Общероссийский математический портал

А. В. Гришин, Модельные алгебры, кратности и показатели представимости многообразий ассоциативных алгебр, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 1, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm790>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:40:11

УДК 512

А. В. Гришин

Модельные алгебры, кратности и показатели представимости многообразий ассоциативных алгебр

В работе для ряда нематричных многообразий ассоциативных алгебр вычисляются конечномерные (так называемые *модельные*) алгебры, порождающие эти многообразия. По существу, оценивается кратность и показатель представимости таких многообразий. Попутно дается оценка кратности для некоторого класса многообразий произвольной сложности, что продолжает предыдущие исследования автора. Рассматривается также связь с квазимногочленами.

Библиография: 21 название.

В настоящей работе рассматриваются только ассоциативные алгебры, хотя аналогичные понятия и конструкции можно исследовать и для алгебр, близких к ассоциативным.

Последние два десятилетия ознаменовались существенным прогрессом в теории PI -алгебр. В [1] А. Брауном была установлена в весьма общей ситуации нильпотентность радикала конечнопорожденной PI -алгебры. В [2] А. Р. Кемером дано положительное решение проблемы Шпехта. Примерно в это же время были рассмотрены некоторые обобщенные аналоги этого вопроса (см. [3], [4]). В связи с исследованиями по конечной базирруемости возникла теория так называемых T -пространств и появилась техника квазимногочленов. Развитие этой теории показало, что положительное решение проблемы Шпехта является частным случаем положительного решения проблемы конечной базирруемости T -пространств. Первые шаги в этом направлении сделаны в работах автора [3], [5], [6], а окончательно точка была поставлена в [7] (см. также [4]). С другой стороны, в характеристике $p > 0$ был построен ряд контрпримеров как для T -пространств, так и для T -идеалов, показывающих, что прямой перенос на эту ситуацию результатов, установленных в нулевой характеристике, невозможен (см. [6], [8]–[13]). Другой важный итог этих двух десятилетий – доказательство представимости широкого класса относительно свободных алгебр, т.е. вложимости этих алгебр в конечномерные алгебры над некоторым расширением основного поля (см. [3], [4], [14]). Представимость, по крайней мере в случае бесконечного поля, равносильна (и этот вопрос обсуждается в §1) тому, что соответствующее многообразие алгебр порождено некоторой своей конечномерной алгеброй.

Приведенные выше результаты являются “теоремами существования”. Поэтому актуальны, по мнению автора, следующие “конкретные” направления дальнейших исследований.

1) По данной конечномерной алгебре описать ее базис тождеств. Эта задача решена только для сравнительно небольшого класса алгебр. Например, для (2×2) -матриц это известный результат Ю. П. Размыслова [15] (см. также [16]).

Для матриц большего порядка вопрос остается до сих пор открытым. Имеются аналогичные вопросы для T -пространств.

II) По данной системе тождеств, обеспечивающей представимость, указать конечномерную алгебру, порождающую то же многообразие, что и данная система тождеств. В этом плане хотелось бы выделить работу Ж. Левина [17]. Вопрос о представимости тесно связан с оценкой *кратности* данного многообразия, т.е. индекса нильпотентности радикала его свободной счетнопорожденной алгебры.

Настоящая работа посвящена в основном второму направлению. При этом существенно используется техника модельных алгебр, обобщенных тождеств и квазимногочленов. Таким образом, она по существу является продолжением работ автора [18], [19]. Отметим, что в качестве носителей многообразий нас будут интересовать не только модельные алгебры, но и их бесконечномерные аналоги.

§1. Модельные алгебры и показатель представимости

Пусть k – бесконечное поле произвольной характеристики, k_r – алгебра $(r \times r)$ -матриц и $\mathfrak{M}$ – многообразие ассоциативных алгебр над полем k . С каждым таким многообразием связаны такие числовые характеристики, как *сложность* – натуральное число r , для которого $k_r \in \mathfrak{M}$, $k_{r+1} \notin \mathfrak{M}$, и *кратность* – индекс нильпотентности радикала относительно свободной счетнопорожденной алгебры $\overline{F}$ этого многообразия. Для удобства все рассматриваемые алгебры предполагаются с единицей, а многообразия унитарно замкнутыми.

Наша цель – ввести еще один важный, как представляется, показатель многообразия $\mathfrak{M}$. Будем называть многообразие $\mathfrak{M}$ *представимым*, если его алгебра $\overline{F}$ вкладывается в конечномерную алгебру над некоторым расширением поля k . Если k – алгебраически замкнутое поле бесконечной степени трансцендентности над своим простым подполем, то представимость, как известно, равносильна равенству $\mathfrak{M} = \text{Var}(A)$, где A – некоторая конечномерная алгебра из $\mathfrak{M}$.

Пусть Ω – произвольное расширение поля k , $F = k\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$ и $\Omega F = \Omega\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$ – свободные счетнопорожденные ассоциативные алгебры над полями k и Ω . Обозначим через $\mathfrak{M}^\Omega$ многообразие Ω -алгебр, заданное тем же набором тождеств, что и $\mathfrak{M}$.

Всюду ниже в этом параграфе сложность многообразия $\mathfrak{M}$ предполагается равной r . Положим

$$L_n^\Omega = \underbrace{\Omega_r \oplus \dots \oplus \Omega_r}_n \oplus \dots \oplus \underbrace{\Omega \oplus \dots \oplus \Omega}_n$$

и рассмотрим свободные над Ω произведения

$$L_n^\Omega \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle = L_n^\Omega * \Omega \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle, \quad n = 2, 3, \dots,$$

т.е. алгебры обобщенных L_n^Ω -многочленов от $n-1$ переменной. Рассмотрим, далее, факторалгебры $R_n^\Omega = L_n^\Omega \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle / (x_1, \dots, x_{n-1})^n$, которые, очевидно, конечномерны. При $k = \Omega$ положим $R_n = R_n^k$. Пусть S – произвольное множество многочленов из F (например, S – T -идеал). Обозначим через $(S)_n^\Omega$ вербальный идеал алгебры R_n^Ω , порожденный множеством S . Положим $R_n^\Omega(S) = R_n^\Omega / (S)_n^\Omega$, $R_n(S) = R_n^k(S)$. Ясно, что $R_n^\Omega(S)$ лежит в многообразии, заданном системой тождеств S . Из бесконечности поля k прямо следует

ЛЕММА 1.1. Если I – T -идеал тождеств алгебры $R_n(S)$ в алгебре F , то ΩI – T -идеал тождеств алгебры $R_n^\Omega(S)$ в алгебре ΩF , причем $I_1 = I_2$ тогда и только тогда, когда $\Omega I_1 = \Omega I_2$ (где I_1, I_2 – T -идеалы алгебры F).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу бесконечности поля k идеал I состоит из линейных комбинаций полиоднородных многочленов, лежащих в I . В силу того, что алгебра $R_n^\Omega(S)$ имеет тот же базис и те же структурные константы, что и алгебра $R_n(S)$, тождества алгебры $R_n^\Omega(S)$ составляют T -идеал ΩI алгебры ΩF . Это доказывает первое утверждение леммы.

Пусть I_1 и I_2 – произвольные T -идеалы алгебры F , а B_1 и B_2 – их полиоднородные базисы. Тогда, как легко видеть, ΩI_1 и ΩI_2 – T -идеалы алгебры ΩF с теми же полиоднородными базисами. Ясно, что базисы B_1 и B_2 линейно эквивалентны над k тогда и только тогда, когда они эквивалентны над Ω . Что и доказывает второе утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 1.1. Следующие утверждения эквивалентны.

- 1) Многообразие $\mathfrak{M}$, заданное системой S , представимо.
- 2) Существует такое натуральное n_0 , что

$$\text{Var}(R_{n_0}(S)) = \text{Var}(R_{n_0+1}(S)) = \dots$$

- 3) Существует такое натуральное n_0 , что $\mathfrak{M} = \text{Var}(R_{n_0}(S))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если многообразие $\mathfrak{M}$ представимо, то в силу сказанного выше для некоторого расширения Ω поля k и для некоторой конечномерной Ω -алгебры A имеет место равенство $\mathfrak{M}^\Omega = \text{Var}(A)$. Следовательно, для некоторого натурального n_0 существует сюръективный гомоморфизм алгебры $R_{n_0}^\Omega(S)$ на алгебру A . Тогда, очевидно,

$$\text{Var}(A) = \text{Var}(R_{n_0}^\Omega(S)) = \text{Var}(R_{n_0+1}^\Omega(S)) = \dots$$

В силу леммы

$$\text{Var}(R_{n_0}(S)) = \text{Var}(R_{n_0+1}(S)) = \dots$$

Ясно, что алгебры $R_{n_0}(S), R_{n_0+1}(S), \dots$ порождают многообразие $\mathfrak{M}$. В самом деле, относительно свободная алгебра $\overline{F}$ этого многообразия может быть аппроксимирована конечномерными алгебрами (т.е. представлена как их подпрямое произведение). Каждая из этих конечномерных алгебр является гомоморфным образом некоторой алгебры $R_n(S)$. Следовательно, алгебры $R_n(S)$ порождают многообразие, заданное системой S .

Пусть $\mathfrak{M} = \text{Var}(A)$, где $A = ke_1 + \dots + ke_n$ – некоторая n -мерная k -алгебра. Рассмотрим алгебру коммутативных многочленов $k[X]$, где $X = \{x_i^{(j)} \mid 1 \leq j \leq n, i \in \mathbb{N}\}$ и положим $\tilde{A} = k[X] \otimes A$. В алгебре $\tilde{A}$ рассмотрим алгебру “общих элементов” алгебры A

$$\overline{x}_i = \sum_{j=1}^n x_i^{(j)} \otimes e_j.$$

Легко видеть, что $\overline{F} = k(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_i, \dots)$ – относительно свободная алгебра многообразия $\mathfrak{M}$ и $\overline{F}$ вкладывается в n -мерную $k(X)$ -алгебру $k(X) \otimes A$, где $k(X)$ – поле рациональных функций от переменных из множества X .

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. В случае бесконечного поля представимость многообразия $\mathfrak{M}$ равносильна равенству $\mathfrak{M} = \text{Var}(A)$, где A – некоторая конечномерная алгебра из $\mathfrak{M}$.

Наименьшее натуральное n_0 из приведенной выше теоремы назовем *показателем представимости* $\rho(S) = \rho(\mathfrak{M})$ многообразия $\mathfrak{M}$, а конечномерные алгебры $R_{n_0}(S), R_{n_0+1}(S), \dots$ – *модельными алгебрами* этого многообразия.

Ясно, что кратность многообразия $\mathfrak{M}$ не превосходит $\rho(S)$, что показывает важную роль показателя представимости данного многообразия. Зная показатель представимости, можно построить модельную алгебру многообразия. Однако само отыскание числа $\rho(S)$ – весьма трудная задача.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) При $n < \rho(S)$ алгебра $R_n(S)$ также является модельной алгеброй, но для меньшего многообразия, так как при этом на ней индуцируются собственные, так сказать, имманентные тождества.

2) Из результатов Левина [17] следует, что если M_r – идеал тождеств алгебры k_r , то

$$\rho(M_{r_1} \dots M_{r_l}) = \mu(M_{r_1} \dots M_{r_l}) = l.$$

В самом деле, в этой работе показано, что многообразие, заданное этим T -идеалом, порождено матрицами вида

$$\begin{pmatrix} k_{r_1} & * & \dots & * \\ 0 & k_{r_2} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{r_l} \end{pmatrix}.$$

Если $c_n = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma y_0 x_{\sigma(1)} y_1 \dots y_{n-1} x_{\sigma(n)} y_n$ – многочлен Капелли порядка n , то при $n \geq 4$ в случае поля нулевой характеристики оценка показателей $\rho(c_n)$ и $\mu(c_n)$ – интересная и важная задача, решение которой еще впереди.

Отчасти этой задаче будут посвящены следующие параграфы.

§ 2. Свободные модельные алгебры и их T -идеалы

Как и в предыдущем параграфе, зафиксируем некоторое натуральное число r . Рассмотрим прямую сумму алгебр $K(r) = k \oplus k_2 \oplus \dots \oplus k_r$, в которой для каждого $s \leq r$ встречается ровно одна алгебра матриц k_s . Назовем *свободной модельной алгеброй сложности r* свободное на k произведение

$$\mathcal{M} = K(r) * k\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle,$$

которое является по существу алгеброй обобщенных многочленов с коэффициентами в алгебре $K(r)$. Естественным образом определяются T -идеалы алгебры $\mathcal{M}$ – это такие ее идеалы, которые состоят из обобщенных $K(r)$ -многочленов, исчезающих на алгебре $K(r)$ и, кроме того, устойчивых относительно подстановок $x_i \mapsto f_i$, где f_i – некоторые элементы из $\mathcal{M}$.

Пусть S – произвольная система обобщенных многочленов из $\mathcal{M}$, обращающихся в нуль на алгебре $K(r)$, и содержащая хотя бы один обычный многочлен, т.е. элемент из алгебры F , и $(S)^T$ – T -идеал алгебры $\mathcal{M}$, порожденный множеством S .

Алгебру $\mathcal{M}(S) = \mathcal{M}/(S)^T$ назовем *относительно свободной модельной алгеброй, соответствующей системе S*.

Модельная алгебра $R_n(S)$ из предыдущего параграфа содержит алгебру $K(r)$ унитарно (алгебра k_s вкладывается в прямую сумму $\underbrace{k_s \oplus \cdots \oplus k_s}_n$ диагонально).

Следовательно, имеется сюръективный гомоморфизм относительно свободной модельной алгебры $\mathcal{M}(S)$ на алгебру $R_n(S)$, т.е. эти алгебры имеют один и тот же запас тождеств. Таким образом, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Если система тождеств S задает представимое многообразие $\mathfrak{M}$, то имеется сюръективный гомоморфизм $\mathcal{M}(S)$ на $R_n(S)$ и $\text{Var } \mathcal{M}(S) = \text{Var}(R_n(S)) = \mathfrak{M}$ для всех $n \geq \rho(\mathfrak{M})$.*

Пусть $1 = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_r$ – разбиение единицы в алгебре $K(r)$, т.е. ε_s – единица алгебры k_s . Этому разбиению отвечает разложение алгебры $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_r + \mathcal{N},$$

где $\mathcal{M}_s$ – k_s -алгебра, порожденная элементами вида ε_s и $\varepsilon_s x_i \varepsilon_s$, $i \in \mathbb{N}$, а $\mathcal{N}$ – идеал алгебры $\mathcal{M}$, порожденный (как идеал) элементами вида $\alpha x_i \beta$, где α и β лежат в разных матричных прямых слагаемых алгебры $K(r)$.

Ясно, что $\mathcal{M}_s$ это по существу алгебра обобщенных k_s -многочленов, т.е. свободное произведение $k_s * k \langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$. Для дальнейшего нам понадобятся некоторые сведения о таких многочленах, изложенные, например, в [3], [18].

Пусть $F^* = F * k_r$ – алгебра обобщенных k_r -многочленов. По определению T -идеалы алгебры F^* – это ее идеалы, устойчивые относительно подстановок вместо переменных x_i элементов из алгебры F^* , и, следовательно, они состоят из обобщенных тождеств алгебры k_r . Обозначим через M_r^* T -идеал всех обобщенных тождеств алгебры k_r . Ясно, что $M_r^* \cap F = M_r$. Для любого T -идеала I алгебры F^* , содержащего хотя бы один многочлен из алгебры F и некоторый обобщенный многочлен из M_r^* , не обращающийся в нуль на алгебрах k_s при $s > r$, радикал алгебры F^*/I совпадает с $(M_r^* + I)/I$. Многообразие, порожденное алгеброй, унитарно содержащей алгебру k_r , следуя [3], будем называть *r-замкнутым*.

Отметим следующие хорошо известные факты.

I) В алгебре F^* линейный обобщенный многочлен вида

$$\psi_{ij}(x_q) = \sum_{\alpha=1}^{r^2} e_{\alpha i} x_q e_{j \alpha}$$

является центральным на алгебре k_r , и в F^* выполнено тождество

$$[\psi_{ij}(x_q), a] = 0$$

для любой матрицы a из k_r . Будем называть $\psi_{ij}(x_q)$ *центральным многочленом типа (i, j)* .

II) Имеет место следующее разложение переменной

$$x_q = \sum_{i,j} \psi_{ij}(x_q) e_{ij}.$$

III) Идеал M_r^* порождается (как T -идеал) коммутатором $[\psi_{ij}(x_1), x_2]$. Этот факт восходит еще к классической работе Д. Литтлвуда [20].

С каждым обобщенным многочленом $f(x_1, \dots, x_d)$ из алгебры F^* можно связать обобщенный многочлен $f^{(i,j)}(x_1, \dots, x_d) = f(\psi_{ij}(x_1), \dots, \psi_{ij}(x_d))$, который мы будем называть *централизацией типа (i, j)* обобщенного многочлена f . Ясно, что если f – обычный многочлен, т.е. элемент из свободной алгебры F , то $f^{(i,j)}$ – обобщенный центральный многочлен на алгебре k_r .

Для наших целей достаточно рассмотреть только централизации типа $(1,1)$ и выяснить, как действуют эти централизации на T -идеалы. Пусть Ψ – k -подалгебра алгебры F^* , порожденная элементами $\psi_{11}(x_i)$. Ясно, что для любого элемента h из Ψ в силу I) имеет место равенство $\psi_{11}(h) = h$. Следовательно, для любых многочленов $f, g_1, \dots, g_d$ из алгебры F имеют место равенства

$$\begin{aligned} f^{(1,1)}(g_1^{(1,1)}, \dots, g_d^{(1,1)}) &= f(\psi_{11}(g_1^{(1,1)}), \dots, \psi_{11}(g_d^{(1,1)})) \\ &= f(g_1^{(1,1)}, \dots, g_d^{(1,1)}) = (f(g_1, \dots, g_d))^{(1,1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Если f лежит в T -идеале, порожденном многочленами $f_1, \dots, f_n, \dots$, то $f^{(1,1)}$ лежит в T -идеале, порожденном обобщенными многочленами в $f_1^{(1,1)}, \dots, f_n^{(1,1)}, \dots$.*

Для дальнейшего нам понадобится следующая операция, которую имеет смысл рассмотреть на простом примере. Пусть по модулю некоторого T -идеала имеет место сравнение

$$[\psi_{11}(x_1), \psi_{11}(x_2)] \equiv 0.$$

Тогда с помощью очевидных подстановок в x_1 и x_2 получаем

$$[\psi_{ij}(x_1), \psi_{\alpha\beta}(x_2)] \equiv 0$$

для любых i, j, α, β . Применим к левой части полученного сравнения *операцию восстановления*, т.е. рассмотрим сумму (преобразуемую с учетом I))

$$\sum_{1 \leq \alpha, \beta \leq r} e_{\alpha\beta} [\psi_{ij}(x_1), \psi_{\alpha\beta}(x_2)] = \left[\psi_{ij}(x_1), \sum_{1 \leq \alpha, \beta \leq r} e_{\alpha\beta} \psi_{\alpha\beta}(x_2) \right].$$

Тогда с учетом II) получаем

$$[\psi_{ij}(x_1), x_2] \equiv 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Пусть по модулю некоторого T -идеала алгебры F^* имеет место полилинейное сравнение*

$$\psi_{11}(y_0)[\psi_{11}(x_1), \psi_{11}(x_2)]\psi_{11}(y_1) \cdots \psi_{11}(y_{n-1})[\psi_{11}(x_{2n-1}), \psi_{11}(x_{2n})]\psi_{11}(y_n) \equiv 0,$$

где часть переменных алгебр F обозначена для удобства через y_i . Тогда по модулю этого T -идеала имеет место сравнение

$$y_0[\psi_{i_1 j_1}(x_1), x_2]y_1 \cdots y_{n-1}[\psi_{i_n j_n}(x_{2n-1}), x_{2n}]y_n \equiv 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – последовательное $(2n + 1)$ -кратное применение операции восстановления с помощью подходящих левых умножений на матричные единицы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенное выше предложение 2.1 показывает, что относительно свободная модельная алгебра $\mathcal{M}(S)$ не увеличивает запас тождеств по отношению к исходному представимому многообразию сложности r . В то же время алгебра F^* может существенно расширять исходный T -идеал алгебры F . Приведем пример.

Пусть $I = (st_{2n})^T$ – T -идеал алгебры F , порожденный стандартным многочленом. Тогда T -идеал I^* алгебры F^* , порожденный тем же многочленом, совпадает со всем идеалом M_r^* (упражнение для читателя), т.е. содержит, в частности, все обычные тождества алгебры матриц, в том числе и те, которые в обычном смысле не следуют из тождества $st_{2n} = 0$.

§ 3. Случай нематричных многообразий

В этом параграфе рассматриваются унитарно замкнутые многообразия сложности 1 (нематричные многообразия). Другим существенным ограничением является предположение, что k – поле нулевой характеристики, хотя некоторые из результатов гипотетически имеют аналоги и над произвольным бесконечным полем. В нематричном случае модельные алгебры $R_n(S)$ имеют вид

$$R_n(S) = (k \oplus \cdots \oplus k) + (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}),$$

где $\bar{x}_i$ – образы переменных x_i .

Следуя [21], через $T^{(s)}$ обозначим T -идеал алгебры F , порожденный правонормированным длинным коммутатором, имеющим длину s .

3.1. Рассмотрение по модулю $T^{(3)}$. В этом пункте мы вычислим кратность и показатель представимости многообразия, заданного тождествами (здесь и всюду ниже $n \geq 2$)

$$st_{2n} = 0, \quad [[x_1, x_2], x_3] = 0.$$

ЛЕММА 3.1. *Для любого $m \geq n$ имеет место сравнение*

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2m-1}, x_{2m}] \equiv 0 \pmod{(st_{2n}, [[x_1, x_2], x_3])^T},$$

причем для всех $1 \leq m < n$ данное сравнение места не имеет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать сравнение при $m = n$. Как следует из соотношений на коммутаторы по модулю $T^{(3)}$ (см., например, [11]), левая часть доказываемого сравнения по модулю $T^{(3)}$ кососимметрична относительно своих переменных. Следовательно,

$$c[x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] \equiv st_{2n} \pmod{T^{(3)}}.$$

Ясно, что $c \neq 0$, так как иначе $st_{2n} \in T^{(3)}$, что невозможно в нулевой характеристике. Это доказывает первое утверждение леммы.

Второе утверждение вытекает из того, что если бы при $m < n$ это сравнение имело место, то левая часть его, очевидно, лежала бы в $T^{(3)}$. Чего, как легко видеть, не может быть. Лемма доказана.

Отметим далее, что, как следует из упомянутых выше соотношений на коммутаторы по модулю $T^{(3)}$, полилинейное произведение коммутаторов $c_1 \cdots c_m$ от переменных по модулю $T^{(3)}$ с точностью до знака не зависит от расстановки переменных в коммутаторах. Поэтому будем считать, что переменные в этом произведении упорядочены.

ЛЕММА 3.2. *Всякий полилинейный многочлен из алгебры F , исчезающий при подстановке вместо всех переменных единицы, является по модулю T -идеала $(st_{2n}, [[x_1, x_2], x_3])^T$ линейной комбинацией выражений вида*

$$c_1 \cdots c_m x_{i_1} \cdots x_{i_l},$$

где c_i – коммутаторы от переменных, $1 \leq m \leq n-1$, $x_{i_1} \cdots x_{i_l}$ – оставшиеся переменные, расположенные в порядке возрастания индексов. Указанные выражения образуют линейно независимую систему по модулю рассматриваемого T -идеала.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть леммы очевидным образом следует из леммы 3.1 (откуда $m \leq n-1$) и того факта, что многочлен исчезает при подстановке единиц (следовательно, $m \geq 1$). Докажем линейную независимость рассматриваемой системы. Рассмотрим в предполагаемой нетривиальной линейной комбинации, равной нулю, элемент с наименьшим m и ненулевым коэффициентом. Заметим, что идеал $(st_{2n}, [[x_1, x_2], x_3])^T$ унитарно замкнут, и положим все переменные, кроме входящих в произведение $c_1 \cdots c_m$, равными единице. Тогда, очевидно,

$$c_1 \cdots c_m \equiv 0 \pmod{(st_{2n}, [[x_1, x_2], x_3])^T},$$

что противоречит лемме 3.1.

ЛЕММА 3.3. *Пусть система S содержит длинный коммутатор и $e_1, \dots, e_n$ – единицы простых компонент алгебры $\underbrace{k \oplus \cdots \oplus k}_n$, входящей в алгебру $R_n(S)$.*

Тогда

- 1) $e_i \bar{x}_\alpha e_j = 0$ при $i \neq j$;
- 2) *имеется разложение в прямую сумму*

$$R_n(S) = (ke_1 + X_1) \oplus \cdots \oplus (ke_n + X_n),$$

$$\text{где } X_i = (e_i \bar{x}_1 e_i, \dots, e_i \bar{x}_{n-1} e_i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из того, что $e_i \bar{x}_\alpha e_j = [e_i \bar{x}_\alpha e_j, e_i]$. Следовательно, $e_i \bar{x}_\alpha e_j$ совпадает с коммутатором любой длины, а значит, равен нулю. Утверждение 2) непосредственно следует из 1).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие, заданное тождествами

$$[[x_1, x_2], x_3] = 0, \quad st_{2n} = 0.$$

Тогда

$$\mu(\mathfrak{M}) = n, \quad \rho(\mathfrak{M}) = 2n - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о кратности многообразия $\mathfrak{M}$ прямо следует из леммы 3.1. Покажем, что $R_{2n-1}(S)$ – модельная алгебра этого многообразия. В самом деле, если некоторый полилинейный многочлен, который обращается в нуль при подстановке вместо переменных единиц, не лежит в T -идеале $([[x_1, x_2], x_3], st_{2n})^T$, то он является некоторой нетривиальной комбинацией выражений $c_1 \cdots c_m x_{i_1} \cdots x_{i_l}$, где $m < n$. Покажем, что эта линейная комбинация не равна нулю на алгебре $R_{2n-1}(S)$. В самом деле, в противном случае, рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 3.2, и специализируя переменные x_i , входящие в $c_1 \cdots c_m$, в элементы $\bar{x}_i$, а остальные переменные в единицу, получаем, что для некоторого m , меньшего n , имеет место равенство $\bar{c}_1 \cdots \bar{c}_m = 0$ ($\bar{c}_i$ – специализация c_i). Это противоречит тому, что $\mu(\mathfrak{M}) = n$. Алгебра $R_{2n-2}(S)$ уже не является модельной для данного многообразия, так как в силу леммы 3.3 на ней выполнено тождество

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2n-3}, x_{2n-2}] = 0,$$

которое не следует из исходных тождеств. Теорема доказана.

3.2. Рассмотрение общего случая. Для дальнейшего понадобится следующее утверждение, доказанное В. Н. Латышевым в [21].

ЛЕММА 3.4 (лемма Латышева). Имеет место включение $T^{(s)}T^{(t)} \subset T^{(s+t-2)}$.

ЛЕММА 3.5. Пусть I – T -идеал алгебры F , содержащий стандартный многочлен st_{2n} и T -идеал $T^{(s)}$. Тогда индекс-nilпотентности радикала алгебры F/I не превосходит $n(s-2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3.4 имеем

$$\underbrace{T^{(3)} \cdots T^{(3)}}_{s-2} \subset T^{(s)}.$$

С другой стороны, по теореме 3.1

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] \in (st_{2n}, [[x_1, x_2], x_3])^T.$$

Следовательно, полилинейное произведение $n(s-2)$ коммутаторов лежит в

$$(st_{2n}, \underbrace{T^{(3)} \cdots T^{(3)}}_{s-2})^T \subset (st_{2n}, T^{(s)})^T.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольное многообразие, на котором выполнено стандартное тождество $st_{2n} = 0$ и на котором обращаются в нуль все многочлены из T -идеала $T^{(l_1)} \dots T^{(l_m)}$. Тогда

$$\mu(\mathfrak{M}) \leq n((l_1 - 2) + \dots + (l_m - 2)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3.5 полилинейное произведение $n(l_i - 2)$ коммутаторов лежит в T -идеале $(st_{2n}, T^{(l_i)})^T$. Остается рассмотреть полилинейное произведение $n((l_1 - 2) + \dots + (l_m - 2))$ коммутаторов, которое, очевидно, лежит в T -идеале

$$(st_{2n}, T^{(l_1)} \dots T^{(l_m)})^T.$$

Теорема доказана.

Следующая теорема дает оценку показателя представимости для многообразий, на которых выполнено тождество длинного коммутатора. Для более общей ситуации, например для произведения нескольких длинных коммутаторов, получить удовлетворительную оценку (т.е. не заведомо завышенную) пока не удастся.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольное многообразие, на котором обращаются в нуль все многочлены из T -идеала $(st_{2n}, T^{(l)})^T$, $l \geq 3$. Тогда

$$\rho(\mathfrak{M}) \leq (2n + 1)(l - 2) - 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – T -идеал тождеств многообразия $\mathfrak{M}$. Используя лемму Латышева и стандартные действия с коммутаторами, нетрудно показать, что всякий полилинейный многочлен f , исчезающий при подстановке вместо переменных единицы, является линейной комбинацией элементов следующих трех видов

$$c_1 \dots c_m x_{i_1} \dots x_{i_s}, \quad tx_{i_1} \dots x_{i_s}, \quad tc_1 \dots c_{m-1} x_{i_1} \dots x_{i_s},$$

где t – коммутатор длины λ , $3 \leq \lambda \leq l - 1$, c_i – коммутаторы от переменных, $1 \leq m \leq n(l - 2) - 1$, а переменные $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$, если они присутствуют, расположены в порядке возрастания их номеров. Таким образом, имеется линейная комбинация выражений $Cx_{i_1} \dots x_{i_s}$, где C – многочлен одного из указанных выше видов. Многочлены C будем называть *главными множителями*. Будем считать их линейно независимыми по модулю идеала I . Заметим, что максимально возможная степень многочлена C равна $2n(l - 2) - 2$ в первом случае, $l - 1$ во втором случае и $2n(l - 2) - 4 + l - 1 = (2n + 1)(l - 2) - 3$ в третьем случае, т.е. в любом случае она не превосходит указанной в теореме границы. Покажем, что $R_N(I)$ – модельная алгебра многообразия $\mathfrak{M}$, где $N = (2n + 1)(l - 2) - 2$. В силу леммы 3.3 и сделанных оценок на степень многочлена C специализация $\{\overline{C}_i\}$ системы главных множителей $\{C_i\}$, получающаяся при замене x_i на $\overline{x}_i$, является линейно независимой системой в алгебре $R_N(I)$.

Итак, по модулю I рассматриваемый полилинейный многочлен f имеет вид

$$f \equiv \sum_i \alpha_i C_i D_i,$$

где $\alpha_i \in k$, C_i – главные множители, а D_i – упорядоченное произведение оставшихся переменных. Покажем теперь, что если многочлен f не лежит в I , то он не обращается в нуль и на алгебре $R_N(I)$. Для этого перепишем его в виде (который всегда возможен с точностью до перенумерации)

$$f \equiv \alpha_1 C_1 D_1 + \cdots + \alpha_q C_q D_q + \sum_{i>q} \alpha_i C_i D_i,$$

где $C_1, \dots, C_q$ содержат одни и те же переменные, имеют наименьшую степень и хотя бы один из коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ отличен от нуля. Специализируя переменные x_i , входящие в $D_1, \dots, D_q$, в единицу, а переменные x_i , входящие в $C_1, \dots, C_q$, в $\bar{x}_i$, получаем при этом значение многочлена f на алгебре $R_N(I)$, равное

$$\alpha_1 \bar{C}_1 + \cdots + \alpha_q \bar{C}_q.$$

В силу линейной независимости системы $\{\bar{C}_i\}$ этот элемент отличен от нуля в $R_N(I)$. Следовательно,

$$\text{Var}(R_N(I)) = \mathfrak{M}.$$

Теорема доказана.

3.3. Многообразие $\mathfrak{M}$, заданное тождеством $[x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] = 0$. Согласно замечанию, сделанному в конце §1, для такого многообразия $\mu(\mathfrak{M}) = \rho(\mathfrak{M}) = n$.

Подытожим полученные для нематричных многообразий результаты.

Пусть $\mathfrak{M}$ – нематричное унитарно замкнутое многообразие, соответствующее системе S . Тогда

- 1) *если $S = \{[x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}]\}$, то $\mu(\mathfrak{M}) = \rho(\mathfrak{M}) = n$;*
- 2) *если $S = \{[x_1, [x_2, x_3]], st_{2n}\}$, где st_{2n} – стандартный многочлен степени $2n$ (здесь, как и выше, $n \geq 2$), то $\mu(\mathfrak{M}) = n$, $\rho(\mathfrak{M}) = 2n - 1$;*
- 3) *если S содержит st_{2n} и полилинейный многочлен вида $t_1 \cdots t_m$, где t_i – длинный коммутатор длины $l_i \geq 3$, то*

$$\mu(\mathfrak{M}) \leq n((l_1 - 2) + \cdots + (l_m - 2)),$$

при $m = 1$

$$\rho(\mathfrak{M}) \leq (2n + 1)(l_1 - 2) - 2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Свойства 1) и 2) устанавливают следующий, на первый взгляд удивительный факт. Показатель представимости большего многообразия, заданного тождеством

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] = 0,$$

равен n , а показатель представимости меньшего многообразия, заданного тождествами

$$[[x_1, x_2], x_3] = 0, \quad st_{2n} = 0,$$

равен $2n - 1$.

§ 4. Оценка кратности многообразий со специальными носителями

В этом параграфе мы рассмотрим представимые унитарно замкнутые многообразия $\mathfrak{M}$ сложности r , порожденные некоторыми специальными видами относительно свободных модельных алгебр (см. § 2). Основное поле по-прежнему предполагается нулевой характеристики. Пусть I — T -идеал тождеств многообразия $\mathfrak{M}$, порожденного алгеброй $\mathcal{M}(S)$. Алгебра $\mathcal{M}(S)$, очевидно, может быть представлена в виде

$$\mathcal{M}(S) = \mathcal{M}_1(S) \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_r(S) + \mathcal{N}(S),$$

где $\mathcal{M}_t(S) = \mathcal{M}_t / \mathcal{M}_t(S)^T$, $\mathcal{N}(S) = \mathcal{N} / \mathcal{N} \cap (S)^T$.

Алгебры $\mathcal{M}_t(S)$ являются, как нетрудно видеть, относительноными алгебрами k_t -многочленов, с T -идеалами обобщенных тождеств $I_t = \mathcal{M}_t \cap (S)^T$.

Вообще если нужно выделить на алгебре $\mathcal{M}_t(S)$ тождество $f = 0$, не затрагивая при этом остальные $\mathcal{M}_i(S)$, то достаточно включить в T -идеал $(S)^T$ обобщенный многочлен $\varepsilon_t f \varepsilon_t$.

Целью настоящего параграфа является оценка кратности многообразия, порожденного алгеброй $\mathcal{M}(S)$, в некоторых специальных случаях. Для этого сначала будет дана оценка кратности многообразий, порожденных отдельными компонентами $\mathcal{M}_t(S)$, при некоторых условиях на идеалы I_t , а затем с помощью некоторого условия, выражаемого на языке обобщенных тождеств, мы “склеим” полученные оценки.

Предположим, что T -идеал I содержит многочлен Капелли $c_{r^2+n_1}$, где $1 \leq n_1 \leq 3r^2$, т.е. этот многочлен *выделяет* сложность r . Тогда, как показано в [17], на *главной* компоненте $\mathcal{M}_r(S)$ имеет место оценка (линейная по параметру n_1)

$$\mu(\text{Var}(\mathcal{M}_r(S))) \leq \frac{\omega}{3} n_1 + 1,$$

где ω — некоторая константа, не зависящая от фигурирующих здесь объектов.

На остальных компонентах ситуация более сложная. Не уменьшая общности, можно предполагать, что T -идеал I содержит некоторый стандартный многочлен st_{2n} (в силу унитарной замкнутости его легко получить из тождества Капелли).

Дадим теперь оценки кратности в некоторых случаях для обобщенных k_t -многочленов, рассмотренных в § 2, т.е. по сути дела рассмотрим многообразия, порожденные компонентами $\mathcal{M}_t(S)$. Затем рассмотрим и более общую ситуацию. При этом будут весьма полезны оценки для нематричных многообразий, сделанные в § 3.

4.1. Гиперцентральные многообразия. Как уже отмечалось, алгебра $\mathcal{M}_t(S)$ рассматривается как алгебра *относительных обобщенных многочленов* $F^* / (S)^T$, где $F^* = k_t * k \langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$, а $(S)^T$ — T -идеал в алгебре F^* .

Назовем *гиперцентральным многообразием* такое t -замкнутое многообразие

$$\mathfrak{M} = \text{Var}(\mathcal{M}_t(S)),$$

что S содержит некоторый стандартный многочлен st_{2n} и обобщенный полилинейный многочлен вида $L_1^{(1,1)} \cdots L_m^{(1,1)}$, являющийся централизацией (см. § 2) произведения длинных коммутаторов $L_1 \cdots L_{m_t}$ длин $l_{t1}, \dots, l_{tm_t}$ соответственно.

ТЕОРЕМА 4.1. *Для гиперцентрального t -замкнутого многообразия $\mathfrak{M}$ с указанными выше параметрами имеет место соотношение*

$$\mu(\mathfrak{M}) \leq n((l_{t1} - 2) + \dots + (l_{tm_t} - 2)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{M}_1$ — нематричное многообразие, на котором выполнены тождества

$$L_1 \cdots L_{m_t} = 0, \quad st_{2n} = 0.$$

Тогда по теореме 3.2

$$\mu(\mathfrak{M}_1) \leq n((l_{t1} - 2) + \dots + (l_{m_t} - 2)).$$

Обозначая правую часть этого неравенства через p , получаем, что произведение p коммутаторов обращается в нуль на многообразии $\mathfrak{M}_1$. Переходя к централизациям и используя предложение 2.3 и теорему Литтлвуда (факт II) из § 2), получаем, что T -идеал обобщенных многочленов $(M_t^*)^p$ обращается в нуль на алгебре $\mathcal{M}_t(S)$. Следовательно, T -идеал M_t^P обращается в нуль на многообразии $\mathfrak{M}$.

Теорема доказана.

4.2. Ступенчатые многообразия. Мы видели, что гиперцентральные многообразия задаются обобщенными тождествами на алгебре $\mathcal{M}_t(S)$, с помощью которых получается оценка кратности. Однако аналогичного эффекта можно достичь и с помощью обычных тождеств.

Пусть $[x_1, \dots, x_l]$ — правонормированный коммутатор длины $l \geq 3$. Рассмотрим полилинейный многочлен (*ступенчатый многочлен длины l*)

$$P = [y_1 st_{2t} y_2, x_3, \dots, x_l]$$

из свободной алгебры F , в котором две переменные для удобства обозначены другими буквами. Как отмечалось в § 2, стандартный многочлен st_{2t} в алгебре F^* порождает T -идеал, содержащий обобщенный многочлен $[\psi_{ij}(x_1), x_2]$.

Естественно *ступенчатым многообразием* называть многообразие, в котором система S содержит полилинейное произведение $P_1 \cdots P_{m_t}$ некоторых ступенчатых многочленов длин $l_{t1}, \dots, l_{tm_t}$.

Из вышесказанного следует, что из произведения $P_1 \cdots P_{m_t}$ “в обобщенном смысле” следует произведение $L_1^{(1,1)} \cdots L_{m_t}^{(1,1)}$, т.е. имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Всякое ступенчатое многообразие является гиперцентральным.*

Отсюда и из теоремы 4.1 получаем

СЛЕДСТВИЕ. *Если $\mathfrak{M}$ — ступенчатое многообразие, то*

$$\mu(\mathfrak{M}) \leq n((l_{t1} - 2) + \dots + (l_{tm_t} - 2)).$$

4.3. Ограниченные относительно свободные модельные алгебры.

Вернемся к задаче, поставленной в начале параграфа. Для того чтобы оценить кратность многообразия, порожденного алгеброй $\mathcal{M}(S)$, нам придется сделать некоторые допущения о системе S . В частности, помимо обычных многочленов включить туда и некоторые обобщенные. Мы будем предполагать также, что S содержит многочлен Капелли c_n , где $n = r^2 + n_1$, $1 \leq n_1 \leq 3r^2$, который выделяет сложность r , т.е. сложность многообразия, заданного тождеством $c_n = 0$, равна r .

В такой ситуации в силу сказанного выше кратность многообразия, порожденного главной компонентой $\mathcal{M}_r$, оценивается известной линейной функцией.

Как уже отмечалось автором в предыдущих работах, было бы весьма интересно оценить функции $\mu(\mathfrak{M})$ и $\rho(\mathfrak{M})$ для унитарно замкнутого многообразия, порожденного тождеством $c_n = 0$. Пока эта задача не решена мы довольствуемся тем, что “приближаемся” к этому многообразию с помощью некоторых специальных многообразий $\text{Var}(\mathcal{M}(S))$, объединение которых дает все $\mathfrak{M}$.

Назовем алгебру $\mathcal{M}(S)$ *ограниченной типа* (n, r, d) , если

- 1) на алгебре $\mathcal{M}(S)$ выполнено тождество Капелли порядка $n = r^2 + n_1$, где $1 \leq n_1 \leq 3r^2$;
- 2) на алгебре $\mathcal{M}(S)$ выполнено стандартное тождество $st_{2n_2} = 0$ – минимальное стандартное тождество, унитарно следующее из $c_n = 0$;
- 3) компоненты $\mathcal{M}_1(S), \dots, \mathcal{M}_{r-1}(S)$ являются гиперцентральными (или ступенчатыми);
- 4) $(\mathcal{N}(S))^d = 0$, что, как нетрудно видеть, равносильно выполнению системы обобщенных тождеств

$$\gamma_1 x_1 \gamma_2 x_2 \dots \gamma_d x_d \gamma_{d+1} = 0,$$

где $\gamma_i \in \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\}$ (напомним, что ε_t – единица алгебры k_t , входящей в $K(r)$), причем $\gamma_i \neq \gamma_j$ для некоторых $i \neq j$.

С каждой ограниченной алгеброй связан набор числовых параметров

$$n_2((l_{t1} - 2) + \dots + (l_{tm_t} - 2)), \quad t = 1, \dots, r - 1,$$

и $(\omega/3)n_1 + 1$. Пусть M – наибольшее из этих чисел. Ясно, что при фиксации параметров l_{ij} число M как функция от n ограничено некоторой линейной функцией от n .

Итогом вышесказанного является

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие, порожденное ограниченной алгеброй. Тогда

$$\mu(\mathfrak{M}) \leq dM.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 4.2 показывает, что при фиксации параметров l_{ij} кратность $\mu(\mathfrak{M})$ ограничена функцией, линейной по n . Однако, если не ограничивать фигурирующие в оценке параметры, то они могут, как представляется, давать очень быстрый рост, так как оценка достаточно плотная. Поэтому кажется весьма интересным следующий вопрос: пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие, заданное тождеством $c_n = 0$, не является ли $\mu(\mathfrak{M})$ функцией от n , растущей быстрее любого многочлена?

§ 5. Связь с квазимногочленами

В этом параграфе мы установим некоторую связь между модельной алгеброй $R(S)$ и некоторой факторалгеброй алгебры квазимногочленов, которая по существу играет ту же роль носителя данного многообразия. Сначала сделаем некоторое отступление в сторону теории квазимногочленов. При этом здесь будет рассматриваться ситуация только в той общности, которая необходима для исследования показателя представимости.

Понятие алгебры квазимногочленов возникло в работах автора [3] и [5] как некоторый необходимый инструмент для доказательства конечной базированности T -пространств и представимости. Однако это понятие, на наш взгляд, имеет и самостоятельный интерес.

Пусть $F^{(r)} \cong F/M_r$ – алгебра общих матриц, т.е. относительно свободная алгебра многообразия, порожденного алгеброй k_r ,

$$F^{(r)} = k\langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots \rangle,$$

где $\bar{x}_i$ – образы переменных x_i свободной алгебры F . Рассмотрим свободное произведение, называемое *алгеброй квазимногочленов над алгеброй $F^{(r)}$* ,

$$Q(F^{(r)}) = F^{(r)} * k\langle \theta_1, \dots, \theta_i, \dots \rangle,$$

где $k\langle \theta_1, \dots, \theta_i, \dots \rangle$ – свободная счетнопорожденная алгебра от переменных θ_i . В этой алгебре имеется идеал $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_i, \dots)$. Отметим, что в алгебру квазимногочленов естественным образом (в смысле, объясненном в [3], [5]) вкладывается свободная алгебра $F = k\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$. Это делается с помощью отождествления

$$x_i = \bar{x}_i + \theta_i.$$

Элементы алгебры $Q(F^{(r)})$ будем называть *квазимногочленами*. Квазимногочлен q назовем *n -полным относительно системы S из алгебры F* , если найдется такой многочлен f из S , что $q \equiv f \pmod{(\Theta^n)}$.

Следующий факт, доказанный в [3], будет использован в дальнейшем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Для любого натурального n имеет место равенство*

$$F \cap \Theta^n = M_r^n.$$

Возвращаемся к модельным алгебрам. Как и прежде, r – сложность представимого многообразия $\mathcal{M}$, заданного системой тождеств S , $R_n(S)$ – модельная алгебра этого многообразия. Пусть Ω – некоторое расширение поля k . Как уже отмечалось, T -идеал тождеств алгебры $R_n^\Omega(S)$ в алгебре ΩF имеет вид ΩI , где I – T -идеал тождеств алгебры $R_n(S)$. Другими словами, алгебры $R_n^\Omega(S)$ и $R_n(S)$ имеют, очевидно, один и тот же базис тождеств.

Пусть теперь

$$X = \left\{ x_i^{(j)} \mid i \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq j \leq n(1 + 2^2 + \dots + r^2) = n \frac{(2r+1)(r+1)r}{6} \right\}$$

– множество коммутирующих переменных и $\Omega = k(X)$ – поле рациональных функций от этих переменных. Представим алгебру $R_n(S)$ в виде

$$R_n(S) = L_n^k + (\tau_1, \dots, \tau_{n-1}),$$

где $(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ – идеал, порожденный элементами τ_i , являющимися образами элементов x_i при каноническом гомоморфизме. Тогда

$$R_n^\Omega(S) = L_n^\Omega + \Omega(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}).$$

Рассмотрим в алгебре $R_n^\Omega(S)$ элементы

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^N x_i^{(j)} e_j,$$

где $N = n(2r+1)(r+1)r/6$, $\{e_i\}$ – базис алгебры L_n^k , а также подалгебру этой алгебры вида $k\langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N, \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \rangle$.

Пусть $\Delta(S)$ – вербальный идеал алгебры $Q(F^{(r)})$, порожденный системой многочленов S . Положим

$$\Delta_n(S) = \Delta(S) + \Theta^n$$

и рассмотрим факторалгебру

$$Q^{(n)}(S) = Q(F^{(n)})/\Delta_n(S).$$

Ясно, что существует сюръективный гомоморфизм

$$Q^{(n)}(S) \rightarrow k\langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N, \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \rangle.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\Omega k\langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N, \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \rangle = R_n^\Omega(S),$$

получаем, что идеал тождеств алгебры $Q^{(n)}(S)$ порожден в алгебре F системой S . Это дает следующую характеристику натуральных чисел, не меньших показателя представимости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Равенство

$$\mathfrak{M} = \text{Var}(Q^{(n)}(S))$$

равносильно следующему утверждению: $n \geq \mu(\mathfrak{M})$ и для любого многочлена f из алгебры F из включения $f \in \Delta_n(S)$ следует, что f является n -полным относительно $(S)^T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что имеется равенство указанных многообразий. Тогда, очевидно, $n \geq \mu(\mathfrak{M})$ и из принадлежности многочлена f идеалу $\Delta_n(S)$ следует, что $f = 0$ – тождество данного многообразия, т.е. $f \in (S)^T$ и, в частности, f – n -полный.

Для доказательства совпадения многообразий, очевидно, достаточно доказать, что всякий многочлен f , обращающийся в нуль на $Q^{(n)}(S)$, лежит в $(S)^T$. В самом деле, из $f \in \Delta_n(S)$ следует по условию, что f – n -полный относительно $(S)^T$. Следовательно, по определению найдется такой многочлен g из $(S)^T$, что $f - g$ лежит в Θ^n . Согласно предложению 5.1 $f - g$ лежит в M_r^n . Следовательно, f лежит в $g + M_r^n$. Но по условию $M_r^n \subset (S)^T$. Таким образом, $f \in (S)^T$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ. Если $n \geq \mu(\mathfrak{M})$, то для того чтобы проверить, что алгебра $Q^{(n)}(S)$ порождает $\mathfrak{M}$, достаточно показать, что любой многочлен f из алгебры F , лежащий в идеале $\Delta_n(S)$, является n -полным относительно идеала $(S)^T$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Алгебры $Q^{(n)}(S)$ дают еще один тип носителей, близких к конечномерным, порождающих представимые многообразия. Возможно, их описание с помощью предложения 5.2 будет в некоторых случаях более удобным, чем описание модельных алгебр.

Список литературы

1. Brown A. The radical in a finitely generated PI-algebra // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 7. №2. P. 385–386.
2. Кемер А. Р. Конечная базисуемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. 1987. Т. 26. №5. С. 597–641.
3. Гришин А. В. О конечной базисуемости систем обобщенных многочленов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. №5. С. 899–927.
4. Гришин А. В. О конечной базисуемости T -пространств обобщенных многочленов и представимости // УМН. 2001. Т. 54. №4. С. 133–134.
5. Гришин А. В. О конечной базисуемости абстрактных T -пространств // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. №3. С. 669–700.
6. Grishin A. V. On the finite basis property of T -spaces over a field of finite characteristic // Proceedings of the Moscow–Tainan algebraic workshop.. Berlin: Walter de Gruyter & Co, 1994. P. 225–227.
7. Щиголов В. В. Конечная базисуемость T -пространств над полем нулевой характеристики // Изв. АН. Сер. матем. 2001. Т. 65. №5. С. 191–224.
8. Гришин А. В. Примеры не конечной базисуемости T -пространств и T -идеалов в характеристике 2 // Фундамент. и прикл. матем. 1999. Т. 5. №1. С. 101–118.
9. Белов А. Я. О нешпехтовых многообразиях // Фундамент. и прикл. матем. 1999. Т. 5. №1. С. 47–66.
10. Щиголов В. В. Примеры бесконечно базисуемых T -идеалов // Фундамент. и прикл. матем. 1999. Т. 5. №1. С. 307–312.
11. Щиголов В. В. Примеры бесконечно базисуемых T -пространств // Матем. сб. 2000. Т. 191. №3. С. 143–160.
12. Grishin A. V. On non-spechtianness of the variety of associative rings which satisfy the identity $x^{32} = 0$ // Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 2000. V. 6. P. 50–51.
13. Гришин А. В. Многообразие ассоциативных колец не шпехтово // УМН. 1999. Т. 54. №5. С. 193–194.
14. Кемер А. Р. Тождества конечно порожденных алгебр над бесконечным полем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. №4. С. 726–753.

15. *Размыслов Ю. П.* О конечной базирруемости тождеств полной матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль // Алгебра и логика. 1973. Т. 12. № 1. С. 83–113.
16. *Охитин С. В.* Центральные полиномы алгебры матриц второго порядка // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1988. № 4. Р. 61–63.
17. *Lewin J.* A matrix representations associative algebras. I, II // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 188. № 2. Р. 293–317.
18. *Гришин А. В.* Применение обобщенных многочленов к оценке кратности некоторых многообразий ассоциативных алгебр // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 3. С. 25–36.
19. *Гришин А. В.* О показателе представимости многообразия ассоциативных алгебр // УМН. 2002. Т. 57. № 4. С. 169–170.
20. *Littlewood D. E.* Identical relations, satisfied in an algebra // Proc. London Math. Soc. 1931. V. 32. Р. 312–320.
21. *Латышев В. Н.* О ковенной порожденности T -идеала с элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ // Сиб. матем. журн. 1965. Т. VI. № 6. С. 1432–1434.

Московский педагогический
государственный университет

Поступила в редакцию
09.04.2003