Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Тимофеева, О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности. V. Существование универсального семейства, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 3, 107–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7898>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 13:39:09

УДК 512.722+512.723

Н. В. Тимофеева

**О новой компактификации модулей
векторных расслоений на поверхности.
V: Существование универсального семейства**

Исследуется существование универсального семейства/псевдосемейства допустимых стабильных пар над пространством модулей $\widetilde{M}$, полученном в предыдущих работах.

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: пространство модулей, полустабильные когерентные пучки, алгебраическая поверхность, универсальное семейство, псевдосемейство.

DOI: 10.4213/sm7898

Введение

Пусть S – гладкая неприводимая проективная алгебраическая поверхность над алгебраически замкнутым полем k нулевой характеристики. Зафиксируем обильный обратимый пучок $L \in \text{Pic } S$, который для краткости будем называть *поляризацией* поверхности S . Во всем тексте данной работы $r = \text{rank } E$ – ранг, $p_E(n) = \chi(E \otimes L^n)/r$ – приведенный многочлен Гильберта когерентного пучка E без кручения на схеме S относительно поляризации L . Через $\chi(\cdot)$ обозначим, как обычно, эйлерову характеристику. Мы работаем с понятием стабильности (полустабильности) когерентного пучка E на поверхности S в смысле Д. Гизекера (см. [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Когерентный $\mathcal{O}_S$ -пучок E *стабилен* (соответственно *полустабилен*), если для любого собственного подпучка $F \subset E$ ранга $r' = \text{rank } F$ при $m \gg 0$

$$p_E(n) > p_F(n) \quad (\text{соответственно } p_E(n) \geq p_F(n)).$$

Известно (см. [2]), что структура пространства модулей полустабильных пучков сильно зависит от выбора поляризации. Аналогично, если дана проективная схема $\widetilde{S}$ с поляризацией $\widetilde{L}$, то для пучка $\widetilde{E}$ ранга r имеем обозначение $p_{\widetilde{E}}(n) = \chi(\widetilde{E} \otimes \widetilde{L}^n)/r$. Схема модулей Гизекера–Маруямы полустабильных пучков без кручения на поверхности S , имеющих относительно пучка L многочлен Гильберта $rp_E(n)$, обозначается $\overline{M}$. Известно (см. [3]), что это проективная схема конечного типа над полем k . При этом точки, соответствующие стабильным локально свободным пучкам (векторным расслоениям), образуют в схеме $\overline{M}$ открытую по Зарискому подсхему M_0 . Пусть схема $\overline{M}$ снабжена приведенной структурой и является тонким пространством модулей. Тогда на $\overline{M}$ имеется

тривиальное произведение $\overline{M} \times S \xrightarrow{\pi} \overline{M}$, несущее универсальное семейство стабильных пучков $\mathbb{E}$. В [4], [5] построены проективная схема $\widetilde{M}$ с приведенной структурой и нетривиальное плоское семейство схем $\widetilde{\Sigma} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \widetilde{M}$, оснащенное семейством локально свободных пучков $\widetilde{\mathbb{E}}$. Также определен бирациональный морфизм схем $\Phi: \widetilde{\Sigma} \rightarrow \overline{M} \times S$ такой, что $(\Phi_*\widetilde{\mathbb{E}})^{\vee\vee} = \mathbb{E}$. В [6] проведены аналогичные конструкции (плоские семейства схем $\widetilde{\Sigma}_i \xrightarrow{\tilde{\pi}_i} \widetilde{B}_i$, оснащенные локально свободными пучками $\widetilde{\mathbb{E}}_i$) над этальными окрестностями $\widetilde{B}_i \xrightarrow{\text{étale}} \widetilde{M}$ для случая, когда $\overline{M}$ не обладает универсальным семейством пучков. В любом случае схема $\widetilde{M}$ содержит открытую по Зарискому подсхему, изоморфную M_0 . Указанное построение будем называть *стандартным разрешением*.

Кроме того, построенный в работах [4], [5] бирациональный морфизм $\Phi: \widetilde{\Sigma} \rightarrow \overline{M} \times S$ устанавливает соответствие $(\widetilde{S}, \widetilde{E}) \mapsto (S, E)$ между парами $(\widetilde{S}, \widetilde{E}) \in \widetilde{M}$ и $(S, E) \in \overline{M}$. Там же построен бирациональный морфизм $\kappa: \overline{M} \rightarrow \widetilde{M}$. Поэтому при поточечном (послойном) рассмотрении мы считаем, что слой $\pi^{-1}(y) = S$ семейства Σ является образом слоя $\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{y}) = \widetilde{S}$, задаваемым доминантным морфизмом Φ . При этом когерентный пучок E на слое S однозначно определяется расслоением $\widetilde{E}$ на слое $\widetilde{S}$ согласно выражению $E = \mathbb{E}|_{\pi^{-1}(y)} = (\Phi_*\widetilde{\mathbb{E}})^{\vee\vee}|_{\pi^{-1}(y)}$. Теоретико-схемное описание схем $\widetilde{S}$, возникающих как слои плоских семейств $\widetilde{\Sigma}$, дано в работе [7].

Также заметим, что все операции и рассуждения, проведенные в [5] для универсального семейства стабильных пучков $\mathbb{E}$, справедливы и для любой его подкрутки $\mathbb{E} \otimes \mathbb{L}^m$ на послойно обильный обратимый пучок $\mathbb{L}$. То же самое верно (см. [6]) для любого плоского семейства стабильных (полустабильных) пучков, параметризованного гладкой квазипроективной алгебраической схемой.

В настоящей статье мы работаем в предположении, что все неприводимые компоненты схемы модулей Гизекера–Маруямы содержат локально свободные пучки. Такая ситуация носит асимптотический характер (см. [8; теорема 0.3], [9; теорема D]), если $\Delta := c_2 - ((r-1)/(2r))c_1^2 \gg 0$. В наиболее общем случае это не так. Однако в любом случае можно ограничиться заменой схемы Гизекера–Маруямы объединением тех ее компонент, которые содержат локально свободные пучки. Такие компоненты схемы Гизекера–Маруямы далее будут называться *основными*.

Цель настоящей работы – исследование вопроса о том, когда компактификация $\widetilde{M}$, построенная автором в работах [4]–[6], [10], [11], обладает универсальным семейством, т.е. является тонким пространством модулей.

Следуя [12; п. 2.2], напомним некоторые определения. Пусть $\mathcal{C}$ – категория, $\mathcal{C}^o$ – двойственная к ней категория, $\mathcal{C}' = \mathcal{Funct}(\mathcal{C}^o, \text{Sets})$ – категория функторов в категорию множеств. По лемме Йонеды функтор $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}': F \mapsto (\underline{F}: X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F))$ вкладывает $\mathcal{C}$ как полную подкатеорию в $\mathcal{C}'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [12; определение 2.2.1]). Функтор $f \in \text{Ob } \mathcal{C}'$ *копредставлен объектом* $F \in \text{Ob } \mathcal{C}$, если существует $\mathcal{C}'$ -морфизм $\psi: f \rightarrow \underline{F}$ такой, что любой морфизм $\psi': f \rightarrow \underline{F}'$ пропускается через единственный морфизм $\omega: \underline{F} \rightarrow \underline{F}'$.

В работах [10], [11] введен класс допустимых проективных схем $\tilde{S}$ с выделенной поляризацией $\tilde{L}$ и сформулировано определение стабильности (полуостабильности) для пар $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$ “поляризованная допустимая схема – локально свободный пучок”. Пусть T – схема над полем k . Рассматриваются семейства полуостабильных пар

$$\mathfrak{F}_T = \left\{ \begin{array}{l} \pi: \Sigma \rightarrow T, \tilde{\mathbb{L}} \in \text{Pic } \Sigma \text{ плоский над } T, \\ \text{при } m \gg 0 \tilde{\mathbb{L}}^m \text{ очень обилен относительно } T, \\ \forall t \in T \tilde{L}_t = \tilde{\mathbb{L}}|_{\pi^{-1}(t)} \text{ обилен,} \\ (\pi^{-1}(t), \tilde{L}_t) - \text{допустимая схема с выделенной поляризацией,} \\ \chi(\tilde{L}_t^m) \text{ не зависит от } t, \\ \tilde{\mathbb{E}} - \text{локально свободный } \mathcal{O}_\Sigma\text{-пучок, плоский над } T, \\ \chi(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m)|_{\pi^{-1}(t)} = rp_E(m), \\ ((\pi^{-1}(t), \tilde{L}_t), \tilde{\mathbb{E}}|_{\pi^{-1}(t)}) - \text{стабильная (полуостабильная) пара} \end{array} \right\}$$

и функтор $f: (\text{Schemes}_k)^o \rightarrow (\text{Sets})$ из категории k -схем в категорию множеств, ставящий с схеме T множество классов эквивалентности $(\mathfrak{F}_T / \sim)$.

При этом отношение эквивалентности $\sim$ определено следующим образом. Семейства $((\pi: \Sigma \rightarrow T, \tilde{\mathbb{L}}), \tilde{\mathbb{E}})$ и $((\pi': \Sigma' \rightarrow T, \tilde{\mathbb{L}}'), \tilde{\mathbb{E}}')$ из класса $\mathfrak{F}$ будем считать эквивалентными (обозначение $((\pi: \Sigma \rightarrow T, \tilde{\mathbb{L}}), \tilde{\mathbb{E}}) \sim ((\pi': \Sigma' \rightarrow T, \tilde{\mathbb{L}}'), \tilde{\mathbb{E}}')$), если:

1) существует изоморфизм $\iota: \Sigma \xrightarrow{\sim} \Sigma'$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow[\sim]{\iota} & \Sigma' \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & T & \end{array}$$

коммутативна;

2) существуют линейные расслоения L', L'' на схеме T такие, что $\iota^* \tilde{\mathbb{E}}' = \tilde{\mathbb{E}} \otimes \pi^* L', \iota^* \tilde{\mathbb{L}}' = \tilde{\mathbb{L}} \otimes \pi^* L''$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Схема $\widetilde{M}$ – *грубое пространство модулей* функтора f , если f копредставлен схемой $\widetilde{M}$.

В работах [10], [11] доказаны следующие результаты.

Функтор f обладает грубым пространством модулей $\widetilde{M}$ со следующими свойствами:

- (i) $\widetilde{M}$ – проективная нётерова алгебраическая схема;
- (ii) имеет место бирациональный морфизм объединения основных компонент приведенной схемы Гизекера–Маруямы $\overline{M}_{\text{red}}$ для поверхности S и многочлена Гильберта $rp_E(n)$ на приведенную схему $\overline{M}_{\text{red}}$, т.е. $\kappa: \overline{M}_{\text{red}} \rightarrow \widetilde{M}_{\text{red}}$;
- (iii) имеет место открытая по Зарискому подсхема $\widetilde{M}_0 \subset \widetilde{M}$, соответствующая таким стабильным парам $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$, что $(\tilde{S}, \tilde{L}) \cong (S, L)$.

Все рассуждения данной работы применимы к любым многочленам Гильберта безотносительно к величине дискриминанта, а также к количеству и геометрии неприводимых компонент соответствующей схемы Гизекера–Маруямы.

В общем (приводимом) случае имеем существование грубого пространства модулей у каждого максимального по включению неприводимого подстека в $\coprod(\mathfrak{F}_T/\sim)$, содержащего такие пары $((\tilde{\pi}^{-1}(t), \tilde{L}_t), \tilde{\mathbb{E}}|_{\tilde{\pi}^{-1}(t)})$, что $(\tilde{\pi}^{-1}(t), \tilde{L}_t) \cong (S, L)$. Такие пары будем называть *S-парам*. В указанный подстек входят семейства (с возможно неприведенными базисными схемами), состоящие из тех и только тех полустабильных пар $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$, которые удовлетворяют требованию:

существует семейство полустабильных пар $((\tilde{\Sigma}_T, \tilde{\mathbb{L}}_T), \tilde{\mathbb{E}}_T)$ с приведенной неприводимой базой T , содержащее пару $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$ и хотя бы одну *S*-пару.

Под $\tilde{M}$ понимается пространство модулей указанного подстека.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Плоское семейство стабильных пар $((\tilde{\Sigma}^s, \tilde{\mathbb{L}}^s), \tilde{\mathbb{E}}^s)$ с проекцией $\pi': \tilde{\Sigma}^s \rightarrow \tilde{M}^s$ называется *универсальным*, если выполнено следующее.

Для плоского семейства $((p: \Sigma \rightarrow T, \mathbb{L}), \mathbb{F})$ стабильных пар с базой T такого, что при $n \gg 0$ $\chi(\mathbb{L}^n|_{p^{-1}(t)})$ не зависит от $t \in T$, $\chi(\mathbb{F} \otimes \mathbb{L}^n|_{p^{-1}(t)}) = rp_E(n)$ и $\mathbb{L}|_{p^{-1}(t)}$ – выделенная поляризация на слое $p^{-1}(t)$:

- определены индуцированные морфизмы $\mu_{\mathbb{F}}: T \rightarrow \tilde{M}^s$ и $\tilde{\mu}_{\mathbb{F}}: \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}^s$ такой, что квадрат

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\tilde{\mu}_{\mathbb{F}}} & \tilde{\Sigma}^s \\ p \downarrow & & \downarrow \pi' \\ T & \xrightarrow{\mu_{\mathbb{F}}} & \tilde{M}^s \end{array}$$

декартов;

- существуют линейные расслоения L', L'' на схеме T такие, что $\mathbb{F} \otimes p^* L' = \tilde{\mu}_{\mathbb{F}}^* \tilde{\mathbb{E}}^s$ и $\mathbb{L} \otimes p^* L'' = \tilde{\mu}_{\mathbb{F}}^* \tilde{\mathbb{L}}^s$.

В нашей работе доказываются следующие (вполне ожидаемые) результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для всех полустабильных допустимых пар найдется такое $m \gg 0$, что индуцированные вложения $j: \tilde{S} \hookrightarrow G(H^0(\tilde{S}, \tilde{E} \otimes \tilde{L}^m), r)$ не имеют нетривиальных $\mathrm{PGL}(H^0(\tilde{S}, \tilde{E} \otimes \tilde{L}^m))$ -автоморфизмов. Схема $\tilde{M}$ содержит открытую подсхему $\tilde{M}^s$, над которой существует семейство $((\tilde{\Sigma}^s, \tilde{\mathbb{L}}^s), \tilde{\mathbb{E}}^s)$, обладающее свойством универсальности. Эта подсхема соответствует как множеству образу $\kappa(\overline{M}_{\mathrm{red}}^s)$, где $\overline{M}_{\mathrm{red}}^s$ – открытая подсхема GIT-стабильных точек в схеме Гизекера–Маруямы, рассматриваемой как схема с приведенной структурой $\overline{M}_{\mathrm{red}}$. Если схема $\overline{M}$ несет универсальное семейство стабильных когерентных пучков, то и схема $\tilde{M}$ обладает универсальным семейством $((\tilde{\Sigma}, \tilde{\mathbb{L}}), \tilde{\mathbb{E}})$.

ТЕОРЕМА 2. Схема $\tilde{M}$ содержит открытую подсхему $\tilde{M}^s$, над которой существует псевдосемейство $((\beta_i^s: B_i^s \rightarrow \tilde{M}^s, \tilde{\Sigma}_i^s, \tilde{\mathbb{L}}_i^s), \tilde{\mathbb{E}}_i^s)$, обладающее свойством универсальности. Эта подсхема соответствует как множеству образу $\kappa(\overline{M}_{\mathrm{red}}^s)$, где $\overline{M}_{\mathrm{red}}^s$ – открытая подсхема GIT-стабильных точек в $\overline{M}_{\mathrm{red}}$. Если схема $\overline{M}$ несет универсальное семейство стабильных когерентных пучков, то схема $\tilde{M}$ обладает универсальным псевдосемейством $((\beta_i: B_i \rightarrow \tilde{M}, \tilde{\Sigma}_i, \tilde{\mathbb{L}}_i), \tilde{\mathbb{E}}_i)$.

В частности, из доказанного в этой работе результата следует, что для новой компактификации $\widetilde{M}$ модулей стабильных векторных расслоений справедлив аналог численного признака существования универсального семейства, доказанного Маруямой в [3; теорема 6.11]. Многочлен Гильберта $rp_E(n)$ может быть переписан в виде $rp_E(n) = \sum_{i=0}^2 a_i \binom{n+i}{i}$, где a_0, a_1, a_2 – целые числа. Пусть $\delta(a_0, a_1, a_2)$ – их наибольший общий делитель.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\delta(a_0, a_1, a_2) = 1$. Тогда $\widetilde{M}$ обладает универсальным псевдосемейством. Если для всех стабильных допустимых пар найдется такое $m \gg 0$, что индуцированные вложения $j: \tilde{S} \hookrightarrow G(H^0(\tilde{S}, \tilde{E} \otimes \tilde{L}^m), r)$ не имеют нетривиальных $\mathrm{PGL}(H^0(\tilde{S}, \tilde{E} \otimes \tilde{L}^m))$ -автоморфизмов, то $\widetilde{M}$ обладает универсальным семейством.

Статья состоит из пяти параграфов. В §1 собраны понятия и основные результаты предыдущих работ, необходимые для дальнейшего. В §2 мы построим семейство $\tilde{\Sigma}^s$ допустимых схем $\tilde{S}$ над $\widetilde{M}^s$ в предположении, что действие группы $\mathrm{PGL}(V)$ не индуцирует нетривиальных представлений стабилизаторов стабильных точек автоморфизмами подсхемы $j: \tilde{S} \hookrightarrow G(V, r)$. В §3 завершим построение семейства $((\tilde{\Sigma}^s, \tilde{\mathbb{L}}^s), \tilde{\mathbb{E}}^s)$. В §4 проверим, что построенное семейство $((\tilde{\Sigma}^s, \tilde{\mathbb{L}}^s), \tilde{\mathbb{E}}^s)$ действительно является универсальным, и завершим доказательство теоремы 1. В §5 построим универсальное псевдосемейство допустимых стабильных пар в произвольной (не обязательно свободной от автоморфизмов) ситуации, что доказывает теорему 2.

§1. Объекты параметризации

Этот параграф носит вспомогательный характер. Здесь собраны сведения из предшествующих работ, необходимые для дальнейшего. Для удобства вычислений будем считать, что пучок L очень обилен. Если это не так, заменим L его очень обильной тензорной степенью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 (см. [7]). Артинов пучок $\varkappa$ называется $(S, L, r, p_E(n))$ -допустимым, если имеется точная $\mathcal{O}_S$ -тройка

$$0 \rightarrow E \rightarrow E^{\vee\vee} \rightarrow \varkappa \rightarrow 0,$$

в которой когерентный пучок E ранга r с многочленом Гильберта $rp_E(n)$ полустабилен относительно поляризации L .

Для полустабильных когерентных пучков E связь $(S, L, r, p_E(n))$ -допустимости с пучками идеалов Фиттинга $\mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S)$ дается таким предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [7]). Класс всех $\mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S)$ для полустабильных пучков E содержится в классе всех пучков вида $\mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^2(\varkappa, \mathcal{O}_S)$ для всех артиновых факторпучков $\varkappa$ длины $l = l(\varkappa) = h^0(S, \varkappa) \leq c_2$ пучка $\bigoplus^r \mathcal{O}_S$.

Пусть I – пучок идеалов некоторой нульмерной подсхемы Z на поверхности S , t – символ, трансцендентный над $\mathcal{O}_S(U)$ при всех открытых $U \subset S$,

$\mathcal{O}_S[t]$ – пучок полиномиальных алгебр над $\mathcal{O}_S$, $I[t]$ – его подпучок идеалов, определяемый соответствием $U \mapsto I(U)[t]$. При этом справа стоит полиномиальное кольцо (без единицы) над $I(U)$. Также рассмотрим подпучок главных идеалов $(t) \subset \mathcal{O}_S[t]$ и сумму подпучков идеалов $I[t] + (t)$ в $\mathcal{O}_S[t]$.

Образуем s -ю степень $(I[t] + (t))^s$, $s > 0$, как подпучок идеалов в $\mathcal{O}_S[t]$. Он содержит подмодуль $(t)^{s+1}$, порожденный элементом t^{s+1} . Таким образом, определен $\mathcal{O}_S[t]$ – фактормодуль $(I[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$. При $s = 0$ положим $(I[t] + (t))^s / (t)^{s+1} := \mathcal{O}_S$. Градуированная $\mathcal{O}_S$ -алгебра $\bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$ порождена компонентой степени $s = 1$, т.е. подгруппой $(I[t] + (t)) / (t)^2$.

Морфизм $\mathcal{O}_S \rightarrow \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$ приводит к морфизму проективных схем $\sigma: \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t)^{s+1} \rightarrow S$. Его будем называть *каноническим*. Как показано в [7], схема $\text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$ получается как слой композиции $\widehat{T \times S} \xrightarrow{\sigma} T \times S \xrightarrow{\pi} T$, где $T = \text{Spec } k[t] \cong \mathbb{A}_k^1$, π – проекция на базу T , σ – морфизм раздутья тривиального семейства поверхностей $T \times S$ в пучке идеалов $\mathcal{I} = I[t] + (t)$, задающем подсхему Z в слое $\pi^{-1}(0) \cong S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 (см. [10; определение 5]). Назовем поляризованную алгебраическую схему $(\tilde{S}, \tilde{L})$ $(S, L, r, p_E(n))$ -допустимой, если схема $(\tilde{S}, \tilde{L})$ удовлетворяет одному из условий:

- (i) $(\tilde{S}, \tilde{L}) \cong (S, L)$;
- (ii) $\tilde{S} \cong \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$, где $I = \mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^2(\mathcal{K}, \mathcal{O}_S)$ для артинова факторпучка $q: \bigoplus^r \mathcal{O}_S \twoheadrightarrow \mathcal{K}$ длины $l(\mathcal{K}) \leq c_2$, причем $\tilde{L}^m = L^m \otimes (\sigma^{-1}I \cdot \mathcal{O}_{\tilde{S}})$ для некоторого $m \gg 0$. При этом для любого m , для которого очень обилен пучок $L^m \otimes (\sigma^{-1}I \cdot \mathcal{O}_{\tilde{S}})$, поляризацию $\tilde{L}^m$ будем называть *выделенной*.

Из конструктивного построения компактификации Фиттинга в [4]–[6] следует, что поскольку $(S, L, r, p_E(n))$ -допустимые схемы включаются в одно или конечный набор плоских семейств, вложенных как локально замкнутые подсхемы в проективную схему (например, в универсальную схему схемы Гильберта), то существует (общее для всех классов изоморфизма схем $\tilde{S}$ и не зависящее от расслоений $\tilde{E}$) положительное m_0 такое, что для всех $m \geq m_0$ и для всех классов изоморфизма схем $\tilde{S}$ пучки $L^m \otimes (\sigma^{-1}I \cdot \mathcal{O}_{\tilde{S}})$ очень обильны.

Далее переобозначим L^m как L и $\tilde{L}^m$ как $\tilde{L}$. Будем считать, что многочлены Гильберта пучков вычисляются относительно новых L и $\tilde{L}$. В [2] показано, что при замене очень обильного обратимого пучка его тензорной степенью класс стабильных (полустабильных) когерентных пучков остается неизменным.

Поскольку в настоящей работе параметры $(S, L, r, p_E(n))$ фиксированы, для краткости будем называть $(S, L, r, p_E(n))$ -допустимые схемы и $(S, L, r, p_E(n))$ -допустимые артиновы пучки просто допустимыми.

Известно (см. [11; введение]), что схема $\tilde{S} = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$ может быть естественным образом представлена в виде объединения неприводимых компонент $\tilde{S} = \bigcup_{i \geq 0} \tilde{S}_i$, где *главная* компонента $\tilde{S}_0 = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I)^s$ – раздута в пучке идеалов I поверхность S и при $i > 0$ $\tilde{S}_i$ – неприводимые *дополнительные* компоненты $\bigcup_{i > 0} \tilde{S}_i$. При этом, как показано в [7], дополнительная компонента может иметь структуру неприведенной схемы. Очевидно,

допустимая схема состоит из одной компоненты $S \cong \tilde{S} = \tilde{S}_0$ тогда и только тогда, когда она изоморфна исходной поверхности S .

Допустимая схема $\tilde{S}$ обладает каноническим морфизмом $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$, при этом ограничение $\sigma_0 = \sigma|_{\tilde{S}_0}: \tilde{S}_0 \rightarrow S$ канонического морфизма σ на главную компоненту $\tilde{S}_0$ является морфизмом раздутия.

Будем говорить, что когерентный пучок E без кручения *деформационно эквивалентен локально свободному пучку*, если E может быть включен в плоское семейство $\mathcal{O}_S$ -пучков $\mathbb{E}$ над связной (приведенной и неприводимой) базой T , причем ограничения пучка $\mathbb{E}$ на слои вида $t \times S$, где $t \in T$ – достаточно общая точка, локально свободны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (см. [10; предложение 2]). Пусть когерентный пучок E , деформационно эквивалентный локально свободному пучку, является образом векторного расслоения $\tilde{E}$ на допустимой схеме $\tilde{S}$. Тогда имеется канонически определенный подпучок $\text{tors} \subset \sigma^*E$ такой, что $\tilde{E} \cong \sigma^*E/\text{tors}$.

Подпучок $\text{tors} \subset \sigma^*E$ играет в нашей конструкции роль, аналогичную роли подпучка кручения в случае приведенной и неприводимой базисной схемы.

В [7] показано, что слой композиции $\widehat{T \times S} \xrightarrow{\sigma} T \times S \xrightarrow{\pi} T$ в точке $t \in T = \text{Spec } k[t]$ имеет вид схемы $\tilde{S} = \text{Proj } \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$ для $I = \mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(\mathbb{E}|_t, \mathcal{O}_{t \times S})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7 (см. [11; определение 3]). S -стабильной (соответственно полустабильной) парой $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$ называются следующие данные:

- $\tilde{S} = \bigcup_{i \geq 0} \tilde{S}_i$ – допустимая схема, $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$ – канонический морфизм, $\sigma_i: \tilde{S}_i \rightarrow S$ – его ограничения на компоненты $\tilde{S}_i$, $i \geq 0$;
- $\tilde{E}$ – векторное расслоение на схеме $\tilde{S}$;
- $\tilde{L} \in \text{Pic } \tilde{S}$ – выделенная поляризация;

такие, что:

- $\chi(\tilde{E} \otimes \tilde{L}^n) = rp_E(n)$;
- на схеме $\tilde{S}$ пучок $\tilde{E}$ стабилен (соответственно полустабилен) по Гизе-кери, т.е. для любого собственного подпучка $\tilde{F} \subset \tilde{E}$ при $n \gg 0$

$$\frac{h^0(\tilde{F} \otimes \tilde{L}^n)}{\text{rank } F} < \frac{h^0(\tilde{E} \otimes \tilde{L}^n)}{\text{rank } E}$$

$$\left(\text{соответственно } \frac{h^0(\tilde{F} \otimes \tilde{L}^n)}{\text{rank } F} \leq \frac{h^0(\tilde{E} \otimes \tilde{L}^n)}{\text{rank } E} \right);$$

- на каждой из дополнительных компонент $\tilde{S}_i$, $i > 0$, пучок $\tilde{E}_i := \tilde{E}|_{\tilde{S}_i}$ квазиидеален, т.е. обладает описанием вида

$$\tilde{E}_i = \sigma_i^* \ker q_0 / \text{tors}$$

для некоторого $q_0 \in \bigsqcup_{l \leq c_2} \text{Quot}^l \bigoplus^r \mathcal{O}_S$.

§ 2. Семейство схем

Цель данного параграфа – построение семейства $\pi': \widetilde{M}^s \rightarrow \widetilde{M}^s$ с помощью наблюдений из теории инвариантов, сделанных в [10; § 9].

Пусть $m \gg 0$ таково, что для всех полустабильных $\mathcal{O}_S$ -пучков E пучки $E \otimes L^m$ порождены своими глобальными сечениями и $\chi(E \otimes L^m) = rp_E(m) = h^0(S, E \otimes L^m)$. Пусть V – k -векторное пространство размерности $h^0(S, E \otimes L^m)$. Далее оно всюду фиксировано.

Как и в предыдущих работах, $Q' \subset \text{Quot}^{rp_E(n)} V \otimes L^{-m}$ – квазипроективная (возможно, неприведенная) подсхема, соответствующая полустабильным когерентным факторпучкам E без кручения; $Q \subset Q'$ – объединение тех компонент схемы Q' , которые содержат локально свободные факторпучки. Схема $\overline{M}$ строится как GIT-фактор схемы Q по действию $\beta: Q \times \text{PGL}(V) \rightarrow Q$ группы $\text{PGL}(V)$, индуцированному линейными преобразованиями на векторном пространстве V .

Имеется (см. [11]) схема Гильберта $\text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)$ – квазипроективная (возможно, неприведенная) подсхема $\mu: H_0 \rightarrow \text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)$, замкнутые точки которой соответствуют полустабильным допустимым парам, схема

$$\widetilde{\Sigma}_{H_0} = \text{Univ}^{P(n)} G(V, r) \times_{\text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)} H_0$$

и строго плоский морфизм проектирования $\pi: \widetilde{\Sigma}_{H_0} \rightarrow H_0$. Схема $\widetilde{\Sigma}_{H_0}$ несет локально свободный пучок $\widetilde{\mathbb{E}}_{H_0}$, плоский над H_0 , обратимый пучок $\widetilde{\mathbb{L}}_{H_0}$, очень обильный относительно базы H_0 и такой, что $\widetilde{\mathbb{L}}_{H_0}|_{\pi^{-1}(\tilde{q})}$ – выделенная поляризация слоя $\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{q})$. Также $\chi(\widetilde{\mathbb{E}}_{H_0} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}_{H_0}^n|_{\pi^{-1}(t)}) = rp_E(n)$. По универсальности схемы Гильберта существует обратимый $\mathcal{O}_{H_0}$ -пучок $\mathcal{L}$ такой, что $\widetilde{\mathbb{E}}_{H_0} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}_{H_0}^m \otimes \pi^* \mathcal{L} = (\mathcal{O}_{\text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)} \boxtimes \mathcal{S})|_{\widetilde{\Sigma}_{H_0}}$, где $\mathcal{S}$ – универсальное фактор-расслоение на многообразии $G(V, r)$.

Группа $\text{PGL}(V)$ действует на многообразии Грассмана $G(V, r)$ линейными преобразованиями векторного пространства V и индуцированным образом на произведении $\text{Hilb}^{P(n)} G(V, r) \times G(V, r)$. Универсальная подсхема $\text{Univ}^{P(n)} G(V, r)$ и в ней подсхема $\widetilde{\Sigma}_{H_0}$ являются $\text{PGL}(V)$ -инвариантными относительно этого действия. Также подсхема $H_0 \subset \text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)$ является $\text{PGL}(V)$ -инвариантной, а морфизм проектирования $\pi: \widetilde{\Sigma}_{H_0} \rightarrow H_0$ – $\text{PGL}(V)$ -эквивариантным. Тогда имеются морфизмы $\text{PGL}(V)$ -действий

$$\begin{aligned} \alpha: H_0 \times \text{PGL}(V) &\rightarrow H_0, \\ \tilde{\alpha}: \widetilde{\Sigma}_{H_0} \times \text{PGL}(V) &\rightarrow \widetilde{\Sigma}_{H_0}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Указанное действие $\tilde{\alpha}$ позволяет сформировать $\text{PGL}(V)$ -фактор для подходящего выбора линейаризованного обильного линейного расслоения. Однако если, например, некоторые из слоев $\tilde{S}_{\tilde{q}} = \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{q})$ морфизма $\tilde{\pi}$ имеют нетривиальные стабилизаторы $\text{Stab}(\tilde{S}_{\tilde{q}})$ и ограничение $\tilde{\alpha}|_{\tilde{S}_{\tilde{q}} \times \text{Stab}(\tilde{S}_{\tilde{q}})}$ нетривиально, то соответствующие слои морфизма $\widetilde{\Sigma}_{H_0}/\text{PGL}(V) \rightarrow \widetilde{M}^s$ имеют

вид $\tilde{S}_{\tilde{q}}/\text{Stab}(\tilde{S}_{\tilde{q}}) \not\cong \tilde{S}_{\tilde{q}}$. Поэтому указанное действие в общем случае не позволяет построить универсальное семейство допустимых схем $\tilde{S}$, а позволяет только в ситуации, когда все вложения $j: \tilde{S} \hookrightarrow G(V, r)$ не имеют нетривиальных автоморфизмов, индуцированных действием группы $\text{PGL}(V)$.

Действие $\tilde{\alpha}$ группы $\text{PGL}(V)$ на схеме $\tilde{\Sigma}_{H_0}$ включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Sigma}_{H_0} \times \text{PGL}(V) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{\Sigma}_{H_0} \\ (\pi, \text{id}_{\text{PGL}(V)}) \downarrow & & \downarrow \pi \\ H_0 \times \text{PGL}(V) & \xrightarrow{\alpha} & H_0 \end{array} \quad (2.1)$$

Введем обозначения $\text{Hilb}^{P(n)} G(V, r) \xleftarrow{\pi} \text{Univ}^{P(n)} G(V, r) \xrightarrow{\pi''} G(V, r)$ для проекций универсальной подсхемы

$$\text{Univ}^{P(n)} G(V, r) \subset \text{Hilb}^{P(n)} G(V, r) \times G(V, r).$$

Как показано в [11], схема H_0 несет $\text{PGL}(V)$ -линеаризованное линейное расслоение $\tilde{L}_l = \det \pi_* \pi''^* \mathcal{S}(l)|_{H_0}$, обильное при $l \gg 0$. Здесь $\mathcal{S}$ – универсальное факторрасслоение на многообразии Грассмана $G(V, r)$, $\mathcal{O}(1)$ – положительная образующая его группы Пикара.

Выбором $\text{PGL}(V)$ -линеаризованного обильного линейного расслоения добиваются того, чтобы все стабильные по Гизекеру точки в $\text{Quot}^{rPE(n)} V \otimes L^{-m}$ были GIT-стабильны. Тогда по доказанному в [10] все пары, соответствующие стабильным по Гизекеру когерентным пучкам, стабильны в смысле нашего определения. Также GIT-стабильность в Q влечет GIT-стабильность в H_0 , поскольку при анализе GIT-стабильностей по критерию Гильберта–Мамфорда работаем с замкнутыми точками, а множества замкнутых точек у схемы H_0 и рассматриваемой в [10] соответствующей приведенной схемы $(H_0)_{\text{red}} = \mu(\tilde{Q})$ совпадают.

Итак, если точка $q \in Q$ имеет в Q замкнутую $\text{PGL}(V)$ -орбиту, то соответствующая ей точка $\tilde{q} \in H_0$ тоже имеет замкнутую $\text{PGL}(V)$ -орбиту.

Зафиксируем пучок $\tilde{L}_l$ вместе с его $\text{PGL}(V)$ -линеаризацией. Пусть $\tilde{\mathbb{L}}$ – обратимый пучок на схеме $\tilde{\Sigma}_{H_0}$, очень обильный относительно проекции π и поставляющий выделенные поляризации на ее слоях $\pi^{-1}(y) = \tilde{S}_y$. Пучок $\tilde{\mathbb{L}}$ может быть выбран тривиальным по базе, т.е. таким, что $\det \pi_* \tilde{\mathbb{L}}^m = \mathcal{O}_{H_0}$ при всех достаточно больших $m \gg 0$. Это предположение далее считается выполненным. Пусть H_0^s – подсхема GIT-стабильных точек схемы H_0 относительно $\tilde{L}_l$. Тогда на $\tilde{\Sigma}_{H_0}$ имеется $\text{PGL}(V)$ -линеаризованное линейное расслоение $\pi^* \tilde{L}_l \otimes \tilde{\mathbb{L}} =: \tilde{L}_l$. Линеаризация $\tilde{\Lambda}: \tilde{\alpha}^* \tilde{L}_l \rightarrow p_1^* \tilde{L}_l$ определяется линеаризацией на сомножителе $\Lambda: \alpha^* \tilde{L}_l \rightarrow p_1^* \tilde{L}_l$. Заменив, если необходимо, пучок $\tilde{\mathbb{L}}$ его тензорной степенью, считаем, что $\tilde{\mathbb{L}}$ обилен.

Теперь рассмотрим (см. [12; п. 4.2]) произвольную однопараметрическую подгруппу $\lambda: \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow \text{GL}(V)$. Будем обозначать образ точки $t \in \mathbb{A}^1 \setminus 0$ при морфизме λ через $\lambda(t)$. Морфизм λ в композиции с действием α приводит для

всякой замкнутой точки $\tilde{x} \in H_0$ к морфизму $\alpha(\lambda): \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow H_0$, задаваемому соответствием $t \mapsto \tilde{x}_t = \alpha(\lambda(t), \tilde{x})$.

Утверждается, что морфизм $\alpha(\lambda): \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow H_0$ может быть единственным образом продолжен до морфизма $\overline{\alpha(\lambda)}: \mathbb{A}^1 \rightarrow H_0$.

Действительно, существование и единственность продолжения до морфизма $\overline{\alpha(\lambda)}: \mathbb{A}^1 \rightarrow \text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)$ обеспечиваются собственностью схемы Гильберта. Остается убедиться в том, что добавляемая при формировании замыкания образа точка $\overline{\alpha(\lambda)}(0)$ принадлежит подсхеме H_0 .

Обратимся к $G = \text{PGL}(V)$ -эquivariantным сюръективным морфизмам

$$\mu(\tilde{Q}) \xleftarrow{\mu'} \tilde{Q}' \xrightarrow{\phi'} Q,$$

где ϕ' – equivariantное стандартное разрешение, существование которого обосновано в [11], и μ' – морфизм в схему Гильберта $\text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)$.

Пусть $\tilde{x}'$ – любая из точек в прообразе $\mu'^{-1}(\tilde{x}) \subset \tilde{Q}'$, $x = \phi'(\tilde{x}')$. Согласно [12; лемма 4.3.8] определяемый точкой x морфизм $\beta(\lambda): \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow Q$ продолжается до морфизма $\overline{\beta(\lambda)}: \mathbb{A}^1 \rightarrow Q$. Рассмотрим действие $\hat{\alpha}: G \times \tilde{Q}' \rightarrow \tilde{Q}'$ и индуцированный морфизм $\hat{\alpha}_\lambda: (\mathbb{A}^1 \setminus 0) \times \mu'^{-1}(\tilde{x}) \rightarrow \tilde{Q}'$. Он включается в диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{A}^1 \setminus 0) \times \mu'^{-1}(\tilde{x}) & \xrightarrow{\hat{\alpha}_\lambda} & \tilde{Q}' \\ \downarrow & & \downarrow \phi' \\ (\mathbb{A}^1 \setminus 0) \times \phi' \mu'^{-1}(\tilde{x}) & \xrightarrow{\beta_\lambda} & Q \end{array}$$

в которой нижний морфизм индуцирован действием $\beta: G \times Q \rightarrow Q$. При этом морфизм β_λ продолжается до морфизма $\overline{\beta}_\lambda: \mathbb{A}^1 \times \phi' \mu'^{-1}(\tilde{x}) \rightarrow Q$.

Образуем декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1 \times \phi'^{-1}(\phi'(\mu'^{-1}(\tilde{x}))) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_\lambda} & \tilde{Q}' \\ (\text{id}_{\mathbb{A}^1}, \phi') \downarrow & & \downarrow \phi' \\ \mathbb{A}^1 \times \phi'(\mu'^{-1}(\tilde{x})) & \xrightarrow{\overline{\beta}_\lambda} & Q \end{array}$$

где $\tilde{\alpha}_\lambda$ – новый морфизм, определенный по equivariantности морфизма ϕ' и включаемый в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{A}^1 \setminus 0) \times \mu'^{-1}(\tilde{x}) & \xrightarrow{\hat{\alpha}_\lambda} & \tilde{Q}' \\ \downarrow & & \parallel \\ \mathbb{A}^1 \times \phi'^{-1}(\phi'(\mu'^{-1}(\tilde{x}))) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_\lambda} & \tilde{Q}' \end{array}$$

в которой вложение индуцировано вложениями сомножителей.

Существование морфизма $\tilde{\alpha}_\lambda$ указывает на то, что, в частности, морфизм $\hat{\alpha}(\lambda): \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow \tilde{Q}'$, определяемый любой точкой $\tilde{x}' \in \mu'^{-1}(\tilde{x})$, может быть продолжен до морфизма $\overline{\hat{\alpha}(\lambda)}: \mathbb{A}^1 \rightarrow \tilde{Q}'$. Выполняя спуск относительно сюръективного морфизма μ' , получаем существование продолжения $\overline{\alpha(\lambda)}: \mathbb{A}^1 \rightarrow \mu(\tilde{Q})$ для морфизма $\alpha(\lambda): \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow \mu(\tilde{Q})$, определяемого произвольной точкой $\tilde{x} \in \mu(\tilde{Q})$.

Поскольку $(H_0)_{\text{red}} = \overline{\mu(\tilde{Q})}$, то морфизм $\alpha(\lambda): \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow H_0$ обладает единственным продолжением $\overline{\alpha(\lambda)}: \mathbb{A}^1 \rightarrow H_0$.

Тогда точка $\tilde{x}_0 = \overline{\alpha(\lambda)}(0)$ является неподвижной точкой действия подгруппы λ . Обозначение: $\tilde{x}_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)(\tilde{x})$. Подгруппа λ действует на слое $L_{\tilde{x}_0}$ G -линеаризованного линейного расслоения L с некоторым весом w : если Λ – линеаризация на L , то $\Lambda(\tilde{x}_0, g) = g^w \cdot \text{id}_{L_{\tilde{x}_0}}$. Определим *вес* соответствующего одномерного представления группы λ как $w^{\tilde{L}_i}(\tilde{x}, \lambda) = -w$.

Основным инструментом для анализа существования фактора является численный критерий Гильберта–Мамфорда. Напомним

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8 (см. [12; определение 4.2.9]). Точка $x \in X$ схемы X *полуустойчива относительно G -линеаризованного обильного линейного расслоения L* , если существуют целое число n и инвариантное глобальное сечение $s \in H^0(X, L^n)$ такое, что $s(x) \neq 0$. Точка x *стабильна*, если к тому же стабилизатор $\text{Stab}(x)$ конечен и G -орбита точки x замкнута в открытом множестве всех полуустойчивых точек в X .

ТЕОРЕМА 3 (критерий Гильберта–Мамфорда; см. [12; теорема 4.2.11]). Точка $x \in X$ *полуустойчива тогда и только тогда, когда для всех нетривиальных однопараметрических подгрупп $\lambda: \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow G$ имеет место неравенство*

$$w(x, \lambda) \geq 0.$$

Точка x стабильна тогда и только тогда, когда для всех λ выполнено строгое неравенство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9 (см. [10]). Пусть G – алгебраическая группа, X, Y – алгебраические схемы, $\mu: X \rightarrow Y$ – морфизм схем, $\alpha: Y \times G \rightarrow Y$ – действие группы G . Морфизм $\alpha': X \times G \rightarrow X$ назовем *действием группы G на схеме X , индуцированным действием α при морфизме μ* , если квадрат

$$\begin{array}{ccc} X \times G & \xrightarrow{\alpha'} & X \\ (\mu, \text{id}_G) \downarrow & & \downarrow \mu \\ Y \times G & \xrightarrow{\alpha} & Y \end{array}$$

декартов.

Пусть G – редуктивная алгебраическая группа, X, Y, Z – собственные алгебраические схемы, $\mu: X \rightarrow Y$ и $\phi: X \rightarrow Z$ – морфизмы схем, $\alpha: Y \times G \rightarrow Y$ и $\beta: Z \times G \rightarrow Z$ – действия группы G . Пусть также $\alpha', \beta': X \times G \rightarrow X$ – действия группы G на схеме X , индуцированные действиями α и β соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для дальнейшего, как и для применений в [10], достаточно, чтобы ограничения $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ действий α и β на любую однопараметрическую подгруппу $\lambda: \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow G$ обладали единственными продолжениями до морфизмов $\overline{\alpha(\lambda)}: \mathbb{A}^1 \rightarrow Y$ и $\overline{\beta(\lambda)}: \mathbb{A}^1 \rightarrow Z$. Тогда собственность схем X, Y, Z не требуется.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10 (см. [10]). Назовем действия α и β X -согласованными, если коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X \times G & \xrightarrow{\alpha'} & X \\ \downarrow = & & \downarrow = \\ X \times G & \xrightarrow{\beta'} & X \end{array}$$

Рассмотрим два морфизма $\mu(\tilde{Q}) \xleftarrow{\mu'} \tilde{Q}' \xrightarrow{\phi'} Q$. По определению действий группы $\mathrm{PGL}(V)$ на схемах $\mu(\tilde{Q})$ и Q эти действия являются $\tilde{Q}'$ -согласованными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11 (см. [10]). Назовем точки $y \in Y$ и $z \in Z$ *соответственными* относительно морфизмов μ' и ϕ' , если $\mu'^{-1}(y) \cap \phi'^{-1}(z) \neq \emptyset$.

В дальнейшем мы обозначаем через $\lambda(x)$ орбиту точки x при действии однопараметрической подгруппы λ , а через $\lambda(t)(x)$ – ее точку, соответствующую данному t .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (см. [10]). Пусть $y \in Y$ и $z \in Z$ – соответственные точки. Для любой однопараметрической подгруппы λ неподвижность точки $y = y_0$ влечет существование пары (y_0, z_0) соответственных точек такой, что точка z_0 неподвижна, и наоборот.

Пусть теперь схемы X, Y, Z проективны (квазипроективны), а морфизмы μ' и ϕ' сюръективны. Пусть L_Y и L_Z – очень обильные обратимые G -линеаризованные векторные расслоения на схемах Y и Z соответственно, $\Lambda_Y: \alpha^* L_Y \rightarrow p_1^* L_Y$ и $\Lambda_Z: \beta^* L_Z \rightarrow p_1^* L_Z$ – изоморфизмы их G -линеаризаций. Для слоев расслоений L_Y и L_Z в замкнутых точках $y \in Y$ и $z \in Z$ соответственно введем обозначения $L_{Y,y}$ и $L_{Z,z}$. Тогда ограничения $\Lambda_{Y,0}$ и $\Lambda_{Z,0}$ изоморфизмов линеаризаций на действия однопараметрической подгруппы λ и на слои над λ -неподвижными точками y_0 и z_0 имеют вид

$$\Lambda_{Y,0}: \alpha(\lambda)^* L_{Y,y_0} \rightarrow p_1^* L_{Y,y_0}, \quad \Lambda_{Z,0}: \beta(\lambda)^* L_{Z,z_0} \rightarrow p_1^* L_{Z,z_0}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. G -линеаризации Λ_Y и Λ_Z *послойно согласованы*, если для всякой пары соответственных λ -неподвижных точек $y_0 \in Y$ и $z_0 \in Z$ существует изоморфизм $f_0: L_{Y,y_0} \rightarrow L_{Z,z_0}$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \alpha(\lambda)^* L_{Y,y_0} & \xrightarrow[\sim]{\Lambda_{Y,y_0}} & p_1^* L_{Y,y_0} \\ \alpha(\lambda)^* f_0 \downarrow \wr & & \downarrow \wr p_1^* f_0 \\ \beta(\lambda)^* L_{Z,z_0} & \xrightarrow[\sim]{\Lambda_{Z,z_0}} & p_1^* L_{Z,z_0} \end{array}$$

коммутативна.

Имеет место очевидное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 (см. [10]). *Послойно согласованные линеаризации векторных расслоений L_Y и L_Z индуцируют для всякой однопараметрической подгруппы $\lambda: \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow G$ на слоях в соответственных неподвижных точках одномерные представления с равными весами.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Морфизм $f: H_0^s \rightarrow H_0^s / \mathrm{PGL}(V) = \widetilde{M}^s$ наделяет схему H_0^s структурой главного $\mathrm{PGL}(V)$ -расслоения.*

Прежде чем привести доказательство, напомним определение главного расслоения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13 (см. [12; п. 4.2]). Пусть G алгебраическая группа, $\pi: X \rightarrow Y$ – инвариантный морфизм G -схем. Морфизм π – *главное G -расслоение*, если существует сюръективный étальный морфизм $Y' \rightarrow Y$ и G -эквивариантный изоморфизм $Y' \times G \cong Y' \times_Y X$. Иными словами, X локально (в étальной топологии) изоморфно как G -схема произведению $Y \times G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5. Согласно [12; теорема 4.2.10] ограничение морфизма f на подсхему GIT-стабильных точек $f: H_0^s \rightarrow \widetilde{M}^s$ – геометрический $\mathrm{PGL}(V)$ -фактор. По теореме Люна об étальном срезе (см. [12; теорема 4.2.12], [13; гл. III, теорема об étальном срезе]), для любой точки $x \in H_0^s$ существует $\mathrm{Stab}_{\mathrm{PGL}(V)}(x)$ -инвариантная локально замкнутая подсхема $U_x \subset H_0^s$ такая, что определен $\mathrm{PGL}(V)$ -эквивариантный étальный морфизм

$$\psi: (U_x \times \mathrm{PGL}(V)) / \mathrm{Stab}_{\mathrm{PGL}(V)}(x) = U_x \times^{\mathrm{Stab}_{\mathrm{PGL}(V)}(x)} \mathrm{PGL}(V) \rightarrow H_0^s,$$

включающийся в декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} U_x \times^{\mathrm{Stab}_{\mathrm{PGL}(V)}(x)} \mathrm{PGL}(V) & \xrightarrow[\text{étale}]{\psi} & H_0^s \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_x / \mathrm{Stab}_{\mathrm{PGL}(V)}(x) & \xrightarrow{\text{étale}} & \widetilde{M}^s \end{array} \quad (2.2)$$

Убедимся в том, что для любой точки $x \in H_0^s$ стабилизатор $\mathrm{Stab}_{\mathrm{PGL}(V)}(x)$ тривиален. Для этого заметим, что точка $x \in H_0$ биективно соответствует замкнутому вложению подсхемы $j_x: \widetilde{S}_x \hookrightarrow G(V, r)$. Рассмотрим универсальную точную тройку локально свободных пучков на многообразии Грассмана

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow V \otimes \mathcal{O}_{G(V, r)} \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow 0.$$

Применение обратного образа относительно вложения j_x и тензорное умножение на $\widetilde{L}_x^{-m}$ приводят к эпиморфизму пучков $\mathcal{O}_{\widetilde{S}_x}$ -модулей $x': V \otimes \widetilde{L}_x^{-m} \rightarrow \widetilde{E}_x$, соответствующему GIT-стабильной точке в схеме $\mathrm{Quot}^{r_{PE}(t)} V \otimes \widetilde{L}_x^{-m}$ (по отношению к подходящему $\mathrm{PGL}(V)$ -линеаризованному обильному обратимому пучку на схеме $\mathrm{Quot}^{r_{PE}(t)} V \otimes \widetilde{L}_x^{-m}$). Известно (см. [12; следствие 4.3.5]), что морфизм формирования $\mathrm{PGL}(V)$ -фактора

$$(\mathrm{Quot}^{r_{PE}(t)} V \otimes \widetilde{L}_x^{-m})^s \rightarrow (\mathrm{Quot}^{r_{PE}(t)} V \otimes \widetilde{L}_x^{-m})^s / \mathrm{PGL}(V)$$

обладает структурой главного $\mathrm{PGL}(V)$ -расслоения. Это означает, что справедливо $\mathrm{Stab}_{\mathrm{PGL}(V)}(x') = \{\mathrm{id}\}$. В силу биективности соответствия точки $x \in H_0^s$ и точки $x' \in (\mathrm{Quot}^{r_{PE}(t)} V \otimes \tilde{L}_x^{-m})^s$, а также предположения об отсутствии нетривиальных $\mathrm{PGL}(V)$ -автоморфизмов (замечание 1) заключаем, что $\mathrm{Stab}_{\mathrm{PGL}(V)}(x)$ тоже тривиален. Тем самым, квадрат (2.2) принимает вид

$$\begin{array}{ccc} U_x \times \mathrm{PGL}(V) & \xrightarrow[\text{étale}]{\psi} & H_0^s \\ f^{U_x} \downarrow & & \downarrow f \\ U_x & \xrightarrow{\text{étale}} & \tilde{M}^s \end{array}$$

снабжающий морфизм $f: H_0^s \rightarrow \tilde{M}^s$ структурой главного $\mathrm{PGL}(V)$ -расслоения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Существуют схема $\tilde{\Sigma}^s$ и строго плоский морфизм $\tilde{f}: \tilde{\Sigma}_{H_0}^s \rightarrow \tilde{\Sigma}^s$, наделяющий $\tilde{\Sigma}_{H_0}^s$ структурой главного $\mathrm{PGL}(V)$ -расслоения над $\tilde{\Sigma}^s$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{q} \in H_0^s$, $x \in \tilde{\Sigma}_{H_0}$ – замкнутые точки, причем $\tilde{q} = \tilde{\pi}(x)$. Понятно, что если x неподвижна относительно однопараметрической подгруппы $\lambda \subset \mathrm{GL}(V)$, то $\tilde{q}$ также неподвижна относительно действия той же подгруппы на базе H_0 . По построению пучков $\tilde{L}_l$ и $\tilde{\mathbb{L}}_l$ веса для λ при действии группы $\mathrm{GL}(V)$ на слоях линейных расслоений $\tilde{L}_l$ и $\tilde{\mathbb{L}}_l$ связаны следующим образом. Пусть w_l – вес для $\tilde{L}_l$ в GIT-стабильной точке $\tilde{q}$, а $\hat{w}_l$ – вес в соответственной точке x для $\tilde{\mathbb{L}}_l$. Тогда $\hat{w}_l$ также положителен. Это позволяет применить критерий Гильберта–Мамфорда к схеме $\tilde{\Sigma}_{H_0}^s$. Из него следует, что схема $\tilde{\Sigma}_{H_0}^s$ состоит из точек, GIT-стабильных относительно линейного расслоения $\tilde{\mathbb{L}}_l$.

Таким образом, определены GIT-фактор $\tilde{\Sigma}_{H_0}^s // \mathrm{PGL}(V)$ и морфизм его формирования $\tilde{f}: \tilde{\Sigma}_{H_0}^s \rightarrow \tilde{\Sigma}_{H_0}^s // \mathrm{PGL}(V)$. Поскольку $\tilde{\pi} - \mathrm{PGL}(V)$ -эквивариантный морфизм, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Sigma}_{H_0}^s & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{\Sigma}_{H_0}^s // \mathrm{PGL}(V) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ H_0^s & \xrightarrow{f} & \tilde{M}^s \end{array}$$

Введем обозначение $\tilde{f}(\tilde{\Sigma}_{H_0}^s) = \tilde{\Sigma}_{H_0}^s // \mathrm{PGL}(V) =: \tilde{\Sigma}^s$. Морфизм $\tilde{f}: \tilde{\Sigma}_{H_0}^s \rightarrow \tilde{\Sigma}^s$ является геометрическим фактором: это хороший фактор по построению (см. [12; теорема 4.2.10]), и его (геометрические) слои – в точности орбиты (геометрических) точек (см. [12; определение 4.2.2]).

Дальнейшие рассуждения в точности аналогичны доказательству предложения 5.

По теореме Люна об этальном срезе для любой точки $x \in \tilde{\Sigma}_{H_0}^s$ существует $\mathrm{Stab}_{\mathrm{PGL}(V)}(x)$ -инвариантная локально замкнутая подсхема $U_x \subset \tilde{\Sigma}_{H_0}^s$ такая, что определен $\mathrm{PGL}(V)$ -эквивариантный этальный морфизм

$$\psi: (U_x \times \mathrm{PGL}(V)) / \mathrm{Stab}_{\mathrm{PGL}(V)}(x) = U_x \times^{\mathrm{Stab}_{\mathrm{PGL}(V)}(x)} \mathrm{PGL}(V) \rightarrow \tilde{\Sigma}_{H_0}^s,$$

включающийся в декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc}
 U_x \times^{\text{Stab}_{\text{PGL}(V)}(x)} \text{PGL}(V) & \xrightarrow[\text{étale}]{\psi} & \tilde{\Sigma}_{H_0}^s \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 U_x / \text{Stab}_{\text{PGL}(V)}(x) & \xrightarrow{\text{étale}} & \tilde{\Sigma}^s
 \end{array} \quad (2.3)$$

Заметим, что элемент $g \in \text{PGL}(V)$ стабилизирует точку $x \in \tilde{\Sigma}_{H_0}$, если он оставляет неподвижной соответствующую подсхему $j_{\pi(x)}: \tilde{S}_{\pi(x)} \hookrightarrow G(V, r)$ и точку x в ней. Согласно предположению, сформулированному в замечании 1, такой элемент может быть только тождественным автоморфизмом. Тем самым, $\text{Stab}_{\text{PGL}(V)}(x)$ тривиален, и квадрат (2.3) принимает вид

$$\begin{array}{ccc}
 U_x \times \text{PGL}(V) & \xrightarrow[\text{étale}]{\psi} & \tilde{\Sigma}_{H_0}^s \\
 f^{U_x} \downarrow & & \downarrow f \\
 U_x & \xrightarrow{\text{étale}} & \tilde{\Sigma}^s
 \end{array}$$

снабжающий морфизм $f: \tilde{\Sigma}_{H_0}^s \rightarrow \tilde{\Sigma}^s$ структурой главного $\text{PGL}(V)$ -расслоения.

По построению действия $\tilde{\alpha}$ формирование GIT-фактора относительно действия $\tilde{\alpha}$ (морфизм $\tilde{f}$) осуществляет склейку слоев $\tilde{S}_{\tilde{q}}$, лежащих над точками одной орбиты действия α , вдоль тождественного изоморфизма.

Квадрат

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\Sigma}_{H_0}^s & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{\Sigma}^s \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\
 H_0^s & \xrightarrow{f} & \tilde{M}^s
 \end{array} \quad (2.4)$$

коммутативен; в следующем параграфе мы докажем, что он декартов. Пока что убедимся в том, что морфизм $\pi': \tilde{\Sigma}^s \rightarrow \tilde{M}^s$ строго плоский. Он сюръективен по построению, его плоскость следует из следующей простой леммы.

ЛЕММА 1. Пусть A – коммутативное кольцо, B – A -алгебра, C – B -алгебра, плоская над A и строго плоская над B . Тогда B плоская над A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную точную тройку A -модулей

$$0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow 0.$$

Тензорное умножение на $\otimes_A B$ приводит к точной последовательности

$$0 \rightarrow S \rightarrow K \otimes_A B \rightarrow M \otimes_A B \rightarrow L \otimes_A B \rightarrow 0,$$

в которой $S = \ker(K \otimes_A B \rightarrow M \otimes_A B)$. Пусть Q – B -модуль, разрезающий ее на точные тройки. Повторное тензорное умножение на $\otimes_B C$ и учет плоскости

гомоморфизмов $B \rightarrow C$ и $A \rightarrow C$ приводят к точной тройке $0 \rightarrow K \otimes_A C \rightarrow M \otimes_A C \rightarrow L \otimes_A C \rightarrow 0$ и изоморфизму $Q \otimes_B C \cong K \otimes_A C$, откуда $S \otimes_B C = 0$. Поскольку C строго плоско над B , то по определению строго плоского гомоморфизма колец $S = 0$, что доказывает плоскость B над A .

В коммутативной диаграмме (2.4) композиция $f \circ \pi$ – плоский морфизм, а $\tilde{f}$ – строго плоский по доказанному в предложении 6. Применив лемму 1, заключаем, что π' – (строго) плоский морфизм.

§ 3. Главное расслоение и теория спуска

В этом параграфе будут построены пучки $\tilde{\mathbb{E}}^s$ и $\tilde{\mathbb{L}}^s$ на схеме $\tilde{\Sigma}^s$. Рассмотрим морфизм формирования GIT-фактора в категории k -схем $f: H_0^{ss} \rightarrow \tilde{M}$. Пусть $\alpha: H_0 \times \mathrm{PGL}(V) \rightarrow H_0$ – морфизм, задающий действие группы $\mathrm{PGL}(V)$.

Пусть G – алгебраическая группа с морфизмом умножения $\mathrm{mult}: G \times G \rightarrow G$, Y – схема. Пусть G действует на схеме Y , причем действие задано морфизмом $\alpha: Y \times G \rightarrow Y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14 (см. [12; определение 4.2.5]). G -линеаризация квазикогерентного $\mathcal{O}_Y$ -пучка F – это изоморфизм $\mathcal{O}_{Y \times G}$ -пучков $\Phi: \alpha^* F \rightarrow p_1^* F$, где $p_1: Y \times G \rightarrow Y$ – проекция на сомножитель, и при этом выполнено условие коцикла

$$(\mathrm{id}_Y, \mathrm{mult})^* \Phi = p_{12}^* \Phi \circ (\alpha, \mathrm{id}_G)^* \Phi, \quad (3.1)$$

где $p_{12}: Y \times G \times G \rightarrow Y \times G$ – проекция на два первых сомножителя.

Для дальнейшего важен случай, когда определен GIT-фактор $Y/G =: X$, морфизм его формирования $f: Y \rightarrow X$ – главное G -расслоение и можно переписать коцикл для линеаризации (3.1) в коцикл теории спуска.

Поскольку $f: Y \rightarrow X$ – главное G -расслоение, то (см. [14; определение 0.10]) имеет место изоморфизм $(\mathrm{pr}_Y, \alpha): Y \times G \xrightarrow{\sim} Y \times_X Y$, $(y, g) \mapsto (y, \alpha(y, g))$, индуцированный действием группы G . При этом коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & Y \times_X Y & & \\ & p_1 \swarrow & \uparrow \wr & \searrow p_2 & \\ Y & \xleftarrow{p_1} & Y \times G & \xrightarrow{\alpha} & Y \end{array}$$

Будем обозначать прямой образ $\mathcal{O}_{Y \times G}$ -пучка F при изоморфизме $Y \times G \xrightarrow{\sim} Y \times_X Y$ тем же символом F . Тогда прямой образ изоморфизма линеаризации на $Y \times_X Y$ примет вид $\Phi: p_2^* F \rightarrow p_1^* F$.

Рассмотрим произведение $Y \times_X Y \times_X Y$ и обозначим через $p_{ij}: Y \times_X Y \times_X Y \rightarrow Y \times_X Y$, $i < j$, проекцию на произведение сомножителей с номерами i, j .

Имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc}
 Y \times G & \xrightarrow{\quad} & Y \times_X Y \\
 p_{12} \uparrow & & p_{12} \uparrow \\
 Y \times G \times G & \xrightarrow{\quad} & Y \times_X Y \times_X Y \\
 \downarrow (id_Y, mult) & \searrow (\alpha, id_G) & \downarrow p_{23} \\
 & Y \times G & \xrightarrow{\quad} Y \times_X Y \\
 & p_{13} \downarrow & \\
 Y \times G & \xrightarrow{\quad} & Y \times_X Y
 \end{array} \quad (3.2)$$

все горизонтальные стрелки в которой – изоморфизмы. Таким образом, условие коцикла с учетом диаграммы (3.2) принимает вид $p_{13}^* \Phi = p_{12}^* \Phi \circ p_{23}^* \Phi$.

Теперь можно применить результат из теории спуска (см. [15; гл. 1, предложение 2.22]; обозначения приведены в соответствии с принятыми в этой работе).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $f: Y \rightarrow X$ – строго плоский квазикомпактный морфизм. Задание квазикогерентного пучка $\mathcal{O}_X$ -модулей F эквивалентно заданию квазикогерентного пучка $\mathcal{O}_Y$ -модулей F' и изоморфизма $\phi: p_1^* F' \rightarrow p_2^* F'$, удовлетворяющего соотношению $p_{13}^* \phi = p_{23}^* \phi \circ p_{12}^* \phi$.

Положив $\phi = \Phi^{-1}$, приходим к существованию спуска G -линеаризованного пучка F относительно структурного морфизма главного G -расслоения $f: Y \rightarrow X$.

Итак, $\tilde{f}: \tilde{\Sigma}_{H_0}^s \rightarrow \tilde{\Sigma}^s$ – главное $\mathrm{PGL}(V)$ -расслоение. Теперь обратимся к пучкам $\tilde{\mathbb{L}}_{H_0}$ и $\tilde{\mathbb{E}}_{H_0}$, которые по построению несут индуцированные линеаризации, и к ним применим предложение 7.

Таким образом, приходим к существованию на $\tilde{\Sigma}^s$ пучка $\tilde{\mathbb{L}}^s$ такого, что $\tilde{\mathbb{L}}_{H_0}|_{H_0^s} = \tilde{f}^* \tilde{\mathbb{L}}^s$, и пучка $\tilde{\mathbb{E}}^s$ такого, что $\tilde{\mathbb{E}}_{H_0}|_{H_0^s} = \tilde{f}^* \tilde{\mathbb{E}}^s$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пучки $\tilde{\mathbb{L}}^s$ и $\tilde{\mathbb{E}}^s$ локально свободные и плоские относительно проекции π' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Локальная свобода получается из леммы 2 (см. ниже) и строгой плоскости морфизма $\tilde{f}$, а π' -плоскость – из леммы 2 и того, что морфизм π' плоский.

ЛЕММА 2. Пусть $A \rightarrow B$ – строго плоский гомоморфизм колец, M – A -модуль такой, что $M \otimes_A B$ – плоский B -модуль. Тогда M – плоский A -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что A -модуль M неплоский; это значит, что существует точная тройка A -модулей $0 \rightarrow K \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow 0$ такая, что индуцированный гомоморфизм $M \otimes_A K \rightarrow M \otimes_A N$ имеет нетривиальное ядро S . Тензорное умножение точной последовательности

$$0 \rightarrow S \rightarrow M \otimes_A K \rightarrow M \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A L \rightarrow 0$$

на $\otimes_A B$ и обозначение $M' = M \otimes_A B$ приводят к точной последовательности

$$0 \rightarrow S \otimes_A B \rightarrow M' \otimes_A K \rightarrow M' \otimes_A N \rightarrow M' \otimes_A L \rightarrow 0.$$

Строго плоская замена базы

$$0 \rightarrow K \otimes_A B \rightarrow N \otimes_A B \rightarrow L \otimes_A B \rightarrow 0$$

и тензорное умножение на $M' \otimes_B$ с учетом плоскости M' как B -модуля приводят к точной тройке

$$0 \rightarrow M' \otimes_A K \rightarrow M' \otimes_A N \rightarrow M' \otimes_A L \rightarrow 0,$$

откуда $S \otimes_A B = 0$. Поскольку $A \rightarrow B$ – строго плоский гомоморфизм, то $S = 0$, что доказывает плоскость A -модуля M .

Докажем, что пучок $(\tilde{\mathbb{L}}^s)^m$ очень обилен относительно проекции π' , если пучок $(\tilde{\mathbb{L}}_{H_0}^s)^m$ очень обилен относительно проекции π . Отсюда будет следовать, что пучок $\tilde{\mathbb{L}}^s$ обилен относительно проекции π' .

Поскольку $\tilde{f}$ – строго плоский морфизм, то морфизм $\mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}_{H_0}^s}$ -пучков

$$\tilde{f}^{-1}(\tilde{\mathbb{L}}^s)^m \rightarrow \tilde{f}^*(\tilde{\mathbb{L}}^s)^m$$

инъективен. Поскольку морфизм $\tilde{f}$ строго плоский и локально конечного типа, то он открыт (см. [15; теорема 2.12]); тем самым, $\lim_{V \supset \tilde{f}(U)} F(V) = F(\tilde{f}(U))$ и для каждого открытого подмножества $U \subset \tilde{\Sigma}_{H_0}^s$ имеем инъективный морфизм $\mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}_{H_0}^s}(U)$ -модулей

$$(\tilde{\mathbb{L}}^s)^m(\tilde{f}(U)) \hookrightarrow (\tilde{\mathbb{L}}^s)^m(\tilde{f}(U)) \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}^s}(\tilde{f}(U))} \mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}_{H_0}^s}(U).$$

По определению прямого образа $\pi_* F(V) = F(\pi^{-1}(V))$, поэтому положим $U = \pi^{-1}(V)$ для открытых подмножеств $V \subset H_0^s$. Заметим, что для таких открытых подмножеств справедливо $\tilde{f}(\pi^{-1}(V)) = \pi'^{-1}f(V)$. Это приводит к сюръективному морфизму относительных проективных пространств

$$\varpi: \mathbb{P}(\pi_*(\tilde{\mathbb{L}}_{H_0}^s)^m) \rightarrow \mathbb{P}(\pi'_*(\tilde{\mathbb{L}}^s)^m).$$

Оба пучка $(\tilde{\mathbb{L}}_{H_0}^s)^m$ и $(\tilde{\mathbb{L}}^s)^m$ плоски над базами H_0^s и $\tilde{M}^s$ соответственно, и по построению их прямые образы $\pi_*(\tilde{\mathbb{L}}_{H_0}^s)^m$ и $\pi'_*(\tilde{\mathbb{L}}^s)^m$ имеют равные ранги. Ранги могут быть вычислены как размерности векторных пространств $\pi_*(\tilde{\mathbb{L}}_{H_0}^s)^m \otimes k_x$ и $\pi'_*(\tilde{\mathbb{L}}^s)^m \otimes k_{x'}$ для замкнутых точек $x \in H_0^s$ и $x' \in \tilde{M}^s$. Эти размерности совпадают.

Обильность пучка $\tilde{\mathbb{L}}_{H_0}^s$ поставяет замкнутое вложение $\tilde{\Sigma}_{H_0}^s \hookrightarrow \mathbb{P}((\tilde{\mathbb{L}}_{H_0}^s)^m)$ подсхемы $\tilde{\Sigma}_{H_0}^s$, совместимое с проекциями на базу H_0 . По построению $\tilde{\Sigma}^s$ – схемный образ замкнутой подсхемы $\tilde{\Sigma}_{H_0}^s$ относительно морфизма ϖ . Это замкнутая подсхема в $\mathbb{P}((\tilde{\mathbb{L}}^s)^m)$, что и доказывает обильность пучка $\tilde{\mathbb{L}}^s$ относительно проекции π' .

Таким образом, при $m \gg 0$ пучки $\pi'_* \tilde{\mathbb{E}}^s \otimes (\tilde{\mathbb{L}}^s)^m$ локально свободны как $\mathcal{O}_{\tilde{M}^s}$ -модули и имеют ранг $h^0(\tilde{S}, \tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{L}^m) = rp_E(m)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Квадрат (2.4) декартов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Плоский морфизм $\tilde{f}: \tilde{\Sigma}^s \rightarrow \tilde{M}^s$ и пучки $\tilde{\mathbb{E}}^s$ и $\tilde{\mathbb{L}}^s$ поставляют при $m \gg 0$ морфизм базы $\tilde{M}^s$ в схему Гильберта $\text{Hilb}^{r_{PE}(t)} G(V, r)$ для $V \cong k^{\oplus r_{PE}(m)}$: $\mu: \tilde{M}^s \rightarrow \text{Hilb}^{r_{PE}(t)} G(V, r)$. По построению этот морфизм пропускается через локально замкнутую подсхему H_0^s , поэтому будем использовать обозначение $\mu: \tilde{M}^s \rightarrow H_0^s$. Морфизм μ включается в декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Sigma}^s & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & \tilde{\Sigma}_{H_0}^s \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ \tilde{M}^s & \xrightarrow{\mu} & H_0^s \end{array}$$

Морфизмы $\tilde{\mu}$ и μ являются сечениями морфизмов $\tilde{f}$ и f соответственно, т.е. $\tilde{f} \circ \tilde{\mu} = \text{id}_{\tilde{\Sigma}^s}$ и $f \circ \mu = \text{id}_{\tilde{M}^s}$.

Для доказательства универсальности квадрата (2.4) рассмотрим схему T вместе с морфизмами $h: T \rightarrow H_0^s$ и $g: T \rightarrow \tilde{\Sigma}^s$ такими, что $\pi' \circ g = f \circ h$. В диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} & & T & & \\ & g \swarrow & & \searrow g & \\ \tilde{\Sigma}^s & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & \tilde{\Sigma}_{H_0}^s & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{\Sigma}^s \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ \tilde{M}^s & \xrightarrow{\mu} & H_0^s & \xrightarrow{f} & \tilde{M}^s \end{array}$$

$\tilde{f} \circ \tilde{\mu} \circ g = g$, $f \circ h = \pi' \circ g$, но в общем случае $\pi \circ \tilde{\mu} \circ g = \mu \circ \pi' \circ g \neq h$. В связи с последним неравенством рассмотрим диаграмму сравнения

$$\begin{array}{ccccc} & & T & & \\ & \swarrow \mu \circ \pi' \circ g & \downarrow & \searrow h & \\ & H_0^s \times_{\tilde{M}^s} H_0^s & & & \\ & \swarrow \alpha & \downarrow \rho & \searrow \text{pr}_H & \\ H_0^s & \xleftarrow{\alpha} & G \times H_0^s & \xrightarrow{\text{pr}_H} & H_0^s \\ & \searrow f & & \swarrow f & \\ & \tilde{M}^s & & & \end{array}$$

в которой морфизм ρ – это изоморфизм, обратный к изоморфизму

$$(\alpha, \text{pr}_H): G \times H_0^s \rightarrow H_0^s \times_{\tilde{M}^s} H_0^s.$$

Изоморфность отображений ρ и (α, pr_H) обеспечивается тем, что f – главное G -расслоение.

Тогда морфизм $\tau: T \rightarrow \widetilde{\Sigma}_{H_0}^s$ такой, что $h = \pi \circ \tau$ и $g = \widetilde{f} \circ \tau$, определяется равенством

$$\tau := \widetilde{\alpha} \circ (\text{inv} \circ \text{pr}_G \circ \rho \circ (\mu \circ \pi' \circ g, h), \widetilde{\mu} \circ g),$$

где $\text{pr}_G: G \times H_0^s \rightarrow G$ – проектирование на сомножитель, $\text{inv}: G \rightarrow G$ – морфизм обращения в группе G .

§ 4. Проверка свойства универсальности

Докажем, что тройка $(\widetilde{\Sigma}^s, \widetilde{\mathbb{L}}^s, \widetilde{\mathbb{E}}^s)$, построенная в предыдущих параграфах, образует универсальное семейство над схемой $\widetilde{M}^s$.

Пусть T – схема, $p: \Sigma \rightarrow T$ – плоский морфизм такой, что его слой $p^{-1}(t)$ – допустимая схема для любой замкнутой точки $t \in T$. Пусть также $\mathbb{F}$ – локально свободный $\mathcal{O}_\Sigma$ -пучок, плоский над T , $\mathbb{L}$ – обратимый $\mathcal{O}_\Sigma$ -пучок, обильный относительно проекции p и такой, что $\mathbb{L}|_{p^{-1}(t)}$ – выделенная поляризация на слое $p^{-1}(t)$. Также предположим, что $((p^{-1}(t), \mathbb{L}|_{p^{-1}(t)}), \mathbb{F}|_{p^{-1}(t)})$ – стабильная пара для любой замкнутой точки $t \in T$. Также будем считать, что полиномы Гильберта $\chi(\mathbb{L}^n|_{p^{-1}(t)})$ и $\chi(\mathbb{F} \otimes \mathbb{L}^n|_{p^{-1}(t)}) = rp_E(n)$ постоянны по базе.

Сформируем расслоение Грассмана $G(p_*(\mathbb{F} \otimes \mathbb{L}^m), r) \rightarrow T$ для $m \gg 0$ большого настолько, что пучок $\mathbb{F} \otimes \mathbb{L}^m$ очень обильен относительно проекции p и морфизм $p^*p_*(\mathbb{F} \otimes \mathbb{L}^m) \rightarrow \mathbb{F} \otimes \mathbb{L}^m$ сюръективен. В частности, при этом для каждой замкнутой точки $t \in T$ определено замкнутое вложение $j_t: p^{-1}(t) \hookrightarrow G(V, r)$ для $V \cong H^0(p^{-1}(t), \mathbb{F} \otimes \mathbb{L}^m|_{p^{-1}(t)})$. Также определен морфизм $\xi: \Sigma \hookrightarrow G(p_*(\mathbb{F} \otimes \mathbb{L}^m), r)$, включаемый в коммутативный треугольник

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\xi} & G(p_*(\mathbb{F} \otimes \mathbb{L}^m), r) \\ & \searrow p & \downarrow \\ & & T \end{array} \quad (4.1)$$

и на слоях проекции p ограничивающийся до замкнутых вложений вида $j_t: p^{-1}(t) \hookrightarrow G(V, r)$.

Поскольку пучок $p_*(\mathbb{F} \otimes \mathbb{L}^m)$ локально свободен, то существует открытое по Зарискому покрытие базисной схемы $T = \bigcup T_i$ такое, что определены изоморфизмы тривиализаций $G(p_*(\mathbb{F} \otimes \mathbb{L}^m), r)|_{p^{-1}(T_i)} = G(p_*(\mathbb{F} \otimes \mathbb{L}^m)|_{p^{-1}(T_i)}, r) \xrightarrow{\tau_i} G(V, r) \times T_i$. Далее будем использовать обозначение $\Sigma_i := p^{-1}(T_i)$. Переходя к покрытию, из (4.1) получим набор коммутативных треугольников

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_i & \xrightarrow{\xi_i} & G(V, r) \times T_i \\ & \searrow p_i & \downarrow \\ & & T_i \end{array} \quad (4.2)$$

занумерованных элементами покрытия. Обозначим $\mathbb{F}_i := \mathbb{F}|_{\Sigma_i}$ и $\mathbb{L}_i := \mathbb{L}|_{\Sigma_i}$.

В силу (4.1), (4.2) и того, что морфизмы p и p_i плоские, полином Гильберта $\chi(j_t^* \mathcal{O}_{G(V,r)}(n)) = P(n)$ не зависит от выбора точки $t \in T_i$ и элемента покрытия T_i . Обратимся к схеме Гильберта $\text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)$ и универсальной подсхеме $\text{Univ}^{P(n)} G(V, r) \subset \text{Hilb}^{P(n)} G(V, r) \times G(V, r)$. Тогда определены морфизмы $\mu_i: T_i \rightarrow \text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)$ и $\tilde{\mu}_i: \Sigma_i \rightarrow \text{Univ}^{P(n)} G(V, r)$ такие, что квадрат

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_i & \xrightarrow{\tilde{\mu}_i} & \text{Univ}^{P(n)} G(V, r) \\ p_i \downarrow & & \downarrow \\ T_i & \xrightarrow{\mu_i} & \text{Hilb}^{P(n)} G(V, r) \end{array} \quad (4.3)$$

декартов, и существует обратимый пучок $L'_i \in \text{Pic } T_i$ такой, что

$$\mathbb{F}_i \otimes \mathbb{L}_i^m \otimes p_i^* L'_i \cong \tilde{\mu}_i^* (\mathcal{O}_{\text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)} \boxtimes \mathcal{S}|_{\text{Univ}^{P(n)} G(V, r)}). \quad (4.4)$$

В силу ограничений, наложенных в начале данного параграфа, морфизм μ_i пропускается через подсхему H_0 , а морфизм $\tilde{\mu}_i$ – через подсхему $\tilde{\Sigma}_{H_0}^s$. Для соответствующих морфизмов схем T_i и Σ_i сохраним те же обозначения. Образовав композиции с морфизмами формирования $\text{PGL}(V)$ -факторов, получим расслоенную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma_i & \xrightarrow{\tilde{\mu}_i} & \tilde{\Sigma}_{H_0}^s & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{\Sigma}^s \\ p_i \downarrow & & \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ T_i & \xrightarrow{\mu_i} & H_0^s & \xrightarrow{f} & \tilde{M}^s \end{array} \quad (4.5)$$

Левый расслоенный квадрат следует из (4.3), правый представляет собой условие спуска для семейства схем $\tilde{\Sigma}_{H_0}^s$.

Спуск пучка $\mathcal{O}_{\text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)} \boxtimes \mathcal{S}|_{\tilde{\Sigma}_{H_0}^s} = \tilde{\mathbb{E}}_{H_0}^s \otimes (\tilde{\mathbb{L}}_{H_0}^s)^m \otimes \pi^* \mathcal{L}|_{H_0^s}$, где $\mathcal{L} \in \text{Pic } \text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)$ – подходящий обратимый пучок, имеет вид

$$\mathcal{O}_{\text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)} \boxtimes \mathcal{S}|_{\tilde{\Sigma}_{H_0}^s} \otimes (\pi^* \mathcal{L}|_{H_0^s})^\vee = \tilde{f}^* (\tilde{\mathbb{E}}^s \otimes (\tilde{\mathbb{L}}^s)^m),$$

откуда с учетом (4.4)

$$\mathbb{F}_i \otimes \mathbb{L}_i^m \otimes p^* L'_i \otimes (\tilde{\mu}_i^* \pi^* \mathcal{L}|_{H_0^s})^\vee = \tilde{\mu}_i^* \tilde{f}^* (\tilde{\mathbb{E}}^s \otimes (\tilde{\mathbb{L}}^s)^m). \quad (4.6)$$

Согласно (4.5) $\tilde{\mu}_i^* \pi^* = p^* \mu_i^*$ и $p^* L'_i \otimes (\tilde{\mu}_i^* \pi^* \mathcal{L}|_{H_0^s})^\vee = p^* (L'_i \otimes \mu_i^* \mathcal{L}^\vee|_{H_0^s})$. Поэтому переобозначим пучок $L'_i \otimes \mu_i^* \mathcal{L}^\vee|_{H_0^s}$ через L'_i .

Далее, поскольку схемы T_i составляют тривиализующее покрытие для пучка $p_*(\mathbb{F} \otimes \mathbb{L}^m)$, то согласование тривиализаций на их пересечениях осуществляется элементами группы $\text{GL}(V)$, действующей на слоях пучка $p_*(\mathbb{F} \otimes \mathbb{L}^m)$ линейными преобразованиями. Тем самым, имеет место склейка композиций $f \circ \mu_i$ и $\tilde{f} \circ \tilde{\mu}_i$

в морфизмы $\mu_{\mathbb{F}}: T \rightarrow \widetilde{M}^s$ и $\tilde{\mu}_{\mathbb{F}}: \Sigma \rightarrow \widetilde{\Sigma}^s$ соответственно такие, что квадрат

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\tilde{\mu}_{\mathbb{F}}} & \widetilde{\Sigma}^s \\ p \downarrow & & \downarrow \pi' \\ T & \xrightarrow{\mu_{\mathbb{F}}} & \widetilde{M}^s \end{array}$$

декартов.

Осталось убедиться в том, что пучки L'_i согласованы на пересечениях $T_{ij}: T_i \cap T_j$. Это будет означать, что найдется обратимый пучок $L' \in \text{Pic } T$ такой, что имеет место аналог (4.6).

Выпишем выражения вида (4.6) для открытой подсхемы $T_{ij}, i \neq j$, введя обозначения $\mathbb{F}_{ij} := \mathbb{F}_i|_{T_{ij}} = \mathbb{F}_j|_{T_{ij}}$, $\mathbb{L}_{ij} := \mathbb{L}_i|_{T_{ij}} = \mathbb{L}_j|_{T_{ij}}$ и $\tilde{\mu}_{ij}: p^{-1}(T_{ij}) \rightarrow \text{Univ}^{P(t)} G(V, r)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{ij} \otimes \mathbb{L}_{ij}^m \otimes p^* L'_i|_{T_{ij}} &= \tilde{\mu}_{ij}^*(\mathcal{O}_{\text{Hilb}^{P(t)} G(V, r)} \boxtimes \mathcal{S}|_{\text{Univ}^{P(t)} G(V, r)}), \\ \mathbb{F}_{ij} \otimes \mathbb{L}_{ij}^m \otimes p^* L'_j|_{T_{ij}} &= \tilde{\mu}_{ij}^*(\mathcal{O}_{\text{Hilb}^{P(t)} G(V, r)} \boxtimes \mathcal{S}|_{\text{Univ}^{P(t)} G(V, r)}). \end{aligned}$$

Формирование r -й внешней степени приводит к изоморфизмам

$$p^* L'_i|_{T_{ij}} = p^* L'_j|_{T_{ij}} = \bigwedge^r \tilde{\mu}_{ij}^*(\mathcal{O}_{\text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)} \boxtimes \mathcal{S}|_{\text{Univ}^{P(t)} G(V, r)}) \otimes \bigwedge^r (\mathbb{F}_{ij} \otimes \mathbb{L}_{ij}^m)^\vee. \quad (4.7)$$

Поскольку p – плоский морфизм, $\mathcal{O}_{\widetilde{M}^s}$ -пучок $L^\Sigma := p_* \mathcal{O}_\Sigma$ локально свободен. Возьмем замкнутую точку $x \in T$. Замена базы дает $p_* \mathcal{O}_\Sigma \otimes k_x = p_* \mathcal{O}_{p^{-1}(x)} = H^0(p^{-1}(x), \mathcal{O}_{p^{-1}(x)}) = k_x$. В то же время ограничения на редукцию $\widetilde{M}_{\text{red}}^s \subset \widetilde{M}^s$ и схему $\Sigma_{\text{red}} := \Sigma \times_{\widetilde{M}} \widetilde{M}_{\text{red}}$ позволяют применить теорему Грауэрта (см. [16; гл. III, следствие 12.9]) для вычисления ранга: $p_* \mathcal{O}_{\Sigma_{\text{red}}} \otimes k_x \cong H^0(p^{-1}(x), \mathcal{O}_{p^{-1}(x)}) = k_x$. Следовательно, пучок $p_* \mathcal{O}_\Sigma =: L^\Sigma$ локально свободный ранга 1 как $\mathcal{O}_T$ -модуль. Тогда применение прямого образа и формулы проекции к первым двум пучкам в (4.7) приводят к изоморфизму $L^\Sigma \otimes L'_i|_{T_{ij}} = L^\Sigma \otimes L'_j|_{T_{ij}}$. Тензорное умножение на $(L^\Sigma)^\vee$ поставяет требуемый изоморфизм $L'_i|_{T_{ij}} = L'_j|_{T_{ij}}$. Отсюда следует существование обратимого $\mathcal{O}_T$ -пучка L' такого, что $L'|_{T_i} = L'_i$ и $\mathbb{F} \otimes p^* L' = \tilde{\mu}_{\mathbb{F}}^* \widetilde{\mathbb{F}}^s$.

Обратимый пучок L'' такой, что $\mathbb{L} \otimes p^* L'' = \tilde{\mu}_{\mathbb{F}}^* \widetilde{\mathbb{L}}^s$, получается как $L'' = p_*(\tilde{\mu}_{\mathbb{F}}^* \widetilde{\mathbb{L}}^s \otimes \mathbb{L}^\vee)$.

§ 5. Псевдосемейство и его универсальность

В этом параграфе мы построим псевдосемейство допустимых полустабильных пар и докажем, что оно обладает свойством универсальности. В отличие от универсального семейства универсальное псевдосемейство можно построить даже в случае, когда какая-либо из схем $\widetilde{S} \supset G(V, r)$ обладает нетривиальными автоморфизмами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. *Псевдосемейство допустимых полустабильных пар состоит из:*

- схем B_i ;
- этальных морфизмов $\beta_i: B_i \rightarrow \widetilde{M}$;
- схем $\widetilde{\Sigma}_i$;
- плоских морфизмов схем $\pi_i: \widetilde{\Sigma}_i \rightarrow B_i$;
- обильных обратимых пучков $\widetilde{\mathbb{L}}_i \in \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_i}$ -модулей;
- локально свободных пучков $\widetilde{\mathbb{E}}_i \in \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_i}$ -модулей.

Для них:

- морфизмы β_i образуют этальное покрытие схемы $\widetilde{M}$;
- для каждой замкнутой точки $b \in B_i$ набор $((\pi_i^{-1}(b), \widetilde{\mathbb{L}}_i|_{\pi_i^{-1}(b)}), (\widetilde{\mathbb{E}}_i|_{\pi_i^{-1}(b)}))$ – полустабильная допустимая пара.

Кроме того, выполнены следующие *условия склейки*: для любой пары индексов $i \neq j$ пусть $B_{ij} := B_i \times_{\widetilde{M}} B_j$, и пусть $B_i \xleftarrow{\widetilde{\beta}_j} B_{ij} \xrightarrow{\widetilde{\beta}_i} B_j$ – проекции расслоенного произведения. Тогда определены:

- изоморфизмы схем $B_{ij} \times_{B_j} \widetilde{\Sigma}_j \cong \widetilde{\Sigma}_i \times_{B_i} B_{ij}$; остальные обозначения зафиксируем расслоенной диаграммой

$$\begin{array}{ccccc}
 \widetilde{\Sigma}_{ij} & \xrightarrow{\widetilde{\beta}_j} & \widetilde{\Sigma}_i & & \\
 \downarrow \widetilde{\beta}_i & \searrow \pi_{ij} & \downarrow \pi_i & & \\
 & B_{ij} & \xrightarrow{\widetilde{\beta}_j} & B_i & \\
 & \downarrow \widetilde{\beta}_i & & \downarrow \beta_i & \\
 \widetilde{\Sigma}_j & \searrow \pi_j & & B_j & \xrightarrow{\beta_j} \widetilde{M}
 \end{array}$$

- обратимые $\mathcal{O}_{B_{ij}}$ -пучки L'_{ij} и L''_{ij} такие, что

$$\widetilde{\beta}_i^* \widetilde{\mathbb{E}}_i \cong \widetilde{\beta}_j^* \widetilde{\mathbb{E}}_j \otimes \pi_{ij}^* L'_{ij} \quad \text{и} \quad \widetilde{\beta}_i^* \widetilde{\mathbb{L}}_i \cong \widetilde{\beta}_j^* \widetilde{\mathbb{L}}_j \otimes \pi_{ij}^* L''_{ij}.$$

Если даны два псевдосемейства, то, относя в условиях склейки индекс i к одному псевдосемейству, а индекс j к другому, получим определение *эквивалентных псевдосемейств*.

Для построения псевдосемейства мы по-прежнему рассматриваем морфизм $f: H_0^s \rightarrow \widetilde{M}^s$. В частности, все орбиты действия группы $\mathrm{PGL}(V)$ на схеме H_0^s замкнуты и в каждом слое морфизма f находится в точности по одной орбите этого действия. В данной ситуации применима теорема Люна об этальном срезе (см. [13; гл. III, теорема об этальном срезе] и [12; теорема 4.2.12]). Получается (бесконечный) набор локально замкнутых подсхем $B_x \subset H_0^s$, соответствующих всем замкнутым стабильным точкам схемы H_0^s . При этом для каждого $x \in H_0^s$ индуцированный морфизм $\beta_x: B_x \rightarrow \widetilde{M}^s$ – этальный морфизм. В силу

квазикомпактности проективной схемы $\widetilde{M}$ и конечности стабилизатора $\text{Stab}(x)$ любой стабильной точки $x \in H_0^s$ из этального покрытия B_x , $x \in H_0^s$, можно извлечь конечное подпокрытие B_i , $i = 1, \dots, N$. Рассмотрев локально замкнутые вложения $f_i: B_i \hookrightarrow H_0^s$, определим плоские семейства $\pi_i: \widetilde{\Sigma}_i \rightarrow B_i$ с помощью расслоенных произведений $\widetilde{\Sigma}_i := \widetilde{\Sigma}_{H_0^s} \times_{H_0^s} B_i$. Семейство $\widetilde{\Sigma}_{H_0^s}$ снабжено плоскими над базой H_0^s пучками $\widetilde{\mathbb{E}}_{H_0^s}$ и $\widetilde{\mathbb{L}}_{H_0^s}$. Тогда пучки $\widetilde{\mathbb{E}}_i$ и $\widetilde{\mathbb{L}}_i$ определим с помощью ограничений $\widetilde{\mathbb{E}}_i := \widetilde{\mathbb{E}}_{H_0^s}|_{\widetilde{\Sigma}_i}$ и $\widetilde{\mathbb{L}}_i = \widetilde{\mathbb{L}}_{H_0^s}|_{\widetilde{\Sigma}_i}$.

Далее необходимы обозначения $B_i^T := B_i \times_{\widetilde{M}^s} T$, $\tau_i^B: B_i^T \rightarrow B_i$, $\bar{\beta}_i^T: B_i^T \rightarrow T$, где морфизмы τ_i^B и $\bar{\beta}_i^T$ определены как проекции расслоенного произведения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Псевдосемейство $(\beta_i: B_i \rightarrow \widetilde{M}^s, \pi_i: \widetilde{\Sigma}_i \rightarrow B_i, \widetilde{\mathbb{L}}_i^s, \widetilde{\mathbb{E}}_i^s)$ универсально, если для любого семейства $(T, \widetilde{\Sigma}_T, \widetilde{\mathbb{L}}_T, \widetilde{\mathbb{E}}_T)$ стабильных допустимых пар, базой которого является схема T , определен морфизм схем $\tau: T \rightarrow \widetilde{M}^s$ и имеют место изоморфизмы

$$\widetilde{\Sigma}_i^s \times_{B_i} B_i^T \cong B_i^T \times_T \widetilde{\Sigma}_T. \quad (5.1)$$

В обозначениях, определенных расслоенной диаграммой

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{\Sigma}_i^s \times_{B_i} B_i^T & \xrightarrow{\quad \widetilde{\tau} \quad} & \widetilde{\Sigma}_i^s & & \\ \downarrow \bar{\beta}_i^T & \searrow \widetilde{\pi}_i & \downarrow \pi_i & & \\ & B_i^T & \xrightarrow{\quad \tau_i^B \quad} & B_i & \\ & \downarrow \bar{\beta}_i^T & & \downarrow \beta_i & \\ & \widetilde{\Sigma}_T & \xrightarrow{\quad \pi_T \quad} & T & \\ & & & \downarrow \tau & \\ & & & T & \rightarrow \widetilde{M}^s \end{array}$$

для подходящих обратимых пучков $\mathcal{O}_{B_i^T}$ -модулей $L_i'^T$ и $L_i''^T$ имеют место изоморфизмы

$$\widetilde{\tau}^* \widetilde{\mathbb{E}}_i^s \cong \widetilde{\beta}_i^{T*} \widetilde{\mathbb{E}}_T \otimes \widetilde{\pi}_i^* L_i'^T, \quad \widetilde{\tau}^* \widetilde{\mathbb{L}}_i^s \cong \widetilde{\beta}_i^{T*} \widetilde{\mathbb{L}}_T \otimes \widetilde{\pi}_i^* L_i''^T.$$

Покажем, что для построенного нами псевдосемейства имеет место изоморфизм (5.1). Для любого семейства $(T, \widetilde{\Sigma}_T, \widetilde{\mathbb{L}}_T, \widetilde{\mathbb{E}}_T)$ стабильных допустимых пар по универсальному свойству схемы Гильберта определен индуцированный морфизм $T \rightarrow \text{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$, пропускаемый через локально замкнутое вложение $H_0^s \hookrightarrow \text{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$. Введем обозначение $h: T \rightarrow H_0^s$. Также по универсальному свойству схемы Гильберта определен морфизм $\widetilde{h}: \widetilde{\Sigma}_T \rightarrow \widetilde{\Sigma}_{H_0^s}^s$, включаемый в расслоенный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\Sigma}_T & \xrightarrow{\quad \widetilde{h} \quad} & \widetilde{\Sigma}_{H_0^s}^s \\ \pi_T \downarrow & & \downarrow \pi \\ T & \xrightarrow{\quad h \quad} & H_0^s \end{array}$$

При этом для подходящего обратимого $\mathcal{O}_T$ -пучка L_T имеет место изоморфизм пучков $\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_T}$ -модулей

$$\widetilde{\mathbb{E}}_T \cong \widetilde{h}^* \widetilde{\mathbb{E}}_{H_0}^s \otimes \pi_T^* L_T. \quad (5.2)$$

Композиция $\tau: T \xrightarrow{h} H_0^s \xrightarrow{f} \widetilde{M}^s$ с морфизмом f формирования GIT-фактора – искомым морфизм в схему модулей $\widetilde{M}^s$. Рассмотрим морфизм $f: H_0^s \rightarrow \widetilde{M}^s$ и расслоенный квадрат

$$\begin{array}{ccc} H_0^s \times_{\widetilde{M}^s} T & \longrightarrow & H_0^s \\ f^T \downarrow & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{\tau} & \widetilde{M}^s \end{array}$$

Подсхема $B_i \hookrightarrow H_0^s$ построена по теореме Люна как локальное мультисечение морфизма f . Его прообраз B_i^T относительно расширения базы τ включается в расслоенную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & H_0^s \times_{\widetilde{M}^s} T & \longrightarrow & H_0^s \\ & \nearrow & \downarrow & & \nearrow f_i \\ B_i^T & \xrightarrow{\quad} & B_i & & \downarrow f \\ & \searrow f^T & \downarrow \beta_i & & \downarrow f \\ & & T & \xrightarrow{\tau} & \widetilde{M}^s \end{array} \quad (5.3)$$

Достраивая прообразы семейства $\widetilde{\Sigma}_{H_0}^s$ относительно расширений базы в (5.3), получим расслоенную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & \widetilde{\Sigma}_{H_0}^T & \longrightarrow & \widetilde{\Sigma}_{H_0}^s \\ & \nearrow & \downarrow & & \nearrow \widetilde{f}_i \\ \widetilde{\Sigma}_i^s \times_{B_i} B_i^T & \xrightarrow{\quad} & \widetilde{\Sigma}_i^s & & \downarrow \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & H_0^s \times_{\widetilde{M}^s} T & \longrightarrow & H_0^s \\ & \nearrow & \downarrow & & \nearrow f \\ B_i^T & \xrightarrow{\quad} & B_i & & \downarrow f \\ & \searrow f^T & \downarrow \beta_i & & \downarrow f \\ & & T & \xrightarrow{\tau} & \widetilde{M}^s \end{array}$$

По универсальности схемы Гильберта для подходящего обратимого пучка $\mathcal{O}_{B_i}$ -модулей L_{B_i} имеет место изоморфизм пучков $\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_i^s}$ -модулей

$$\widetilde{\mathbb{E}}_i^s \cong \widetilde{f}_i^* \widetilde{\mathbb{E}}_{H_0}^s \otimes \pi_i^* L_{B_i}. \quad (5.4)$$

В силу построения $\tilde{\Sigma}_i^s$ как подсхемы в схеме $\tilde{\Sigma}_{H_0}^s$ и пучка $\tilde{\mathbb{E}}_i^s$ как ограничения пучка $\tilde{\mathbb{E}}_{H_0}^s$ на подсхему B_i можно считать пучок L_{B_i} тривиальным.

Заметим, что $\tilde{\Sigma}_i^s \times_{B_i} B_i^T \cong \tilde{\Sigma}_i^s \times_{B_i} B_i \times_{\tilde{M}^s} T \cong \tilde{\Sigma}_i^s \times_{\tilde{M}^s} T$. Также по универсальности схемы Гильберта $\tilde{\Sigma}_{H_0}^s \times_{H_0^s} T \cong \tilde{\Sigma}_T$.

Преобразование

$$\tilde{\Sigma}_{H_0}^s \times_{\tilde{M}^s} T \cong \tilde{\Sigma}_{H_0}^s \times_{H_0^s} H_0^s \times_{\tilde{M}^s} T \cong H_0^s \times_{\tilde{M}^s} (\tilde{\Sigma}_{H_0}^s \times_{H_0^s} T)$$

доказывает изоморфизм $\tilde{\Sigma}_T \times_T (T \times_{\tilde{M}^s} H_0^s) \cong \tilde{\Sigma}_{H_0}^T$. Действительно,

$$\tilde{\Sigma}_T \times_T (T \times_{\tilde{M}^s} H_0^s) \cong \tilde{\Sigma}_T \times_{\tilde{M}^s} H_0^s \cong H_0^s \times_{\tilde{M}^s} (\tilde{\Sigma}_{H_0}^s \times_{H_0^s} T) \cong \tilde{\Sigma}_{H_0}^s \times_{\tilde{M}^s} T \cong \tilde{\Sigma}_{H_0}^T.$$

Теперь обратимся к вложению $B_i^T \hookrightarrow H_0^s \times_{\tilde{M}^s} T$. Оно индуцирует вложение $\tilde{\Sigma}_T \times_T B_i^T \hookrightarrow \tilde{\Sigma}_T \times_T (T \times_{\tilde{M}^s} H_0^s) \cong \tilde{\Sigma}_{H_0}^T$.

Применяя свойство универсальности расслоенного произведения

$$\tilde{\Sigma}_{H_0}^T \times_{H_0^s \times \tilde{M}^s} B_i^T \cong \tilde{\Sigma}_i^s \times_{B_i} B_i^T,$$

получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Sigma}_T \times_T B_i^T & \xrightarrow{\quad} & \tilde{\Sigma}_{H_0}^T \\ \downarrow & \searrow \text{пунктир} & \downarrow \\ B_i^T & \xrightarrow{\quad} & H_0^s \times_{\tilde{M}^s} T \end{array}$$

(где $\tilde{\Sigma}_i^s \times_{B_i} B_i^T$ находится в центре, соединенная стрелками со всеми четырьмя вершинами)

из которой следует, что отмеченный пунктирной стрелкой морфизм является вложением. Кроме того, схемы $\tilde{\Sigma}_T \times_T B_i^T$ и $\tilde{\Sigma}_i^s \times_{B_i} B_i^T$ строго плоски над базой B_i^T и их образы в $\tilde{\Sigma}_{H_0}^T$ послойно совпадают как подсхемы. Таким образом, изоморфизм (5.1) доказан.

Он позволяет ввести обозначение для композиции

$$\psi: B_i^T \times_{B_i} \tilde{\Sigma}_i^s \cong B_i^T \times_T \tilde{\Sigma}_T \rightarrow \tilde{\Sigma}_{H_0}^T \rightarrow \tilde{\Sigma}_{H_0}^s,$$

причем $\psi = \tilde{f}_i \circ \tilde{\tau} = \tilde{h} \circ \tilde{\beta}_i^T$. Применив к (5.2) и (5.4) обратные образы $\tilde{\beta}_i^{T*}$ и $\tilde{\tau}^*$ соответственно, получим

$$\tilde{\beta}_i^{T*} \tilde{\mathbb{E}}_T \cong \tilde{\beta}_i^{T*} \tilde{h}^* \tilde{\mathbb{E}}_{H_0}^s \otimes \tilde{\beta}_i^{T*} \pi_T^* L_T = \psi^* \tilde{\mathbb{E}}_{H_0}^s \otimes \tilde{\pi}_i^* \tilde{\beta}_i^{T*} L_T, \quad (5.5)$$

$$\tilde{\tau}^* \tilde{\mathbb{E}}_i^s \cong \tilde{\tau}^* \tilde{f}_i^* \tilde{\mathbb{E}}_{H_0}^s \otimes \tilde{\tau}^* \pi_i^* L_{B_i} = \psi^* \tilde{\mathbb{E}}_{H_0}^s \otimes \tilde{\pi}_i^* \tau_i^{B*} L_{B_i}. \quad (5.6)$$

В соотношениях (5.5) и (5.6) применены равенства $\pi_i \circ \tilde{\tau} = \tau_i^B \circ \tilde{\pi}_i$ и $\pi_T \circ \tilde{\beta}_i^T = \tilde{\beta}_i^T \circ \tilde{\pi}_i$. Отсюда следует искомое соотношение универсальности

$$\tilde{\tau}^* \tilde{\mathbb{E}}_i^s \cong \tilde{\beta}_i^{T*} \tilde{\mathbb{E}}_T \otimes \tilde{\pi}_i^{T*} (\tau_i^{B*} L_{B_i} \otimes (\tilde{\beta}_i^{T*} L_T)^\vee).$$

Доказательство универсальности для послонных поляризацй аналогично. Для подходящих обратимых $\mathcal{O}_T$ -пучка L''_T и $\mathcal{O}_{B_i}$ -пучка L''_{B_i} справедливы соотношения

$$\widetilde{L}_T \cong \widetilde{h}^* \widetilde{L}_{H_0}^s \otimes \pi_T^* L''_T, \quad (5.7)$$

$$\widetilde{L}_i^s \cong \widetilde{f}_i^* \widetilde{L}_{H_0}^s \otimes \pi_i^* L''_{B_i}. \quad (5.8)$$

Применение к (5.7) и (5.8) обратных образов $\widetilde{\beta}_i^{T*}$ и $\widetilde{\tau}^*$ соответственно дает

$$\widetilde{\beta}_i^{T*} \widetilde{L}_T \cong \widetilde{\beta}_i^{T*} \widetilde{h}^* \widetilde{L}_{H_0}^s \otimes \widetilde{\beta}_i^{T*} \pi_T^* L''_T = \psi^* \widetilde{L}_{H_0}^s \otimes \widetilde{\pi}_i^* \widetilde{\beta}_i^{T*} L''_T,$$

$$\widetilde{\tau}^* \widetilde{L}_i^s \cong \widetilde{\tau}^* \widetilde{f}_i^* \widetilde{L}_{H_0}^s \otimes \widetilde{\tau}^* \pi_i^* L''_{B_i} = \psi^* \widetilde{L}_{H_0}^s \otimes \widetilde{\pi}_i^* \tau_i^{B*} L''_{B_i}.$$

Отсюда получаем

$$\widetilde{\tau}^* \widetilde{L}_i^s \cong \widetilde{\beta}_i^{T*} \widetilde{L}_T \otimes \widetilde{\pi}_i^* (\tau_i^{B*} L''_{B_i} \otimes (\widetilde{\beta}_i^{T*} L''_T)^\vee).$$

Список литературы

- [1] D. Gieseker, “On the moduli of vector bundles on an algebraic surface”, *Ann. of Math.* (2), **106**:1 (1977), 45–60.
- [2] G. Ellingsrud, L. Göttsche, “Variation of moduli space and Donaldson invariants under change of polarization”, *J. Reine Angew. Math.*, **467** (1995), 1–49.
- [3] M. Maruyama, “Moduli of stable sheaves. II”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **18**:3 (1978), 557–614.
- [4] Н. В. Тимофеева, “Компактификация в схеме Гильберта многообразия модулей стабильных 2-векторных расслоений на поверхности”, *Матем. заметки*, **82**:5 (2007), 756–769; англ. пер.: N. V. Timofeeva, “A compactification of the moduli variety of stable vector 2-bundles on a surface in the Hilbert scheme”, *Math. Notes*, **82**:5 (2007), 677–690.
- [5] Н. В. Тимофеева, “О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности”, *Матем. сб.*, **199**:7 (2008), 103–122; англ. пер.: N. V. Timofeeva, “On a new compactification of the moduli of vector bundles on a surface”, *Sb. Math.*, **199**:7 (2008), 1051–1070.
- [6] Н. В. Тимофеева, “О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности. II”, *Матем. сб.*, **200**:3 (2009), 95–118; англ. пер.: N. V. Timofeeva, “On the new compactification of moduli of vector bundles on a surface. II”, *Sb. Math.*, **200**:3 (2009), 405–427.
- [7] Н. В. Тимофеева, “О вырождении поверхности в компактификации Фиттинга модулей стабильных векторных расслоений”, *Матем. заметки*, **90**:1 (2011), 143–150; англ. пер.: N. V. Timofeeva, “On degeneration of the surface in the Fitting compactification of moduli of stable vector bundles”, *Math. Notes*, **90**:1 (2011), 142–148.
- [8] D. Gieseker, J. Li, “Moduli of high rank vector bundles over surfaces”, *J. Amer. Math. Soc.*, **9**:1 (1996), 107–151.
- [9] K. G. O’Grady, “Moduli of vector bundles on projective surfaces: some basic results”, *Invent. Math.*, **123**:1 (1996), 141–207.
- [10] Н. В. Тимофеева, “О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности. III: Функториальный подход”, *Матем. сб.*, **202**:3 (2011), 107–160; англ. пер.: N. V. Timofeeva, “On a new compactification of moduli of vector bundles on a surface. III: Functorial approach”, *Sb. Math.*, **202**:3 (2011), 413–465.

- [11] Н. В. Тимофеева, “О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности. IV: Неприведенная схема модулей”, *Матем. сб.*, **204**:1 (2013), 139–160.
- [12] D. Huybrechts, M. Lehn, *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Aspects Math., **E31**, Vieweg, Braunschweig, 1997.
- [13] D. Luna, “Slices étales”, *Bull. Soc. Math. France*, **33** (1973), 81–105.
- [14] D. Mumford, J. Fogarty, *Geometric invariant theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **34**, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [15] Дж. Милн, *Этальные кохомологии*, Мир, М., 1983; пер. с англ.: J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Math. Ser., **33**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1980.
- [16] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **52**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1977.

Н. В. Тимофеева (N. V. Timofeeva)

Ярославский государственный университет

им. П. Г. Демидова

E-mail: ntimofeeva@list.ru

Поступила в редакцию

11.06.2011 и 15.07.2012