группы H вложен в соответствующий множитель группы G в виде центрального блока соответствующего размера.

Множитель Sp_2 группы H вложен в G диагонально в виде блока 2×2 в первых и последних строках и столбцах каждого множителя.

Пусть $g = (P, Q, R) \in G$. Во множестве F содержатся функции, пропорциональные следующим функциям от элемента g :

$$\begin{aligned} f_1 &= p_{2n,1}q_{2m,2m} - p_{2n,2n}q_{2m,1}, & f_2 &= q_{2m,1}r_{2l,2l} - q_{2m,2m}r_{2l,1}, \\ f_3 &= p_{2n,1}r_{2l,2l} - p_{2n,2n}r_{2l,1} \end{aligned}$$

(см. [12; п. 3.2, случай 7]). Веса относительно T функций f_1, f_2, f_3 равны $\pi_1 + \varphi_1, \varphi_1 + \psi_1, \pi_1 + \psi_1$ соответственно. Пусть $\gamma: G/H \rightarrow \mathbb{C}^6$ – морфизм, определяемый функциями $p_{2n,1}, p_{2n,2n}, q_{2m,1}, q_{2m,2m}, r_{2l,1}, r_{2l,2l}$. Обозначим через N_0 подмножество в $\mathbb{C}^6$, определяемое условиями $f_1 = f_2 = f_3 = 0$. Как нетрудно убедиться, $\dim N_0 = 4$. Каждая из функций $p_{2n,1}, p_{2n,2n}, q_{2m,1}, q_{2m,2m}, r_{2l,1}, r_{2l,2l}$ является полуинвариантной относительно действия группы $T \times T$, где левый множитель действует слева, а правый – справа. При этом веса всех этих функций линейно независимы в $\mathfrak{X}(T \times T)$. Отсюда следует, что для всякой четверки ненулевых чисел a, b, c, d найдется тройка матриц $(P_0, Q_0, R_0) \in G$, на которой значения функций $p_{2n,1}, p_{2n,2n}, q_{2m,1}, q_{2m,2m}, r_{2l,1}, r_{2l,2l}$ равны a, ad, b, bd, c, cd соответственно. Кроме того, легко проверить, что $\gamma((P_0, Q_0, R_0)H) \in N_0$ при любых ненулевых значениях чисел a, b, c, d . Отсюда следует, что $\dim(\gamma(G/H) \cap N_0) = 4$, т.е. множество $\gamma(G/H) \cap N_0$ плотно в N_0 . Тогда по лемме 3 коразмерность в G/H множества совместных нулей функций f_1, f_2, f_3 не больше 2, а значит, коразмерность в G/H множества совместных нулей всех функций из F не больше $r - 1$. Поэтому морфизм π_U не равноразмерен.

5) $G = \mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{Sp}_4 \times \mathrm{Sp}_{2m}$, $H = \mathrm{Sp}_{2n-2} \times \mathrm{Sp}_2 \times \mathrm{Sp}_2 \times \mathrm{Sp}_{2m-2}$, $n, m \geq 1$. Первый множитель группы H вложен в первый множитель группы G в виде центрального блока $(2n - 2) \times (2n - 2)$, аналогично вложен четвертый множитель группы H в третий множитель группы G . Второй множитель группы H вложен диагонально в первый и второй множители группы G – в каждый из них как блок 2×2 в первых и последних строках и столбцах. Третий множитель группы H вложен диагонально во второй и третий множители группы G : во второй в виде центрального блока 2×2 , а в третий в виде блока 2×2 в первых и последних строках и столбцах.

Пусть $g = (P, Q, R) \in G$. Во множестве F содержатся функции, пропорциональные следующим функциям от элемента g :

$$\begin{aligned} f_1 &= p_{2n,1}q_{4,4} - p_{2n,2n}q_{4,1}, & f_2 &= r_{2m,1}q_{4,3} - r_{2m,2m}q_{4,2}, \\ f_3 &= f_2(p_{2n,1}q_{3,4} - p_{2n,2n}q_{3,1}) - f_1(r_{2m,1}q_{3,3} - r_{2m,2m}q_{3,2}) \end{aligned}$$

(см. [12; п. 3.2, случай 8]). Далее без ограничения общности считаем, что $f_1, f_2, f_3 \in F$. Веса относительно T функций f_1, f_2, f_3 равны $\pi_1 + \varphi_1, \varphi_1 + \psi_1, \pi_1 + \varphi_2 + \psi_1$ соответственно. Поскольку из условия $f_1 = f_2 = 0$ следует, что $f_3 = 0$, множество совместных нулей в G/H всех функций из F совпадает с множеством совместных нулей в G/H всех функций из $F \setminus \{f_3\}$. Таким образом, нулевой слой морфизма π_U имеет коразмерность не больше $r - 1$, поэтому морфизм π_U не равноразмерен.

Доказательство предложения 5 завершено.

Список литературы

- [1] Дж. Хаджиев, “Некоторые вопросы теории векторных инвариантов”, *Матем. сб.*, **72(114)**:3 (1967), 420–435; англ. пер.: D. Hadžiev, “Some questions in the theory of vector invariants”, *Math. USSR-Sb.*, **1**:3 (1967), 383–396.
- [2] F. Кноп, “Über Hilberts vierzehntes Problem für Varietäten mit Kompliziertheit eins”, *Math. Z.*, **213**:1 (1993), 33–36.
- [3] Э. Б. Винберг, Б. Н. Кимельфельд, “Однородные области на флаговых многообразиях и сферические подгруппы полупростых групп Ли”, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:3 (1978), 12–19; англ. пер.: È. B. Vinberg, B. N. Kimel’fel’d, “Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups of semisimple Lie groups”, *Funct. Anal. Appl.*, **12**:3 (1978), 168–174.
- [4] В. Л. Попов, “Стягивание действий редутивных алгебраических групп”, *Матем. сб.*, **130(172)**:3(7) (1986), 310–334; англ. пер.: V. L. Popov, “Contraction of the actions of reductive algebraic groups”, *Math. USSR-Sb.*, **58**:2 (1987), 311–335.
- [5] Р. С. Авдеев, “Превосходные аффинные сферические однородные пространства полупростых алгебраических групп”, Тр. ММО, **71**, УРСС, М., 2010, 235–269; англ. пер.: R. S. Avdeev, “Excellent affine spherical homogeneous spaces of semisimple algebraic groups”, *Trans. Mosc. Math. Soc.*, **2010**, 209–240.
- [6] D. I. Panyushev, “Parabolic subgroups with Abelian unipotent radical as a testing site for invariant theory”, *Canad. J. Math.*, **51**:3 (1999), 616–635.
- [7] Э. Б. Винберг, “Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия”, *УМН*, **56**:1 (2001), 3–62; англ. пер.: E. B. Vinberg, “Commutative homogeneous spaces and co-isotropic symplectic actions”, *Russian Math. Surveys*, **56**:1 (2001), 1–60.
- [8] M. Krämer, “Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen”, *Compositio Math.*, **38**:2 (1979), 129–153.
- [9] И. В. Микитюк, “Об интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем с однородными конфигурационными пространствами”, *Матем. сб.*, **129(171)**:4 (1986), 514–534; англ. пер.: I. V. Mikityuk, “On the integrability of invariant Hamiltonian systems with homogeneous configuration spaces”, *Math. USSR-Sb.*, **57**:2 (1987), 527–546.
- [10] M. Brion, “Classification des espaces homogènes sphériques”, *Compositio Math.*, **63**:2 (1987), 189–208.
- [11] О. С. Якимова, “Слабо симметрические пространства полупростых групп Ли”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2002, №2, 57–60; англ. пер.: O. S. Yakimova, “Weakly symmetric spaces of semisimple Lie groups”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **57**:2 (2002), 37–40.
- [12] Р. С. Авдеев, “Расширенные подгруппы старших весов аффинных сферических однородных пространств непростых полупростых алгебраических групп”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:6 (2010), 3–26; англ. пер.: R. S. Avdeev, “Extended weight semigroups of affine spherical homogeneous spaces of non-simple semisimple algebraic groups”, *Izv. Math.*, **74**:6 (2010), 1103–1126.
- [13] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, “Теория инвариантов”, *Алгебраическая геометрия – 4*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **55**, ВИНТИ, М., 1989, 137–309; англ. пер.: V. L. Popov, E. B. Vinberg, “Invariant theory”, *Algebraic geometry. IV: Linear algebraic groups, invariant theory*, *Encycl. Math. Sci.*, **55**, 1994, 123–278.
- [14] Р. С. Авдеев, Н. Е. Горфинкель, “Гармонический анализ на сферических однородных пространствах с разрешимым стабилизатором”, *Функц. анализ и его прил.*, **46**:3 (2012), 1–15; англ. пер.: R. S. Avdeev, N. E. Gorfinkel, “Harmonic analysis

- on spherical homogeneous spaces with solvable stabilizer”, *Funct. Anal. Appl.*, **46**:3 (2012), 161–172.
- [15] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, 2-е изд., УРСС, М., 1995; англ. пер. 1-го изд.: A. L. Onishchik, È. B. Vinberg, *Lie groups and algebraic groups*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [16] D. Panyushev, “Complexity of quasiaffine homogeneous varieties, t -decompositions, and affine homogeneous spaces of complexity 1”, *Lie groups, their discrete subgroups, and invariant theory*, Adv. Soviet Math., **8**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 151–166.

Р. С. Авдеев (R. S. Avdeev)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: suselr@yandex.ru

Поступила в редакцию

11.06.2011 и 16.04.2012