Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Захаров, Оценка ранга пересечения подгрупп в свободном произведении двух групп с объединенной нормальной конечной подгруппой, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 2, 73–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7908>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 17:19:13

УДК 512.543.5

А. О. Захаров

Оценка ранга пересечения подгрупп в свободном произведении двух групп с объединенной нормальной конечной подгруппой

Мы обобщаем оценку для ранга пересечения подгрупп в свободном произведении групп, доказанную ранее С. В. Ивановым и У. Диксом (аналог неравенства Х. Неймана в свободной группе), на случай свободного произведения двух групп с объединенной нормальной конечной подгруппой. Мы также доказываем неулучшаемость полученной оценки в случае, когда свободное произведение с объединенной подгруппой содержит инволюцию.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: свободные произведения с объединенной подгруппой, неравенство Х. Неймана.

DOI: 10.4213/sm7908

§ 1. Введение

Пусть сначала G – свободная группа, а H_1 и H_2 – конечно порожденные подгруппы в G . В 1954 г. А. Хаусон в статье [1] доказал, что в этом случае подгруппа $H_1 \cap H_2$ также конечно порождена. Далее, в 1957 г. Х. Нейман в статье [2] доказала следующую оценку для ранга пересечения подгрупп в свободной группе (неравенство Х. Неймана):

$$\bar{r}(H_1 \cap H_2) \leq 2\bar{r}(H_1)\bar{r}(H_2), \quad (1.1)$$

где $\bar{r}(H) = \max(0, r(H) - 1)$ – редуцированный ранг подгруппы H .

С. В. Иванов и У. Дикс в статьях [3]–[5] обобщили эти результаты на случай, когда G – свободное произведение групп. Будем называть свободное произведение двух групп нетривиальным, если оба его сомножителя нетривиальны. Следующая теорема доказана в [4].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $G = G_1 * G_2$ – свободное произведение групп, а H_1 и H_2 – подгруппы в G , тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям G_1 и G_2 (следовательно, по теореме Куроша [6] свободные) и конечного ранга. Тогда ранг $H_1 \cap H_2$ также конечен, причем выполняется оценка

$$\bar{r}(H_1 \cap H_2) \leq 2 \frac{q^*}{q^* - 2} \bar{r}(H_1) \bar{r}(H_2) \leq 6 \bar{r}(H_1) \bar{r}(H_2), \quad (1.2)$$

где q^* – минимальный из порядков подгрупп групп G_1 , G_2 , больших 2; если $q^* = \infty$, то $q^*/(q^* - 2) = 1$. Кроме того, первая оценка в (1.2) неулучшаема, если в G есть элемент порядка 2, свободное произведение $G = G_1 * G_2$ нетривиально и $G \not\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00945).

Как нетрудно видеть, эта теорема обобщает неравенство Х. Нейман. Нас будет интересовать дальнейшее обобщение неравенств (1.1) и (1.2) на случай свободного произведения двух групп с объединенной нормальной конечной подгруппой. Мы также рассмотрим вопрос о неумлучшаемости полученной оценки.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $G = G_1 *_T G_2$ – свободное произведение групп с объединенной нормальной конечной подгруппой T , а H_1 и H_2 – подгруппы в G , тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям G_1 и G_2 (следовательно, согласно [7] свободные) и конечного ранга. Тогда ранг $H_1 \cap H_2$ также конечен, причем выполняется оценка

$$\bar{r}(H_1 \cap H_2) \leq 2 \frac{q_f^*}{q_f^* - 2} |T| \cdot \bar{r}(H_1) \bar{r}(H_2) \leq 6 |T| \cdot \bar{r}(H_1) \bar{r}(H_2), \quad (1.3)$$

где q_f^* – минимальный из порядков подгрупп групп G_1/T , G_2/T , больших 2; $q_f^*/(q_f^* - 2) = 1$, если $q_f^* = \infty$, а $|T|$ – порядок группы T . При этом первая оценка в (1.3) неумлучшаема, если в G_1/T или G_2/T есть элемент порядка 2, свободное произведение $G_1/T * G_2/T$ нетривиально и $G_1/T * G_2/T \not\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

§ 2. Доказательство оценки теоремы 2

Докажем, что выполняется оценка (1.3).

Поскольку T – нормальная подгруппа в $G_1 *_T G_2$, мы можем рассмотреть факторизацию по ней

$$\varphi: G_1 *_T G_2 \rightarrow G_1/T * G_2/T.$$

Пусть

$$\varphi(H_1) = H'_1, \quad \varphi(H_2) = H'_2, \quad \varphi(H_1 \cap H_2) = L \subseteq H'_1 \cap H'_2.$$

Здесь последнее включение выполняется, поскольку

$$L = \varphi(H_1 \cap H_2) \subseteq \varphi(H_1) \cap \varphi(H_2) = H'_1 \cap H'_2.$$

ЛЕММА 2.1. Выполняется следующее неравенство:

$$|H'_1 \cap H'_2 : L| \leq |T|. \quad (2.1)$$

А именно все правые смежные классы $H'_1 \cap H'_2$ по L имеют вид

$$\varphi(H_1 \cap H_2 t), \quad t \in T: H_1 \cap H_2 t \neq \emptyset. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Докажем, что

$$\bigcup_{t \in T} \varphi(H_1 \cap H_2 t) = H'_1 \cap H'_2.$$

Включение $\subseteq$ верно, так как $\varphi(H_1) = H'_1$, $\varphi(H_2 t) = \varphi(H_2) = H'_2$; включение $\supseteq$ выполняется, так как

$$\begin{aligned} g' \in H'_1 \cap H'_2 &\implies g' = \varphi(h_1) = \varphi(h_2), \quad h_1 = h_2 t, \quad h_1 \in H_1, \quad h_2 \in H_2, \quad t \in T \\ &\implies g' \in \varphi(H_1 \cap H_2 t). \end{aligned}$$

б) Для каждого $t \in T$ $\varphi(H_1 \cap H_2 t)$ лежит в одном правом смежном классе по L , так как

$$\begin{aligned} a', b' \in \varphi(H_1 \cap H_2 t) &\implies a' = \varphi(a), \quad b' = \varphi(b), \quad a, b \in H_1 \cap H_2 t, \quad ab^{-1} \in H_1 \cap H_2 \\ &\implies a'(b')^{-1} = \varphi(ab^{-1}) \in \varphi(H_1 \cap H_2) = L. \end{aligned}$$

в) Наконец, $L\varphi(H_1 \cap H_2 t) = \varphi(H_1 \cap H_2)\varphi(H_1 \cap H_2 t) = \varphi(H_1 \cap H_2 t)$.

Лемма 2.1 доказана.

ЛЕММА 2.2. *Выполняется следующая оценка:*

$$\bar{r}(H_1 \cap H_2) \leq 2 \frac{q_f^*}{q_f^* - 2} |H'_1 \cap H'_2 : L| \bar{r}(H_1) \bar{r}(H_2). \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку H_1 и H_2 тривиально пересекаются с сопряженными к сомножителям, они, в частности, тривиально пересекаются с объединенной подгруппой, поэтому

$$H_1 \simeq H'_1, \quad H_2 \simeq H'_2, \quad H_1 \cap H_2 \simeq L,$$

а значит,

$$\bar{r}(H_1) = \bar{r}(H'_1), \quad \bar{r}(H_2) = \bar{r}(H'_2), \quad \bar{r}(H_1 \cap H_2) = \bar{r}(L).$$

Легко видеть, что H'_1 и H'_2 тривиально пересекаются с сопряженными к сомножителям. Так как H'_1 и H'_2 – подгруппы в свободном произведении $G_1/T * G_2/T$ (уже без объединенной подгруппы), мы можем воспользоваться теоремой 1. Из (1.2) имеем

$$\bar{r}(H'_1 \cap H'_2) \leq 2 \frac{q_f^*}{q_f^* - 2} \bar{r}(H'_1) \bar{r}(H'_2). \quad (2.4)$$

Далее, L – подгруппа в свободной группе $H'_1 \cap H'_2$, а индекс $|H'_1 \cap H'_2 : L|$ конечен в силу леммы 2.1, следовательно, согласно формуле Шрайера [8] имеем

$$\bar{r}(L) = |H'_1 \cap H'_2 : L| \bar{r}(H'_1 \cap H'_2).$$

Подставляя в (2.4), получаем требуемое неравенство (2.3).

Лемма 2.2 доказана.

Подставляя (2.1) в (2.3), мы получаем, что $r(H_1 \cap H_2)$ конечен и оценка (1.3) выполняется.

§ 3. Граф подгруппы в свободном произведении групп

Для доказательства неулучшаемости оценки теоремы 2 нам понадобится конструкция графа подгруппы в свободном произведении групп. Эта конструкция использовалась также в статьях [3], [5], [9], [10]. Здесь мы приведем основные сведения о графе подгруппы в необходимом нам случае.

Пусть $H \subseteq G = \prod^* G_\alpha$ – подгруппа в G , тривиально пересекающаяся с сопряженными к сомножителям G_α . Поставим H в соответствие граф $\Psi^*(H)$, устроенный следующим образом.

Вершины графа $\Psi^*(H)$ бывают 2 типов:

1) вершины 1-го рода отвечают правым смежным классам G по H ;

2) вершины 2-го рода, соответствующие сомножителю G_α , отвечают классам эквивалентности правых смежных классов G по H относительно следующего отношения: $Hg_1 \sim Hg_2$, если существует $c \in G_\alpha$ такое, что $Hg_1c = Hg_2$ (класс эквивалентности будем обозначать $[Hg_1]_\alpha$).

Далее, ребра графа $\Psi(H)$ устроены следующим образом: вершина 1-го рода Hg_1 соединена ребром с вершиной 2-го рода $[Hg_1]_\alpha$ для всех α .

Ориентируем теперь произвольным образом все ребра графа $\Psi^*(H)$ (если e – ребро, то под e^{-1} мы понимаем то же ребро с противоположной ориентацией) и расставим на ребрах метки следующим образом.

Пусть e_1 – ребро с концом в вершине 2-го рода $[Hg_1]_\alpha$, тогда $\varphi(e_1)$ – это элемент G_α и $\varphi(e_1^{-1}) = \varphi(e_1)^{-1}$.

Выберем метки так, что если Hg_1, Hg_2 – вершины 1-го рода, соединенные с вершиной 2-го рода $[Hg_1]_\alpha$ ребрами e_1, e_2 с метками $\varphi(e_1), \varphi(e_2)$ соответственно, то

$$Hg_1\varphi(e_1)\varphi(e_2)^{-1} = Hg_2 \quad (3.1)$$

(здесь мы считаем, что оба ребра ориентированы от вершин 1-го рода к вершине 2-го рода).

Отмеченной точкой назовем вершину 1-го рода, отвечающую подгруппе H .

Меткой пути $p = e_1 \dots e_m$ в графе $\Psi^*(H)$ назовем $\varphi(e_1) \dots \varphi(e_m)$.

Несократимым назовем путь, не содержащий подпутей вида dd^{-1} , где d – ребро.

Пусть $\Psi(H)$ – подграф в графе $\Psi^*(H)$, состоящий из объединения несократимых циклов графа $\Psi^*(H)$, объединенного (при необходимости) также с путем до отмеченной точки. Следующие 2 леммы доказаны также в статье [3].

ЛЕММА 3.1. Пусть $H \subseteq G = \prod^* G_\alpha$, w – непустое несократимое слово в алфавите $\bigcup G_\alpha$. Тогда $w \in H$ тогда и только тогда, когда в $\Psi(H)$ есть замкнутый несократимый путь с меткой w с началом в отмеченной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* w – метка пути с началом и концом в вершине 1-го рода H , значит (по построению графа из формулы (3.1)) $Hw = H$, т.е. $w \in H$.

Необходимость. $w = s_1 \dots s_k$, $s_i \in G_{\alpha_i}$. По построению графа $\Psi^*(H)$ в нем есть вершины 1-го рода $H, Hs_1, Hs_1s_2, \dots, Hs_1s_2 \dots s_k = H$ и есть путь, соединяющий $Hs_1s_2 \dots s_{j-1}$ и $Hs_1s_2 \dots s_{j-1}s_j$ с меткой s_j (это путь из 2 ребер, проходящий через вершину 2-го рода $[Hs_1s_2 \dots s_{j-1}]_{\alpha_j} = [Hs_1s_2 \dots s_{j-1}s_j]_{\alpha_j}$, легко понять, что он имеет метку s_j , так как иначе нарушалось бы условие, что подгруппа H тривиально пересекается с сопряженными к сомножителю G_{α_i}). Ясно также, что этот путь лежит в объединении несократимых циклов графа $\Psi^*(H)$ (в силу несократимости слова w), а следовательно лежит в $\Psi(H)$.

Лемма 3.1 доказана.

Далее, пусть T – максимальное поддерево в $\Psi(H)$, а C – множество ребер, не вошедших в T . Для каждого ребра e из C найдем (единственный) путь по дереву T от отмеченной точки до начала этого ребра e и (единственный) путь от конца ребра e до отмеченной точки; мы получим следующие замкнутые пути с началом в отмеченной точке:

$$q_e e r_e, \quad e \in C. \quad (3.2)$$

ЛЕММА 3.2. Пусть $H \subseteq G = \prod^* G_\alpha$ – подгруппа, тривиально пересекающаяся с сопряженными к сомножителям. Тогда H свободно порождается элементами

$$\varphi(q_e e r_e), \quad e \in C. \quad (3.3)$$

Кроме того, H имеет конечный ранг тогда и только тогда, когда граф $\Psi(H)$ конечен, и в этом случае

$$\bar{r}(H) = -\chi(\Psi(H)), \quad (3.4)$$

где $\chi(P)$ – эйлерова характеристика графа P , равная разности количества вершин и количества ребер графа P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полное доказательство приведено в [3] и опирается на тот факт, что фундаментальная группа графа $\Psi(H)$ свободно порождается путями вида (3.2). Формула (3.4) следует из того, что

$$-\chi(\Psi(H)) = |C| - 1,$$

поскольку в T входят все вершины графа $\Psi(H)$ и ребер в T на 1 меньше, чем вершин (T – дерево). Но согласно (3.3) $|C| = r(H)$ и (3.4) выполняется.

Заметим, что в случае, когда подгруппа H имеет конечный индекс в G , $\Psi(H) = \Psi^*(H)$. Это легко видеть, поскольку если бы в графе $\Psi^*(H)$ нашелся путь, не входящий в объединение несократимых циклов этого графа, то по построению нашелся бы такой бесконечный путь, что противоречит конечности индекса H (вершин 1-го рода в $\Psi^*(H)$ конечное число).

Несложно видеть также, что если подгруппа H нормальна в G , то графу $\Psi^*(H)$ можно поставить в соответствие граф Кэли группы G/H (относительно порождающих, являющихся образами при факторизации порождающих из G_α), при этом вершинам графа Кэли соответствуют вершины 1-го рода графа $\Psi^*(H)$.

§ 4. Доказательство неулучшаемости оценки теоремы 2

Снова рассмотрим факторизацию

$$\varphi: G = G_1 *_T G_2 \rightarrow G_1/T * G_2/T = G'_1 * G'_2 = G'.$$

По условию теоремы 2 в G' есть элемент порядка 2, свободное произведение $G' = G'_1 * G'_2$ нетривиально и $G' \not\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Следующая лемма доказана также в [4].

ЛЕММА 4.1. Пусть $G' = G'_1 * G'_2$, q_f^* – минимальный из порядков подгрупп групп G'_1 , G'_2 , больших 2. Пусть также в G' есть элемент порядка 2, свободное произведение $G' = G'_1 * G'_2$ нетривиально и $G' \not\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Тогда либо $q_f^* = \infty$, либо q_f^* – простое, $q_f^* > 2$, либо $q_f^* = 4$, причем G' содержит одну из следующих подгрупп:

$$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2, \quad \text{если } q_f^* = \infty, \quad (4.1)$$

$$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_p, \quad \text{если } q_f^* = p, \text{ } p \text{ простое, } p > 2, \quad (4.2)$$

$$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_4 \quad \text{или} \quad \mathbb{Z}_2 * (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2), \quad \text{если } q_f^* = 4. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что q_f^* равно ∞ , 4 или простое, следует из определения q_f^* и теорем Силова.

Пусть a – элемент порядка 2 в G' , тогда можно считать, что он лежит в одном из сомножителей, пусть для определенности $a \in G'_1$. Если $q_f^* < \infty$, то пусть Q – подгруппа G'_1 или G'_2 , состоящая из q_f^* элементов. Тогда подгруппа $\langle bab^{-1} \rangle * Q$, где $b \in G'_2$, $b \neq 1$, имеет искомый вид (4.2) или (4.3).

Если же $q_f^* = \infty$, то подгруппа $\langle a \rangle * \langle bab^{-1} \rangle * \langle cac^{-1} \rangle$, где $b, c \in G'_2$, $b, c \neq 1$, $b \neq c$, имеет искомый вид (4.1) (можно считать, что в G'_2 есть по крайней мере 3 различных элемента, так как $G' \not\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$).

Лемма 4.1 доказана.

Мы хотим доказать, что в рассматриваемом нами случае первая оценка в (1.3) неулущаема. Ясно, что мы можем перейти к подгруппе вида (4.1), (4.2) или (4.3) в G' и к ее полному прообразу при гомоморфизме φ в G и ограничить факторизацию φ на этот прообраз. Поэтому достаточно доказать неулущаемость первой оценки в (1.3) (т.е. привести примеры соответствующих подгрупп H_1 и H_2) в том случае, когда G' есть одна из групп вида (4.1), (4.2) или (4.3).

Из доказательства § 2 видно, что первое неравенство в (1.3) обращается в равенство тогда и только тогда, когда в равенство обращаются неравенства (2.4) и (2.1). Будем действовать следующим образом: для каждого $n = |T|$ сначала для каждой из групп вида (4.1), (4.2) и (4.3) построим в ней некоторые (свободные) подгруппы конечного индекса H'_1 и H'_2 такие, что для них достигается равенство в (2.4), а затем выберем некоторым образом прообразы свободных порождающих этих подгрупп при факторизации φ так, чтобы достигалось равенство в (2.1) для полученных прообразов H_1 и H_2 . Более строго этот процесс будет описан далее.

Нам понадобится следующая лемма, доказанная также в статье [4].

ЛЕММА 4.2. Пусть H'_1 и H'_2 – подгруппы конечного индекса в G' , тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям, G' есть одна из групп вида (4.1), (4.2) или (4.3). Тогда равенство в (2.4) достигается тогда и только тогда, когда

$$|G' : H'_1 \cap H'_2| = |G' : H'_1| \cdot |G' : H'_2|. \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сперва, что в силу (3.4)

$$\bar{\tau}(H') = -\chi(\Psi(H')) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(\Psi(H'))} (\deg v - 2), \quad (4.5)$$

где $H' \subseteq G'$, $V(\Psi(H'))$ – множество вершин графа $\Psi(H')$. Обозначим также через $U(\Psi(H'))$ множество вершин 1-го рода в $\Psi(H')$, а через $V_p(\Psi(H'))$ – множество вершин степени p в $\Psi(H')$. Ясно, что $|U(\Psi(H'))| = |G' : H'|$.

Здесь и далее под подгруппой H' мы будем понимать одну из подгрупп H'_1 , H'_2 или $H'_1 \cap H'_2$ в G' (все они имеют конечный индекс в G' и тривиально пересекаются с сопряженными к сомножителям G').

Рассмотрим сначала случай, когда G' имеет вид (4.2) или (4.3). Тогда вершины 1-го рода графа $\Psi(H')$ имеют степень 2, вершины 2-го рода этого графа, относящиеся к сомножителю $\mathbb{Z}_2$, также имеют степень 2, а вершины 2-го рода, относящиеся к другому сомножителю, имеют степень p , где p простое или

равно 4. Заметим, что вершины степени 2 не дадут вклада в сумму в правой части (4.5), поэтому получим

$$\bar{r}(H') = \frac{p-2}{2} |V_p(\Psi(H'))|.$$

Далее, каждая вершина 1-го рода соединена ровно с одной вершиной (2-го рода) степени p , следовательно,

$$|G' : H'| = |U(\Psi(H'))| = p |V_p(\Psi(H'))| = \frac{2p}{p-2} \bar{r}(H').$$

Подставляя это выражение в (4.4) (для каждого из 3 индексов) и учитывая, что $q^* = p$, получаем, что в данном случае (4.4) эквивалентно равенству в (2.4).

Остается рассмотреть случай, когда $G' = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, $q^* = \infty$. В этом случае все вершины 2-го рода в графе $\Psi(H')$ имеют степень 2 и потому не дают вклада в сумму в правой части (4.5), а все вершины 1-го рода имеют степень 3, поэтому получаем

$$\bar{r}(H') = \frac{|V_3(\Psi(H'))|}{2} = \frac{|U(\Psi(H'))|}{2} = \frac{|G' : H'|}{2},$$

т.е. $|G' : H'| = 2\bar{r}(H')$. Подставляя это выражение в (4.4) (для каждого из 3 индексов) и учитывая, что $q^*/(q^* - 2) = 1$, получаем, что в этом случае также (4.4) эквивалентно равенству в (2.4).

Лемма 4.2 доказана.

Далее, общеизвестна следующая

ЛЕММА 4.3. Пусть

$$H'_1 \triangleleft G', \quad H'_1 H'_2 = G'. \quad (4.6)$$

Тогда $|G' : H'_1 \cap H'_2| = |G' : H'_1| \cdot |G' : H'_2|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$G'/H'_1 = (H'_1 H'_2)/H'_1 \cong H'_2/(H'_1 \cap H'_2),$$

т.е. $|G' : H'_1| = |H'_2 : H'_1 \cap H'_2|$, а значит

$$|G' : H'_1 \cap H'_2| = |G' : H'_2| \cdot |H'_2 : H'_1 \cap H'_2| = |G' : H'_2| \cdot |G' : H'_1|.$$

Лемма 4.3 доказана.

Таким образом, из лемм 4.2 и 4.3 мы получаем, что в рассматриваемом случае условие (4.6) является достаточным для достижения равенства в (2.4).

Заметим теперь, что неравенство (2.1) обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$H_1 \cap H_2 t \neq \emptyset \quad \forall t \in T. \quad (4.7)$$

Это следует из леммы 2.1. Действительно, пусть выполнено условие (4.7). Тогда согласно лемме 2.1 каждое из множеств $\varphi(H_1 \cap H_2 t)$, $t \in T$, представляет из себя правый смежный класс $H'_1 \cap H'_2$ по L (в обозначениях § 2), следовательно, таких смежных классов имеется ровно $|T|$, т.е. (2.1) обращается в равенство. Обратно, если (2.1) обращается в равенство, то согласно лемме 2.1 все множества $\varphi(H_1 \cap H_2 t)$, $t \in T$, должны быть непусты, т.е. должно выполняться условие (4.7).

Условие (4.7) выполняется, если

$$T \subseteq H_1 H_2. \quad (4.8)$$

Таким образом, в примерах, которые будут построены далее, достаточно проверять выполнение равенств (4.6) и (4.8), а также тот факт, что обе подгруппы H'_1 и H'_2 имеют конечный индекс в G' и тривиально пересекаются с сопряженными к сомножителям G' , тогда будет достигаться равенство и в первой оценке (1.3).

Перейдем теперь к конкретному построению примеров. Пусть $|T| = n$.

Случай 1. Пусть сначала

$$G' = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_p \cong \langle a, b \mid a^p = b^2 = 1 \rangle,$$

где p простое, $p > 2$.

Построим сначала подгруппу H'_1 .

Рассмотрим

$$G'_0 = \langle \langle (ab)^6 \rangle \rangle \subseteq G', \quad R = G'/G'_0 \cong \langle a, b \mid a^p = b^2 = (ab)^6 = 1 \rangle = T(p, 2, 6).$$

Это треугольная группа, как известно, она бесконечна, поскольку

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \leq 1 \quad \text{при } p \geq 3.$$

Известно также, что треугольные группы финитно аппроксимируемы [11]. Следовательно, для любого конечного подмножества M группы R существует гомоморфизм из R на конечную группу, инъективный на множестве M .

Далее, рассмотрим в группе G'_0 слова вида

$$\begin{aligned} w'_1 &= (ab)^6, & w'_2 &= ((ab)^6)^{ba^{-1}ba^{-2}}, \\ w'_3 &= ((ab)^6)^{(ba^{-1}ba^{-2})^2}, & \dots, & w'_n = ((ab)^6)^{(ba^{-1}ba^{-2})^{n-1}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Нетрудно видеть, что эти элементы попарно различны.

Рассмотрим часть графа $\Psi(G'_0)$, которая состоит из всех вершин 2-го рода этого графа, лежащих на несократимых путях с метками вида (4.9), вместе с выходящими из них ребрами и их концами – вершинами 1-го рода. Множество смежных классов, отвечающих этим вершинам 1-го рода, возьмем в качестве M , тогда очевидно M есть подмножество факторгруппы $R = G'/G'_0$, причем $1, a, b \in M$.

Указанная часть графа $\Psi(G'_0)$ для случая $n = 3$ изображена на рис. 1.

Здесь вершины 1-го рода обозначены символом $\bullet$, вершины 2-го рода, соответствующие сомножителю $\langle b \rangle_2$ – символом $\circ$, а вершины 2-го рода, соответствующие сомножителю $\langle a \rangle_3$ – символом $\cup$. При этом метка нетривиального пути из 2 ребер, инцидентных вершине 2-го рода, которая отвечает сомножителю $\langle b \rangle_2$, равна b (и не отмечена на рисунке). Метка же нетривиального пути из 2 ребер, инцидентных вершине 2-го рода, которая отвечает сомножителю $\langle a \rangle_3$, равна a или a^2 в соответствии с метками на рисунке рядом с этой вершиной 2-го рода и направлением обхода этой вершины 2-го рода (у нас здесь и далее все такие обходы совершаются по часовой стрелке). Так, например, метка пути (из 2 ребер) из $\mathbf{v}$ в $\mathbf{w}$ равна b , метка пути из $\mathbf{u}$ в $\mathbf{v}$ равна a , а метка пути из $\mathbf{u}$ в $\mathbf{y}$ равна a^2 . Отмеченная точка здесь и далее выделена символом $*$.

Рис. 1

Вследствие сказанного выше существует факторизация $\pi: R \rightarrow S = R/R_0$, инъективная на множестве M , где S – конечная группа. Тогда $S \cong G'/H'_1$, $H'_1 \triangleleft G'$, $G'_0 \subseteq H'_1$. Полученная таким образом подгруппа H'_1 имеет конечный индекс в G' (так как S конечна). Кроме того, H'_1 тривиально пересекается с сопряженными к сомножителям G' (в частности, H'_1 свободна), так как иначе в силу нормальности H'_1 в ней лежал бы элемент a или b , но это невозможно, поскольку $1, a, b \in M$ и, следовательно, инъективно отображаются на S .

Легко видеть, что свободные порождающие в G'_0 можно выбрать так, чтобы n элементов (4.9) входили в их число (для этого нужно соответствующим образом выбрать максимальное поддерево в части графа $\Psi(G'_0)$, отвечающей элементам (4.9)). Более того, свободные порождающие в H'_1 также можно выбрать так, чтобы элементы (4.9) входили в их число. Это следует из инъективности факторизации π на M : часть графа $\Psi(H'_1)$, отвечающая элементам (4.9), будет такой же, как соответствующая часть графа $\Psi(G'_0)$ (см. рис. 1), и, выбрав тем же образом максимальное поддерево в $\Psi(H'_1)$, мы получим требуемое. Итак, можно считать, что элементы вида (4.9) входят в число свободных порождающих H'_1 . Заметим также, что $(ba)^6 = ((ab)^6)^b \in H'_1$.

Построим теперь подгруппу H'_2 .

Рассмотрим подгруппу $K \subseteq G'$, (свободно) порождаемую следующими элементами:

$$w'_1, \dots, w'_n \text{ из (4.9), } (ba)^5, \quad (ba)^2(ba^{-1})^5(ba)^2. \quad (4.10)$$

Граф $\Psi(K)$ для случая $n = 3$ изображен на рис. 2.

Здесь обозначения те же, что и на рис. 1, например, метка пути (из 2 ребер) из u в v равна a^{-1} .

Подгруппа K тривиально пересекается с сопряженными к сомножителям G' , однако K имеет бесконечный индекс в G' . Можно построить подгруппу $H'_2 \subseteq G'$ такую, что $K \subseteq H'_2$, H'_2 также тривиально пересекается с сопряженными к сомножителям G' и H'_2 имеет конечный индекс в G' . Для этого рассмотрим те из вершин 1-го рода графа $\Psi^*(K)$, которые сами не лежат в графе $\Psi(K)$, но соединены ребром с вершиной 2-го рода графа $\Psi(K)$. Пусть $Z = \{z_j, j = 1, \dots, J\}$ – множество путей до этих вершин (1-го рода) из отмеченной точки графа $\Psi^*(K)$,

Рис. 2

лежащих в (фиксированном) максимальном поддереве графа $\Psi^*(K)$ (по одному пути до каждой из вершин). Пусть

$$s_1 = baba^{-2}b, \quad s_2 = ba^3ba^{-4}b, \quad \dots, \quad s_{(p-1)/2} = ba^{p-2}ba^{-(p-1)}b. \quad (4.11)$$

Тогда в качестве порождающих подгруппы H'_2 возьмем объединение порождающих (4.10) подгруппы K с множеством слов

$$s_i^{z_j}, \quad i = 1, \dots, \frac{p-1}{2}, \quad j = 1, \dots, J.$$

Нетрудно видеть, что $\Psi^*(H'_2) = \Psi(H'_2)$ и в этом графе конечное число вершин 1-го рода, следовательно, подгруппа H'_2 имеет конечный индекс в G' ; остальные условия также выполнены.

Покажем, что $H'_1 H'_2 = G'$. Действительно,

$$(ba)^6 \in H'_1, \quad (ba)^5 \in H'_2 \implies (ba)^6, (ba)^5 \in H'_1 H'_2 \implies ba \in H'_1 H'_2.$$

Далее,

$$(ba)^2(ba^{-1})^5(ba)^2 \in H'_2 \implies (ba)^2(ba^{-1})^5(ba)^2, \quad ba \in H'_1 H'_2 \implies (ba^{-1})^5 \in H'_1 H'_2.$$

Кроме того,

$$(ba^{-1})^6 = ((ab)^6)^{-1} \in H'_1 \implies (ba^{-1})^5, (ba^{-1})^6 \in H'_1 H'_2 \implies ba^{-1} \in H'_1 H'_2.$$

Таким образом, $a^2 \in H'_1 H'_2$, но $a^p = 1$, p нечетное, следовательно, $a, b \in H'_1 H'_2$, т.е. $H'_1 H'_2 = G'$.

Выберем теперь прообразы свободных порождающих подгрупп H'_1 и H'_2 при факторизации φ следующим образом. У элементов $w'_1, \dots, w'_n$ (из (4.9)) как порождающих подгруппы H'_1 выберем произвольные прообразы $w_1, \dots, w_n$ в G ,

а у тех же элементов $w'_1, \dots, w'_n$ как порождающих подгруппы H'_2 выберем прообразы $w_1 t_1, \dots, w_n t_n$, где $T = \{t_1, \dots, t_n\}$. Остальные прообразы порождающих подгрупп H'_1 и H'_2 выберем произвольным образом. Полученные прообразы групп H'_1 и H'_2 назовем H_1 и H_2 соответственно. Тогда ясно, что будет выполнено условие (4.8). Кроме того, как было показано ранее, выполняется также условие (4.6), а обе подгруппы H'_1 и H'_2 имеют конечный индекс в G' и тривиально пересекаются с сопряженными к сомножителям G' . Следовательно, для этого случая все доказано.

Случай 2. Пусть

$$G' = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_4 \cong \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1 \rangle.$$

Построение подгруппы H'_1 проводится аналогично предыдущему случаю (треугольная группа $T(4, 2, 6)$ также бесконечна и финитно аппроксимируема).

Построим подгруппу H'_2 .

Рассмотрим подгруппу $K \subseteq G'$, (свободно) порождаемую следующими элементами:

$$w'_1, \dots, w'_n \text{ из (4.9), } (ba)^5, (ba)^2(ba^2)^5(ba)^2, (ba^2)^2. \quad (4.12)$$

Граф $\Psi(K)$ изображен на рис. 3.

Рис. 3

Здесь обозначения те же, что и на рис. 1, 2; вершины 2-го рода, отмеченные одинаковой буквой (p), совпадают.

Как и в предыдущем случае, подгруппа K тривиально пересекается с сопряженными к сомножителям G' , однако K имеет бесконечный индекс в G' . Снова можно построить подгруппу $H'_2 \subseteq G'$ такую, что $K \subseteq H'_2$, H'_2 также тривиально пересекается с сопряженными к сомножителям G' и H'_2 имеет конечный индекс в G' . Для этого рассмотрим те из вершин 1-го рода графа $\Psi^*(K)$, которые сами

не лежат в графе $\Psi(K)$, но соединены ребром с вершиной 2-го рода графа $\Psi(K)$. Легко видеть, что таких вершин четное число. Пусть $Z = \{z_j, j = 1, \dots, 2J\}$ – множество путей до этих вершин (1-го рода) из отмеченной точки графа $\Psi^*(K)$, лежащих в (фиксированном) максимальном поддереве графа $\Psi^*(K)$ (по одному пути до каждой из вершин). Тогда в качестве порождающих подгруппы H'_2 возьмем объединение порождающих (4.12) подгруппы K с множеством слов

$$z_{2j-1}bz_{2j}^{-1}, \quad j = 1, \dots, J.$$

Нетрудно видеть, что $\Psi^*(H'_2) = \Psi(H'_2)$ и в этом графе конечное число вершин 1-го рода, следовательно, подгруппа H'_2 имеет конечный индекс в G' ; остальные условия также выполнены.

Покажем, что $H'_1 H'_2 = G'$. Действительно,

$$(ba)^6 \in H'_1, \quad (ba)^5 \in H'_2 \implies (ba)^6, (ba)^5 \in H'_1 H'_2 \implies ba \in H'_1 H'_2.$$

Далее,

$$(ba)^2(ba^2)^5(ba)^2 \in H'_2 \implies (ba)^2(ba^2)^5(ba)^2, ba \in H'_1 H'_2 \implies (ba^2)^5 \in H'_1 H'_2.$$

Кроме того,

$$(ba^2)^2 \in H'_2 \implies (ba^2)^5, (ba^2)^2 \in H'_1 H'_2 \implies ba^2 \in H'_1 H'_2.$$

Следовательно, $a, b \in H'_1 H'_2$, т.е. $H'_1 H'_2 = G'$.

Выбирая прообразы свободных порождающих подгрупп H'_1 и H'_2 тем же способом, как и в предыдущем случае, мы получаем, что для этого случая также все доказано.

Случай 3. Пусть теперь

$$G' = \mathbb{Z}_2 * (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = bcba = 1 \rangle.$$

В качестве $H'_1 \triangleleft G'$ возьмем следующую подгруппу:

$$H'_1 = \langle \langle acac, (ab)^{n+1} \rangle \rangle, \quad \text{тогда} \quad G'/H'_1 \cong D_{n+1} \times \mathbb{Z}_2,$$

где D_n – диэдральная группа порядка $2n$. Граф $\Psi(H'_1)$ изображен на рис. 4.

Рис. 4

Здесь вершины 1-го рода обозначены символом $\bullet$, а вершины 2-го рода – символом $\circ$; остальные обозначения аналогичны обозначениям предыдущих рисунков. Вершины 2-го рода, отмеченные одинаковыми буквами ($\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$), совпадают.

Легко видеть, что H'_1 имеет конечный индекс в G' и тривиально пересекается с сопряженными к сомножителям G' . Далее, рассмотрим в подгруппе H'_1 слова

$$w'_1 = (acac)^b, \quad w'_2 = (acac)^{bab}, \quad \dots, \quad w'_n = (acac)^{(ba)^{n-1}b}. \quad (4.13)$$

Заметим, что свободные порождающие в H'_1 можно выбрать так, чтобы n элементов (4.13) входили в их число (для этого нужно соответствующим образом выбрать максимальное поддерево в части графа $\Psi(H'_1)$, отвечающей элементам (4.13)).

Пусть теперь подгруппа $H'_2 \subseteq G'$ порождается следующими элементами:

$$w'_1, \dots, w'_n \text{ из (4.13), } (ab)^{acac}, \quad acababa, \quad abcac, \quad (ac)^{(ba)^nb}. \quad (4.14)$$

Граф $\Psi(H'_2)$ изображен на рис. 5.

Рис. 5

Легко видеть, что H'_2 имеет конечный индекс в G' и тривиально пересекается с сопряженными к сомножителям G' .

Покажем, что $H'_1 H'_2 = G'$. Действительно,

$$acac \in H'_1, \quad (ab)^{acac} \in H'_2 \implies acac, (ab)^{acac} \in H'_1 H'_2 \implies ab \in H'_1 H'_2.$$

Далее,

$$abcac, ab \in H'_1 H'_2 \implies cac, acac \in H'_1 H'_2 \implies a, b \in H'_1 H'_2.$$

Наконец,

$$acababa, a, b \in H'_1 H'_2 \implies c \in H'_1 H'_2,$$

т.е. $H'_1 H'_2 = G'$.

Выбирая прообразы свободных порождающих подгрупп H'_1 и H'_2 тем же способом, что и в первом случае (только на этот раз надо брать $w'_1, \dots, w'_n$ из (4.13)), получаем, что в этом случае также все доказано.

Случай 4. Рассмотрим последний оставшийся случай. Пусть

$$G' = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \cong \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = 1 \rangle.$$

Пусть G'_* , H'_{1*} , H'_{2*} обозначают соответственно группы G' , H'_1 , H'_2 из предыдущего случая. Тогда

$$G'_* = \mathbb{Z}_2 * (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong G' / \langle\langle bcbc \rangle\rangle.$$

Рассмотрим подгруппу

$$H'_1 \triangleleft G', \quad H'_1 = \langle\langle bcbc, acac, (ab)^{n+1} \rangle\rangle.$$

В качестве порождающих H'_2 рассмотрим объединение элементов из (4.14) и следующих элементов:

$$(bcbc)^{r_j}, \quad r_j = 1, ba, (ba)^2, \dots, (ba)^n, a, aca. \quad (4.15)$$

Тогда

$$G'/H'_1 \cong D_{n+1} \times \mathbb{Z}_2 \cong G'_*/H'_{1*}$$

и легко видеть естественное соответствие между графами $\Psi(H'_{1*})$, $\Psi(H'_{2*})$ (графы подгрупп G'_*) и графами $\Psi(H'_1)$, $\Psi(H'_2)$ (графы подгрупп G') соответственно.

Несложно заметить также, что подгруппы H'_1 и H'_2 имеют конечный индекс в G' и тривиально пересекаются с сопряженными к сомножителям G' . Далее, те же рассуждения, что и в предыдущем случае, показывают, что $H'_1 H'_2 = G'$.

Выбирая прообразы свободных порождающих подгрупп H'_1 и H'_2 так же, как и в предыдущих случаях, получаем, что и в этом случае все доказано, а значит неуллучшаемость первой оценки в (1.3) при указанных в теореме условиях доказана.

Таким образом, теорема 2 доказана.

Автор благодарит А. А. Клячко за множество полезных замечаний.

Список литературы

- [1] A. G. Howson, “On the intersection of finitely generated free groups”, *J. London Math. Soc.*, **29** (1954), 428–434.
- [2] H. Neumann, “On the intersection of finitely generated free groups”, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), 186–189.
- [3] S. V. Ivanov, “On the Kurosh rank of the intersection of subgroups in free products of groups”, *Adv. Math.*, **218**:2 (2008), 465–484.
- [4] W. Dicks, S. V. Ivanov, “On the intersection of free subgroups in free products of groups”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **144**:3 (2008), 511–534.
- [5] S. V. Ivanov, “On the intersection of finitely generated subgroups in free products of groups”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **9**:5 (1999), 521–528.
- [6] A. Kurosh, “Die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen”, *Math. Ann.*, **109**:1 (1934), 647–660.
- [7] A. Karrass, D. Solitar, “The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **150** (1970), 227–255.
- [8] O. Schreier, “Die Untergruppen der freien Gruppen”, *Hamburg. Abh.*, **5**:1 (1927), 161–183.
- [9] S. V. Ivanov, “Intersecting free subgroups in free products of groups”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **11**:3 (2001), 281–290.
- [10] S. V. Ivanov, “A property of groups and the Cauchy–Davenport theorem”, *J. Group Theory*, **13**:1 (2010), 21–39.
- [11] G. A. Jones, D. Singerman, “Theory of maps on orientable surfaces”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **37**:2 (1978), 273–307.

А. О. Захаров (А. О. Zakharov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: zakhar.sasha@gmail.com

Поступила в редакцию
06.07.2011 и 22.09.2012