Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Атабекян, Расщепляющие автоморфизмы свободных бернсайдовых групп, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 2, 31–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7905>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 02:48:55

УДК 512.54+512.543+512.544.43

В. С. Атабекян

Расщепляющие автоморфизмы свободных бернсайдовых групп

Доказано, что если порядок расщепляющего автоморфизма нечетного периода $n \geq 1003$ свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ – простое число, то он является внутренним автоморфизмом. Из этого для всех простых $n \geq 1009$ следует положительный ответ на вопрос о совпадении расщепляющих автоморфизмов периода n группы $B(m, n)$ с внутренними автоморфизмами, поставленный в “Коуровской тетради” в 1990 г.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: расщепляющий автоморфизм, свободная бернсайдова группа, внутренний автоморфизм, монстр Тарского, подпрямое произведение.

DOI: 10.4213/sm7905

§ 1. Введение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (см. [1]). Автоморфизм φ группы G называется *расщепляющим автоморфизмом периода n* , если $\varphi^n = 1$ и $gg^\varphi g^{\varphi^2} \cdots g^{\varphi^{n-1}} = 1$ для любого элемента $g \in G$.

Заменив в соотношении $(gg^\varphi g^{\varphi^2} \cdots g^{\varphi^{n-1}})^{-1} = 1$ элемент g на g^{-1} , получим, что при расщепляющем автоморфизме φ периода n выполняется также равенство $g^{\varphi^{n-1}} \cdots g^{\varphi^2} g^\varphi g = 1$ для любого $g \in G$. Если φ – расщепляющий автоморфизм периода n некоторой группы G , то это в точности означает, что для любого $g \in G$ в голоморфе $\text{Hol}(G)$ группы G имеет место соотношение $(\varphi g)^n = 1$, поскольку $(\varphi g)^n = \varphi^n g^{\varphi^{n-1}} \cdots g^{\varphi^2} g^\varphi g$. В частности, тождественный автоморфизм данной группы G является расщепляющим автоморфизмом периода n тогда и только тогда, когда в G выполняется тождество $x^n = 1$.

Известна теорема О. Кегела о том, что любая конечная группа, обладающая нетривиальным расщепляющим автоморфизмом простого периода, является нильпотентной группой (см. [2]). Этот результат и использует, и обобщает теорему Дж. Томпсона [3] о нильпотентности конечной группы, обладающей автоморфизмом простого порядка без неподвижных точек. Е. Хухро доказал, что любая разрешимая группа, обладающая нетривиальным расщепляющим автоморфизмом простого периода, тоже является нильпотентной группой (см. [4]).

Если Γ – произвольная группа, в которой выполняется тождественное соотношение $x^n = 1$, то в группе Γ выполняются также тождества

$$b(a^{-1}ba)(a^{-2}ba^2) \cdots (a^{-n+1}ba^{n-1}) = (ba^{-1})^n a^n, \quad a^{-n}ba^n = b.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН РА в рамках армяно-российского совместного научного проекта.

Следовательно, каждый внутренний автоморфизм $i_a \in \text{Inn}(\Gamma)$, $b^{i_a} = a^{-1}ba$, группы Γ , в которой выполняется тождество $x^n = 1$, является ее расщепляющим автоморфизмом периода n . Однако, как показывает следующий пример, обратное не верно.

ПРИМЕР (А. Таламбуца). Пусть F_2 – абсолютно свободная группа со свободными порождающими a, b , а C_n – циклическая группа порядка n с порождающим элементом c . Рассмотрим группу $\Gamma = F_2/F_2^n \times C_n$ периода n , где F_2^n – подгруппа, порожденная всевозможными n -ми степенями элементов группы F_2 . Нетрудно проверить, что при нечетных $n > 1$ автоморфизм $\alpha: \Gamma \rightarrow \Gamma$, заданный на порождающих элементах формулами $a^\alpha = ac$, $b^\alpha = bc$, $c^\alpha = c$, является расщепляющим автоморфизмом периода n . Но он – внешний автоморфизм, так как, очевидно, в группе Γ не может выполняться соотношение вида $u^{-1}au = ac$.

Мы будем исследовать обратный вопрос для расщепляющих автоморфизмов свободных бернсайдовых групп $B(m, n)$ нечетного периода $n \geq 1003$.

По определению, свободная бернсайдова группа $B(m, n)$ периода n и ранга m имеет следующее задание:

$$B(m, n) = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \mid X^n = 1 \rangle,$$

где X пробегает множество всех слов в алфавите $\{a_1^{\pm 1}, a_2^{\pm 1}, \dots, a_m^{\pm 1}\}$. Группа $B(m, n)$ есть факторгруппа свободной группы F_m ранга m по нормальной подгруппе F_m^n , порожденной всевозможными n -ми степенями элементов из F_m . Любая периодическая группа периода n с m порождающими является факторгруппой группы $B(m, n)$. Заметим, что в приведенном выше примере группа Γ является прямым произведением групп $B(2, n)$ и $B(1, n)$.

Согласно теореме С. И. Адяна, решающей известную проблему Бернсайда, при любых нечетных $n \geq 665$ и $m > 1$ группа $B(m, n)$ бесконечна. Эта теорема и ставшие уже классическими ряд основополагающих свойств групп $B(m, n)$ впервые доказаны в монографии [5], где изложен также усовершенствованный вариант теории Новикова–Адяна о свободных бернсайдовых группах достаточно большого нечетного периода (см. [6]–[8]). Всесторонний обзор результатов о свободных бернсайдовых группах и связанных с ним вопросов дан в статье С. И. Адяна [9].

В “Коуровской тетради” [10] С. В. Иванов поставил следующий вопрос. Пусть n – достаточно большое нечетное число и $m > 1$. Верно ли, что любой автоморфизм φ группы $B(m, n)$, для которого $\varphi^n = 1$ и $gg^\varphi g^{\varphi^2} \dots g^{\varphi^{n-1}} = 1$ при всяком g из $B(m, n)$, является внутренним (см. [10; вопрос 11.36, 6])? Фактически в приведенном вопросе речь идет о расщепляющих автоморфизмах периода n группы $B(m, n)$.

Нами будет доказана, что если порядок расщепляющего автоморфизма φ нечетного периода $n \geq 1003$ группы $B(m, n)$ равен простому числу, то φ – внутренний автоморфизм. Из этого, в частности, следует положительный ответ на вопрос Иванова для всех простых $n \geq 1009$.

§ 2. О монстрах Тарского

В работе С. И. Адяна и И. Г. Лысёнка [11] доказано, что для каждого $m > 1$ и нечетного $n \geq 1003$ существует такая максимальная нормальная подгруппа N свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$, что факторгруппа $B(m, n)/N$ является бесконечной группой, каждая собственная подгруппа которой содержится в некоторой циклической подгруппе порядка n . Группы, построенные в [11], называются “монстрами” Тарского, так как они положительно решают проблему А. Тарского о существовании подобных примеров групп (первые примеры монстров Тарского были построены А. Ю. Ольшанским в работе [12]). Позже, модифицируя конструкцию групп из [11], в работе [13] было показано, что для каждого нечетного $n \geq 1003$ существует континуум неизоморфных монстров Тарского периода n (см. также [14], [15]).

Обозначим через $\mathcal{M}_n$ множество всех тех максимальных нормальных подгрупп N свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$, факторгруппа $B(m, n)/N$ по каждой из которых является монстром Тарского, т.е. бесконечной группой, всякая собственная подгруппа которой содержится в некоторой циклической подгруппе периода n .

Нам понадобится следующий результат, доказанный в работе [16].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (см. [16; следствие 2]). *Пусть φ – такой автоморфизм группы $B(m, n)$, что $N^\varphi = N$ для каждой нормальной подгруппы $N \in \mathcal{M}_n$, где $n \geq 1003$ – произвольное нечетное число. Тогда φ – внутренний автоморфизм.*

Согласно предложению, чтобы показать, что некоторый автоморфизм группы $B(m, n)$ является внутренним, достаточно показать, что он стабилизирует каждую подгруппу $N \in \mathcal{M}_n$.

Если φ – автоморфизм свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$, то циклическая группа $\langle \varphi \rangle$ естественным образом действует на множестве $\mathcal{M}_n$. В § 4 будут исследованы стабилизаторы подгрупп $N \in \mathcal{M}_n$ относительно действия группы $\langle \varphi \rangle$ при расщепляющем автоморфизме φ . При этом мы будем опираться на некоторых свойствах прямых и подпрямых произведений простых неабелевых групп, которые будут доказаны в § 3.

Основной результат будет доказан в § 5.

§ 3. Подпрямые произведения неабелевых простых групп

Доказательство следующего утверждения можно найти, например, в монографии [17].

ЛЕММА 1 (см. [17; теорема 3.3.11]). *Если группа G порождается каким-то множеством своих простых нормальных подгрупп, то она разлагается в прямое произведение некоторых из этих подгрупп.*

Рассмотрим прямое произведение $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$ групп $G_1, G_2, \dots, G_k$. Через π_i обозначим проектирование прямого произведения $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$ на множитель G_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Ограничения проектирования π_i на подгруппы группы $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$ будем обозначать той же буквой π_i . Напоминаем, что

множество $\text{supp}(x) = \{i \mid x^{\pi_i} = \pi_i(x) \neq 1\}$ называется носителем элемента $x \in G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$. Подгруппа G прямого произведения $G_1 \times \cdots \times G_k$ называется *подпрямым произведением* групп $G_i, i = 1, 2, \dots, k$, если проекция G на каждый множитель G_i совпадает с G_i .

ЛЕММА 2. Пусть группа G является подпрямым произведением неабелевых простых групп $G_1, G_2, \dots, G_k$. Тогда группа G изоморфна некоторому прямому произведению $G_{i_1} \times G_{i_2} \times \cdots \times G_{i_l}$, где $i_1, i_2, \dots, i_l \in \{1, 2, \dots, k\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нормальное замыкание элемента $x \in G$ обозначим через N_x . Для любого индекса $i \in \text{supp}(x)$ элемент $\pi_i(x)$ является неединичным элементом неабелевой простой группы G_i . Следовательно, имеет место равенство $\pi_i(N_x) = G_i$, т.е. проектирование $\pi_i: N_x \rightarrow G_i$ является эпиморфизмом при $i \in \text{supp}(x)$. Поэтому, если для некоторого $i \in \text{supp}(x)$ отображение $\pi_i: N_x \rightarrow G_i$ – мономорфизм, то оно является изоморфизмом.

Пусть множество M состоит из всех тех неединичных элементов x группы G , для которых при любом $i \in \text{supp}(x)$ проектирование $\pi_i: N_x \rightarrow G_i$ является мономорфизмом. Когда носитель элемента x состоит из одного индекса, скажем, $\text{supp}(x) = \{i\}$, то

$$N_x = \{e_1\} \times \cdots \times \{e_{i-1}\} \times G_i \times \{e_{i+1}\} \times \cdots \times \{e_k\}, \quad x \in M.$$

Из определения множества M вытекает, что если $x \in M$, то N_x – простая группа, и поэтому если выполнено $y \in N_x \setminus \{1\}$, то $N_y = N_x$ и $y \in M$. Если же $x \notin M$ и $x \neq 1$, то существует индекс $j \in \text{supp}(x)$ и два различных элемента $y, z \in N_x$ такие, что $\pi_j(y) = \pi_j(z)$. Следовательно, имеем $y^{-1}z \in N_x \setminus \{1\}$, $j \notin \text{supp}(y^{-1}z)$ и $j \in \text{supp}(x)$. Итак, для некоторого элемента $a_1 = y^{-1}z \in N_x \setminus \{1\}$ имеем $N_{a_1} = N_x$ и $\text{supp}(a_1) \subsetneq \text{supp}(x)$. Повторив эти рассуждения для элемента a_1 и т.д., мы не более чем через $|\text{supp}(x)| - 1$ шагов ($\text{supp}(x)$ – конечное множество) найдем такой элемент $a_l \in N_x$, что

$$\text{supp}(a_l) \subsetneq \cdots \subsetneq \text{supp}(a_1) \subsetneq \text{supp}(x)$$

и $a_l \in M$.

Индукцией по $|\text{supp}(x)|$ докажем, что для любого элемента $x \in G$ существуют элементы $y_1, y_2, \dots, y_t \in M$ такие, что $x = y_1 y_2 \cdots y_t$.

Как было отмечено, если $|\text{supp}(x)| = 1$, то $x \in M$. Пусть теперь $\text{supp}(x) = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}$, $s > 1$ и $x = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_s}$, где $x_{i_j} \in G_{i_j}$, $j = 1, \dots, s$. Если $x \in M$, то утверждение верно. Если же $x \notin M$, то, как было показано выше, найдется такой элемент $b \in N_x$, что $\text{supp}(b) \subsetneq \text{supp}(x)$ и $b \in M$. Без ограничения общности можно считать, что $\text{supp}(b) = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ и b имеет вид $b = b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_p}$, где $p < s$ и $b_{i_j} \in G_{i_j}$, $j = 1, \dots, p$. Поскольку проектирование $\pi_{i_1}: N_b \rightarrow G_{i_1}$ – эпиморфизм, то для некоторого $c \in N_b$ имеем $\pi_{i_1}(c) = x_{i_1}$. Тогда $\text{supp}(xc^{-1}) \subset \{i_2, \dots, i_s\}$, т.е. $|\text{supp}(xc^{-1})| < s$. По индуктивному предположению тогда существуют элементы $y_1, y_2, \dots, y_t \in M$ такие, что $xc^{-1} = y_1 y_2 \cdots y_t$. Остается воспользоваться тем, что из $b \in M$ и $c \in N_b \setminus \{1\}$ следует $c \in M$.

Таким образом, мы показали, что группа G порождается множеством своих нормальных подгрупп N_x , $x \in M$, причем каждая подгруппа N_x изоморфна

одной из простых групп G_i . В силу леммы 1 группа G разлагается в прямое произведение некоторых из этих подгрупп.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть группа G является подпрямым произведением неабелевых простых групп $G_1, G_2, \dots, G_k$ и множество M состоит из всех тех неединичных элементов x группы G , для которых при любом $i \in \text{supp}(x)$ проектирование $\pi_i: N_x \rightarrow G_i$ является изоморфизмом (через N_x обозначено нормальное замыкание элемента $x \in G$). Тогда для некоторых элементов $x_i \in M$, $i = 1, 2, \dots, l$, группа G разлагается в прямое произведение нормальных подгрупп $N_{x_1}, N_{x_2}, \dots, N_{x_l}$.

ЛЕММА 3. Пусть $\varphi: G \rightarrow G$ – произвольный автоморфизм и N – такая нормальная подгруппа группы G , что факторгруппа G/N является неабелевой простой группой. Тогда, если подгруппы $N, N^\varphi, \dots, N^{\varphi^{k-1}}$ попарно различны, а $N^{\varphi^k} = N$, то факторгруппа $G/\bigcap_{i=1}^k N^{\varphi^i}$ разлагается в прямое произведение своих нормальных подгрупп $N_j/\bigcap_{i=1}^k N^{\varphi^i}$, $j = 1, 2, \dots, k$, где $N_j = \bigcap_{i=1, i \neq j}^k N^{\varphi^i}$ и каждая факторгруппа $N_j/\bigcap_{i=1}^k N^{\varphi^i}$ изоморфна группе G/N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пересечение $K = \bigcap_{i=1}^k N^{\varphi^i}$ нормальных подгрупп $N, N^\varphi, \dots, N^{\varphi^{k-1}}$. По теореме Ремака группа G/K изоморфна подпрямому произведению групп G/N^{φ^i} , $i = 1, 2, \dots, k$. Точнее, отображение

$$\rho: G/K \rightarrow G/N \times G/N^\varphi \times \dots \times G/N^{\varphi^{k-1}},$$

задаваемое формулой $\rho(xK) = (xN, xN^\varphi, \dots, xN^{\varphi^{k-1}})$, является мономорфизмом. В частности, если $x \notin K$, то для некоторого j имеем $x \notin N^{\varphi^j}$. Каждая группа $G_i = G/N^{\varphi^i} = G^{\varphi^i}/N^{\varphi^i}$, очевидно, изоморфна группе G/N и, тем самым, является неабелевой простой группой. В силу следствия 1 группа G/K разлагается в прямое произведение подгрупп вида $N_{x_1K}, N_{x_2K}, \dots, N_{x_sK}$, где каждая подгруппа N_{x_iK} – нормальное замыкание некоторого элемента $x_iK \in M \subset G/K$ и изоморфна группе G/N . Согласно определению множества M если $xK \in M$, то $x \notin K$ и $\pi_j: N_{xK} \rightarrow G/N^{\varphi^j}$ является изоморфизмом для любого $j \in \text{supp}(\rho(xK))$.

Покажем, что если $xK \in M$, то существует единственное j , для которого выполнено $x \notin N^{\varphi^j}$. Пусть $1 \leq j < t \leq k$ и имеют место соотношения $xK \in M$, $x \notin N^{\varphi^j}$, $x \notin N^{\varphi^t}$. Из этого вытекает, что $j, t \in \text{supp}(\rho(xK))$, и поэтому проектирования $\pi_j: N_{xK} \rightarrow G/N^{\varphi^j}$ и $\pi_t: N_{xK} \rightarrow G/N^{\varphi^t}$ являются изоморфизмами. Следовательно, сопоставление $gN^{\varphi^j} \mapsto gN^{\varphi^t}$ тоже является изоморфизмом из группы G/N^{φ^j} на группу G/N^{φ^t} . Но это означает, что $N^{\varphi^j} = N^{\varphi^t}$, т.е. $N^{\varphi^{t-j}} = N$. Полученное противоречие с условием леммы доказывает, что если $xK \in M$, то для некоторого однозначно определенного j имеем $x \notin N^{\varphi^j}$ и $x \in N_j = \bigcap_{i=1, i \neq j}^k N^{\varphi^i}$. В частности, $\text{supp}(\rho(xK)) = \{j\}$.

По определению имеем, что $x_1K, x_2K, \dots, x_sK \in M$. Если, скажем, $x_i \notin N^{\varphi^j}$, то $x_i \in N_j$, следовательно, факторгруппа $N_jN^{\varphi^j}/N^{\varphi^j}$ – нетривиальная нормальная подгруппа простой группы G/N^{φ^j} . Поэтому имеет место равенство $N_jN^{\varphi^j}/N^{\varphi^j} = G/N^{\varphi^j}$. В силу изоморфизма $N_jN^{\varphi^j}/N^{\varphi^j} \simeq N_j/N_j \cap N^{\varphi^j} = N_j/K$

получаем, что факторгруппа N_j/K , как и подгруппа N_{x_iK} , является неабелевой простой нормальной подгруппой группы G/K . Так как $x_iK \in (N_j/K) \cap N_{x_iK}$, то получаем равенство $N_j/K = N_{x_iK}$, причем $\text{supp}(\rho(x_iK)) = \{j\}$. Таким образом, каждая из групп N_{x_iK} , $i = 1, 2, \dots, s$, совпадает с одной из групп N_j/K , $j = 1, 2, \dots, k$.

Поскольку группа G/K разлагается в прямое произведение подгрупп N_{x_1K} , $N_{x_2K}, \dots, N_{x_sK}$ и носитель каждого элемента $\rho(x_iK)$ состоит из одного индекса, то носители элементов $\rho(x_1K), \rho(x_2K), \dots, \rho(x_sK)$ – попарно различные элементы множества индексов $\{1, 2, \dots, k\}$. Наконец, так как G/K изоморфна подпрямому произведению k простых групп, то $s = k$.

§ 4. Стабилизаторы подгрупп $N \in \mathcal{M}_n$

ЛЕММА 4. *Если φ – произвольный нетривиальный расщепляющий автоморфизм периода n группы $B(m, n)$, то стабилизатор любой нормальной подгруппы $N \in \mathcal{M}_n$ относительно действия циклической группы $\langle \varphi \rangle$ не тривиален при любом нечетном $n \geq 1003$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть порядок расщепляющего автоморфизма φ равен $r > 1$ и стабилизатор некоторой нормальной подгруппы $N \in \mathcal{M}_n$ относительно действия циклической группы $\langle \varphi \rangle$ тривиален, т.е. подгруппы $N, N^\varphi, \dots, N^{\varphi^{r-1}}$ попарно различные. Покажем, что последнее предположение приведет к противоречию.

Из условия $\varphi^r = 1$ следует, что $N^{\varphi^r} = N$. Кроме того, так как $\varphi^n = 1$, то n делится на r .

Рассмотрим нормальную подгруппу $K = \bigcap_{i=1}^r N^{\varphi^i}$. Согласно лемме 3 факторгруппа $B(m, n)/K$ разлагается в прямое произведение неабелевых простых подгрупп $N_1/K, N_2/K, \dots, N_r/K$, где $N_j = \bigcap_{i=1, i \neq j}^r N^{\varphi^i}$, $j = 1, 2, \dots, r$. Легко проверить, что $N_j^{\varphi^t} = N_s$, где $t + j \equiv s \pmod{r}$.

По той же лемме 3 факторгруппа N_r/K изоморфна группе $B(m, n)/N$, где $N \in \mathcal{M}_n$. Поэтому, существует элемент $x \in B(m, n)$ такой, что

$$x \in N_r = \bigcap_{i=1}^{r-1} N^{\varphi^i}, \quad x \notin K = \bigcap_{i=1}^r N^{\varphi^i} = N_r \cap N$$

и элемент xK имеет порядок n в группе N_r/K . Так как $x \notin K$, то $x \notin N$. Кроме того, из условия $x \in N_r \setminus K$ следует, что имеют место соотношения $x^{\varphi^t} \in N_t$ и $x^{\varphi^t} \notin K$, $t = 1, \dots, r$.

По условию теоремы имеем

$$xx^\varphi x^{\varphi^2} \dots x^{\varphi^{n-1}} = 1. \quad (1)$$

Так как $\varphi^r = 1$, то

$$xx^\varphi x^{\varphi^2} \dots x^{\varphi^{n-1}} = (xx^\varphi x^{\varphi^2} \dots x^{\varphi^{r-1}})^{n/r}. \quad (2)$$

Очевидно, в группе $B(m, n)/K$ выполнено равенство

$$xx^\varphi x^{\varphi^2} \dots x^{\varphi^{r-1}} K = xKx^\varphi Kx^{\varphi^2} K \dots x^{\varphi^{r-1}} K.$$

Поскольку факторгруппа $B(m, n)/K$ разлагается в прямое произведение подгрупп $N_1/K, N_2/K, \dots, N_r/K$ и $x^{\varphi^t} \in N_t$ при $t = 1, \dots, r$, то имеет место равенство

$$(xKx^{\varphi}Kx^{\varphi^2}K \dots x^{\varphi^{r-1}}K)^{n/r} = (xK)^{n/r}(x^{\varphi}K)^{n/r}(x^{\varphi^2}K)^{n/r} \dots (x^{\varphi^{r-1}}K)^{n/r}.$$

Таким образом, из равенств (1), (2) следуют равенства

$$xx^{\varphi}x^{\varphi^2} \dots x^{\varphi^{n-1}}K = (x)^{n/r}K(x^{n/r})^{\varphi}K(x^{n/r})^{\varphi^2}K \dots (x^{n/r})^{\varphi^{r-1}}K = K. \quad (3)$$

Множители произведения

$$(x)^{n/r}K(x^{n/r})^{\varphi}K(x^{n/r})^{\varphi^2}K \dots (x^{n/r})^{\varphi^{r-1}}K$$

принадлежат различным прямым множителям группы $B(m, n)/K$, и поэтому из 3 следует что все они тривиальны, т.е. имеют место равенства

$$x^{n/r}K = K, (x^{n/r})^{\varphi}K = K, \dots, (x^{n/r})^{\varphi^{r-1}}K = K.$$

В частности, имеем $x^{n/r}K = K$, где $r > 1$. Но это противоречит тому, что элемент xK имеет порядок n в группе N_r/K . Полученное противоречие доказывает лемму.

§ 5. Основной результат

ТЕОРЕМА. Пусть φ есть расщепляющий автоморфизм периода n группы $B(m, n)$, где $n \geq 1003$ – произвольное нечетное число. Тогда, если порядок автоморфизма φ – простое число, то φ – внутренний автоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть порядок автоморфизма φ равен p , где p – некоторое простое число. В силу леммы 4 стабилизатор любой нормальной подгруппы $N \in \mathcal{M}_n$ – нетривиальная подгруппа группы $\langle \varphi \rangle$. Но так как порядок группы $\langle \varphi \rangle$ есть простое число, то стабилизатор любой нормальной подгруппы $N \in \mathcal{M}_n$ совпадает с $\langle \varphi \rangle$. В частности, имеет место равенство $N^{\varphi} = N$ для любого $N \in \mathcal{M}_n$. Поэтому согласно предложению автоморфизм φ является внутренним автоморфизмом.

СЛЕДСТВИЕ 2. При любом $m > 1$ и простом $n \geq 1009$ каждый расщепляющий автоморфизм периода n группы $B(m, n)$ является внутренним автоморфизмом.

Список литературы

- [1] Ю. М. Горчаков, “О бесконечных группах Фробениуса”, *Алгебра и логика*, **4**:1 (1965), 15–29.
- [2] О. Н. Kegel, “Die Nilpotenz der H_p -Gruppen”, *Math. Z.*, **75**:1 (1961), 373–376.
- [3] J. Thompson, “Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **45** (1959), 578–581.

- [4] Е. И. Хухро, “Нильпотентность разрешимых групп, допускающих расщепляющий автоморфизм простого порядка”, *Алгебра и логика*, **19**:1 (1980), 118–129; англ. пер.: E.I. Khukhro, “Nilpotency of solvable groups admitting a splitting automorphism of prime order”, *Algebra and Logic*, **19**:1 (1980), 77–84.
- [5] С. И. Адян, *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, Наука, М., 1975; англ. пер.: S.I. Adian, *The Burnside problem and identities in groups*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **95**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979.
- [6] П. С. Новиков, С. И. Адян, “О бесконечных периодических группах. I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:1 (1968), 212–244; англ. пер.: P.S. Novikov, S.I. Adjan, “Infinite periodic groups. I”, *Math. USSR-Izv.*, **2**:1 (1968), 209–236.
- [7] П. С. Новиков, С. И. Адян, “О бесконечных периодических группах. II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:2 (1968), 251–524; англ. пер.: P.S. Novikov, S.I. Adjan, “Infinite periodic groups. II”, *Math. USSR-Izv.*, **2**:2 (1968), 241–479.
- [8] П. С. Новиков, С. И. Адян, “О бесконечных периодических группах. III”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:3 (1968), 709–731; англ. пер.: P.S. Novikov, S.I. Adjan, “Infinite periodic groups. III”, *Math. USSR-Izv.*, **2**:3 (1968), 665–685.
- [9] С. И. Адян, “Проблема Бернсайда и связанные с ней вопросы”, *УМН*, **65**:5 (2010), 5–60; англ. пер.: S.I. Adian, “The Burnside problem and related topics”, *Russian Math. Surveys*, **65**:5 (2010), 805–855.
- [10] В. Д. Мазуров, Ю. И. Мерзляков, В. А. Чиркин, *Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп*, изд. 11, Изд-во Ин-та матем. СО АН СССР, Новосибирск, 1990.
- [11] С. И. Адян, И. Г. Лысёнок, “О группах, все собственные подгруппы которых конечные циклические”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:5 (1991), 933–990; англ. пер.: S.I. Adyan, I.G. Lysënok, “On groups all of whose proper subgroups are finite cyclic”, *Math. USSR-Izv.*, **39**:2 (1992), 905–957.
- [12] А. Ю. Ольшанский, “Группы ограниченного периода с подгруппами простого порядка”, *Алгебра и логика*, **21**:5 (1982), 553–618; англ. пер.: A.Yu. Ol’shanskii, “Groups of bounded period with subgroups of prime order”, *Algebra and Logic*, **21**:5 (1982), 369–418.
- [13] В. С. Атабекян, “О периодических группах нечетного периода $n \geq 1003$ ”, *Матем. заметки*, **82**:4 (2007), 495–500; англ. пер.: V.S. Atabekyan, “On periodic groups of odd period $n \geq 1003$ ”, *Math. Notes*, **82**:4 (2007), 443–447.
- [14] В. С. Атабекян, “О простых и свободных периодических группах”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1987, № 6, 76–78; англ. пер.: V.S. Atabekyan, “Simple and free periodic groups”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **42**:6 (1987), 80–82.
- [15] В. С. Атабекян, “О нормальных подгруппах в периодических произведениях С. И. Адяна”, *Алгоритмические вопросы алгебры и логики*, Тр. МИАН, **274**, МАИК, М., 2011, 15–31; англ. пер.: V.S. Atabekyan, “On normal subgroups in the periodic products of S.I. Adian”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **274** (2011), 9–24.
- [16] В. С. Атабекян, “Нормальные автоморфизмы свободных бернсайдовых групп”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:2 (2011), 3–18; англ. пер.: V.S. Atabekyan, “Normal automorphisms of free Burnside groups”, *Izv. Math.*, **75**:2 (2011), 223–237.
- [17] D.J.S. Robinson, *A course in the theory of groups*, Grad. Texts in Math., **80**, Springer-Verlag, New York, 1996.

В. С. Атабекян (V. S. Atabekyan)

Ереванский государственный университет, Армения

E-mail: avarujan@ysu.am

Поступила в редакцию

30.06.2011 и 10.07.2012