Общероссийский математический портал

В. С. Климов, Усреднение параболических включений, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 1, 21–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm791>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 09:35:52

УДК 517.958

В. С. Климов

Усреднение параболических включений

Устанавливается вариант первой теоремы Боголюбова для бесконечномерных дифференциальных включений. Формулируются достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения параболического включения с однородной и нестационарной главной частью.

Библиография: 22 названия.

Введение

В работе устанавливается вариант первой теоремы Боголюбова для бесконечномерных дифференциальных включений параболического типа. Приводятся достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения параболического включения с однородной (степени $m \geq 1$) по фазовому переменному и нестационарной по времени главной частью. Анализируется зависимость асимптотики нетривиальных решений от степени однородности. Как полагает автор, результаты, относящиеся к случаю $m > 1$, являются новыми и для дифференциальных уравнений в конечномерных пространствах.

Используются следующие обозначения: $\|x; E\| = \|x\|_E$ – норма элемента x в B -пространстве E , E^* – сопряженное к E пространство, (x, x^*) – значение функционала x^* из E^* на элементе $x \in E$, $\sigma(E, E^*)$ и $\sigma(E^*, E)$ – слабые топологии на E и E^* , порождаемые формой $(\cdot, \cdot)$, $s(x^*, \mathcal{D}) = \sup\{(x, x^*), x \in \mathcal{D}\}$, $x^* \in E^*$, – опорная функция множества $\mathcal{D} \subset E$, $\|\mathcal{D}\|_E = \sup\{\|x\|_E, x \in \mathcal{D}\}$, $\theta_E(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \sup_{x_1 \in \mathcal{D}_1} \inf_{x_2 \in \mathcal{D}_2} \|x_1 - x_2\|_E$ – уклонение множества $\mathcal{D}_1 \subset E$ от множества $\mathcal{D}_2 \subset E$, $L^p(T, E)$ ($C(T, E)$) – пространство функций, измеримых по Лебегу–Бохнеру (непрерывных) на отрезке $T \subset \mathbb{R}$ со значениями в E (как обычно, эквивалентные функции отождествляются), нормы в $L^p(T, E)$, $1 \leq p \leq \infty$, и $C(T, E)$ определяются стандартным образом [1]; символы $\mathcal{B}(E)$, $(Cv(E))$ обозначают совокупность непустых ограниченных (замкнутых и выпуклых) подмножеств пространства E . Все банаховы пространства рассматриваются над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Если E_1, E_2 – B -пространства, то запись $E_1 \rightarrow E_2$ ($E_1 \xrightarrow{k} E_2$) означает, что E_1 непрерывно (компактно) вложено в E_2 ; $E_1 \times E_2$ – прямое произведение E_1 и E_2 ; если E_1, E_2 вложены в линейное топологическое пространство E , то с E_1, E_2 связаны B -пространства $E_1 \cap E_2$ и $E_1 + E_2$ [1; гл. 1].

§ 1. Специальные классы многозначных отображений

Многозначное отображение (м-отображение) F множества $\mathcal{D}_1$ в множество $\mathcal{D}_2$ – это оператор, ставящий в соответствие элементу v из $\mathcal{D}_1$ непустое множество $F(v) \subset \mathcal{D}_2$; если $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1$, то $F(\mathcal{D}) = \bigcup_{v \in \mathcal{D}} F(v)$ – область значений отображения F на множестве $\mathcal{D}$. М-отображение $F: \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ ($\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ – подмножества B -пространств E_1, E_2) называют *ограниченным*, если $F(\mathcal{D}) \in \mathcal{B}(E_2)$

для каждого $\mathcal{D}$ из $\mathcal{B}(E_1)$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1$; отображение $F: E_1 \rightarrow E_2$ *хеминепрерывно сверху* на E_1 , если для каждого x^* из E_2^* функция $v \mapsto s(x^*, F(v))$ непрерывна сверху на E_1 ; в случае $E_1 = E_2^*$ отображение $F: E_1 \rightarrow E_2$ *радиально хеминепрерывно сверху*, если при любых v, w из E_1 справедливо неравенство $s(v, F(w)) \geq \overline{\lim}_{\lambda \rightarrow +0} s(v, F(w + \lambda v))$. Если образы м-отображения $F: E_1 \rightarrow E_2$ принадлежат классу $\text{Cv}(E_2)$, то будем записывать это следующим образом: $F: E_1 \rightarrow \text{Cv}(E_2)$. Без дополнительных пояснений используется терминология, принятая в теории измеримых м-отображений [2]–[8].

Пусть E – рефлексивное B -пространство. М-отображение $F: E \rightarrow \text{Cv}(E^*)$ назовем *квазимонотонным*, если из соотношений $u \in E, v \in E, \|u\|_E \leq R, \|v\|_E \leq R, u^* \in F(u), v^* \in F(v)$ вытекает неравенство

$$(u - v, u^* - v^*) \geq -c(R, \|u - v\|_E), \quad (1)$$

где $c(R, \cdot)$ – непрерывная неотрицательная функция, $c(R, \xi) = o(\xi)$ при $\xi \rightarrow +0$. В случае $c(R, \xi) \equiv 0$ F – монотонное отображение.

ЛЕММА 1. Пусть $F: E \rightarrow \text{Cv}(E^*)$ – ограниченное квазимонотонное радиально хеминепрерывное сверху м-отображение. Тогда м-отображение F хеминепрерывно сверху.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y_i \rightarrow y$ в E , $w \in E$ и $(w, y_i^*) = s(w, F(y_i))$, $y_i^* \in F(y_i)$. Без ограничения общности можно считать, что $y_i^* \rightarrow y^*$ в $\sigma(E^*, E)$. Зафиксируем u из E , u^* из $F(u)$ и число R так, что $\|y_i\|_E \leq R, \|y\|_E \leq R$. В силу (1) справедливо неравенство $(y_i - u, y_i^* - u^*) \geq -c(R, \|y_i - u\|_E)$, переходящее при $i \rightarrow \infty$ в оценку $(y - u, y^* - u^*) \geq -c(R, \|y - u\|_E)$. Из этой оценки вытекает соотношение $s(u - y, F(u)) \geq (u - y, u^*) - c(R, \|y - u\|_E)$. Полагая $u = y + \lambda v$, $v \in E, \lambda > 0$, имеем

$$s(v, F(y + \lambda v)) \geq (v, y^*) - \frac{1}{\lambda} c(R, \lambda \|v\|_E).$$

Используя радиальную хеминепрерывность сверху отображения F , получаем при $\lambda \rightarrow +0$ неравенство $s(v, F(y)) \geq (v, y^*)$. Ввиду произвольности v из E отсюда вытекает включение $y^* \in F(y)$, в частности, $(w, y^*) \leq s(w, F(y))$. Таким образом,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s(w, F(y_i)) = \lim_{i \rightarrow \infty} (w, y_i^*) = (w, y^*) \leq s(w, F(y)).$$

Последнее неравенство означает хеминепрерывность сверху м-отображения F . Лемма доказана.

Для однозначных операторов близкие к лемме 1 утверждения хорошо известны (см. [1], [9]–[11]).

Пусть E_1 – B -пространство, E_2 – сепарабельное рефлексивное B -пространство, $T = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. Будем говорить, что м-отображение $\mathcal{G}: T \times E_1 \rightarrow \text{Cv}(E_2)$ удовлетворяет слабому условию Каратеодори, и писать $\mathcal{G} \in \mathbb{C}_*(T, E_1, E_2)$, если

- 1) м-отображение $t \mapsto \mathcal{G}(t, v)$ измеримо при любом v из E_1 ;
- 2) почти при каждом t из T м-отображение $v \mapsto \mathcal{G}(t, v)$ хеминепрерывно;
- 3) для каждого $R > 0$ найдется такая функция φ_R из $L^1(T)$, что почти при всех t из T и $\|v\|_{E_1} \leq R$ выполняется неравенство $\|\mathcal{G}(t, v)\|_{E_2} \leq \varphi_R(t)$.

В этом случае отображение суперпозиционно измеримо, т.е. для любой измеримой функции $y: T \rightarrow E_1$ непусто множество $G(y)$ измеримых сечений $t \mapsto \mathcal{G}(t, y(t))$. Действительно, если y – счетнозначная функция, то непустота $G(y)$ следует из условия 1). Для произвольной функции y из $L^\infty(T, E)$ существует последовательность счетнозначных функций y_i , сходящаяся к y в $L^\infty(T, E_1)$. Пусть $z_i \in G(y_i)$, $i = 1, 2, \dots$. В силу условия 3) последовательность z_i компактна в топологии $\sigma(L^1(T, E_2), L^\infty(T, E_2^*))$, поэтому можно считать, что $z_i \rightarrow z$ в этой топологии. Повторяя рассуждения, проведенные в [5; гл. 3], можно установить включение $z \in G(y)$, т.е. $G(y) \neq \emptyset \forall y \in L^\infty(T, E_1)$. Отсюда без труда выводится непустота $G(y)$ для любой измеримой функции $y: T \rightarrow E_1$. Сохраним обозначение G за сужением G на банаховы пространства измеримых функций. Как и в случае однозначных операторов суперпозиции [12], оценка вида $\|\mathcal{G}(t, v)\|_{E_2} \leq k\|v\|_{E_1}^{p_1/p_2} + \gamma(t)$, $v \in E_1$, $1 \leq p_1, p_2 < \infty$, $k > 0$, $\gamma \in L^{p_2}(T)$, влечет оценку роста m -отображения $G: L^{p_1}(T, E_1) \rightarrow L^{p_2}(T, E_2)$.

Пусть V – рефлексивное сепарабельное B -пространство с нормой $\|\cdot\|$, H – гильбертово пространство с нормой $|\cdot|$, $V \xrightarrow{k} H$ и V плотно в H . Пространство H отождествляется с сопряженным ему H^* , а $H^* = H$ – с некоторым подпространством сопряженного к V пространства V^* . Число (v, v^*) означает и скалярное произведение элементов v, v^* из H , и значение функционала v^* на элементе $v \in V$.

Сопоставим отрезку $T = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ и числам p, p_0 , $2 \leq p \leq p_0 < \infty$, B -пространства $Y = L^p(T, V) \cap L^{p_0}(T, H)$, $Z = L^q(T, V^*) + L^{q_0}(T, H)$, где $1/p + 1/q = 1$, $1/p_0 + 1/q_0 = 1$. Пространства Y, Z рефлексивны и сепарабельны, Z можно идентифицировать с сопряженным к Y . Билинейная форма, задающая двойственность между Y, Z , определяется (см. [1; гл. 4]) равенством

$$\langle y, z \rangle = \int_T (y(t), z(t)) dt.$$

Если необходимо подчеркнуть зависимость пространств Y, Z от T , будем обозначать их символами $Y(T), Z(T)$.

Положим $W = \{y : y \in Y, y' \in Z\}$, $\|y\|_W = \|y\|_Y + \|y'\|_Z$. Пространство W непрерывно вложено в пространство $C(T, H)$; это позволяет ввести понятие значения функции y из W в каждой точке отрезка T . Если $y \in W$, то функция $t \mapsto |y(t)|^2$ абсолютно непрерывна на T и справедлива формула $(|y(t)|^2)' = 2(y(t), y'(t))$ п.в. [1; гл. 4].

ЛЕММА 2. Пусть E – B -пространство, $V \xrightarrow{k} E \rightarrow H$. Тогда $W \xrightarrow{k} L^p(T, E) \cap L^r(T, H)$ для любого r из $(1, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложение $W \xrightarrow{k} L^p(T, H)$ установлено в [11; гл. 1]. Так как $E \rightarrow H$, то $W \xrightarrow{k} L^p(T, H)$. Компактное в $L^p(T, H)$ и ограниченное в $C(T, H)$ множество компактно в $L^r(T, H)$ при любом $r < \infty$. Теперь требуемый результат вытекает из вложения $W \rightarrow C(T, H)$.

Лемма доказана.

Ниже W_1 – рефлексивное B -пространство, $W \xrightarrow{k} W_1, Y \rightarrow W_1$. Так как $Y \rightarrow W_1$, то $W_1^* \rightarrow Y^* = Z$. В качестве W_1 можно взять, например, $W_1 = L^p(T, E) \cap L^r(T, H)$, где E – рефлексивное пространство, $V \xrightarrow{k} E \rightarrow H$, $1 < r < \infty$; в

этом случае W_1^* можно идентифицировать с пространством $L^q(T, E^*) + L^s(T, H)$, $1/r + 1/s = 1$.

Возвращаясь к общему случаю, назовем последовательность ξ_i из Z *полусходящейся*, если она представима в виде $\xi_i = f_i + g_i$, где $f_i \rightarrow f$ в Z , $g_i \rightarrow g$ в $\sigma(W_1^*, W_1)$. Будем писать $\xi_i \rightarrow \xi = f + g$.

ЛЕММА 3. Пусть y_i – ограниченная в пространстве W последовательность, $y_i \rightarrow y$ в $\sigma(Y, Z)$, $\xi_i \in Z$ и $\xi_i \rightarrow \xi$. Тогда $(y_i, \xi_i) \rightarrow (y, \xi)$ в $\sigma(L^1, L^\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi_i = f_i + g_i$, $i = 1, 2, \dots$, $f_i \rightarrow f$ в Z , $g_i \rightarrow g$ в $\sigma(W_1^*, W_1)$. Так как y_i – ограниченная в пространстве W последовательность и $y_i \rightarrow y$ в $\sigma(Y, Z)$, то $y_i \rightarrow y$ в пространстве W_1 . Из отмеченных свойств последовательностей f_i , g_i , y_i вытекают соотношения $\langle 1_\Delta y_i, 1_\Delta f_i \rangle \rightarrow \langle 1_\Delta y, 1_\Delta f \rangle$, $\langle 1_\Delta y_i, 1_\Delta g_i \rangle \rightarrow \langle 1_\Delta y, 1_\Delta g \rangle$, здесь 1_Δ – характеристическая функция измеримого множества $\Delta \in T$. В силу произвольности выбора Δ отсюда следует сходимость $(y_i, \xi_i) \rightarrow (y, \xi)$ в $\sigma(L^1, L^\infty)$. Лемма доказана.

М-отображение $F: Y(T) \rightarrow Z(T)$ назовем *локальным*, если существует порождающее его м-отображение $\mathcal{F}: T \times V \rightarrow V^*$ класса $\mathbb{C}_*(T, V, V^*)$. Для любого y из $Y(T)$ множество $F(y)$ совпадает с множеством измеримых сечений отображения $t \mapsto \mathcal{F}(t, y(t))$. Для локального м-отображения $F: Y(T) \rightarrow Z(T)$ естественным образом определяется его сужение на пространство $Y(J)$, где J – отрезок, содержащийся в отрезке T .

§ 2. Сходимость последовательности решений задачи Коши

Пусть $T = [\alpha, \beta]$, $F: Y(T) \rightarrow Z(T)$ – м-отображение пространства $Y(T)$ в пространство $Z(T)$. *Решением дифференциального включения* $0 \in y' + F(y)$ называется функция y класса W , для которой $-y' \in F(y)$; если при этом $y(\alpha) = h$, то y – *решение задачи Коши*

$$0 \in y' + F(y), \quad y(\alpha) = h. \quad (2)$$

Введем последовательность м-отображений $F_i: Y(T) \rightarrow Z(T)$, $i = 0, 1, \dots$, удовлетворяющих следующим условиям:

- A₁) $\bigcup_i F_i(M) \subset \mathcal{B}(Z(T)) \quad \forall M \in \mathcal{B}(Y(T))$;
- A₂) для произвольных последовательностей $y_i \in W$, $z_i \in F_i(y_i)$, обладающих свойствами

$$\|y_i\|_W < R < \infty, \quad y_i \rightarrow y \text{ в } \sigma(Y, Z), \quad z_i \rightarrow z \text{ в } \sigma(Z, Y), \quad (3)$$

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \langle y_i, z_i \rangle \leq \langle y, z \rangle, \quad (4)$$

имеет место включение $z \in F_0(y)$ и сходимость

$$\langle 1_{[\alpha, t]} y_i, z_i \rangle \rightarrow \langle 1_{[\alpha, t]} y, z \rangle \text{ в } C(T). \quad (5)$$

Для стационарной последовательности $F_i = F, i = 0, 1, \dots$, аналогичные классы м-отображений изучались в [13]–[16]. Из леммы 3 следует, что если последовательность F_i удовлетворяет условиям $\mathbb{A}_1), \mathbb{A}_2)$, а последовательность $\xi_i \rightarrow \xi_0$, то и последовательность $F_i + \xi_i$ удовлетворяет тем же условиям – инвариантность относительно сдвигов. Очевидно, эти условия сохраняются при прореживании последовательности F_i ; если м-отображения F_i локальны, то последовательность их сужений на отрезок $J \subset T$ удовлетворяет условиям $\mathbb{A}_1), \mathbb{A}_2)$ вместе с исходной последовательностью.

ЛЕММА 4. Пусть последовательность м-отображений $F_i: Y(T) \rightarrow Z(T)$, $i = 0, 1, \dots$, удовлетворяет условиям $\mathbb{A}_1), \mathbb{A}_2)$, $h_i \in H$ и $h_i \rightarrow h_0$ в H . Пусть $y_i, i = 1, 2, \dots$, – последовательность решений задач Коши

$$0 \in y' + F_i(y), \quad y(\alpha) = h_i \quad (2_i)$$

и $y_i \rightarrow y$ в $\sigma(Y, Z)$. Тогда y есть решение задачи Коши (2₀) и $y_i \rightarrow y$ в $C(T, H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $-y'_i \in F_i(y_i)$, то найдется такой элемент z_i из $F_i(y_i)$, что

$$0 = y'_i + z_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Без ограничения общности можно считать, что $z_i \rightarrow z$ в $\sigma(Z, Y)$. Оператор дифференцирования слабо замкнут, поэтому $y \in W$ и

$$0 = y + z, \quad y(\alpha) = h_0. \quad (7)$$

Из (2_i), (6), (7) вытекает соотношение

$$\langle 1_{[t_1, t_2]}(y - y_i), z_i - z \rangle = \frac{1}{2} |y(t) - y_i(t)|^2 \Big|_{t_1}^{t_2}, \quad (8)$$

$\alpha \leq t_1 \leq t_2 \leq \beta, i = 1, 2, \dots$. Полагая $t_1 = \alpha, t_2 = \beta$, приходим к неравенству (4). Последовательности $y_i, z_i, i = 1, 2, \dots$, обладают свойствами (3), (4). В силу условий $\mathbb{A}_1), \mathbb{A}_2)$ отсюда следует включение $z \in F_0(y)$ и сходимость (5). Так как $z \in F_0(y)$, то y есть решение задачи (2₀). Сходимость $y_i \rightarrow y$ в $C(T, H)$ вытекает из соотношения (8), в котором $t_1 = \alpha, t_2 = t$ – произвольное число из T . Лемма доказана.

Для локальных м-отображений F_i требование $h_i \rightarrow h_0$ в H можно заменить условием $h_i \rightarrow h_0$ в $\sigma(H, H)$.

ЛЕММА 5. Пусть последовательность локальных м-отображений $F_i: Y(T) \rightarrow Z(T)$, $i = 0, 1, \dots$, удовлетворяет условиям $\mathbb{A}_1), \mathbb{A}_2)$, $h_i \in H$ и $h_i \rightarrow h_0$ в $\sigma(H, H)$. Пусть $y_i, i = 1, 2, \dots$, последовательность решений задач Коши (2_i), $y_i \rightarrow y$ в $\sigma(Y, Z)$. Тогда y есть решение задачи Коши (2₀) и $(t - \alpha)y_i \rightarrow (t - \alpha)y$ в $C(T, H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (6) последовательность y_i ограничена в пространстве W , а следовательно, компактна в $L^p(T, H)$. Производя прореживание и перенумерацию, можно считать, что $y_i(t) \rightarrow y(t)$ п.в. в метрике H и $(y_i(\cdot), v^*) \rightarrow (y(\cdot), v^*)$ в $C(T)$ для любого v^* из H . Зафиксируем отрезок $J = [\tau, \beta]$ так, что $\alpha < \tau < \beta$ и $y_i(\tau) \rightarrow y(\tau)$ в H . Сужение последовательности $F_i, i = 0, 1, \dots$, на $Y(J)$ удовлетворяет условиям $\mathbb{A}_1), \mathbb{A}_2)$. Применяя лемму 4, получаем, что

$y_i \rightarrow y$ в $C(J, H)$, y есть решение задачи (2) с $F = F_0$, $\alpha = \tau$, $h = y(\tau)$. В силу произвольности выбора τ это влечет требуемый результат. Лемма доказана.

Далее м-отображения $F, F_i: Y(T) \rightarrow Z(T)$ локальны, $\mathcal{F}(\mathcal{F}_i)$ – порождающие $F(F_i)$ отображения из $T \times V$ в V^* . Через $U(\mathcal{F}_i, h_i)$ обозначим множество решений задачи Коши (2_i) , $i = 0, 1, \dots$. При определенных предположениях множество $U(\mathcal{F}_i, h_i) \subset W$ непусто; его можно рассматривать и как подмножество пространств $Y = Y(T)$ и $X = C(T, H)$. Из лемм 4, 5 следует близость последовательности $U(\mathcal{F}_i, h_i)$ при $i \gg 1$ к множеству $U(\mathcal{F}_0, h_0)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть последовательность F_i , $i = 0, 1, \dots$, удовлетворяет условиям $\mathbb{A}_1)$, $\mathbb{A}_2)$. Пусть $U(\mathcal{F}_i, h_i) \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \dots$, и $\bigcup_i U(\mathcal{F}_i, h_i) \subset \mathcal{B}(Y)$. Тогда

- 1) если $h_i \rightarrow h_0$ в H , то $U(\mathcal{F}_0, h_0) \neq \emptyset$ и $\theta_X(U(\mathcal{F}_i, h_i), U(\mathcal{F}_0, h_0)) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$;
- 2) если $h_i \rightarrow h_0$ в $\sigma(H, H)$, то $U(\mathcal{F}_0, h_0) \neq \emptyset$ и $\theta_X((t - \alpha)U(\mathcal{F}_i, h_i), (t - \alpha)U(\mathcal{F}_0, h_0)) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h_i \rightarrow h_0$ в H . Фиксируем y_i из $U(\mathcal{F}_i, h_i)$, $i = 1, 2, \dots$. Последовательность y_i ограничена. Без ограничения общности можно считать, что $y_i \rightarrow y$ в $\sigma(Y, Z)$. В силу леммы 4 $y \in U(\mathcal{F}_0, h_0)$, в частности, $U(\mathcal{F}_0, h_0) \neq \emptyset$.

Установим теперь сходимость $\theta_X(U(\mathcal{F}_i, h_i), U(\mathcal{F}_0, h_0)) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Предположим противное. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что $\theta_X(U(\mathcal{F}_i, h_i), U(\mathcal{F}_0, h_0)) > \varepsilon$ для бесконечного числа индексов i . Тогда найдется y_i из $U(\mathcal{F}_i, h_i)$, для которого $\theta_X(y_i, U(\mathcal{F}_0, h_0)) > \varepsilon$. В силу уже доказанного $\lim_{i \rightarrow \infty} \theta_X(y_i, U(\mathcal{F}_0, h_0)) = 0$. Это противоречит неравенству $\theta_X(y_i, U(\mathcal{F}_0, h_0)) > \varepsilon$.

Второе утверждение теоремы устанавливается на основе леммы 5. Теорема доказана.

Введем еще условие

$\mathbb{A}_3)$ справедливо неравенство

$$(v, v^*) \geq c_1 \|v\|^p - \gamma_1(t), \quad (9)$$

где $v \in V$, $|v| \leq R$, $v^* \in \mathcal{F}_i(t, v)$, $t \in T$, $i = 1, 2, \dots$, постоянная $c_1 > 0$ и функция γ_1 из $L^1(T)$ зависят лишь от R .

Положим $\mathfrak{B} = \{w \in V^* : \|w; V^*\| \leq 1\}$, $\mathcal{F}_i(t, v; \rho) = \mathcal{F}_i(t, v) + \rho \|v\|^{p-1} \mathfrak{B}$, $\rho \geq 0$. Если $v \in V$, $|v| \leq R$, $\rho \in [0, c_1/2]$, $v^* \in \mathcal{F}_i(t, v; \rho)$, $i = 1, 2, \dots$, то из (9) следует оценка

$$(v, v^*) \geq \frac{c_1}{2} \|v\|^p - \gamma_1(t). \quad (10)$$

Решение y дифференциального включения

$$0 \in y' + \mathcal{F}_i(t, y; \rho) \quad (11)$$

удовлетворяет вытекающей из (10), (11) оценке

$$(|y(t)|^2)' \leq 2\gamma_1(t) - c_1 \|y(t)\|^p,$$

интегрирование которой по отрезку $[t_1, t_2]$, $t_1 < t_2$, приводит к неравенству

$$|y(t_2)|^2 - |y(t_1)|^2 + c_1 \int_{t_1}^{t_2} \|y(t)\|^p dt \leq 2 \int_{t_1}^{t_2} \gamma_1(t) dt. \quad (12)$$

Из неравенства (12) вытекает, в частности, что ограниченность некоторого множества решений включений (11) в пространстве $X = C(T, H)$ влечет его ограниченность в пространстве $Y(T)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $T = [0, \omega]$ и выполнены условия $A_1)$ – $A_3)$. Пусть для всех решений y задачи Коши (2₀) с $\alpha = 0$, $|h| \leq R_0$ справедливы оценки

$$|y(t)| \leq c_0, \quad t \in T, \quad |y(\omega)| \leq d_0, \quad (13)$$

где $c_0 > R_0$, $\omega > 0$, $d_0 > 0$. Пусть $\rho_i \geq 0$ и $\rho_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое n_0 , что для всех решений y дифференциальных включений (11) с $\rho = \rho_i$, $i > n_0$, $|y(0)| \leq R_0$ выполняются оценки

$$|y(t)| < c_0 + \varepsilon, \quad t \in T, \quad |y(\omega)| < d_0 + \varepsilon. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. что для некоторого $\varepsilon > 0$ соответствующее n_0 не может быть указано. Можно считать, что существует последовательность y_i решений включений (11) с $\rho = \rho_i$, $|y_i(0)| \leq R_0$, не удовлетворяющих одному из неравенств (14).

Рассмотрим сначала случай, когда не выполняется первое из неравенств (14). Через t_i обозначим наименьшее из чисел τ , для которых $|y_i(\tau)| = c_0 + \varepsilon$. Таким образом, $|y_i(t)| < c_0 + \varepsilon$, $0 \leq t < t_i$, $|y_i(t_i)| = c_0 + \varepsilon$. При $i \gg 1$ для решений $y_i(t)$ верны вытекающие из (12) оценки

$$|y_i(t)|^2 - |y_i(t_0)|^2 \leq \Gamma_1(t) - \Gamma_1(t_0), \quad (15)$$

где $0 \leq t_0 < t \leq t_i$, Γ_1 – первообразная функции $2\gamma_1$, $\Gamma_1(0) = 0$. Из оценки (15) следует неравенство $|y_i(t)|^2 \leq R_0^2 + \Gamma_1(t)$ и ограниченность последовательности t_i от 0. Без ограничения общности можно считать, что $t_i \rightarrow t^* > 0$.

Фиксируем β_0 из $(0, t^*)$ так, что при $i \gg 1$ верно неравенство

$$|y_i(\beta_0)| \geq c_0 + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (16)$$

Возможность подобного выбора следует из (15) и равенства $|y_i(t_i)| = c_0 + \varepsilon$. Положим $T_1 = [0, \beta_0]$. Так как $t_i > \beta_0$, $i \gg 1$, то $\|y_i; C(T_1, H)\| \leq c_0 + \varepsilon$. Отсюда в свою очередь вытекает ограниченность последовательности y_i в пространстве $Y(T_i)$. Без ограничения общности можно считать, что $y_i \rightarrow y$ в $\sigma(Y(T_1), Z(T_1))$. В силу леммы 5 $y \in U(\mathcal{F}_0, h_0)$ с $|h_0| \leq R_0$, $ty_i \rightarrow ty$ в $C(T_1, H)$. В частности, $|y(\beta_0)| \leq c_0$, $|y_i(\beta_0)| \rightarrow |y(\beta_0)|$ при $i \rightarrow \infty$, что противоречит (16). Полученное противоречие означает, что $|y_i(t)| \leq c_0 + \varepsilon \quad \forall i \gg 1, t \in T = [0, \omega]$.

Повторяя рассуждения предшествующего абзаца, можно доказать, что $ty_i \rightarrow ty$ в $C(T, H)$; здесь y – решение задачи (2₀) с $\alpha = 0$, $|h_0| \leq R_0$. Поэтому $|y_i(\omega)| \rightarrow |y(\omega)| \leq d_0$. В частности, $|y_i(\omega)| < d_0 + \varepsilon \quad \forall i \gg 1$. Из проведенных рассуждений вытекают оценки (14) при $i \gg 1$. Теорема доказана.

§3. Усреднение дифференциальных включений

Обсудим условия $\mathbb{A}_1)$ – $\mathbb{A}_3)$. Условие $\mathbb{A}_1)$ означает равномерную ограниченность m -отображений $F_i: Y \rightarrow Z$, $i = 1, 2, \dots$. Оно может быть выведено из равномерных оценок роста соответствующих m -отображений $\mathcal{F}_i: T \times V \rightarrow V^*$, $i = 1, 2, \dots$. С равномерными односторонними оценками роста m -отображений $\mathcal{F}_i$ связано неравенство (9), гарантирующее условие $\mathbb{A}_3)$.

Наименее обозримым представляется условие $\mathbb{A}_2)$. Способы его проверки зависят от выбора последовательности F_i , $i = 1, 2, \dots$. Остановимся на конструкциях, возникающих при обосновании метода усреднения. В формулируемых ниже предположениях $\mathbb{B}_1)$ – $\mathbb{B}_3)$ Y_0 – всюду плотное в Y пространство, W_1 – рефлексивное B -пространство, $W \xrightarrow{k} W_1$, $Y \rightarrow W_1$. Выбор пространства W_1 позволяет говорить о полусходящихся последовательностях (см. §1).

Сформулируем следующие предположения.

$\mathbb{B}_1)$ Из соотношений $u \in Y$, $v \in Y$, $\|u\|_Y \leq R$, $\|v\|_Y \leq R$, $u^* \in F_i(u)$, $v^* \in F_i(v)$, $i = 1, 2, \dots$, следует неравенство

$$\langle u - v, u^* - v^* \rangle \geq -c(R, \|u - v\|_{W_1}), \quad (17)$$

где $c(R, \cdot)$ – неотрицательная непрерывная функция, не зависящая от i ; $c(R, \xi) = o(\xi)$ при $\xi \rightarrow +0$.

$\mathbb{B}_2)$ Если $u \in Y_0$, то для каждого бесконечного множества $\mathbb{N}_0$ натуральных чисел существует полусходящаяся подпоследовательность $\xi_i \in F_i(u)$, $i \in \mathbb{N}_0$.

$\mathbb{B}_3)$ Отображение $F_0: Y \rightarrow \text{Cv}(Z)$ – ограниченное хеминепрерывное сверху m -отображение и для любых $u \in Y_0$, $w \in Y$

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} s(w, F_i(u)) \leq s(w, F_0(u)). \quad (18)$$

ЛЕММА 6. Пусть последовательность m -отображений $F_i: Y \rightarrow Z$, $i = 0, 1, \dots$, удовлетворяет условию $\mathbb{A}_1)$ и предположениям $\mathbb{B}_1)$ – $\mathbb{B}_3)$. Тогда выполнено условие $\mathbb{A}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем u из Y_0 , последовательности $y_i \in W$, $z_i \in F_i(y_i)$, $i = 1, 2, \dots$, и элементы y, z , обладающие свойствами (3), (4). Не уменьшая общности, можно считать, что $y_i \rightarrow y$ в W_1 и имеется последовательность $\xi_i \in F_i(u_i)$, $\xi_i \rightarrow \xi$ и $\xi_i \rightarrow \xi$ в $\sigma(Z, Y)$. Так как $z_i \in F_i(y_i)$, $\xi_i \in F_i(u)$, то в силу (17)

$$\langle y_i - u, z_i - \xi_i \rangle \geq -c(R, \|y_i - u\|_{W_1}), \quad (19)$$

$R > \|y_i\|_Y$, $R > \|y\|_Y$. Используя неравенство (4) и лемму 3, отсюда получаем $\langle y - u, z - \xi \rangle \geq -c(R, \|y - u\|_{W_1})$. Так как

$$\langle u - y, \xi \rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} \langle u - y, \xi_i \rangle \leq \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} s(u - y, F_i(u)) \leq s(u - y, F_0(u)),$$

то

$$s(u - y, F_0(u)) \geq \langle u - y, z \rangle - c(R, \|y - u\|_{W_1}). \quad (20)$$

В этом неравенстве u – произвольный элемент из Y_0 . Используя хеминепрерывность сверху m -отображения $F_0: Y \rightarrow \text{Cv}(Z)$ и плотность Y_0 в Y , распространяем

неравенство (20) на все функции u из Y . Полагая в (20) $u = y + \lambda v$, $v \in Y$, $\lambda > 0$, приходим (как и при доказательстве леммы 1) к оценке $s(v, F_0(y)) \geq \langle v, z \rangle$. В силу произвольности v из Y отсюда следует включение $z \in F_0(y)$.

Неравенство (19) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \liminf_{i \rightarrow \infty} \langle y_i, z_i \rangle &\geq \liminf_{i \rightarrow \infty} (\langle u, z_i - \xi_i \rangle + \langle y_i, \xi_i \rangle - c(R, \|y_i - u\|_{W_1})) \\ &\geq \langle y - u, \xi \rangle + \langle u, z \rangle - c(R, \|y - u\|_{W_1}), \end{aligned}$$

из которого получаем неравенство

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \langle y_i, z_i \rangle \geq \langle y, z \rangle.$$

Предположим теперь, что $0 \in \mathcal{F}_i(t, 0)$, $i = 1, 2, \dots$. Это дополнительное предположение гарантирует следующее свойство м-отображений F_i : если $z \in F_i(y)$, Δ — измеримое подмножество отрезка T , то $1_\Delta z \in F_i(1_\Delta y)$. Данное свойство позволяет заменить в неравенстве (19) функции y_i, u, z_i, ξ_i функциями $1_\Delta y_i, 1_\Delta u, 1_\Delta z_i, 1_\Delta \xi_i$. Это приводит к оценке $\liminf_{i \rightarrow \infty} \langle 1_\Delta y_i, 1_\Delta z_i \rangle \geq \langle 1_\Delta y, 1_\Delta z \rangle$. Последняя оценка имеет место и при замене множества $\Delta \subset T$ на его дополнение $T \setminus \Delta$. Вместе с неравенством (4) это влечет сходимость $\langle 1_\Delta y_i, 1_\Delta z_i \rangle \rightarrow \langle 1_\Delta y, 1_\Delta z \rangle$. Следовательно, $(y_i, z_i) \rightarrow (y, z)$ в $\sigma(L^1, L^\infty)$. Теперь выполнение условия $\mathbb{A}_2$ очевидно.

От предположения $0 \in \mathcal{F}_i(t, 0)$ можно избавиться с помощью подходящих сдвигов. Действительно, не уменьшая общности, будем считать, что существует сходящаяся последовательность $\xi_i \in F_i(0)$. Тогда приведенное выше рассуждение применимо к последовательности $F_i - \xi_i$. Следовательно, исходная последовательность F_i удовлетворяет условию $\mathbb{A}_2$). Лемма доказана.

Предположение $\mathbb{B}_1$) близко к условию равномерной полуограниченности вариаций м-отображений $F_i: Y \rightarrow \text{Cv}(Z)$, $i = 1, 2, \dots$ (см. [9]); $\mathbb{B}_2$) имеет характер условия компактности последовательности $F_i(u)$ (это особенно явно для однозначных отображений F_i); $\mathbb{B}_3$) связывает последовательность F_i с предельным отображением F_0 . Неравенство (18) приводит лишь к оценкам снизу размеров множества $F_0(u)$.

Аналогичные (18) односторонние оценки характерны для рассматриваемой ниже модификации метода усреднения. Далее $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, E_0 — плотное в пространстве V подпространство. М-отображения $\mathcal{F}: \mathbb{R}_+ \times V \rightarrow V^*$ и $\mathcal{F}_0: V \rightarrow \text{Cv}(V^*)$ назовем *допустимой парой*, если

- 1) сужение $\mathcal{F}$ на множества вида $[\alpha, \beta] \times V$ удовлетворяет слабому условию Каратеодори;
- 2) $\mathcal{F}_0: V \rightarrow \text{Cv}(V^*)$ — ограниченное хеминепрерывное сверху м-отображение;
- 3) для любых v, w из E_0 , $t_0 \in \mathbb{R}_+$ имеет место неравенство

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_{t_0}^{t_0+N} s(w, \mathcal{F}(t, v)) dt \leq s(w, \mathcal{F}_0(v)). \quad (21)$$

Если $\mathcal{F}$ – сужение на $\mathbb{R}_+ \times V$ ω -периодического по t отображения $\mathcal{F}: \mathbb{R} \times V \rightarrow \text{Cv}(V^*)$, то отображение $\mathcal{F}_0$ можно определить равенством

$$\mathcal{F}_0(v) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \mathcal{F}(t, v) dt,$$

интеграл м-отображения $t \mapsto \mathcal{F}(t, v)$ определяется стандартным образом [2]–[8]. В этом случае верхний предел в (21) можно заменить обычным пределом, неравенство (21) становится равенством. В общем случае связь между м-отображениями $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_0$ односторонняя; не исключается, например, ситуация, когда $\mathcal{F}$ однозначно, а $\mathcal{F}_0$ многозначно.

Сопоставим допустимой паре $\mathcal{F}, \mathcal{F}_0$ семейство м-отображений $\mathcal{F}(\cdot, \cdot; \lambda, \tau): \mathbb{R}_+ \times V \rightarrow V^*, \lambda \geq 1, \tau \geq 0$, определяемых равенствами

$$\mathcal{F}(t, v; \lambda, \tau) = \begin{cases} \mathcal{F}(\lambda t + \tau, v), & \text{если } 1 \leq \lambda < \infty; \\ \mathcal{F}_0(v), & \text{если } \lambda = \infty. \end{cases}$$

Нижне $\Pi(T, E_0)$ – линейное подпространство $Y(T)$, состоящее из функций $y: T \rightarrow E_0$, постоянных на промежутках, образующих конечное разбиение отрезка $T \subset \mathbb{R}_+$. Несложно доказать плотность $\Pi(T, E_0)$ в пространстве $Y(T)$. Сужение $\mathcal{F}(\cdot, \cdot; \lambda, \tau)$ на $T \times V$ принадлежит классу $\mathcal{C}_*(T, V, V^*)$, поэтому оно порождает оператор суперпозиции $F(\cdot; \lambda, \tau)$. Если $y \in L^\infty(T, V)$, то $F(y; \lambda, \tau) \in \text{Cv}(L^1(T, V^*))$. Из (21) вытекает неравенство

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} s(w, F(u; \lambda, \tau)) \leq s(w, F(u; \infty, \tau)), \quad (22)$$

в котором $w, u \in \Pi(T, E_0), \tau \geq 0$.

При дополнительных предположениях о росте м-отображений $\mathcal{F}, \mathcal{F}_0$ операторы суперпозиции $F(\cdot; \lambda, \tau)$ действуют и ограничены из $Y = Y(T)$ в $Z = Z(T)$. Дифференциальное включение $0 \in y' + F(y; \lambda, \tau)$ записываем далее в виде

$$0 \in y' + \mathcal{F}(\lambda t + \tau, y), \quad 1 \leq \lambda < \infty, \quad (23)$$

$$0 \in y' + \mathcal{F}_0(y), \quad \lambda = \infty, \quad (24)$$

соответственно. Через $\mathcal{N}(\lambda, \tau; h)$ ($\mathcal{N}_0(h)$) обозначаем множество решений включения (23) (соответственно (24)), удовлетворяющих начальному условию $y(0) = h$. Включение (24) естественно назвать *усреднением включения* (23); описание других версий метода усреднения можно найти, например, в [2], [3], [10], [17]–[19].

Из теорем 1, 2 может быть выведена близость множества $\mathcal{N}(\lambda, \tau; h)$ к множеству $\mathcal{N}_0(h)$. Ниже $T = [0, \omega]$, ω – произвольное положительное число, $F(\cdot; \lambda, \tau)$, $\lambda \geq 1, \tau \geq 0$, – оператор суперпозиции, порождаемый м-отображением $\mathcal{F}: \mathbb{R} \times V \rightarrow V^*$. Через $M^r(\mathbb{R}, E)$ обозначается пространство ограниченных по Степанову функций на $\mathbb{R}_+$ со значениями в B -пространстве E . Оно состоит из измеримых по Лебегу–Бохнеру функций $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow E$, для которых имеет смысл и конечна норма $\|f; M^r\| = \sup\{\|f; L^r(I, E)\|\}$, где $\sup$ берется по всем отрезкам I единичной длины. Полагаем $M^r(\mathbb{R}_+) = M^r(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Введем условия $\mathcal{C}_1)$ – $\mathcal{C}_3)$:

$\mathcal{C}_1)$ $F(M \times [1, \infty) \times \mathbb{R}_+) \in \mathcal{B}(Z(T)) \forall M \in \mathcal{B}(Y(T))$;

$\mathcal{C}_2)$ для произвольной последовательности (λ_i, τ_i) , $\lambda_i \geq 1, \tau_i \geq 0, \lambda_i \rightarrow \infty$, соответствующая последовательность операторов суперпозиции $F_i = F(\cdot; \lambda_i, \tau_i)$ удовлетворяет условию $\mathcal{A}_2)$;

$\mathcal{C}_3)$ справедливы неравенства (9), где $v \in V, |v| \leq R, t \in \mathbb{R}_+, v^* \in \mathcal{F}(t, v)$, постоянная $c_1 > 0$ и функция γ_1 из $M^1(\mathbb{R}_+)$ зависят лишь от R .

Условие $\mathbb{C}_j$) влечет выполнение условия $\mathbb{A}_j$) для каждой последовательности $F_i = F(\cdot; \lambda_i, \tau_i)$, $\lambda_i \geq 1$, $\tau_i \geq 0$, $\lambda_i \rightarrow \infty$. В соответствии с теоремой 1 это позволяет гарантировать близость множества $\mathcal{N}(\lambda, \tau; h)$, $\lambda \gg 1$, к множеству $\mathcal{N}_0(h)$ в метрике пространства $X = C(T, H)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия $\mathbb{C}_1)$, $\mathbb{C}_2)$. Пусть $\mathcal{N}(\lambda, \tau; h) \neq \emptyset$, $\lambda \geq \lambda_0 \gg 1$, и $\bigcup_{\lambda \geq \lambda_0, \tau \geq 0} \mathcal{N}(\lambda, \tau; h) \subset \mathcal{B}(Y)$. Тогда $\mathcal{N}_0(h) \neq \emptyset$ и

$$\theta_X(\mathcal{N}(\lambda, \tau; h), \mathcal{N}_0(h)) \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

равномерно по $\tau \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема 3 есть следствие теоремы 1.

Наиболее затруднительна проверка условия $\mathbb{C}_2)$; она может основываться на непрерывных аналогах предположений $\mathbb{B}_1)$ – $\mathbb{B}_3)$. Если отображение $\mathcal{F}(t, \cdot): V \rightarrow V^*$ монотонно, то имеет место неравенство (17) с $c(R, \cdot) = 0$. Монотонность m -отображения $\mathcal{F}(t, \cdot)$ можно заменить менее ограниченными условиями (см. [9], [14]). Для проверки предположения $\mathbb{B}_3)$ полезны лемма 1 и неравенство (22).

Перейдем к предположению $\mathbb{B}_2)$, считая, что $Y_0 = \Pi(T, E_0)$, $W_1 = L^p(T, E) \cap L^r(T, H)$, где E – рефлексивное пространство, $V \xrightarrow{k} E \rightarrow H$, $1 < r < \infty$; в этом случае справедливы вложения $W \xrightarrow{k} W_1$, $Y \rightarrow W_1$ (см. § 1).

ЛЕММА 7. Пусть для любого v_0 из E_0 существует сечение m -отображения $t \mapsto \mathcal{F}(t, v_0)$ вида $v_0^* + z_1 + z_2$, где $v_0^* \in V^*$, $z_1 \in M^q(\mathbb{R}_+, E^*)$, $z_2 \in M^s(\mathbb{R}_+, H)$, $1/r + 1/s = 1$. Тогда для всякой последовательности m -отображений $F_i = F(\cdot; \lambda_i, \tau_i): Y(T) \rightarrow Z(T)$, $\lambda_i \rightarrow \infty$, $\tau_i \geq 0$, выполнено предположение $\mathbb{B}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество функций вида $t \mapsto z_1(\lambda t + \tau)$, $t \in T$, $\lambda \geq 1$, $\tau \geq 0$, ограничено в пространстве $L^q(T, E^*)$, а множество функций $t \mapsto z_2(\lambda t + \tau)$ – в пространстве $L^s(T, H)$. Отсюда без труда выводится требуемое утверждение. Лемма доказана.

Приведем теперь вариант теоремы 2, относящийся к дифференциальному включению с параметрами $\lambda \geq 1$, $\tau \geq 0$, $\rho \geq 0$:

$$0 \in y' + \mathcal{F}(\lambda t + \tau, y) + \rho \|y\|^{p-1} \mathfrak{B}; \quad (25)$$

как и в § 2, $\mathfrak{B} = \{w \in V^* : \|w; V^*\| \leq 1\}$. Включение (25) можно рассматривать как возмущение включения (23).

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия $\mathbb{C}_1)$ – $\mathbb{C}_3)$. Пусть для всех y из $\mathcal{N}_0(h)$, $|h| \leq R_0$, справедливы оценки (13) с $T = [0, \omega]$, $c_0 > R_0$, $\omega > 0$, $\delta > 0$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такие числа $\lambda_0 > 1$, $\delta > 0$, что для всех решений y включения (25) с $\lambda > \lambda_0$, $0 \leq \rho < \delta$, $\tau \geq 0$, $|y(0)| \leq R_0$ имеют место оценки (14).

Теорема 4 есть переформулировка теоремы 2 на языке ε - δ , поэтому ее доказательство не приводится.

§ 4. Асимптотика решений дифференциальных включений

Далее дифференциальные включения (23)–(25) изучаются при дополнительном предположении $(p-1)$ -однородности отображений $\mathcal{F}(t, v)$, $\mathcal{F}_0(v)$ по фазовому переменному v :

$$\mathcal{F}(t, kv) = k^{p-1} \mathcal{F}(t, v), \quad \mathcal{F}_0(kv) = k^{p-1} \mathcal{F}_0(v), \quad (26)$$

$t \in \mathbb{R}_+$, $v \in V$, $k > 0$. Через $\mathfrak{N}(\lambda, \tau, \rho; h)$ обозначается множество решений $y(t)$, $t \geq 0$, включения (25), удовлетворяющих начальному условию $y(0) = h$. Из $(p-1)$ -однородности отображения $\mathcal{F}$ вытекает следующее свойство инвариантности класса $\mathfrak{N}(\lambda, \tau, \rho; h)$: если $y \in \mathfrak{N}(\lambda, \tau, \rho; h)$, то при любых $R > 0$, $t_0 \geq 0$ функция

$$y_1(t) = \frac{y(t_0 + R^{2-p}t)}{R}$$

принадлежит классу $\mathfrak{N}(\lambda_1, \tau_1, \rho; h_1)$ с $\lambda_1 = R^{2-p}\lambda$, $\tau_1 = t_0 + R^{2-p}\tau$, $h_1 = y(t_0)/R$. Очевидно равенство $\mathcal{N}(\lambda, \tau; h) = \mathfrak{N}(\lambda, \tau, 0; h)$.

Так как $0 \in \mathcal{F}(t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, то функция $y_0(t) \equiv 0$ есть решение включения (25) при любых параметрах λ , τ , ρ . Назовем нулевое решение включения (25) *асимптотически устойчивым*, если

- 1) для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что любая функция y из $\mathfrak{N}(\lambda, \tau, \rho; h)$, $|h| < \eta$, удовлетворяет неравенству $|y(t)| < \varepsilon$;
- 2) $|y(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Аналогичным образом определяется асимптотическая устойчивость нулевого решения включения (24). Как и в § 3, $\mathcal{N}_0(h)$ – множество решений включения (24), удовлетворяющих начальному условию $y(0) = h$. Будем писать $\mathcal{F}_0 \in \mathfrak{B}_p(V)$, если все функции из $\mathcal{N}_0(h)$, $|h| \leq 1$, равномерно ограничены и равномерно стремятся к нулю (в метрике H) при $t \rightarrow \infty$. Включение $\mathcal{F}_0 \in \mathfrak{B}_p(V)$ влечет асимптотическую устойчивость нулевого решения включения (24); при некоторых дополнительных предположениях верно и обратное [7], [20].

ТЕОРЕМА 5. Пусть допустимая пара m -отображений $\mathcal{F}: \mathbb{R}_+ \times V \rightarrow V^*$, $\mathcal{F}_0: V \rightarrow \text{Cv}(V^*)$ удовлетворяет условиям $\mathbb{C}_1$ – $\mathbb{C}_3$) и условию однородности (26). Пусть $\mathcal{F}_0 \in \mathfrak{B}_p(V)$.

Тогда найдутся такие положительные постоянные k_1 , k_2 , k , δ_0 , r_0 , λ_0 , что

- 1) если $p > 2$, то для y из $\mathfrak{N}(1, \tau, \rho; h)$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \rho < \delta_0$, $|h| < r_0$, верна оценка

$$|y(t)| \leq \min\{k_1|y(0)|, k_2 t^{1/(2-p)}\}, \quad t \geq 0;$$

- 2) если $p = 2$, то для y из $\mathfrak{N}(\lambda, \tau, \rho; h)$, $\tau \geq 0$, $\lambda > \lambda_0$, $0 \leq \rho < \delta_0$, справедлива оценка

$$|y(t)| \leq k_1|y(0)|e^{-kt}, \quad t \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1: $p \geq 2$. Так как $\mathcal{F}_0 \in \mathfrak{B}_p(V)$, то найдутся такие постоянные $c_0 > 0$, $c_1 \in (0, \frac{1}{2})$, $\omega > 0$, что для всех решений y из $\mathcal{N}_0(h)$, $|h| \leq 1$, верны оценки

$$|y(t)| \leq c_0, \quad 0 \leq t \leq \omega, \quad |y(\omega)| \leq c_1.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ так, что $c_1 + \varepsilon < \frac{1}{2}$. Согласно теореме 4 найдутся такие числа $\lambda_0 > 1$, $\delta_0 > 0$, что для всех решений u включения (25) с $\lambda > \lambda_0$, $0 \leq \rho < \delta_0$, $\tau \geq 0$, $|u(0)| \leq 1$ имеет место оценка

$$|u(t)| < c_0 + \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq \omega, \quad |u(\omega)| < c_1 + \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

В частности, если $|u(0)| = 1$, то существует такое число $t^* \in (0, \omega)$, что $\frac{1}{2} < |u(t)| < c_0 + \varepsilon$, $0 \leq t < t^*$, $|u(t^*)| = \frac{1}{2}$; число t^* может зависеть от u .

Пусть $v \in \mathfrak{N}(\lambda, \tau, \rho; h)$ с $\lambda > \lambda_0$, $\tau \geq 0$, $0 \leq \rho < \delta_0$, $|h| = 1$. Положим $t_0 = 0$, $R_i = 2^{-i}$. Установим существование последовательности t_i , $i = 1, 2, \dots$, обладающей свойствами

$$|v(t)| \leq 2(c_0 + \varepsilon)R_i, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i, \quad |v(t_i)| = R_i, \quad 0 < t_{i+1} - t_i < \omega R_i^{2-p}. \quad (27)$$

Существование t_1 установлено выше. Если известно t_i , то для построения t_{i+1} введем функцию

$$u(t) = \frac{v(R_i^{2-p}t + t_i)}{R_i}.$$

В силу свойства инвариантности $u \in \mathfrak{N}(\lambda_i, \tau_i, \rho; h_i)$ с $\lambda_i = \lambda R_i^{2-p} \geq \lambda_0$, $\tau_i \geq 0$, $0 \leq \rho < \delta_0$, $|h_i| = 1$, поэтому $\frac{1}{2} < |u(t)| < c_0 + \varepsilon$, $0 \leq t < t^*$, $|u(t^*)| = \frac{1}{2}$, t^* — некоторое число из $(0, \omega)$. Теперь достаточно положить $t_{i+1} = t_i + t^* R_i^{2-p}$.

Шаг 2: $p > 2$. Из неравенства (27) следует, что функция v из $\mathfrak{N}(\lambda, \tau, \rho; h)$, $\lambda > \lambda_0$, $\tau \geq 0$, $0 \leq \rho < \delta_0$, $|h| = 1$, удовлетворяет оценке

$$|v(t)| \leq \frac{c_0 + \varepsilon}{2^{i-1}}, \quad t \geq k_0 2^{i(p-2)},$$

где k_0 — постоянная, не зависящая от v и i . Непосредственным следствием этой оценки является неравенство

$$|v(t)| \leq \min\{\varkappa_1, \varkappa_2 t^{1/(2-p)}\}, \quad (28)$$

постоянные $\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2 > 0$ не зависят от v .

Оценка (28) влечет первое утверждение теоремы. Действительно, пусть $r_0 > 0$ и $r_0^{2-p} > \lambda_0$. Если $y \in \mathfrak{N}(1, \tau, \rho; h)$, $\tau \geq 0$, $0 \leq \rho < \delta_0$, $0 < |h| < r_0$, то в силу свойства инвариантности функция $v(t) = y(|h|^{2-p}t)/|h|$ принадлежит $\mathfrak{N}(\lambda_1, \tau_1, \rho; h_1)$ с $\lambda_1 = |h|^{2-p} > \lambda_0$, поэтому для нее верна оценка (28). Следовательно,

$$|y(|h|^{2-p}t)| \leq |h| \min\{\varkappa_1, \varkappa_2 t^{1/(2-p)}\}.$$

Отсюда вытекает требуемое утверждение.

Шаг 3: $p = 2$. Оценка (27) сохраняется при $p = 2$. Она приводит к оценке

$$|v(t)| \leq \frac{c_0 + \varepsilon}{2^{i-1}}, \quad t \geq k_0 i,$$

где k_0 – постоянная, не зависящая от i и функции v из $\mathfrak{N}(\lambda, \tau, \rho; h)$, $\lambda > \lambda_0$, $\tau \geq 0$, $0 \leq \rho < \delta_0$, $|h| = 1$. Ее следствием является неравенство $|v(t)| \leq \varkappa \exp(-kt)$, постоянные $\varkappa > 0$, $k > 0$ не зависят от v . Теперь второе утверждение выводится из 1-однородности $\mathcal{F}$. Теорема доказана.

В предположениях теоремы 5 нулевое решение включения (25) асимптотически устойчиво, если $0 \leq \rho < \delta_0$. Отсюда обычным образом (см., например, [7], [20]) выводится асимптотическая устойчивость нулевого решения дифференциального включения с однородной главной частью.

Отображение $\mathcal{F}_0: V \rightarrow V^*$ назовем *положительно определенным*, если $(v, v^*) \geq \varkappa_0 |v|^p$, где $v \in V$, $v^* \in \mathcal{F}_0(v)$, $\varkappa_0$ – положительная постоянная. Положительная определенность $\mathcal{F}_0$ гарантирует включение $\mathcal{F}_0 \in \mathfrak{B}_p(V)$. Для потенциальных операторов известны частичные обращения этого результата [20], [21].

В заключение рассмотрим пример иллюстративного характера. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\mathring{W}_p^1(\Omega)$ – пространство Соболева [22; гл. 1]. Пространство $V = \mathring{W}_p^1(\Omega)$ с нормой $\|u\| = \|\nabla u; L^p\|$ компактно вложено в пространство $H = L^2(\Omega)$ с нормой $|u| = \|u; L^2\|$. Пара пространств V , H и числа p , p_0 , $2 \leq p \leq p_0 < \infty$, однозначно определяют соответствующие им пространства Y , Z , W функций на отрезке $T \subset \mathbb{R}$. В частности, $Y = L^p(T, \mathring{W}_p^1(\Omega)) \cap L^\infty(T, L^2(\Omega))$; Y можно интерпретировать как пространство функций на цилиндре $Q = T \times \Omega$. Фиксируем r_1 из $(p, p(1 + 2/n))$. Будем считать p_0 настолько большим, что $Y \rightarrow L^{r_1}(Q)$. Это предположение гарантирует вложение $L^{s_1}(Q) \rightarrow Z$, $1/r_1 + 1/s_1 = 1$.

Пусть $a(t, x)$, $b(t, x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$, $-\omega$ -периодические по t функции, сужения которых на цилиндр $Q = T \times \Omega$, $T = [0, \omega]$, $0 < \omega < \infty$, принадлежат пространству $L^\infty(Q)$. Будем считать, что $a(t, x) \geq \varepsilon_0 > 0$ и $a(t, x) = a_1(t, x) + a_2(x)$, где a_1 и $\partial a_1 / \partial x_j$, $j = 1, \dots, n$, – функции класса $L^\infty(Q)$. Положим

$$a_0(x) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega a(t, x) dt, \quad b_0(x) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega b(t, x) dt.$$

Введем отображения $\mathcal{F}: \mathbb{R}_+ \times V \rightarrow V^*$, $\mathcal{F}_0: V \rightarrow V^*$ соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t, v) &= -\operatorname{div}(a(t, \cdot) |\nabla v|^{p-2} \nabla v) + b(t, \cdot) |v|^{p-2} v, \\ \mathcal{F}_0(v) &= -\operatorname{div}(a_0(\cdot) |\nabla v|^{p-2} \nabla v) + b_0(\cdot) |v|^{p-2} v. \end{aligned}$$

В частности, $v^* = \mathcal{F}(t, v)$ – это функционал на пространстве $V = \mathring{W}_p^1(\Omega)$, определяемый равенством

$$(w, v^*) = \int_\Omega (\nabla w \cdot a(t, \cdot) |\nabla v|^{p-2} \nabla v + w b(t, \cdot) |v|^{p-2} v) dx, \quad w \in V.$$

Отображения $\mathcal{F}(t, v)$, $\mathcal{F}_0(v)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $v \in V$, образуют допустимую пару и $(p-1)$ -однородны по v . Проверим условия $\mathbb{C}_1$ – $\mathbb{C}_3$. Условие $\mathbb{C}_1$ вытекает из включений $a \in L^\infty(Q)$, $b \in L^\infty(Q)$. Отображение $\mathcal{F}_0: V \rightarrow V^*$ ограничено и непрерывно. Неравенство $a(t, x) \geq \varepsilon_0 > 0$ и ограниченность функции $b(\cdot)$ влекут оценку

$$(v, \mathcal{F}(t, v)) \geq \varkappa_1 \|v\|^p - \varkappa_2 \|v; L^p\|^p,$$

постоянные $\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2 > 0$ не зависят от v из V . Объединяя эту оценку с неравенством $\|v; L^p\| \leq \delta \|v\| + c(\delta)|v|$, где $v \in V$, δ – произвольная положительная постоянная, константа $c(\delta)$ не зависит от v , приходим к неравенству

$$(v, \mathcal{F}(t, v)) \geq \varkappa_3 \|v\|^p - \varkappa_4 |v|^p,$$

$\varkappa_3 > 0$, $\varkappa_4 > 0$, $v \in V$, из которого следует выполнимость условия $\mathbb{C}_3$.

Проверка условия $\mathbb{C}_2$ основана на лемме 6, относящейся к случаю $W_1 = L^{r_1}(Q)$. Определяемый равенством $G_0(y) = |y|^{p-2}y$ оператор суперпозиции действует и непрерывен из $L^{r_1}(Q)$ в $L^{s_1}(Q)$; на каждом шаре пространства $L^{r_1}(Q)$ он равномерно непрерывен [12; гл. 5]. В частности, справедлива оценка

$$\|G_0(y_1) - G_0(y_2); L^{s_1}\| \leq \psi_\rho(\|y_1 - y_2; L^{r_1}\|); \quad (29)$$

здесь $\|y_j; L^{r_1}\| \leq \rho$, $j = 1, 2$, $\psi_\rho(+0) = 0$. Оператор $G(y) = b(\cdot)G_0(y)$ действует и непрерывен из Y в Z . Справедлива вытекающая из (29) оценка

$$\langle G(y_1) - G(y_2), y_1 - y_2 \rangle \geq -c(R, \|y_1 - y_2; L^{r_1}\|), \quad (30)$$

где $\|y_j; Y\| \leq R$, $j = 1, 2$, функция $c(R, \cdot)$ неотрицательна, $c(R, \xi) = o(\xi)$. Поскольку функция $a(\cdot)$ положительна, то (30) влечет (17) для последовательности $F_i = F(\cdot; \lambda_i, \tau_i)$, $\lambda_i \rightarrow \infty$, $\tau_i \geq 0$. Теперь выполнение условия $\mathbb{B}_1$ для данной последовательности F_i очевидно.

Для проверки условия $\mathbb{B}_2$ положим $E_0 = C_0^\infty(\Omega)$. Если $v_0 \in E_0$, то

$$\mathcal{F}(t, v_0) = v_0^* + z_1(t),$$

где

$$\begin{aligned} v_0^* &= -\operatorname{div}(a_2 |\nabla v_0|^{p-2} \nabla v_0) \in V^*, \\ z_1(t) &= -\operatorname{div}(a_1(t, \cdot) |\nabla v_0|^{p-2} \nabla v_0) + b(t, \cdot) |v_0|^{p-2} v_0. \end{aligned}$$

Множество функций вида $t \mapsto z_1(\lambda t + \tau)$, $t \in T$, $\lambda \geq 1$, $\tau \geq 0$, равномерно ограничено в $L^\infty(T, L^\infty(\Omega))$; отсюда следует выполнение условия $\mathbb{B}_2$.

Непрерывность и ограниченность отображения $F_0: Y \rightarrow Z$ очевидны. Оценка (18) (с $Y_0 = \Pi(T, E_0)$) также имеет место. Ввиду ω -периодичности функций a , b по t в рассматриваемом случае (18) становится равенством. Таким образом, последовательность $F_i = F(\cdot; \lambda_i, \tau_i)$, $\lambda_i \rightarrow \infty$, $\tau_i \geq 0$, удовлетворяет условию $\mathbb{B}_3$.

Проведенные рассуждения означают, что допустимая пара отображений $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_0$ удовлетворяет условиям $\mathbb{C}_1$ – $\mathbb{C}_3$. Поэтому справедливы теоремы 3, 4. Множество $\mathcal{N}_0(h)$ можно рассматривать как совокупность обобщенных решений [1], [9]–[11], [22] начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} - \operatorname{div}(a_0 |\nabla y|^{p-2} \nabla y) + b_0 |y|^{p-2} y &= 0, \\ y(\cdot, x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad y(0, x) = h(x). \end{aligned}$$

Аналогичным образом (с заменой a_0 , b_0 на $a(\lambda t + \tau, \cdot)$, $b(\lambda t + \tau, \cdot)$ соответственно) интерпретируется множество $\mathcal{N}(\lambda, \tau; h)$. Если оператор $\mathcal{F}_0$ положительно определен на $V = \mathring{W}_p^1(\Omega)$, то применима теорема 5, позволяющая находить асимптотику решений класса $\mathcal{N}(\lambda, \tau; h)$, $\lambda \gg 1$, $\tau \geq 0$, соответствующих задач Коши.

Рассмотренный пример не исчерпывает, разумеется, потенциальных приложений полученных выше результатов. Область их применимости охватывает достаточно широкий класс уравнений (включений) параболического типа.

Список литературы

1. Гаевский Г., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
2. Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды МИАН. 1985. Т. 169. С. 194–252.
3. Гельман Б. Д., Обуховский В. В. О новых результатах в теории многозначных отображений. II: Анализ и приложения // Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т. 29, 1991. С. 107–159.
4. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
5. Обен Ж. П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
6. Толстоногов А. А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, 1986.
7. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
8. Castaing C., Valadier V. Convex analysis and measurable multifunctions. Berlin: Springer-Verlag, 1977. (Lecture Notes in Math. V. 580.).
9. Дубинский Ю. А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. 1976. Т. 9. С. 5–130.
10. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
11. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
12. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
13. Климов В. С. К задаче о периодических решениях операторных дифференциальных включений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 2. С. 309–327.
14. Климов В. С. Эволюционные параболические неравенства с многозначными операторами // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 8. С. 37–54.
15. Климов В. С. Об операторе сдвига по траекториям параболических включений // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 10. С. 1716–1721.
16. Климов В. С. Ограниченные решения дифференциальных включений с однородной главной частью // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 4. С. 109–130.
17. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
18. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1971.
19. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.
20. Климов В. С. О дифференциальных включениях с однородной главной частью // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 10. С. 1382–1389.
21. Четаев Н. Г. К вопросу об обращении теоремы Лагранжа // Сб. научн. трудов Казанского авиац. инст. 1934. № 2. С. 29–30.
22. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.