Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Я. Будылин, Адельное построение класса Черна, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 11, 75–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7902>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 16:57:21

УДК 512.723+512.734+512.736

Р. Я. Будылин

Адельное построение класса Черна

Приводится формула, выражающая второй класс Черна $c_2(E)$ в терминах тривиализаций двумерного векторного расслоения E в схемных точках поверхности X над полем. Для этого по тривиализациям строится коцикл в адельном комплексе, связанном с пучком $K_2(\mathcal{O}_X)$. Кроме того доказано, что формула Севери для второго класса Черна получается как частный случай формулы, построенной в этой работе.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: класс Черна, адельный комплекс.

§ 1. Введение

В статье А. Н. Паршина [1] в 1983 г. появилась формула для класса Черна векторного расслоения на алгебраическом многообразии в терминах матриц перехода между тривиализациями расслоения в схемных точках многообразия.

Для произвольных обратимых матриц $X_1, \dots, X_m$ над коммутативной $\mathbb{Q}$ -алгеброй A можно рассмотреть форму

$$p_m(X_1, \dots, X_m) := \operatorname{tr}(X_1^{-1} \cdots X_m^{-1} dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_m) \in \Omega_A^m.$$

Под внешним произведением матриц $X = (a_{ij})$ и $Y = (b_{ij})$ с коэффициентами в $\Omega^*(A)$ здесь подразумевается матрица $X \wedge Y := (\sum_j a_{ij} \wedge b_{jl})$. Напомним формулу Ньютона, выражающую элементарные симметрические функции σ_m через суммы степеней s_i :

$$\sigma_m = \frac{1}{m!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m-1} & s_{m-2} & s_{m-3} & \dots & m-1 \\ s_m & s_{m-1} & s_{m-2} & \dots & s_1 \end{vmatrix}.$$

Положим $w_A^m(X_1, \dots, X_m)$ равным значению элементарной симметрической функции σ_m после замены суммы степеней s_i в формуле Ньютона на $p_i(X_1, \dots, X_i)$, а умножения – на внешнее произведение. Пусть X – произвольная нётерова неприводимая схема размерности n конечного типа над полем нулевой характеристики. Пусть E – векторное расслоение на X , пучок $\mathcal{E}$ – локально свободный пучок $\mathcal{O}_X$ -модулей, определяемый расслоением E . Для каждой схемной точки $\eta \in X$ рассмотрим пучковый слой $\mathcal{E}_\eta$. Пусть b_η – базис

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00145а), Программы Президента РФ поддержки молодых ученых (грант № МК-4881.2011.1), Правительства РФ (грант № 1111.G34.31.0023) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-4713.2010.1).

свободного $\mathcal{O}_\eta$ -модуля $\mathcal{E}_\eta$. Набор $b := (b_\eta)_{\eta \in X}$ называется *адельной тривиализацией пучка* E . Мы можем связать с b набор матриц перехода $g = (g_{\eta_0 \eta_1})$, $g_{\eta_0 \eta_1} \in \mathrm{GL}(\mathcal{O}_{\eta_0})$, следующим образом:

$$b_{\eta_1} g_{\eta_0 \eta_1} = b_{\eta_0}, \quad \text{где } \eta_1 \in \bar{\eta}_0.$$

Положим

$$(w_m)_{\eta_0, \dots, \eta_m} := w_{\mathcal{O}_{\eta_0}}^m(g_{\eta_0 \eta_1}, \dots, g_{\eta_{m-1} \eta_m}).$$

Тогда для гладкого многообразия X старшее число Черна $C_{n,X}(E)$ по формуле Паршина равно

$$\sum_{\eta_0, \dots, \eta_n} \mathrm{res}_{\eta_0, \dots, \eta_n}((w_n)_{\eta_0, \dots, \eta_n}).$$

Здесь $\mathrm{res}_{\eta_0, \dots, \eta_n}$ – многомерный вычет, введенный в работах А. Н. Паршина [2], [3].

Если X – гладкое многообразие над полем конечной характеристики $p > \dim(X)$, то эта формула дает $C_{n,X}$ по модулю p . Естественно возникает задача построения такой формулы в случае многообразия над полем конечной характеристики, которая бы давала точное значение $C_{n,X}$ (обсуждение см. в [1; § 4, замечания 2 и 3]). В этом случае вместо групп $H^m(X, \Omega_X^m)$ целесообразно использовать классы Черна со значениями в группах $H^m(X, K_m(\mathcal{O}_X))$, где $K_m(\mathcal{O}_X)$ – пучок, связанный с предпучком K -функторов Квиллена от $\mathcal{O}_X$.

В статье Блоха [4] 1974 г. класс Черна $c_{2,X}(E)$ для расслоения E с тривиальным детерминантом строился с помощью применения комплекса Чеха к точной тройке пучков

$$1 \rightarrow K_2(\mathcal{O}_X) \rightarrow \mathrm{St}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \mathrm{SL}(\mathcal{O}_X) \rightarrow 1.$$

Он получается как образ кограничного отображения из $H^1(X, \mathrm{SL}(\mathcal{O}_X))$ в $H^2(X, K_2(\mathcal{O}_X))$. В нашей статье подход Блоха применяется для адельных комплексов. В итоге получается формула для класса Черна расслоения по тривиализациям в схемных точках.

В статье Делиня [5] строится обобщение точной тройки

$$1 \rightarrow K_2(A) \rightarrow \mathrm{St}(A) \rightarrow E(A) \rightarrow 1$$

для $\mathrm{GE}(A)$ вместо $E(A)$, где $\mathrm{GE}(A)$ – подгруппа матриц, порожденных элементарными и диагональными. Эта конструкция применяется, чтобы обобщить подход Блоха на любые расслоения.

В § 6 будет показано, что формула Севери для второго класса Черна двумерного расслоения на поверхности является частным случаем полученной здесь формулы при конкретном выборе тривиализаций.

Автор благодарен А. Н. Паршину за постановку задачи и ценные обсуждения. Также я выражаю благодарность С. О. Горчинскому за многочисленные обсуждения. Ему я обязан идеей применить подход Блоха к адельному комплексу.

§ 2. Адельный комплекс

Напомним определение косимплициальной группы. Симплициальная категория Δ – это категория, объектами в которой являются отрезки $[0, n]$ натурального ряда, а морфизмами из $[0, n]$ в $[0, m]$ – неубывающие отображения первого отрезка во второй. Определим в категории Δ морфизм кограницы $\partial_i^n: [0, n] \rightarrow [0, n+1]$ как единственный монотонный морфизм из $[0, n]$ в $[0, n+1]$, в образе которого не содержится $i \in [0, n+1]$, и морфизм ковырождения $s_i^n: [0, n+1] \rightarrow [0, n]$, для которого $s_i^n(j) = j$ при $j \leq i$ и $j-1$ при $j > i$. Все морфизмы в категории Δ являются некоторыми композициями морфизмов кограницы и ковырождения. Косимплициальный (симплициальный) объект X^* некоторой категории C – это ковариантный (контравариантный) функтор из категории Δ в категорию C . Для задания косимплициального объекта достаточно задать образ функтора на объектах и образы морфизмов кограницы и ковырождения.

Пусть G^* – косимплициальная группа. Пусть G^i – группа, которую G^* сопоставляет отрезку $[0, n]$. Гомоморфизмы, которые функтор G^* сопоставляет морфизмам кограницы и ковырождения, для простоты будем обозначать также через ∂_i^n и s_i^n . Определим нулевые и первые когомологии косимплициальной группы G^* . Обозначим через d^0 отображение

$$X^0 \xrightarrow{\partial_1^0(\partial_0^1)^{-1}} X^1.$$

Это отображение не является гомоморфизмом для неабелева X^* . Пусть $H^0(X^*)$ – подмножество X^0 , которое является прообразом единицы при отображении d^0 ; оно является группой. Обозначим через d^1 отображение

$$X^1 \xrightarrow{\partial_2^1\partial_0^1(\partial_1^1)^{-1}} X^2.$$

Пусть C^1 – прообраз единицы при отображении d^1 . Множество C^1 инвариантно относительно действия X^0 , при котором $x \in X^0$ переводит $y \in X^1$ в $\partial_1^1(x)y(\partial_0^1(x))^{-1}$. Определим $H^1(X^*)$ как фактормножество C^1 по этому действию. Заметим, что множества $H^i(X^*)$ являются множествами с отмеченными точками (отмечен образ единицы при факторизации). Если есть морфизм косимплициальных групп $X \rightarrow Y$, то отображение $X^1 \rightarrow Y^1$ эквивариантно относительно гомоморфизма $X^0 \rightarrow Y^0$.

Рассмотрим случай функтора в абелевы группы A^* . Тогда можно для всех n определить $d^n: A^n \rightarrow A^{n+1}$ как $\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_i^n$ и $H^n(A^*)$ как факторгруппу $\text{Ker}(d^n)/\text{Im}(d^{n-1})$. Отображения d^n являются гомоморфизмами, а множества $H^l(A^*)$ являются группами. Положим $A_{\text{red}}^n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \text{Ker}(s_i^n)$. Можно показать, что d^n переводит элементы из A_{red}^n в A_{red}^{n+1} и что комплекс $A_{\text{red}}^\bullet$ квазиизоморфен комплексу $A^\bullet$.

Если есть симплициальное множество $X_\bullet$ и когомологическая система коэффициентов L на нем, то им можно сопоставить косимплициальную группу L^* . А именно положим $L^n = \bigoplus_{x \in X_n} L(x)$, и пусть p_x – проекция на слагаемое $L(x)$. Пусть $f: [0, n] \rightarrow [0, m]$ – морфизм в Δ и $X(f)$ – соответствующий морфизм из X_m в X_n . Определим $L(f)$ так, чтобы $p_x \circ L(f)$ равнялся $L(X(f), x) \circ p_{f(x)}$.

Введем определение аделей. Пусть $\mathcal{O}_X$ – структурный пучок поверхности X , кольцо $\mathcal{O}_\eta$ – локальное кольцо схемной точки η . Пусть x – замкнутая точка на X , C – неприводимая кривая, ν_C – дискретное нормирование, определяемое

кривой C . Функция t_C такая, что $\nu_C(t_C) = 1$, называется локальным параметром кривой.

Рассмотрим группу $\prod_{x \in C} k(X)$, где произведение берется по всем флагам $x \in C$. Через $\mathbb{A}_{012}$ обозначим подгруппу ее элементов, удовлетворяющих *адельным условиям* (определение взято из [1]):

- 1) $\nu_C(a_{x,C}) \geq \nu_C(D)$ для некоторого дивизора D ;
- 2) зафиксируем неприводимую кривую C и ее локальный параметр t_C ; существует $l \in \mathbb{Z}$ такой, что для любого $n \in \mathbb{Z}$ функция $a_{x,C}$ принадлежит подгруппе $t_C^l \mathcal{O}_x + t_C^n \mathcal{O}_C$ в $k(X)$ для почти всех $x \in C$.

Ясно, что условие 2) не зависит от выбора локального параметра. Группы $k(X)$, $\prod_C \mathcal{O}_C$, $\prod_x \mathcal{O}_x$, $\prod_C k(X)$, $\prod_x k(X)$, $\prod_{x,C} \mathcal{O}_C$ можно естественно вложить в группу $\prod_{x,C} k(X)$, пользуясь вложениями $\mathcal{O}_x \subset k(X)$ и $\mathcal{O}_C \subset k(X)$.

Для упорядоченного набора $(i_0, \dots, i_n)$, $i_k \in 0, 1, 2$, определим $A_{i_0 \dots i_n} := \prod_{\eta_0 \dots \eta_n} \mathcal{O}_{\eta_0} \cap \mathbb{A}_{012}$, где η_j – схемная точка коразмерности i_j и $\eta_{j+1} \in \bar{\eta}_j$, а $\mathcal{O}_{\eta_0}$ – локальное кольцо точки η_0 . Например,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_0 &:= k(X) \cap \mathbb{A}_{012}, & \mathbb{A}_1 &:= \prod_C \mathcal{O}_C \cap \mathbb{A}_{012}, & \mathbb{A}_2 &:= \prod_x \mathcal{O}_x \cap \mathbb{A}_{012}, \\ \mathbb{A}_{01} &:= \prod_C k(X) \cap \mathbb{A}_{012}, & \mathbb{A}_{02} &:= \prod_x k(X) \cap \mathbb{A}_{012}, & \mathbb{A}_{12} &:= \prod_{x,C} \mathcal{O}_C \cap \mathbb{A}_{012}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. *Выполняются равенства $\mathbb{A}_0 = k(X)$, $\mathbb{A}_1 = \prod_C \mathcal{O}_C$, $\mathbb{A}_2 = \prod_x \mathcal{O}_x$. Группа $\mathbb{A}_{01}$ состоит из таких $(a_C) \in \prod_C k(X)$, что для почти всех C компонента a_C принадлежит $\mathcal{O}_C$. Группа $\mathbb{A}_{12}$ состоит из элементов группы $\prod_{x,C} \mathcal{O}_C$, для которых выполнено адельное условие 2). Для того чтобы элемент группы $\prod_x \mathcal{O}_x$ лежал в $\mathbb{A}_{02}$, достаточно выполнения только адельного условия 1), причем его можно переформулировать таким образом: существует дивизор D такой, что $\nu_C(a_x) \leq \nu_C(D)$ для любых точки x и кривой C .*

Заметим, что группы $\mathbb{A}_{i_0 i_1 \dots i_n}$ являются кольцами и естественные вложения $\mathbb{A}_{i_0 \dots \widehat{i_k} \dots i_n} \subset \mathbb{A}_{i_0 \dots i_n}$ являются гомоморфизмами колец. Поэтому несложно понять, что мы получаем когомологическую систему коэффициентов на симплициальном множестве, соответствующем двумерному симплексу. Как было объяснено выше, когомологическая система коэффициентов дает косимплициальную группу $\mathbb{A}^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. С косимплициальной группой аделей связан редуцированный комплекс групп $\mathbb{A}_{\text{red}}^\bullet$. Назовем его *рациональным адельным комплексом пучка $\mathcal{O}_X$* .

Этот комплекс групп можно выписать явно следующим образом:

$$\mathbb{A}_0 \oplus \mathbb{A}_1 \oplus \mathbb{A}_2 \rightarrow \mathbb{A}_{01} \oplus \mathbb{A}_{02} \oplus \mathbb{A}_{12} \rightarrow \mathbb{A}_{012}.$$

Дифференциалы в этом комплексе задаются по формулам

$$d^0(a_0, a_1, a_2) := (a_1 - a_0, a_2 - a_0, a_2 - a_1), \quad d^1(a_{01}, a_{02}, a_{12}) := a_{01} - a_{02} + a_{12}.$$

Пусть G – произвольный функтор из категории коммутативных колец в группы, например $G = \text{GL}, \text{SL}, \text{K}_2$. Рассмотрим косимплициальную группу $G(\mathbb{A}^*)$ аделей функтора G и комплекс групп $G(\mathbb{A}^\bullet)$. Элементы множества

$(G_*d^1)^{-1}(1) \subset G(\mathbb{A}^1)$ назовем коциклами. Если функтор G принимает значения в абелевых группах, то G_*d^i – гомоморфизмы и, таким образом, определен *рациональный аделльный комплекс функтора G* с дифференциалами G_*d^i . Для произвольного G отображения G_*d^i не являются гомоморфизмами, но группа $G(\mathbb{A}^0)$ действует на $G(\mathbb{A}^1)$, как было объяснено выше. Если есть морфизм функторов $G \rightarrow H$, то возникает морфизм косимплициальных групп $G(\mathbb{A}) \rightarrow H(\mathbb{A})$.

ПРИМЕР. Пусть X – поверхность, $\mathcal{E}$ – произвольный локально свободный пучок ранга 2 на ней. Пусть $\{b_{\eta_i}\}$ – строка базисных векторов пучкового слоя $\mathcal{E}_{\eta_i}$ в схемной точке η_i коразмерности i . Для любых $\eta_i \in \overline{\eta_j}$ пусть $g_{\eta_j\eta_i}$ – матрица перехода между базисами b_{η_i} и b_{η_j} , т.е. $b_{\eta_i} = b_{\eta_j}g_{\eta_j\eta_i}$. Тогда для любой тройки точек η_0, η_1, η_2 такой, что $\eta_2 \in \overline{\eta_1}, \eta_1 \in \overline{\eta_0}$, имеем

$$b_{\eta_0} = b_{\eta_1}g_{\eta_0\eta_1} = b_{\eta_2}g_{\eta_1\eta_2}g_{\eta_0\eta_1} = b_{\eta_2}g_{\eta_0\eta_2}.$$

Следовательно, $g_{\eta_0\eta_2} = g_{\eta_1\eta_2}g_{\eta_0\eta_1}$. Значит,

$$(g_{\eta_0\eta_1}, g_{\eta_1\eta_2}, g_{\eta_0\eta_2})_{\eta_2 \in \overline{\eta_1}, \eta_1 \in \overline{\eta_0}} \in \mathbb{A}(\mathrm{GL})^1$$

– коцикл. Тогда если мы меняем тривиализацию, т.е. $b'_{\eta_i} = b_{\eta_i}g_{\eta_i}$, то

$$b'_{\eta_i} = b_{\eta_i}g_{\eta_i} = b_{\eta_j}g_{\eta_i\eta_j}g_{\eta_i} = b'_{\eta_j}g_{\eta_j}^{-1}g_{\eta_i\eta_j}g_{\eta_i}^{-1}.$$

Заметим, что $g_{ij} = (g_{\eta_i\eta_j}) \in \mathrm{GL}(\mathbb{A}^1)$ и $g_i = (b_{\eta_i}) \in \mathrm{GL}(\mathbb{A}^0)$. После смены тривиализации набор матриц перехода меняется в соответствии с определенным выше действием $\mathrm{GL}(\mathbb{A}^0)$ на $\mathrm{GL}(\mathbb{A}^1)$:

$$(g_0, g_1, g_2)((g_{01}, g_{12}, g_{02})) := (g_1^{-1}g_{01}g_0, g_2^{-1}g_{12}g_1, g_2^{-1}g_{02}g_0).$$

Поэтому векторному расслоению можно сопоставить элемент $H^1(\mathrm{GL}(\mathbb{A}^\bullet))$. В статье А. Н. Паршина [6] доказано, что таким образом мы получаем биекцию между множеством векторных расслоений с точностью до изоморфизма и множеством $H^1(\mathrm{GL}(\mathbb{A}^\bullet))$.

Нам будет полезна следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть дано центральное расширение косимплициальных групп

$$1 \rightarrow A^* \xrightarrow{f_1} B^* \xrightarrow{f_2} C^* \rightarrow 1,$$

т.е. заданы естественные преобразования функторов

$$f_1: A^* \rightarrow B^*, \quad f_2: B^* \rightarrow C^*$$

такие, что для всех n имеется центральное расширение групп

$$1 \rightarrow A^n \xrightarrow{f_1^n} B^n \xrightarrow{f_2^n} C^n \rightarrow 1.$$

Тогда имеется длинная точная последовательность когомологий (точная последовательность множеств с отмеченными точками)

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow H^0(A^*) &\rightarrow H^0(B^*) \rightarrow H^0(C^*) \xrightarrow{\partial^0} H^1(A^*) \\ &\rightarrow H^1(B^*) \rightarrow H^1(C^*) \xrightarrow{\partial^1} H^2(A^*). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Схема доказательства аналогична доказательству из [7; гл. 2, § 5, пример 43]. Имеем следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & A^2 & \xrightarrow{f_1^2} & B^2 & \xrightarrow{f_2^2} & C^2 \longrightarrow 1 \\
 & & \uparrow d^1 & & \uparrow d^1 & & \uparrow d^1 \\
 1 & \longrightarrow & A^1 & \xrightarrow{f_1^1} & B^1 & \xrightarrow{f_2^1} & C^1 \longrightarrow 1 \\
 & & \uparrow d^0 & & \uparrow d^0 & & \uparrow d^0 \\
 1 & \longrightarrow & A^0 & \xrightarrow{f_1^0} & B^0 & \xrightarrow{f_2^0} & C^0 \longrightarrow 1
 \end{array}$$

Отображения $H^i(A^i) \rightarrow H^i(B^i)$ и $H^i(B^i) \rightarrow H^i(C^i)$ определяются естественным образом. Граничные гомоморфизмы определяются так же, как в абелевом случае. Пусть $x \in H^i(C^*)$; возьмем элемент $x' \in C^i$, принадлежащий коомологическому классу x . Пусть $s(x') \in B^i$ – прообраз x' при отображении f_2^i . Тогда $d^i(s(x'))$ принадлежит $A^i \subset B^i$. Класс $d^i(s(x'))$ в $H^{i+1}(A^*)$ и есть образ граничного гомоморфизма на элементе x .

При замене $s(x')$ на другой прообраз элемента x , т.е. на элемент $s(x')l$, $l \in A^i$, в силу центральности A^{i+1} имеем равенство $d^i(s(x')l) = d^i(s(x'))d^i(l)$. Таким образом, результат коомологичен исходному.

Заменяем $x' \in C^1$ на коомологичный ему элемент $x_1 = f_{0,C}(y)x(f_{1,C}(y))^{-1}$, $y \in C^0$. Пусть $s(y) \in B^0$ – прообраз y при отображении f_2^0 . Тогда $x_2 = f_{0,B}(s(y))s(x')(f_{1,B}(s(y)))^{-1}$ – прообраз x_1 при отображении f_2^1 . Определим $f'_{i,B}: B^0 \rightarrow B^2$ как композицию $f_{ij,B} \circ f_{0,B}$ или $f_{ji,B} \circ f_{1,B}$. Тогда имеем равенство

$$\begin{aligned}
 d_{1,B}(x_2) &= f'_{0,B}(s(y))f_{01,B}(s(x')) \\
 &\quad \times (f'_{1,B}(s(y)))^{-1} f'_{1,B}(s(y))f_{12,B}(s(x'))(f'_{2,B}(s(y)))^{-1} \\
 &\quad \times f'_{2,B}(s(y))(f_{02,B}(s(x')))^{-1} (f'_{0,B}(s(y)))^{-1}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Тем самым, доказано, что граничный гомоморфизм корректно определен.

Доказательство точности полученной последовательности копирует доказательство точности последовательности коомологий тройки абелевых групп. Нужно лишь использовать то, что A^i – центральная подгруппа в B^i .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе С. Горчинского [8] описана адельная резольвента для произвольных пучков абелевых групп. Но комплекс $K_2(A^\bullet)$ не совпадает с адельным комплексом для пучка K_2 , построенным в настоящей работе.

§ 3. Центральное расширение $E(R)$ и его продолжение до $GE(R)$

Пусть R – коммутативное кольцо. Следуя Милнору (см. [9]), определим группу $K_2(R)$. Затем, следуя определению Делиня группы $GL(2, F)^s$ (см. [5]), дадим определение $GSt(R)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Обозначим через $E(R)$ подгруппу в $SL(R)$, состоящую из матриц, которые можно представить в виде произведения элементарных. Определим $GE(R)$ как подгруппу в $GL(R)$, состоящую из матриц, раскладывающихся в произведение элементарных и диагональных.

Заметим, что матрицы из $\text{GE}(R)$ раскладываются в произведения элементарных матриц и матриц $\text{diag}(x, 1, \dots, 1, \dots)$. Для локального кольца A группа $\text{SL}(A)$ совпадает с $\text{E}(A)$, а $\text{GL}(A)$ совпадает с $\text{GE}(A)$, хотя можно привести примеры колец, для которых это не так.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Обозначим через $\text{St}(R)$ группу, порожденную образующими x_{ij}^α , $i \neq j$, $\alpha \in R$, с соотношениями

$$x_{ij}^\alpha x_{ij}^\beta = x_{ij}^{\alpha+\beta}, \quad (3.1)$$

$$[x_{ij}^\lambda, x_{jl}^\nu] = x_{il}^{\lambda\nu} \quad \text{при } i \neq l, \quad (3.2)$$

$$[x_{ij}^\lambda, x_{kl}^\nu] = 1 \quad \text{при } j \neq k, \quad i \neq l. \quad (3.3)$$

Канонический гомоморфизм

$$f: \text{St}(R) \rightarrow \text{E}(R)$$

определяется формулой $f(x_{ij}^\alpha) = e_{ij}^\alpha$, где e_{ij}^α – элементарная матрица с элементом α на месте (i, j) . Для каждой элементарной матрицы e_{ij}^α есть выделенный прообраз $q(e_{ij}^\alpha)$ в $\text{St}(R)$, равный x_{ij}^α . Это сечение с матриц e_{ij}^α однозначно продолжается на верхнетреугольные матрицы с единицами на диагонали таким образом, что q – изоморфизм группы верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали и подгруппы $\text{St}(R)$, порожденной элементами x_{ij}^α , $i < j$.

Для любого кольца R имеем каноническую точную последовательность

$$1 \rightarrow K_2(R) \rightarrow \text{St}(R) \xrightarrow{f} \text{E}(R) \rightarrow 1. \quad (3.4)$$

Определим центральное расширение группы $\text{GE}(R)$, которое после ограничения на $\text{E}(R)$ дает расширение (3.4). Группа $\text{GL}(R)$ есть полупрямое произведение $\text{SL}(R) \rtimes R^*$, т.е. задано отображение $p'_1: R^* \rightarrow \text{Aut}(\text{SL}(R))$, которое сопоставляет элементу a сопряжение с помощью диагональной матрицы $\text{diag}(a, 1, \dots)$. Автоморфизм $p'_1(a)$, действуя на элементарную матрицу, переводит ее в элементарную. Поэтому $\text{GE}(R) = \text{E}(R) \rtimes R^*$.

Определим действие R^* на $\text{St}(R)$, задав его на образующих $\text{St}(R)$ следующим образом:

$$a(x_{ij}^\alpha) = q(p'_1(a)(e_{ij}^\alpha)). \quad (3.5)$$

На остальные элементы действие распространим по мультипликативности.

ЛЕММА 3. Действие (3.5) корректно определено и является действием на группе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для проверки того, что для произвольного элемента $a \in R^*$ отображение $a(\cdot)$ корректно определено и является гомоморфизмом группы $\text{St}(R)$ в себя, достаточно показать, что применение элемента a сохраняет соотношения между образующими.

Проверим первое соотношение. Пусть $r, s \in R$ такие, что $p'_1(a)(e_{ij}^\alpha) = e_{ij}^r$, $p'_1(a)(e_{ij}^\beta) = e_{ij}^s$. Тогда

$$a(x_{ij}^\alpha) a(x_{ij}^\beta) = q(e_{ij}^r) q(e_{ij}^s) = q(e_{ij}^{r+s}) = q(p'_1(a)(e_{ij}^{\alpha+\beta})) = a(x_{ij}^{\alpha+\beta}).$$

Точно так же проверяются второе и третье соотношения. Пусть $r, t \in R$ такие, что $p'_1(a)(e_{ij}^\gamma) = e_{ij}^r$, $p'_1(a)(e_{kl}^\delta) = e_{kl}^t$. Тогда

$$[a(x_{ij}^\gamma), a(x_{kl}^\delta)] = [q(e_{ij}^r), q(e_{kl}^t)] = q([e_{ij}^r, e_{kl}^t]) = q(p'_1(a)([e_{ij}^\gamma, e_{kl}^\delta])).$$

То, что отображение $R^* \rightarrow \text{Aut}(\text{St}(R))$ – гомоморфизм, легко проверяется на образующих x_{ij}^α .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Группа $\text{St}(R)$ – это полупрямое произведение $\text{St}(R) \ltimes R^*$ с определенным выше действием R^* на $\text{St}(R)$.

Пусть $f: \text{GSt}(R) \rightarrow \text{GE}(R)$ совпадает с g на $\text{St}(R)$ и переводит $a \in R^*$ в $p'_1(a)$. Ядро f равно группе $K_2(R)$. Итак, мы имеем точную тройку

$$1 \rightarrow K_2(R) \rightarrow \text{GSt}(R) \xrightarrow{f} \text{GE}(R) \rightarrow 1. \quad (3.6)$$

ЛЕММА 4. *Центр $\text{GSt}(R)$ лежит в $K_2(R)$.*

Доказательство аналогично доказательству точной последовательности (3.4) (см. [9; § 5, теорема 5.1]).

Для любой единицы u кольца R рассмотрим элементы $w_{ij}(u) = x_{ij}^u x_{jl}^{u^{-1}} x_{ij}^u$, $h_{ij}(u) = w_{ij}(u) w_{ij}(-1)$ в $\text{St}(R)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $W(R)$ – подгруппа в группе $\text{St}(R)$, порожденная символами $w_{ij}(\lambda)$ (см. [9]). Тогда для действия сопряжением с помощью любого y , принадлежащего подгруппе в $\text{GSt}(R)$, порожденной $W(R)$ и R^* , верно, что $f(y)(e_{ij}^\alpha)$ – элементарная матрица и

$$y(x_{ij}^\alpha) = q(f(y)(e_{ij}^\alpha)),$$

где слева и справа стоят сопряжения элементами y и $f(y)$ соответственно.

ЛЕММА 5. *Расширение (3.6) центрально.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4 центр лежит в $K_2(R)$. Достаточно доказать, что все элементы из группы $K_2(R)$ центральны. Центр $\text{St}(R)$ совпадает с $K_2(R)$, поэтому нужно проверять только коммутирование с элементами R^* .

Рассмотрим другое действие R^* на $\text{Sl}(R)$: $a \in R^*$ действует сопряжением с помощью матрицы $p'_k := \text{diag}(1, \dots, a, 1, \dots)$, где a стоит на k -м месте. Тогда точно так же, как и выше, мы можем построить действие R^* на $\text{St}(R)$ с помощью формулы $a(x_{ij}^\alpha) = q(p'_k(e_{ij}^\alpha))$. Обозначим автоморфизм $\text{St}(R)$, соответствующий элементу a при этом действии, через $z_k(a)$. Тогда автоморфизм $z_1(a) \circ z_k^{-1}(a)$ есть сопряжение с помощью $h_{1k}(a)$ согласно замечанию 2.

Сопряжение с помощью $h_{1k}(a)$ оставляет элемент $u \in K_2(R)$ неподвижным, поэтому $z_1(a)$ и $z_k(a)$ действуют на него одинаково. Но так как $z_k(a)$ действует нетождественно только на символы x_{ij}^α , у которых i или j равен k , то, выбрав k достаточно большим, мы добьемся того, что действие $z_k(a)$ на u будет тождественно. Следовательно, тождественно и действие $z_1(a)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Мы можем определить $\text{GSt}_k(R)$, взяв в определении $\text{GSt}(R)$ диагональные матрицы с неединичным элементом на k -м месте, однако

$$\text{GSt}_k(R) = \text{GSt}(R).$$

Действительно, обозначим через $p_1(a)$ образ элемента $a \in R^*$ в $\text{GSt}(R)$. Пусть для простоты $k = 2$. Тогда матрица $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ сопрягает $\text{diag}(a, 1)$ и $\text{diag}(1, a)$ в $E(R)$. Пусть $\hat{w}$ – прообраз w в $\text{St}(R)$; тогда $\text{GSt}(R)$ – внутреннее полупрямое произведение $\text{St}(R)$ и $\hat{w}p_1(A)\hat{w}^{-1}$ и элемент $\hat{w}p_1(a)\hat{w}^{-1}$ действует на $\text{St}(R)$ так же, как на нем действует a в $\text{GSt}(R)_k$.

Для вычислений в группе Стейнберга нам будет полезна следующая лемма.

ЛЕММА 6. *Справедливы равенства*

$$p_1(a)w_{1n}(b)p_1(a)^{-1} = w_{1n}(ab), \quad p_1(a)h_{1n}(b)p_1(a)^{-1} = w_{1n}(ab)w_{1n}(-a).$$

Доказательство получается при помощи простых вычислений.

§ 4. Функторы K_1 и K_2 от кольца аделей

Выясним, как связаны между собой группы $E(R)$ и $SL(R)$ в случае, когда R — одно из адельных колец $\mathbb{A}_i$ или $\mathbb{A}_{ij}$.

ЛЕММА 7. *Для локального кольца A существует алгоритм, который раскладывает матрицу, принадлежащую $SL(n, A)$, на элементарные матрицы, число которых не превосходит Cn^2 , где C — некоторая константа, не зависящая от кольца A .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B \in SL(n, A)$. Если все элементы первой строки матрицы B принадлежат максимальному идеалу локального кольца m_A , то $\det B$ принадлежит m_A , что невозможно. Значит, в первой строке существует обратимый элемент b_{1l} . Вычитая l -й столбец из остальных столбцов, что соответствует умножению на элементарные матрицы справа, получим матрицу с единственным элементом в первой строке, равным b_{1l} . Переставим первый столбец и l -й (матрица перестановки раскладывается в произведение трех элементарных). Для полученной матрицы B' среди элементов $b_{21}, \dots, b_{2n}$ найдется обратимый. Повторяя ту же процедуру для остальных строк, получим диагональную матрицу. Диагональная матрица раскладывается в произведение $n-1$ диагональных матриц с двумя элементами на диагонали и определителем 1, каждая из которых есть произведение шести элементарных.

Назовем алгоритм, описанный в предыдущей лемме, *алгоритмом Гаусса для локальных колец*.

ЛЕММА 8. *Пусть даны элементы $a^1, \dots, a^n \in \prod_{x \in C} k(X)$, где $a^i = (a_{x,C}^i)$. Элементы $a^1, \dots, a^n$ принадлежат $\mathbb{A}_{012}$ тогда и только тогда, когда выполнены равномерные адельные условия:*

- 1) для всех кривых C и некоторого дивизора D выполнено неравенство $\nu_C(a_{x,C}^i) \geq \nu_C(D)$;
- 2) зафиксируем произвольную кривую C и локальный параметр $t_C \in k(X)$ на ней; тогда существует $k \in \mathbb{Z}$ такой, что для любого $n \in \mathbb{Z}$ и для почти всех $x \in C$ функции $a_{x,C}^i$ принадлежат группе $t_C^k \mathcal{O}_x + t_C^n \mathcal{O}_x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что из равномерных адельных условий следует выполнение адельных условий для каждого a^i . Теперь докажем обратное утверждение. Равномерное условие 1) следует из того, что для любых дивизоров $D_1, \dots, D_n$ найдется дивизор D , меньший их всех. Проверим 2). Зафиксируем кривую C и локальный параметр t_C на ней. Так как в условии 2) можно пренебречь конечным количеством точек, то мы можем рассматривать только те $x \in C$, в которых локальный параметр $t_C \in \mathcal{O}_x$. Но для таких x , если адельное условие 2) выполнено для числа k , то оно выполнено и для чисел, меньших k , поэтому мы можем взять минимальное из чисел k для $a^1, \dots, a^n$.

Аналогичные утверждения верны и для колец $\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_{ij}$, это следствие определения этих колец и леммы 8.

ЛЕММА 9. Пусть $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$, – некоторое семейство коммутативных колец. Также пусть $x = (x_\lambda) \in \mathrm{SL}(\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{SL}(A_\lambda)$. Элемент x принадлежит $E(\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)$ тогда и только тогда, когда существует такое $N \in \mathbb{N}$, что все компоненты x_α раскладываются в произведение не более чем N элементарных матриц.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Число упорядоченных наборов пар $(i, j), i, j < n$, длины не больше N не превосходит константы $M(N)$. Таким образом, существует не больше $M(N)$ типов разложений матрицы на элементарные; пронумеруем их индексами $i \in I$. Определим $x^i \in \mathrm{SL}(\prod A_\lambda)$ следующим образом: компонента x_λ^i равна x_λ , если x_λ раскладывается на элементарные i -м способом, иначе $x_\lambda^i = 1$. Ясно, что $x = \prod_{i \in I} x^i$ и $x^i \in E(\prod A_\lambda)$.

ЛЕММА 10. Пусть $M = (M_{x,C})$ – матрица, принадлежащая $\mathrm{SL}(\mathbb{A}_{012})$. Она принадлежит $E(\mathbb{A}_{012})$ тогда и только тогда, когда существует такое $N \in \mathbb{N}$, что все $M_{x,C}$ раскладываются в произведение N элементарных матриц такое, что коэффициенты этих элементарных матриц в совокупности удовлетворяют равномерным адельным условиям.

Эта лемма – простое следствие лемм 8 и 9. Аналогичное утверждение верно для колец $\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_{ij}$.

ЛЕММА 11. Выполняется равенство $E(R) = \mathrm{SL}(R)$ для кольца R , равного $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_{01}, \mathbb{A}_{12}$. Кроме того, коциклы, лежащие в $\mathrm{SL}(\mathbb{A}^1)$, принадлежат $E(\mathbb{A}^1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R равно $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$. Разложим каждую локальную компоненту в соответствующем локальном кольце и воспользуемся леммой 9. Пусть $R = \mathbb{A}_{01}$ и $(a_{ij}) \in \mathrm{SL}(\mathbb{A}_{01})$. Рассмотрим компоненту, соответствующую фиксированной кривой C , т.е. матрицу $(a_{ij,C})$. Если все коэффициенты этой матрицы принадлежат $\mathcal{O}_C$, то разложим ее алгоритмом Гаусса для $\mathcal{O}_C$. Если C принадлежит конечному множеству кривых, для которых это не так, то разложим матричную компоненту $(a_{ij,C})$ алгоритмом Гаусса для поля $k(X)$. Так как для почти всех C выполнен первый случай, условия леммы 11 соблюдены, а значит, исходная матрица принадлежит $E(\mathbb{A}_{01})$.

Пусть R равно $\mathbb{A}_{12}$ и $(a_{ij}) \in \mathrm{SL}(R)$. В этом случае нужно проверить только выполнение равномерного адельного условия 2) для коэффициентов некоторого разложения матрицы на элементарные. Зафиксируем кривую C и локальный параметр t_C на ней. При проверке равномерного адельного условия 2) можно пренебречь тем конечным множеством точек x , в которых t_C не регулярен. В таких точках разложим локальную компоненту алгоритмом Гаусса для локального кольца $\mathcal{O}_C$. Теперь зафиксируем флаг (x, C) , и пусть точка x такая, что t_C регулярен в x . Рассмотрим такое максимальное $n(x, C) \in \mathbb{N}$, что $a_{ij,x,C} \in \mathcal{O}_x + t_C^{n(x,C)} \mathcal{O}_C$ ($n = \infty$, если все $a_{ij,x,C}$ принадлежат $\mathcal{O}_x$). Условие 2) состоит в том, что для всех k для почти всех $x \in C$ выполнено неравенство $n(x) > k$. Для выполнения условия 2) достаточно, чтобы коэффициенты матриц разложения локальной компоненты в (x, C) принадлежали $\mathcal{O}_x + t_C^n \mathcal{O}_C$. Опишем способ разложения. В первой строке матрицы найдется элемент $a_{1k,x,C}$, принадлежащий $\mathcal{O}_x^* + t_C^n \mathcal{O}_C$. Последовательно умножая исходную матрицу на

матрицы $e_{1l}^{a_{lk,x,C} a_{1k,x,C}^{-1}}$ справа и матрицы $e_{mk}^{a_{1m,x,C} a_{1k,x,C}^{-1}}$ слева, получим матрицу, у которой в первой строке и столбце k стоит единственный ненулевой элемент. Продолжая таким образом и применив перестановки, придем к диагональной матрице, которую разложим на элементарные матрицы, пользуясь равенством

$$\text{diag}(a, a^{-1}) = e_{ij}^a e_{ji}^{-a^{-1}} e_{ij}^a e_{ij}^{-1} e_{ji}^1 e_{ij}^{-1}.$$

Таким образом, матрица $(a_{ij,x,C})$ раскладывается в произведение не более чем $3n^2$ элементарных матриц, все коэффициенты которых принадлежат множеству $\mathcal{O}_x + t^{n(x,C)} \mathcal{O}_C$. Значит, соблюдены условия леммы 10, что завершает доказательство для кольца $\mathbb{A}_{01}$.

Пусть $g = (g_{01}, g_{12}, g_{02})$ – коцикл, принадлежащий $\text{SL}(\mathbb{A}^1)$. По лемме 1 существует дивизор D такой, что ростки всех коэффициентов локальных компонент g_{02} меньше ростка D в соответствующей точке. Для $x \notin \text{supp}(D)$ разложим компоненту $g_{02,x}$, пользуясь алгоритмом Гаусса для $\mathcal{O}_x$, компоненты g_{01} и g_{12} разложим, как было описано выше. Для $x \in C \subset \text{supp}(D)$ воспользуемся равенством $g_{02} = g_{12} g_{01}$. Матрицу g_{01} разложим по Гауссу в поле $k(X)$, зафиксируем одно разложение для всех $x \in C$. Матрица g_{12} для почти всех точек $x \in C$ принадлежит $\mathcal{O}_x$, разложим ее алгоритмом Гаусса для $\mathcal{O}_x$. В оставшемся конечном числе точек можно раскладывать как угодно. Ясно, что для подобного разложения выполнены условия леммы 10, что завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Мы доказали, что если кольцо R совпадает с одним из колец $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_{01}, \mathbb{A}_{12}$, то $K_1(R)$ равно R^* .

Перейдем к функтору K_2 . Для произвольного кольца R обозначим через $K_2^M(R)$ подгруппу $K_2(R)$, порожденную символами (a, b) , где $a, b \in R^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Кольцо непрерывных вещественных функций на S^2 является примером кольца, для которого $K_2^M(R) \neq K_2(A)$ (см. [9; §8, пример]).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если кольцо R есть кольцо рациональных аделей на кривой или одно из колец $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1, \mathbb{A}_{01}$, то $K_2^M(R) = K_2(R)$. Это можно доказать, используя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 10, и явные конструкции из доказательства теоремы Штейна (см. [10]). Эта теорема гласит, что для произвольного полулокального кольца R , единицы которого порождают R аддитивно (в частности, для произвольного локального кольца), группа $K_2(R)$ совпадает с $K_2^M(R)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть поверхность X регулярна. Тогда верно равенство

$$H^2(K_2^M(\mathbb{A}^\bullet)) = CH^2(X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$p_{x,C}: \mathbb{A}_{012} \rightarrow k(X)$$

– ограничение проекции $\prod_{x \in C} k(X) \rightarrow k(X)$, соответствующей компоненте (x, C) . Отображение $p_{x,C}$ дает нам отображение $p'_{x,C}: K_2(\mathbb{A}_{012}) \rightarrow K_2(k(X))$.

Определим отображение $\nu: K_2^M(\mathbb{A}_{012}) \rightarrow \bigoplus_{x \in C} \mathbb{Z}$ следующим образом:

$$\nu(a)_{(x,C)} = \nu_{x,C}(p'_{x,C}(a)),$$

где $\nu_{x,C}: K_2(k(X)) \rightarrow \mathbb{Z}$ – ручной символ (см. [1]).

Покажем, что отображение ν корректно определено, т.е. сумма в определении конечна. Достаточно проверить это для одного символа (a, b) , где $a, b \in \mathbb{A}_{012}^*$. Для этого нам понадобится следующая лемма, которую несложно вывести из аделльных условий.

ЛЕММА 12. Пусть $(a_{x,C}) \in \mathbb{A}_{012}$. Тогда $(a_{x,C}) \in \mathbb{A}_{012}^*$ равносильно следующим двум условиям:

- 1) существует эффективный дивизор D такой, что $-\nu_C(D) \leq \nu_C(a_{x,C}) \leq \nu_C(D)$ для любых $x \in C$;
- 2) для фиксированной кривой C существует целозначная функция $n(x)$ такая, что для сколь угодно большого $k \in \mathbb{N}$ для почти всех $x \in C$ функция $a_{x,C}$ принадлежит $t^{n(x)}\mathcal{O}_x^* + t^k\mathcal{O}_C$; здесь t – произвольный фиксированный параметр на кривой C .

По условию 1) этой леммы $p'_{x,C}(a, b) \in K_2(\mathcal{O}_C)$ для почти всех кривых C . В этом случае $\nu_{x,C}(p'_{x,C}(a, b)) = 0$. Пусть C_0 – одна из оставшихся кривых. Для достаточно большого $k \in \mathbb{N}$ и почти всех $x \in C_0$ мы имеем равенство

$$\nu_{x,C_0}(a_{x,C_0}, b_{x,C_0}) = \nu_{x,C_0}(t^{n_1(x)}(a_1 + t^k u), t^{n_2(x)}(b_1 + t^k v)),$$

где $u, v \in \mathcal{O}_{C_0}$, $a_1, b_1 \in \mathcal{O}_x^*$, t – локальный параметр кривой C_0 . Это выражение равно нулю, так как $\nu_{x,C_0}(t, t) = 0$, $\nu_{x,C_0}(t^l, a_1 + t^k u) = 0$. Поэтому ненулевые значения могут получиться лишь в оставшемся конечном множестве точек. Таким образом, отображение ν корректно определено.

Пусть $I: \bigoplus_{x \in C} \mathbb{Z} \rightarrow \bigoplus_x \mathbb{Z}$ – отображение суммирования по кривым C таким, что $x \in C$. Через J обозначим естественное отображение из $\bigoplus_x \mathbb{Z}$ в $CH^2(X)$. Обозначим через φ композицию $J \circ I \circ \nu$. Отображение φ равно нулю на $d^1(K_2(\mathbb{A}^1))$ в силу законов взаимности Паршина вдоль кривой и точки (см.[2]), а также того, что $\nu_{x,C}(K_2(\mathcal{O}_C)) = 0$. Значит, φ пропускается через отображение $\psi: H^2(\mathbb{A}(K_2^M, \cdot)) \rightarrow CH^2(X)$. Докажем, что отображение ψ является изоморфизмом.

Сюръективность ψ следует из сюръективности ν .

Докажем инъективность ψ . Заметим, что отображение $\nu_{x,C}$ есть композиция отображений $\mu_x \circ \mu_C$:

$$K_2(k(X)) \xrightarrow{\mu_C} K_1(k(C)) \xrightarrow{\mu_x} K_0(k(x)) = \mathbb{Z},$$

где отображение $\mu_C: K_2(k(X)) \rightarrow K_1(k(C))$ сопоставляет символу (f, g) функцию $(-1)^{\nu_C(f)\nu_C(g)} f^{\nu_C(g)} g^{-\nu_C(f)}|_C$, а μ_x есть нормирование в точке x . Поэтому отображение φ раскладывается в композицию отображений

$$K_2^M(\mathbb{A}_{012}) \xrightarrow{\sigma_2} \prod_{x,C} K_1(k(C)) \xrightarrow{\sigma_1} \bigoplus_{x,C} \mathbb{Z} \xrightarrow{J \circ I} CH^2(X).$$

Рассмотрим фильтрацию $K_2^M(\mathbb{A}_{012})$

$$0 \subset F_0 = \text{Ker}(\sigma_2) \subset F_1 = \text{Ker}(\sigma_1 \circ \sigma_2) \subset F_2 = \text{Ker}(\varphi) \subset F_3 = K_2^M(\mathbb{A}_{012}).$$

Идея доказательства инъективности ψ состоит в том, чтобы, вычитая из $z \in F_i$ элементы, принадлежащие $d^1(K_2^M(\mathbb{A}^1))$, получить элемент из F_{i-1} .

Пусть $a \in K_2^M(\mathbb{A}_{012})$ такой, что $a \in F_2$. Пусть $I \circ \nu(a) = \sum_{C_i} \sum_{x_{j_i} \in C_i} a_{ij_i} x_{j_i}$, причем дивизоры $\sum_{x_{j_i}} a_{ij_i} x_{j_i}$ рационально эквивалентны нулю. Докажем, что,

вычитая из a элемент группы $K_2^M(\mathbb{A}_{01})$, можно получить b такой, что $p'_{x,C}(b)$ равен a_{ij_i} , если $(x, C) = (x_{j_i}, C_i)$ для некоторого i и j_i , и равен нулю, если иначе. Это вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 13. *Для фиксированной точки x_0 образ отображения*

$$\mathbb{A}_{02} \rightarrow \bigoplus_{x_0 \in C} \mathbb{Z},$$

переводящего элемент y в $(\nu_{x_0,C}(p'_{x_0,C})(y))$, есть подгруппа элементов с нулевой общей суммой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно получить набор (z_C) такой, что $z_{C_1} = 1$, $z_{C_2} = -1$, а для остальных кривых C компонента z_C равна нулю, где C_1, C_2 – пара трансверсальных кривых. Такой набор можно получить, взяв символ (u_1, u_2) , $u_i \in \mathbb{A}_{02}^*$, где $(u_i)_x = 1$, если $x \neq x_0$, и $u_i = t_i$, если иначе; здесь t_i – уравнение C_i в точке x_0 .

Докажем, что можно вычесть из b элемент $K_2^M(\mathbb{A}_{01})$ так, что полученный элемент d будет принадлежать F_1 . Это простое следствие из следующей леммы.

ЛЕММА 14. *Для фиксированной кривой C_0 существует такой элемент $r \in K_2(\mathbb{A}_{01})$, для которого отличны от нуля только $\nu_{x,C_0}(r) = q_{x,C_0}$, где $\sum_{x \in C_0} q_{x,C_0} x$ – дивизор произвольной функции f на C_0 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве такого элемента символ, который на всех кривых, кроме C , единичный, а на C равен (f', g) , где f' – функция, продолжающая f на X , а g – локальный параметр на кривой C_0 .

Покажем, что, вычитая из d некоторый элемент группы $K_2(\mathbb{A}_{02})$, мы сможем получить элемент e , принадлежащий F_0 . Действительно, для почти всех кривых C проекция $p'_{x,C}(d)$ принадлежит $K_2(\mathcal{O}_C)$, а значит, $\mu_C(p'_{x,C}(d)) = 1$. Пусть C_i – одна из оставшихся кривых. Для любой точки x функция $\mu_C(d)$ имеет в точке x нормирование, равное нулю, а значит, ее можно продолжить до функции $a_x^i \in \mathcal{O}_x^*$. Определим $t^i, s^i \in \mathbb{A}_{02}^*$. Пусть $t_x^i = 1$, если $x \notin C_i$, и t_x^i – уравнение кривой C_i , если $x \in C_i$. Адель s_x^i равен a_x^i , если $x \in C_i$, и равен 1, если иначе. Ясно, что, вычитая из d произведение (t^i, s^i) по всем кривым C_i , мы получим требуемый символ e .

Следующий факт хорошо известен, но нам требуется его конструктивное доказательство.

ЛЕММА 15. *Для любой кривой C имеется точная последовательность*

$$1 \rightarrow K_2(\mathcal{O}_C) \rightarrow K_2(k(X)) \xrightarrow{\mu_C} K_1(k(C)) \rightarrow 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим только точность в среднем члене (лишь она и потребуется нам в дальнейшем). Пусть есть элемент $q = (a_1, b_1) \cdots (a_r, b_r)$, лежащий в ядре μ_C . Через t обозначим локальный параметр кривой C . Имеем равенство

$$(a_1, b_1) \cdots (a_r, b_r) = (t^{n_1} c_1, t^{m_1} d_1) \cdots (t^{n_r} c_r, t^{m_r} d_r),$$

где $c_i, d_i \in \mathcal{O}_C^*$. Символ $(t^{n_i} c_i, t^{m_i} d_i)$ равен

$$(t, t)^{n_i m_i} (t, d_i^{m_i}) (c_i^{m_i}, t) (c_i, d_i) = ((-1)^{n_i m_i}, t) (c_i^{m_i} d_i^{-n_i}, t) (c_i, d_i).$$

Так как $\mu_C(q) = 1$, то

$$\prod_{i=1}^r (-1)^{n_i m_i} c_i^{m_i} d_i^{-n_i} |_C = 1.$$

Тогда $q = (1 + tf, t) \prod_{i=1}^r (c_i, d_i)$, где $f \in \mathcal{O}_C$. Если $f \in \mathcal{O}_C^*$, то

$$(1 + tf, t) = (1 + tf, -tf \cdot -f^{-1}) = (1 + tf, f^{-1}) \in K_2(\mathcal{O}_C).$$

Если $f \in t\mathcal{O}_C$, то $(1 + tf, t) = (1 + t^2g, t)$, где $g \in \mathcal{O}_C$, и равенство $(1 + t^2g, t) = (1 + t, t)(1 - t + t^2h, t)$, где $h = \frac{1+g}{1-t}$, приводит к предыдущему случаю. Таким образом, $q \in K_2(\mathcal{O}_C)$.

Важно отметить, что в доказательстве леммы 15 используется лишь конечное число множителей, ограниченное сверху константой, зависящей от числа символов в исходном элементе. Пользуясь алгоритмом, приведенным в доказательстве леммы 15, и рассуждениями, аналогичными доказательству леммы 9, можно показать, что подгруппа F_0 совпадает с $K_2^M(\mathbb{A}_{12})$. Таким образом, исходный элемент a принадлежит образу d^1 и инъективность ψ доказана.

Теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Существует отображение $\psi': H^2(K_2(\mathbb{A}^\bullet)) \rightarrow CH^2(X)$ такое, что коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{array}{ccc} H^2(K_2^M(\mathbb{A}^\bullet)) & \xrightarrow{i} & H^2(K_2(\mathbb{A}^\bullet)) \\ & \searrow \psi & \downarrow \psi' \\ & & CH^2(X) \end{array}$$

Отображение i является вложением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно определить отображение

$$\sigma'_2: K_2(\mathbb{A}_{012}) \rightarrow \prod_{x \in C} K_1(k(C))$$

аналогично отображению σ_2 и, взяв композицию с отображением σ_1 , получить отображение $\nu': K_2(\mathbb{A}_{012}) \rightarrow \bigoplus_{x \in C} \mathbb{Z}$. Докажем, что отображение ν' корректно определено. Элемент $w \in K_2(\mathbb{A}_{012})$ представляется в виде произведения x_{ij}^α , $\alpha \in \mathbb{A}_{012}$, и все $\alpha_{x,C}$ принадлежат $\mathcal{O}_C$ вне конечного числа кривых C_i . Поэтому если $C \neq C_i$, то компонента (x, C) отображения ν' равна нулю на w . Следовательно, достаточно доказать, что лишь конечное число компонент (x, C_0) отображения ν' на элементе w отличны от нуля для фиксированной кривой C_0 . Но $\sigma_2(w)|_{C_0}$ есть адель на кривой C_0 , что следует из точной последовательности локализации по локальному параметру кривой C_0 для кольца P_{C_0}

$$K_2(P_{C_0}) \rightarrow K_2(\mathbb{A}_{012}) \rightarrow K_1(\mathbb{A}_{C_0}).$$

Здесь P_{C_0} – подкольцо элементов $\mathbb{A}_{012}$ с неотрицательным нормированием ν_{C_0} каждой компоненты вдоль C_0 , $\mathbb{A}_{C_0}$ – адели на кривой C_0 . Корректность доказана.

Теперь аналогично K_2^M можно определить $\varphi': K_2(\mathbb{A}_{012}) \rightarrow CH^2(X)$. Из законов взаимности Паршина следует, что φ' пропускается через отображение

$\psi': H^2(K_2(\mathbb{A}^\bullet)) \rightarrow CH^2(X)$. Коммутативность диаграммы очевидна. Отображение i является вложением; это следует из того, что $\psi = i \circ \psi'$ и ψ является вложением.

§ 5. Класс Черна

Существует центральное расширение косимплициальных групп

$$1 \rightarrow K_2(\mathbb{A}^*) \rightarrow \text{GSt}(\mathbb{A}^*) \rightarrow \text{GE}(\mathbb{A}^*) \rightarrow 1.$$

По лемме 2 имеем связанную с ней длинную точную последовательность когомологий

$$\cdots \rightarrow H^1(\text{GSt}(\mathbb{A}^*)) \rightarrow H^1(\text{GE}(\mathbb{A}^*)) \xrightarrow{\partial_1} H^2(K_2(\mathbb{A}^*)).$$

Пусть X – гладкая поверхность, E – двумерное векторное расслоение на ней. Тогда, как было объяснено в примере из § 2, ее набор тривиализаций $B = \{B_{\eta_i}\}$ задает элемент $t(B) \in \text{GL}(\mathbb{A}^1)$, являющийся коциклом. По лемме 11 элемент $t(B)$ принадлежит $\text{GE}(\mathbb{A}^1)$. Рассмотрим $c(B) = \partial_1(t(B)) \in H^2(K_2(\mathbb{A}^*))$. Как следует из того же примера, когомологический класс $t(B) \in H^1(\text{GL}(\mathbb{A}^*))$ зависит лишь от векторного расслоения E , поэтому для каждого векторного расслоения E нами определен некоторый когомологический класс $\omega(E) \in H^2(\mathbb{A}(K_2))$. Конструкция граничного гомоморфизма дает не только когомологический класс, но и коцикл $c(B, s)$ из $K_2(\mathbb{A}_{012})$, если для данного $t(B)$ выбрать некоторый прообраз $s(t(B)) \in \text{GSt}(\mathbb{A}^1)$.

Запишем этот коцикл в терминах тривиализаций и матриц перехода (матрицы перехода обозначим g_{ij} ; см. пример в § 2):

$$c(B, s) = s(g_{21})s(g_{10})s(g_{20})^{-1}, \quad (5.1)$$

где $s = (s_{12}, s_{01}, s_{02})$, а s_{ij} – некоторое сечение отображения $\text{GSt}(\mathbb{A}_{ij}) \rightarrow \text{GE}(\mathbb{A}_{ij})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Из доказательства леммы 2 видно, что все коциклы $c(B, s)$ для данного расслоения E можно получить при фиксированной тривиализации B и всевозможных выборах сечения s .

ЛЕММА 16. Пусть для любой гладкой поверхности X и двумерного векторного расслоения E на X задан цикл $\varkappa(E) \in CH^2(X)$. Класс $\varkappa(E)$ – класс Черна тогда и только тогда, когда он обладает следующими универсальными свойствами:

1) для любого морфизма $f: Y \rightarrow X$, где X, Y – поверхности, и произвольного векторного расслоения E на X

$$f^*(\varkappa(E)) = \varkappa(f^*(E));$$

2) для любого расслоения E , для которого существуют такие одномерные расслоения E_1 и E_2 , что

$$0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0,$$

верно равенство

$$\varkappa(E) = c_{1,X}(E_1)c_{1,X}(E_2),$$

где $c_{1,X}(E_i) \in CH^1(X)$ – первый класс Черна E_i .

Это утверждение следует из универсальных свойств классов Черна, а также из того, что для любого расслоения E на поверхности X существуют поверхность X' и морфизм $X' \rightarrow X$, являющийся последовательностью раздутий точек, такие, что для расслоения $f^*(E)$ на X' существует точная тройка из п. 2).

Рассмотрим цикл $\psi'(\omega(E))$, где отображение ψ' определено в следствии (см. § 4).

ТЕОРЕМА 2. *Цикл $\psi'(\omega(E))$ в $CH^2(X)$ совпадает со вторым классом Черна $c_{2,X}(E)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим условия леммы 16 для $\psi'(\omega(E))$.

1) Функториальность следует из того, что адельные дифференциалы функториальны относительно f^* , и из коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GSt}(\mathbb{A}^*)(Y) & \longrightarrow & \mathrm{GE}(\mathbb{A}^*)(Y) \\ f^* \uparrow & & f^* \uparrow \\ \mathrm{GSt}(\mathbb{A}^*)(X) & \longrightarrow & \mathrm{GE}(\mathbb{A}^*)(X) \end{array}$$

В качестве сечения f^*x , где $x \in E(\mathbb{A}^1)(X)$, возьмем $f^*s(x)$. Получим

$$f^*(c(B, s)) = c(f^*B, f^*s);$$

здесь f^*B – индуцированная тривиализация расслоения $f^*(E)$. Остается применить отображение ψ' к обеим частям этого равенства.

2) Пусть есть точная тройка расслоений

$$0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0. \quad (5.2)$$

Нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 17. *Для расслоения E такого, что $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0$, можно выбрать тривиализации так, что все матрицы перехода g_{ij} станут треугольными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой схемной точки α имеем точную последовательность пучковых слоев

$$0 \rightarrow E_{1\alpha} \rightarrow E_\alpha \rightarrow E_{2\alpha} \rightarrow 0.$$

Пусть u – базисный элемент $E_{1\alpha}$. В качестве базиса в слое E_α возьмем u и любой прообраз базисного элемента E_2 . Тогда для любой пары схемных точек $\beta \in \bar{\gamma}$ первые элементы выбранных базисов в слоях E_β и E_γ пропорциональны как сечения линейного расслоения E_1 , но это и означает треугольность.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Ясно, что утверждение леммы верно и в обратную сторону.

Класс $c_1(E_1)$ представляется дивизором (u) произвольного ненулевого сечения u расслоения E_1 . Из точной тройки (5.2) следует, что

$$c_1(E_1) + c_1(E_2) = c_1(E) = c_1(\det E).$$

Таким образом, класс $c_1(E_2)$ представляется дивизором $(\det(E)) - (u)$. Пусть $u_\alpha \in k(X)$ – уравнение дивизора сечения u в схемной точке α ; $(E)_\alpha$ обозначает уравнение дивизора произвольного ненулевого сечения линейного расслоения E

в окрестности схемной точки α . По адельной формуле для пересечения циклов (см. [1; § 3.2]) получаем

$$c_1(E_1)c_1(E_2) = \sum_{x \in C} \nu_{x,C}(u_x, (\det E)_C u_C^{-1})x. \quad (5.3)$$

Теперь вычислим $\omega(E)$. Пусть $x \in C \subset X$. Рассмотрим локальную компоненту (x, C) в формуле (5.1). Верно равенство

$$c(B, s)_{x,C} = s_{Cx}(g_{12})s_{XC}(g_{01})s_{Xx}(g_{12}g_{01})^{-1}.$$

В этой формуле $s_{\eta_i \eta_j}$ – сечения отображения $\text{GSt}(\mathcal{O}_{\eta_i}) \rightarrow \text{GE}(\mathcal{O}_{\eta_i})$. Построим отображения $s_{\eta_i \eta_j}$ так, что $s_{\eta_i \eta_j}$ совпадет с $s_{\eta_k \eta_l}$ на верхнетреугольных матрицах с коэффициентами из $\mathcal{O}_{\eta_i}$ при условии $\eta_k \subset \bar{\eta}_i$.

Пусть A – верхнетреугольная матрица, $u(A)$ – ее унитарная часть, $d(A)$ – диагональная часть A . Пусть элемент $p(A) \in \text{St}(R)$ равен $p(d(A))p(u(A))$, где $p(d(A)) = p_1(\det A)$ и $p(u(A)) = h_{12}(a_{22}^{-1})q(u(A))$ (обозначения из § 3). Заметим, что элемент $p(A)$ – прообраз матрицы A в группе $\text{St}(R)$. Кроме того, если мы имеем вложение колец $R \subset R'$, то $p(A)$ для верхнетреугольной матрицы A с коэффициентами, принадлежащими R , не зависит от того, в каком кольце мы его вычисляем. Положим сечение $s_{\eta_i \eta_j}(A)$ для верхнетреугольной матрицы $A \in \text{GL}(\mathcal{O}_{\eta_i})$ равным $p(A)$. Так как $s_{\eta_i \eta_j}$ теперь не зависит от пары η_i, η_j , то будем обозначать его просто s .

Вычислим $f(A, B)_{x,C} = s(A)s(B)s(AB)^{-1}$ для произвольных треугольных матриц A и B . Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & c_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Из свойств центральных расширений несложно вывести следующее утверждение.

ЛЕММА 18. *Для определенной выше функции $f(A, B)$ и произвольных верхнетреугольных матриц x, y, z справедливо уравнение коцикла со значением в группе GSt*

$$f(xy, z)f(y, z)^{-1}f(x, y)f(x, yz)^{-1} = 1.$$

ЛЕММА 19. *Справедливо равенство $f(A, B) = f(d(A), d(B))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $s: U \rightarrow \text{St}$ – гомоморфизм, то $f(u(A), u(B)) = 1$. Так как $p_1(a)$ и $h_{12}(b)$ правильным образом коммутируют с $q(e_{12}^\alpha)$ (см. лемму 17), то $f(u(A), d(B)) = f(d(A), u(B)) = 1$. Пользуясь этими равенствами и уравнением коцикла, сведем $f(d(A)u(A), d(B)u(B))$ к $f(d(A), d(B))$.

Для коммутирующих матриц A и B в [9] определен символ

$$(A, B) = s(A)s(B)s(A)^{-1}s(B)^{-1},$$

который билинеен и кососимметричен.

ЛЕММА 20. *Справедливо равенство*

$$(\text{diag}(a_1, b_1), \text{diag}(a_2, b_2)) = (b_2, a_1)(a_2, b_1).$$

Доказательство см. в [5].

ЛЕММА 21. *Справедливо равенство*

$$f(\operatorname{diag}(a, a^{-1}), \operatorname{diag}(b, b^{-1})) = (a, b).$$

Доказательство см. в [9; § 9].

Чтобы вычислить f на паре диагональных матриц, нужно отделить определители и перекоммутировать их с h_{ij} так, чтобы они стояли рядом:

$$\begin{aligned} f(g_{01}, g_{12}) &= (h_{12}(a_2^{-1}), p_1(\det B))(h_{12}(a_2^{-1})h_{12}(b_2^{-1})h_{12}((a_2b_2)^{-1})^{-1}, \det(AB)^{-1})(a_2, b_2) \\ &= (s(a), \det B)(a_2, b_2) = (b_1, a_2)^{-1}. \end{aligned}$$

Теперь заметим, что

$$b_1 = g_{10}(E_1) = u_C, \quad a_2 = g_{21}(E_2) = (\det E)_x (\det E_C)^{-1} u_C u_x^{-1}.$$

Пользуясь законом взаимности Паршина и кососимметричностью ручного символа, мы можем преобразовать выражение для $\psi'(\omega(E))$:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in C} \nu_{x,C}((\det E)_x (\det E_C)^{-1} u_x u_C^{-1}, u_C)x &= \sum_{x \in C} \nu_{x,C}((\det E)_x u_x^{-1}, u_C)x \\ &= c_1(E_1)c_1(E_2). \end{aligned} \quad (5.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Можно подобрать такое сечение s , что локальная компонента (x, C) в формуле (5.4) будет равна правой части равенства (5.3). Для этого положим $s_{12}(g_{21}) = s(g_{21}^{-1})^{-1}$, $s_{01} = s$, $s_{02} = s(g_{20}^{-1})^{-1}$. Тогда локальный множитель будет равен $f(g_{10}, g_{20}^{-1})$ и по формуле для $f(A, B)$ получаем

$$(u_x^{-1}, (\det E)_C u_C^{-1})^{-1} = (u_x, (\det E)_C u_C^{-1}).$$

§ 6. Формула Севери и адельная формула

Напомним формулу Севери для второго класса Черна $c_2(E)$ двумерного векторного расслоения на поверхности. Пусть w – произвольное ненулевое сечение расслоения E , $(\det E)$ – дивизор, ассоциированный с расслоением $\det E$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Для каждого сечения w определим нуль-цикл $\langle w \rangle$ следующим образом. Пусть u_1, u_2 – базис расслоения E в точке x . Запишем $w = fu_1 + gu_2$. Пусть многообразие гладкое; тогда локальное кольцо $\mathcal{O}_x$ факториальное. Пусть $h_x \in k(X)$ – такая функция, что f/h_x и g/h_x принадлежат $\mathcal{O}_x$ и взаимно просты. Такая h_x единственна с точностью до умножения на элементы $\mathcal{O}_x^*$. Пусть $q_x = f/h_x$ и $m_x = g/h_x$. Определим кратность $\langle w \rangle_x$ и нуль-цикл $\langle w \rangle$:

$$\langle w \rangle_x := \dim(\mathcal{O}_x/(q_x, m_x)), \quad \langle w \rangle := \sum_x \langle w \rangle_x.$$

Система функций (U_x, h_x) задает дивизор, который называют *дивизором нулей и полюсов сечения w* .

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Точки x , в которых $\langle w \rangle_x \neq 0$, это в точности те точки, в которых не существует базиса расслоения в точке вида $\{rw, w'\}$, $r \in k(X)$.

Формула Севери утверждает, что

$$c_2(E) = \langle w \rangle + (w)(\det E) - (w)(w). \quad (6.1)$$

Пользуясь аделльной теорией пересечений (см. [1]), можно переписать все дивизориальные члены в (6.1) через ручные символы некоторых рациональных аделей. По каждому дивизору D можно построить адели $(t_{D,C}) \in \mathbb{A}_{01}$ и $(t_{D,x}) \in \mathbb{A}_{02}$, где $t_{D,C}$ – уравнение дивизора D вдоль кривой C , а $t_{D,x}$ – уравнение дивизора D в точке x . В этих обозначениях

$$(D_1)(D_2) = \sum_{x,C} \nu_{x,C}(t_{D_1,x}, t_{D_2,C}).$$

Тогда

$$(w)(\det E) - (w)(w) = \sum_{x \in C} \nu_{x,C}(t_{w,x}, t_{\det E,C} t_{w,C}^{-1})x,$$

где $t_{w,x}$ и $t_{w,C}$ – уравнения дивизора (w) в точках x и C соответственно. В работе [1] также доказана следующая формула для нуль-цикла $\langle w \rangle_x$:

$$\langle w \rangle_x = \sum_{C \subset \text{supp}_x(q_x)} \nu_{x,C}(m_x, q_x).$$

Таким образом, получается формула

$$c_2(E) = \sum_{x \in C} s_{x,C}x, \quad (6.2)$$

где $s_{x,C}$ определяется формулой

$$s_{x,C} = \nu_{x,C}(w_x, t_{\det E,C} t_{w,C}^{-1}) + n_{x,C} \nu_{x,C}(m_x, q_x); \quad (6.3)$$

здесь $n_{x,C} = 1$, если $C \subset \text{supp}(b_x)$, и $n_{x,C} = 0$, если иначе. Формула (5.1), как и формула (6.2), дает выражение для класса Черна $c_2(E)$ вида $c_2(E) = \sum_{x \in C} \gamma_{x,C}x$, где коэффициенты $\gamma_{x,C}$ зависят от выбора сечения.

ТЕОРЕМА 3. *Можно подобрать такие сечения в формуле (5.1), что ее локальные множители $\gamma_{x,C}$ совпадут с локальными множителями $s_{x,C}$ формулы Севери в форме (6.3) для заданного сечения w .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала для каждой схемной точки α укажем некоторый базис тривиализации расслоения E и прообраз $g_{\alpha\eta}$ в группе Стейнберга, где η – общая точка. Обозначим этот набор базисов через B_0 . Прообраз $g_{\alpha\eta}$ в группе Стейнберга даст нам компоненту (α, η) элемента $s(t(B_0)) \in \mathbb{A}(\text{GSt}, 1)$.

Для любого расслоения E существуют его рациональные сечения w_1, w_2 такие, что они составляют базис в любой точке из конечного множества $\text{supp}(\langle w \rangle)$. Запишем сечение w в этом базисе: $w = aw_1 + bw_2$, где $a, b \in k(X)$. Любая пара из сечений w, w_1, w_2 линейно независима над $k(X)$. Действительно, если бы w было пропорционально w_1 , то $\langle w \rangle_x$ равнялась бы нулю в точках из $\text{supp}(\langle w \rangle)$ согласно замечанию 10, что невозможно. В качестве базиса в общей точке η возьмем (w, w_1) .

В качестве базиса в точке x , принадлежащей $\text{supp}(\langle w \rangle)$, возьмем пару w_1, w_2 . Тогда матрица перехода $g_{x,\eta}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим $(s_{02}(t(B_0)))_{x,C} = (x_{21}^{-a} d_1(-b^{-1}) w_{12}(-1))^{-1}$.

В качестве базиса в точках $x \notin \text{supp}(\langle w \rangle)$ возьмем rw , w'_x , как это обсуждалось в замечании 10. Прообраз верхнетреугольной матрицы $g_{\eta x}$ в $\text{GSt}(k(X))$ возьмем таким же, как в лемме 17.

В кривых, проходящих через точки $\text{supp}(\langle w \rangle)$, пара w_1, w_2 составляет базис. Поэтому уравнение $t_{w,C}$ сечения w в общей точке C можно взять равным b , если $\nu_C(a) \geq \nu_C(b)$, и равным a , если иначе. В качестве базиса в кривой C возьмем пару $wt_{w,C}^{-1}$, w_1 , если $\nu_C(a) \geq \nu_C(b)$, и пару $wt_{w,C}^{-1}$, w_2 , если иначе. Матрица $g_{C,\eta}$ в первом случае есть

$$\begin{pmatrix} t_{w,C} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Компоненту (η, C) элемента $s_{01}(t(B_0))$ положим равной $p_1(w_C)$. Во втором случае матрица $g_{C,\eta}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} t_{w,C} & t_{w,C} a^{-1} \\ 0 & -ba^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_{w,C} ba^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ab^{-1} & 0 \\ 0 & -ba^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Компоненту (η, C) элемента $s_{01}(t(B_0))$ положим равной

$$p_1(-t_{w,C} ba^{-1}) h_{12}(-ab^{-1}) x_{12}^{a^{-1}}.$$

В качестве базиса в остальных кривых мы возьмем базис в C такой, что матрица $g_{C,\eta}$ верхнетреугольная. Это всегда можно сделать в силу того, что $\mathcal{O}_C$ – кольцо дискретного нормирования.

Заметим, что матрица перехода $g_{C,\eta}$ получилась верхнетреугольной для всех кривых C .

Теперь определим $s_{12}(t(B_0))$ и вычислим кратности $\gamma_{x,C}$ в формуле (5.1), соответствующие тривиализации B_0 и сечению s для всех пар $x \in C$.

Во флагах (x, C) , где $x \notin \text{supp}(\langle w \rangle)$, соответствующие вычисления проводились выше при доказательстве теоремы 2. Кратность $\gamma_{x,C}$ равна

$$\nu_{x,C}(t_{w,x}, \det(g_{C,\eta}) t_{w,C}^{-1}).$$

Во флагах (x, C) , где $x \in \text{supp}(\langle w \rangle)$, для C выполнено неравенство $\nu_C(a) \geq \nu_C(b)$. Тогда

$$g_{x,C} = \begin{pmatrix} at_{w,C}^{-1} & 1 \\ bt_{w,C}^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bt_{w,C}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -t_{w,C} b^{-1} \\ bt_{w,C}^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Прообраз $g_{x,C}$ в GSt возьмем равным $p_1(-bt_{w,C}^{-1}) w_{12}(-t_{w,C} b^{-1}) x_{21}^{at_{w,C}^{-1}}$. Итак, получим равенство

$$d^1(s(t(B_0))) = p_1(-bt_{w,C}^{-1}) w_{12}(-t_{w,C} b^{-1}) x_{21}^{at_{w,C}^{-1}} p_1(t_{w,C}) x_{21}^{-a} p_1(-b^{-1}) w_{12}(-1).$$

Переставим символы p_1 с символами x_{21} , пользуясь определением 4, и с символами w_{ij} , пользуясь леммой 6; получим, что $d^1(s(t(B_0)))$ равно $w_{12}(1) w_{12}(-1)$, т.е. 1.

Для рассматриваемых флагов (x, C) имеем равенство $\det(g_{C,\eta}) = t_{w,C}$ и в формуле (6.3) $\nu_{x,C}(t_{w,x}, \det(g_{C,\eta}) t_{w,C}^{-1}) = 1$, так что в этом случае кратность из адельной формулы совпадает с кратностью из формулы Севери.

Рассмотрим пары (x, C) , где $x \in \text{supp}(\langle w \rangle)$ и для C выполнено неравенство $\nu_C(a) < \nu_C(b)$. Тогда матрица перехода есть

$$g_{x,C} = \begin{pmatrix} at_{w,C}^{-1} & 0 \\ bt_{w,C}^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at_{w,C}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ bt_{w,C}^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве ее прообраза в GSt можно взять элемент $p_1(at_{w,C}^{-1})x_{21}^{bt_{w,C}^{-1}}$. Итак, имеем равенство

$$\begin{aligned} d^1(s(t(B_0))) \\ = p_1(at_{w,C}^{-1})x_{21}^{bt_{w,C}^{-1}}p_1(-t_{w,C}ba^{-1})h_{12}(-ab^{-1})x_{12}^{a^{-1}}x_{21}^{-a}p_1(-b^{-1})w_{12}(-1). \end{aligned}$$

Переставим символы p_1 с символами x_{21} , пользуясь определением 4, и с символами w_{ij} и h_{ij} , пользуясь леммой 6; получим равенство

$$\begin{aligned} p_1(at_{w,C}^{-1})x_{21}^{bt_{w,C}^{-1}}p_1(-t_{w,C}a^{-1})w_{12}(-a)w_{12}(b)x_{12}^{-ba^{-1}}x_{21}^{ab^{-1}}w_{12}(-1) \\ = x_{21}^{ba^{-1}}w_{12}(-a)w_{12}(b)x_{12}^{-ba^{-1}}x_{21}^{ab^{-1}}w_{12}(-1). \end{aligned}$$

Применяя следствие 9.4 из [9], перекоммутируем первый член правой части этого равенства с символами w_{ij} :

$$\begin{aligned} w_{12}(-a)w_{12}(b)x_{21}^{ab^{-1}}x_{12}^{-ba^{-1}}x_{21}^{ab^{-1}}w_{12}(-1) &= w_{12}(-a)w_{12}(b)w_{21}(ab^{-1})w_{12}(-1) \\ &= w_{12}(-a)w_{12}(b)w_{12}(-ba^{-1})w_{12}(-1). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Чтобы вычислить последнее произведение, нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 22. *Элемент $\prod_{i=1}^m w_{ij}(x_i)$ принадлежит $K_2(R)$, если и только если*

$$m = 2n, \quad (-1)^n a_1 \cdots a_n = b_1 \cdots b_n,$$

где $a_i = x_{2i-1}$ и $b_i = x_{2i}$. При этом

$$\prod_{i=1}^m w_{ij}(x_i) = \prod_{i=1}^n (c_i, -b_i) ((c_2, c_1)(c_3, c_1 c_2) \cdots (c_n, c_1 \cdots c_{n-1}))^{-1},$$

где $c_i = -a_i/b_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение легко доказывается вычислением. Далее, ясно, что

$$\begin{aligned} w_{ij} \left(\left(-\frac{a_i}{b_i} \right) (-b_i) \right) w_{ij}(-(-b_i)) &= h_{ij} \left(\left(-\frac{a_i}{b_i} \right) (-b_i) \right) h_{ij}(-b)^{-1} \\ &= (c_i, -b_i) h_{ij}(c_i). \end{aligned}$$

Для доказательства второго утверждения теперь остается воспользоваться следующей леммой.

ЛЕММА 23. *Элемент $\prod_{i=1}^n h_{ij}(c_i)$ принадлежит $K_2(R)$, если и только если*

$$\prod_{i=1}^n c_i = 1.$$

И если это произведение принадлежит $K_2(R)$, то оно равно

$$((c_2, c_1)(c_3, c_1 c_2) \cdots (c_n, c_1 \cdots c_{n-1}))^{-1}.$$

Эквивалентность проверяется простым вычислением. Чтобы вычислить произведение, достаточно воспользоваться формулой $h_{ij}(u)h_{ij}(v) = h_{ij}(uv)(v, u)^{-1}$ и применить индукцию по n .

Возвращаясь к формуле (6.4), получаем, что ее правая часть равна символу $(a, -b)$. Если записать $a = w_x a_x$ и $b = w_x b_x$, то имеем $(a_x, -b_x)(w_x, b_x a_x^{-1})$. Остается заметить, что $t_{\det E, C} = \det(g_{C, \eta}) = -t_{w, C} b a^{-1}$. Поэтому локальная кратность в формуле Севери равна $\nu_{x, C}(t_{w, x}, b a^{-1}) + \nu_{x, C}(a_x, b_x)$. После взятия ручных символов от элемента группы K_2 , представляющего коцикл, получится в точности локальный множитель из (6.3).

Теорема 3 доказана.

Список литературы

- [1] A. N. Parshin, “Chern classes, adèles and L -functions”, *J. Reine Angew. Math.*, **341** (1983), 174–192.
- [2] А. Н. Паршин, “К арифметике двумерных схем. I. Распределения и вычеты”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:4 (1976), 736–773; англ. пер.: A. N. Parshin, “On the arithmetic of two-dimensional schemes. I. distributions and residues”, *Math. USSR-Izv.*, **10**:4 (1976), 695–729.
- [3] А. Н. Паршин, “Абелевы накрытия арифметических схем”, *Докл. АН СССР*, **243**:4 (1978), 855–858; англ. пер.: A. N. Parshin, “Abelian coverings of arithmetic schemes”, *Soviet Math. Dokl.*, **19**:6 (1978), 1438–1442.
- [4] S. Bloch, “ K_2 and algebraic cycles”, *Ann. of Math.* (2), **99** (1974), 349–379.
- [5] P. Deligne, “Sommes de Gauss cubiques et revêtements de $SL(2)$, d’après S. J. Paterson”, *Séminaire Bourbaki, Exp. №. 539*, Lect. Notes Math., **770**, Springer-Verlag, Berlin, 1980, 244–277.
- [6] А. Н. Паршин, “Векторные расслоения и арифметические группы. II”, *Теория чисел, алгебра и алгебраическая геометрия*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика И. Р. Шафаревича, Тр. МИАН, **241**, Наука, М., 2003, 179–191; англ. пер.: A. N. Parshin, “Vector bundles and arithmetic groups. II”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **241** (2003), 164–176.
- [7] Ж. П. Серр, *Когомологии Галуа*, Мир, М., 1968; пер. с англ.: J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1962–1963.
- [8] С. О. Горчинский, “Адельная резольвента для пучков гомотопий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:6 (2008), 133–202; англ. пер.: S. O. Gorchinskii, “An adelic resolution for homology sheaves”, *Izv. Math.*, **72**:6 (2008), 1187–1252.
- [9] Дж. Милнор, *Введение в алгебраическую K-теорию*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: J. Milnor, *Introduction to algebraic K-theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
- [10] M. R. Stein, “Surjective stability in dimension 0 for K_2 and related functors”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **178** (1973), 165–191.

Р. Я. Будылин (R. Ya. Budylin)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: budylin@yandex.ru

Поступила в редакцию

21.06.2011 и 04.09.2011