Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Лебедев, О функциях из L^2 с ограниченным спектром, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 11, 121–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7906>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 12:00:06

УДК 517.51+517.54

В. В. Лебедев

О функциях из L^2 с ограниченным спектром

Рассматривается класс $PW(\mathbb{R}^n)$ функций из $L^2(\mathbb{R}^n)$, преобразование Фурье которых имеет ограниченный носитель. Получено описание непрерывных отображений $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ таких, что $f \circ \varphi \in PW(\mathbb{R}^m)$ для любой функции $f \in PW(\mathbb{R}^n)$. Лишь инъективные аффинные отображения φ обладают этим свойством.

Библиография: 5 названий.

Ключевые слова: преобразование Фурье, функции с ограниченным спектром, операторы суперпозиции.

Пусть $PW(\mathbb{R}^n)$ – класс функций f вида

$$f(t) = \int_B g(u) e^{i(u,t)} du, \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

где g – произвольная функция из $L^2(\mathbb{R}^n)$ и $B \subset \mathbb{R}^n$ – произвольный шар $((u, t)$ означает скалярное произведение). При $n = 1$ соответствующий класс рассматривался Н. Винером и Р. Пэли в [1]. Отметим, что функции класса PW возникают в задачах обработки сигналов (в этой связи см., например, библиографию работы [2]) и часто называются сигналами в ограниченном диапазоне (bandlimited signals).

Ясно, что функция f принадлежит $PW(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда она непрерывна, принадлежит $L^2(\mathbb{R}^n)$ и имеет ограниченный спектр, т.е. ее преобразование Фурье $\widehat{f}$ аннулируется вне некоторого шара. Для всякой такой функции f имеем $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(u) e^{i(u,t)} du, \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – невырожденное аффинное отображение. Легко видеть, что тогда для любой функции $f \in PW(\mathbb{R}^n)$ суперпозиция $(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t))$ также принадлежит $PW(\mathbb{R}^n)$. Достаточно заметить, что если $\varphi(t) = At + b$, где A – обратимая $(n \times n)$ -матрица и $b \in \mathbb{R}^n$, то

$$|\widehat{f \circ \varphi}(u)| = |\det A|^{-1} |\widehat{f}((A^{-1})^* u)| \quad (1)$$

для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Здесь A^{-1} – матрица, обратная к A , и $(A^{-1})^*$ – матрица, сопряженная к A^{-1} .

В работе [2] Ш. Азизи, Д. Кокрэйи и Дж. Н. Макдональд показали, что если φ – гомеоморфизм прямой $\mathbb{R}$ на себя такой, что для любой функции $f \in PW(\mathbb{R})$

мы имеем $f \circ \varphi \in PW(\mathbb{R})$, то отображение φ аффинно. Эти же авторы поставили вопрос (см. [3]) о том, верно ли аналогичное утверждение в многомерном случае. В настоящей работе мы покажем, в частности, что ответ на этот вопрос положителен, причем это верно не только для гомеоморфизмов, но вообще для произвольных непрерывных отображений $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Более того, мы дадим описание непрерывных отображений $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ таких, что для всякой функции $f \in PW(\mathbb{R}^n)$ имеем $f \circ \varphi \in PW(\mathbb{R}^m)$.

Пусть $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ – аффинное отображение. Имеем $\varphi(t) = At + b$, где A есть $(n \times m)$ -матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Ясно, что отображение φ инъективно тогда и только тогда, когда ядро

$$\ker A = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = 0\}$$

матрицы A тривиально, т.е. $\ker A = \{0\}$.

ТЕОРЕМА. Пусть φ – непрерывное отображение $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Следующие условия эквивалентны:

- (i) для любой функции $f \in PW(\mathbb{R}^n)$ суперпозиция $f \circ \varphi$ принадлежит $PW(\mathbb{R}^m)$;
- (ii) φ – инъективное аффинное отображение.

Отметим, что из этой теоремы немедленно следует, что при $n < m$ не существует непрерывных отображений $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ таких, что для любой функции $f \in PW(\mathbb{R}^n)$ суперпозиция $f \circ \varphi$ принадлежит $PW(\mathbb{R}^m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Сначала докажем импликацию (i) $\implies$ (ii). Напомним, что целая (т.е. аналитическая в комплексной плоскости $\mathbb{C}$) функция f называется функцией экспоненциального типа, если $|f(z)| = O(e^{b|z|})$, $z \in \mathbb{C}$, где b – положительная константа. Хорошо известно, что для всякой такой функции f с нулями $\{z_k, k = 1, 2, \dots\}$ имеем

$$f(z) = e^{c_0 + c_1 z} \Pi(z),$$

где

$$\Pi(z) = z^m \prod_{k: z_k \neq 0} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{z/z_k}$$

– каноническое произведение, построенное по нулям $\{z_k\}$ функции f с учетом их кратности (это частный случай теоремы Адамара о разложении на множители; см., например, [4; гл. VIII]).

ЛЕММА 1. Пусть $A(z), B(z), C(z), D(z)$ – целые функции, причем C и D имеют экспоненциальный тип. Пусть функции A и C не равны тождественно нулю. Предположим, что ψ – непрерывная вещественная функция на $\mathbb{R}$ такая, что при всех вещественных x выполняются соотношения

$$A(x)\psi(x) = B(x), \tag{2}$$

$$C(x)e^{i\psi(x)} = D(x). \tag{3}$$

Тогда ψ – линейная (аффинная) функция, $\psi(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно (см. (3)), что функция $D(z)$ не равна тождественно нулю. Обозначим через $\mathcal{N}$ объединение множеств нулей функций $A(z), C(z), D(z)$. Множество $\mathcal{N} \subset \mathbb{C}$ состоит из изолированных точек.

Из соотношений (2) и (3) получаем

$$e^{iB(x)/A(x)} = \frac{D(x)}{C(x)}$$

при всех $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}$. Следовательно (в силу теоремы единственности; см., например, [5; гл. III, § 6]), при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{N}$ имеем

$$e^{iB(z)/A(z)} = \frac{D(z)}{C(z)}, \quad (4)$$

$$e^{-iB(z)/A(z)} = \frac{C(z)}{D(z)}. \quad (5)$$

Особые точки функций $B/A, D/C, C/D$ являются либо устранимыми, либо полюсами. Из соотношения (4) следует, что каждый полюс функции B/A , если бы такой существовал, являлся бы существенно особой точкой функции D/C , что невозможно. Поэтому B/A имеет лишь устранимые особые точки. Тогда в силу (4), (5) особые точки функций D/C и C/D также являются устранимыми и, следовательно, нули функций C и D совпадают с учетом кратности. Обозначая через Π каноническое произведение, построенное по этим нулям, и учитывая, что функции C и D имеют экспоненциальный тип, получаем

$$C(z) = e^{\gamma(z)} \Pi(z), \quad D(z) = e^{\delta(z)} \Pi(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

где γ и δ – линейные функции от z . Соотношение (4) дает

$$e^{iB(z)/A(z)} = \frac{D(z)}{C(z)} = e^{\delta(z) - \gamma(z)}$$

при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{N}$. Поэтому при $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}$ имеем (см. (2))

$$e^{i\psi(x)} = e^{il(x)}, \quad (6)$$

где $l(x) = -i(\delta(x) - \gamma(x))$ – линейная функция. Поскольку функция ψ непрерывна и множество $\mathcal{N}$ не более чем счетно, соотношение (6) имеет место при всех $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\psi(x) = l(x) + 2\pi k(x)$, $x \in \mathbb{R}$, где $k(x)$ принимает только целые вещественные значения. В силу непрерывности функции ψ функция $k(x)$ постоянная. Лемма доказана.

Следующая лемма тривиальна.

ЛЕММА 2. Пусть $f \in PW(\mathbb{R}^n)$. Пусть $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – аффинное отображение. Тогда существует целая функция $F(z)$ экспоненциального типа такая, что $F(x) = f \circ l(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$l(x) = a + xb, \quad x \in \mathbb{R},$$

где a и b – некоторые векторы из $\mathbb{R}^n$. Пусть $B = B(0, r)$ – шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в 0 и радиуса r , содержащий носитель преобразования Фурье $\widehat{f}$ функции f . Положим

$$F(z) = \int_B \widehat{f}(u) e^{i(u,a)} e^{iz(u,b)} du, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ясно что $F(x) = f \circ l(x)$ при $x \in \mathbb{R}$. Остается заметить, что поскольку при $u \in B$ мы имеем

$$|e^{i(u,a)} e^{iz(u,b)}| = |e^{iz(u,b)}| \leq e^{|z| |(u,b)|} \leq e^{|z|r|b|},$$

где $|b|$ – длина вектора b , то

$$|F(z)| \leq e^{r|b||z|} \int_B |\widehat{f}(u)| du \leq e^{r|b||z|} |B|^{1/2} \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

где $|B|$ – объем шара B . Лемма доказана.

Покажем, что из условия (i) теоремы следует, что отображение φ аффинно.

Для произвольного интервала $I \subset \mathbb{R}$ пусть 1_I – его характеристическая функция: $1_I(u) = 1$ при $u \in I$, $1_I(u) = 0$ при $u \notin I$.

Рассмотрим также “треугольную” функцию $\Delta_{(-2,2)}$, сосредоточенную на интервале $(-2, 2) \subset \mathbb{R}$, а именно

$$\Delta_{(-2,2)}(u) = \max\left(1 - \frac{|u|}{2}, 0\right), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Обозначая через $^\vee$ обратное преобразование Фурье, простым вычислением получаем

$$(1_{(-1,1)})^\vee(x) = \frac{2 \sin x}{x}, \quad (1_{(0,2)})^\vee(x) = e^{ix} \frac{2 \sin x}{x}, \quad (\Delta_{(-2,2)})^\vee(x) = \frac{2 \sin^2 x}{x^2},$$

$$x \in \mathbb{R},$$

где мы считаем, что

$$\left. \frac{\sin x}{x} \right|_{x=0} = 1.$$

При $1 \leq j \leq n$ рассмотрим следующие функции от $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ (произведения по пустому множеству индексов считаются равными единице):

$$k(u) = \prod_{1 \leq s \leq n} 1_{(-1,1)}(u_s),$$

$$p_j(u) = \Delta_{(-2,2)}(u_j) \prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq j}} 1_{(-1,1)}(u_s), \quad q_j(u) = 1_{(0,2)}(u_j) \prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq j}} 1_{(-1,1)}(u_s).$$

Определим функции $K, P_j, Q_j, j = 1, 2, \dots, n$, на $\mathbb{R}^n$, полагая

$$K = (k)^\vee, \quad P_j = (p_j)^\vee, \quad Q_j = (q_j)^\vee.$$

Имеем

$$K(t) = \prod_{1 \leq s \leq n} \frac{2 \sin t_s}{t_s},$$

$$P_j(t) = \frac{2 \sin^2 t_j}{t_j^2} \prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq j}} \frac{2 \sin t_s}{t_s}, \quad Q_j(t) = e^{it_j} \frac{2 \sin t_j}{t_j} \prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq j}} \frac{2 \sin t_s}{t_s},$$

$$t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Мы видим, что

$$K, P_j, Q_j \in PW(\mathbb{R}^n). \quad (7)$$

Заметим, что

$$Q_j(t) = e^{it_j} K(t), \quad t \in \mathbb{R}^n, \quad (8)$$

и поскольку

$$P_j(t) = \frac{\sin t_j}{t_j} K(t) = \frac{Q_j(t)/K(t) - K(t)/Q_j(t)}{2it_j} K(t)$$

при $t_j, K(t), Q_j(t) \neq 0$, то

$$2iP_j(t)Q_j(t)t_j = Q_j(t)^2 - K(t)^2, \quad t \in \mathbb{R}^n. \quad (9)$$

Запишем отображение $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ в виде

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)), \quad t = (t_1, t_2, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m,$$

где функции $\varphi_j: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, n$, непрерывны.

Пусть $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ — произвольное аффинное отображение.

Ясно, что сдвиг переменной сохраняет принадлежность функций классу $PW(\mathbb{R}^n)$, поэтому (см. (7)) функции

$$K(t - \varphi \circ l(0)), \quad P_j(t - \varphi \circ l(0)), \quad Q_j(t - \varphi \circ l(0)), \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

принадлежат $PW(\mathbb{R}^n)$. Из условия (i) теоремы следует, что функции

$$K(\varphi(t) - \varphi \circ l(0)), \quad P_j(\varphi(t) - \varphi \circ l(0)), \quad Q_j(\varphi(t) - \varphi \circ l(0)), \quad t \in \mathbb{R}^m,$$

принадлежат $PW(\mathbb{R}^m)$.

Рассмотрим следующие функции на $\mathbb{R}$:

$$K^*(x) = K(\varphi \circ l(x) - \varphi \circ l(0)),$$

$$P_j^*(x) = P_j(\varphi \circ l(x) - \varphi \circ l(0)), \quad Q_j^*(x) = Q_j(\varphi \circ l(x) - \varphi \circ l(0)),$$

$$x \in \mathbb{R}.$$

По лемме 2 каждая из этих функций является сужением на $\mathbb{R}$ соответствующей целой функции экспоненциального типа. Сохраняя обозначения, будем обозначать эти целые функции через $K^*(z)$, $P_j^*(z)$, $Q_j^*(z)$.

Заметим теперь, что в силу (8) и (9) мы имеем

$$Q_j^*(x) = e^{i(\varphi_j \circ l(x) - \varphi_j \circ l(0))} K^*(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

и соответственно

$$2iP_j^*(x)Q_j^*(x)[\varphi_j \circ l(x) - \varphi_j \circ l(0)] = (Q_j^*(x))^2 - (K^*(x))^2, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Заметим также, что

$$K^*(0) = K(0) \neq 0, \quad 2iP_j^*(0)Q_j^*(0) = 2iP_j(0)Q_j(0) \neq 0,$$

и, таким образом, функции K^* и $2iP_j^*Q_j^*$ не равны тождественно нулю.

Фиксируем j . Ясно, что сумма и произведение целых функций экспоненциального типа также являются целыми функциями экспоненциального типа. Из соотношений (10), (11), применяя лемму 1 к функциям

$$\begin{aligned} \psi &= \varphi_j \circ l - \varphi_j \circ l(0), \\ A &= 2iP_j^*Q_j^*, \quad B = (Q_j^*)^2 - (K^*)^2, \quad C = K^*, \quad D = Q_j^*, \end{aligned}$$

получаем, что функция $\varphi_j \circ l(x) - \varphi_j \circ l(0)$ является аффинной функцией от $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\varphi_j \circ l(x)$ является аффинной функцией от $x \in \mathbb{R}$. Поскольку аффинное отображение $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ было выбрано произвольно, получаем, что функция $\varphi_j: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ аффинна. Поскольку это верно при всех j , $1 \leq j \leq n$, видим, что $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ является аффинным отображением $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Покажем теперь, что отображение φ инъективно. Всякая функция $F \in PW(\mathbb{R}^m)$ является (обратным) преобразованием Фурье некоторой функции из $L^1(\mathbb{R}^m)$, следовательно,

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} F(t) = 0. \quad (12)$$

Пусть $\varphi(t) = At + b$, где A есть $(n \times m)$ -матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что $\ker A \neq \{0\}$. Возьмем какую-нибудь функцию $f \in PW(\mathbb{R}^n)$ с условием $f(b) \neq 0$. Пусть $F = f \circ \varphi$. При всех $t \in \ker A$ имеем

$$F(t) = f(At + b) = f(b).$$

Таким образом, суперпозиция $F = f \circ \varphi$ не удовлетворяет соотношению (12). Импликация (i) $\implies$ (ii) доказана.

Доказательство импликации (ii) $\implies$ (i) практически тривиально. Пусть $\varphi(t) = At + b$, где A есть $(n \times m)$ -матрица, $\ker A = \{0\}$, и $b \in \mathbb{R}^n$. Покажем, что для любой функции $f \in PW(\mathbb{R}^n)$ мы имеем $f \circ \varphi \in PW(\mathbb{R}^m)$.

Инъективность отображения φ может иметь место лишь при $n \geq m$. Простой случай $n = m$ уже обсуждался выше (см. (1)). Поэтому можем считать, что

$n > m$. Поскольку сдвиг сохраняет принадлежность функций классу PW , можем также считать, что $b = 0$, т.е. что $\varphi(t) = At$.

Рассмотрим образ $\text{im } \varphi$ отображения φ :

$$\text{im } \varphi = \{Ax : x \in \mathbb{R}^m\}.$$

Это m -мерное подпространство в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим также следующее подпространство L в $\mathbb{R}^n$:

$$L = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n\}.$$

Пусть S – естественное отображение $\mathbb{R}^m$ на L , а именно

$$S: (x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0).$$

Пусть K – обратимое линейное отображение $\mathbb{R}^n$ на себя такое, что $K(\text{im } \varphi) = L$. Положим $Q = S^{-1}K\varphi$. Тогда Q – обратимое линейное отображение $\mathbb{R}^m$ на себя. Имеем

$$\varphi = K^{-1}SQ$$

(через S^{-1} , K^{-1} обозначены отображения, обратные к S и K соответственно).

Таким образом, достаточно убедиться, что для любой функции $f \in PW(\mathbb{R}^n)$ мы имеем $f \circ S \in PW(\mathbb{R}^m)$. Это легко сделать следующим образом. Пусть $f \in PW(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$f(Sx) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(u) e^{i(u, Sx)} du, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Для $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ положим

$$u' = (u_1, u_2, \dots, u_m), \quad u'' = (u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_n).$$

Будем писать $u = (u', u'')$. Рассмотрим шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в 0, содержащий носитель преобразования Фурье $\hat{f}$ функции f . Пусть r – радиус этого шара. Имеем

$$f(Sx) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-m}} \hat{f}(u', u'') du'' \right) e^{i(u', x)} du' = \int_{\mathbb{R}^m} g(u') e^{i(u', x)} du',$$

где

$$g(u') = \int_{|u''| \leq \sqrt{r^2 - |u'|^2}} \hat{f}(u', u'') du''.$$

Функция g аннулируется вне шара с центром в 0 и радиуса r в $\mathbb{R}^m$. Кроме того (пользуясь неравенством Коши), получаем

$$|g(u')| \leq \int_{|u''| \leq r} |\hat{f}(u', u'')| du'' \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^{n-m}} |\hat{f}(u', u'')|^2 du'' \right)^{1/2},$$

где $c = c(r, n, m)$ зависит только от r , n , m , и мы видим, что $g \in L^2(\mathbb{R}^m)$. Теорема доказана.

Я благодарен С. В. Конягину, обратившему мое внимание на проблему.

Список литературы

- [1] Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной области*, Наука, М., 1964; пер. с англ.: R. E. A. C. Paley, N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **19**, Amer. Math. Soc., New York, 1934.
- [2] S. Azizi, D. Cochran, J. N. McDonald, “On the preservation of bandlimitedness under non-affine time warping”, *Proc. Int. Workshop on Sampling Theory and Applications* (Loen, Norway, 1999), The Norwegian Univ. of Science and Technology, 37–40.
- [3] S. Azizi, J. N. McDonald, D. Cochran, “Preservation of bandlimitedness under non-affine time warping for multi-dimensional functions”, *Twentieth century harmonic analysis – a celebration* (Il Ciocco, Italy, 2000), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001, 369.
- [4] Е. Титчмарш, *Теория функций*, ГИТТЛ, МЛ., 1951; пер. с англ.: Е. С. Titchmarsh, *The theory of functions*, Clarendon Press, Oxford, 1932.
- [5] А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950; англ. пер.: A. I. Markushevich, *The theory of analytic functions*, Hindustan Publ., Delhi, 1963.

В. В. Лебедев (V. V. Lebedev)

Московский государственный институт электроники
и математики (технический университет)

E-mail: lebedevhome@gmail.com

Поступила в редакцию

30.06.2011 и 11.04.2012