Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Бородин, Приближение наимпростейшими дробями
с ограничением на полюсы, *Матем. сб.*, 2012, том 203,
номер 11, 23–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7910>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 09:32:34

УДК 517.538.5+517.982.256

П. А. Бородин

Приближение наипростейшими дробями с ограничением на полюсы

При различных ограничениях на компакт K и не пересекающееся с ним множество E в комплексной плоскости исследуется вопрос о всюду плотности множества наипростейших дробей (логарифмических производных многочленов) с полюсами из E в пространстве $AC(K)$ функций, непрерывных на компакте K и аналитических в его внутренних точках. В ходе этого исследования выявляются некоторые свойства аддитивных подгрупп гильбертова пространства.

Библиография: 19 названий.

Ключевые слова: наипростейшие дроби, равномерное приближение, ограничение на полюсы, аддитивная подгруппа.

§ 1. Введение

Наипростейшей дробью степени n называется рациональная функция вида

$$r_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k} = \frac{P'(z)}{P(z)},$$

где $\{a_k\}_{k=1}^n$ – точки комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $P(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_n)$ – многочлен с нулями в этих точках. Другое название наипростейших дробей – логарифмические производные многочленов.

Пусть K – компакт в комплексной плоскости, имеющий связное дополнение, $AC(K)$ – пространство функций, непрерывных на K и аналитических во внутренних точках K , с обычной равномерной нормой. В. И. Данченко и Д. Я. Данченко (см. [1], [2]) доказали, что наипростейшие дроби с полюсами из $\mathbb{C} \setminus K$ плотны в пространстве $AC(K)$ (везде ниже мы будем писать “плотны” вместо “образуют всюду плотное множество”). Иными словами, всякая функция, непрерывная на компакте K со связным дополнением и аналитическая в его внутренних точках, может быть с любой точностью равномерно на K приближена наипростейшими дробями. В этом утверждении связность дополнения $\mathbb{C} \setminus K$, конечно, существенна: если это дополнение несвязно и точка a лежит в его внутренней компоненте, то функция $1/(2(z - a))$ не приближается на K наипростейшими дробями.

Цель настоящей работы – исследовать следующую задачу приближения наипростейшими дробями с ограничением на расположение полюсов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00952а).

Задача А. Для данного компакта K со связным дополнением описать все такие множества $E \subset \mathbb{C} \setminus K$, что наипростейшие дроби с полюсами из E плотны в $AC(K)$.

Конечно, эта общая задача трудна, и нам придется ограничиться решением ее для каких-то классов пар (K, E) и получением отдельных условий, необходимых или достаточных для плотности в $AC(K)$ наипростейших дробей с полюсами из E . Она нетривиальна даже для случая, когда E – компакт (в отличие от соответствующей задачи приближения рациональными функциями с полюсами из E). В этом случае для плотности необходимо, чтобы компакт E “окружал” почти весь компакт K (теорема 1). Возникает гипотеза о том, что если компакт E “окружает” компакт K со связным дополнением, то наипростейшие дроби с полюсами из E плотны в $AC(K)$ (задача В). Эту гипотезу удастся доказать в случае, когда E содержит конечное число замкнутых спрямляемых контуров, “окружающих” K (теорема 3). Кроме того, в случае, когда K – континуум, утверждение гипотезы следует из одного результата Кореваара (см. [3]).

В ходе доказательства теоремы 3 получаются некоторые утверждения о структуре аддитивных подгрупп гильбертова пространства (лемма 3 и теорема 4), имеющие самостоятельное значение, а также довольно общий результат о приближении разностями наипростейших дробей, т.е. логарифмическими производными рациональных функций (теорема 5). При этом задача В сводится к более просто формулируемой задаче (задача С).

Кроме того, задача А полностью решается в случае конечного K и связного E , отстоящего от K на положительном расстоянии (теорема 6; правда, критерий получен в не совсем геометрических терминах), а в теореме 7 строится такое универсальное счетное множество E , что наипростейшие дроби с полюсами из $E \setminus K$ плотны в $AC(K)$ для любого компакта K со связным дополнением.

Следует отметить, что аппроксимации наипростейшими дробями стали изучаться по инициативе Е. П. Долженко. К настоящему времени получено немало результатов о приближениях наипростейшими дробями на компактах (см. работы В. И. Данченко, Д. Я. Данченко, О. Н. Косухина, Я. В. Новака, Е. Н. Кондаковой). Кроме того, исследовалась плотность наипростейших дробей, в том числе и с ограничениями на расположение полюсов, в различных пространствах функций, заданных на неограниченных множествах комплексной плоскости (см. [4], [5]). Например, было доказано, что в пространстве $C_0(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \in C(\mathbb{R}), f(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty\}$ с равномерной нормой наипростейшие дроби с полюсами вне полосы $\{z: |\operatorname{Im} z| < u\}$ плотны при любом $u > 0$ (см. [4]), а наипростейшие дроби с полюсами из множества $\{z: \arg z \in (\varepsilon, \pi - \varepsilon) \cup (\pi + \varepsilon, 2\pi - \varepsilon)\}$ не плотны при любом $\varepsilon > 0$ (см. [5]).

§ 2. Предварительные результаты

Всякая мера μ из пространства $rca(K)$ всех комплексных регулярных счетно-аддитивных мер, заданных на σ -алгебре борелевских подмножеств плоского компакта K , определяет функционал $\mu \in (AC(K))^*$, действующий по правилу

$$f \rightarrow \mu(f) := \int_K f d\mu, \quad f \in AC(K)$$

(норма этого функционала не превосходит полной вариации меры μ). Поскольку пространство $AC(K)$ является подпространством пространства $C(K)$ комплекснозначных функций, определенных и непрерывных на K , для каждого функционала $F \in (AC(K))^*$ можно найти такую меру $\mu \in rca(K)$, что $F(f) = \mu(f)$ при любой $f \in AC(K)$ (см., например, [6; гл. 4, § 6]).

Напомним, что преобразование Коши $\hat{\mu}$ меры $\mu \in rca(K)$ определяется формулой

$$\hat{\mu}(w) = \int_K \frac{d\mu(z)}{z - w}.$$

ЛЕММА 1. Пусть K – компакт в комплексной плоскости, а E – произвольное множество, не пересекающееся с K . Если существует такая мера $\mu \in rca(K)$, определяющая ненулевой функционал $\mu \in (AC(K))^*$, что для ее преобразования Коши неравенство $\operatorname{Re} \hat{\mu}(w) \geq 0$ выполнено при всех $w \in E$, то наипростейшие дроби с полюсами из E не плотны в $AC(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $\operatorname{Re} \hat{\mu}(w) \geq 0$ при всех $w \in E$ означает, что $\operatorname{Re} \mu(r) \geq 0$ для любой наипростейшей дроби $r(z) = \sum_{k=1}^n 1/(z - w_k)$ с полюсами $w_1, \dots, w_n \in E$. Следовательно, всякая функция $f \in AC(K)$, удовлетворяющая неравенству $\operatorname{Re} \mu(f) < 0$ (такие функции есть, поскольку по условию μ определяет ненулевой функционал на $AC(K)$), не может быть с любой точностью приближена в $AC(K)$ наипростейшими дробями с полюсами из E . Лемма доказана.

Как показывает следующий пример, отсутствия ненулевой меры $\mu \in rca(K)$, преобразование Коши которой удовлетворяет неравенству $\operatorname{Re} \hat{\mu}(w) \geq 0$ при всех $w \in E$, не достаточно для плотности в $AC(K)$ наипростейших дробей с полюсами из E .

ПРИМЕР. Возьмем $K = \{0\}$, $E = \{w \neq 0 : |w - 1/2| = 1/2\} \cup \{w \neq 0 : |w + 1/2| = 1/2\}$. Дробь $1/(z - w)$ при $z = 0$ и $w \in E$ принимает значения вида $\pm 1 + iy$, $y \in \mathbb{R}$, а значит, наипростейшие дроби с полюсами из E принимают на K только значения с целыми действительными частями и не плотны в $AC(K)$. В то же время преобразование Коши $\hat{\mu}(w)$ любой меры μ с носителем в нуле является дробью вида a/w , которая при любом ненулевом $a \in \mathbb{C}$ принимает на E значения с отрицательной действительной частью.

Для множества $E \subset \mathbb{C}$ через $\widehat{E}$ ниже обозначается замыкание объединения E со всеми ограниченными компонентами связности дополнения $\mathbb{C} \setminus E$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть K и E – непересекающиеся компакты в комплексной плоскости. Если разность $K \setminus \widehat{E}$ содержит бесконечно много точек, то наипростейшие дроби с полюсами из E не плотны в пространстве $AC(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность различных точек $a_n \in K \setminus \widehat{E}$ с предельной точкой $a \in K$. Поскольку $K \cap E = \emptyset$, имеем $a \notin E$, а значит, и $a \notin \widehat{E}$. Без ограничения общности считаем, что $a = 0$.

Рассмотрим компакт $E^{-1} = \{w^{-1} : w \in E\}$. Имеем $0 \notin \widehat{E^{-1}}$, поэтому по теореме Рунге найдется такой многочлен $P(z) = c_m z^m + \dots + c_1 z + c_0$, что $P(0) = 0 = c_0$ и $|P(z) - 1| < 1/2$ для каждого $z \in E^{-1}$. Это означает, что

функция $f(w) := P(1/w) = c_m/w^m + \dots + c_1/w$ удовлетворяет неравенству $|f(w) - 1| < 1/2$ при каждом $w \in E$.

Построим такую комплексную меру $\mu \in rca(K)$, что ее преобразование Коши $\hat{\mu}$ равномерно близко к $f(w)$ при $w \in E$. Для этого заметим, что при каждом $k = 1, \dots, m$

$$\frac{1}{w^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(w - a_n) \cdots (w - a_{n+k-1})},$$

причем предел равномерный по $w \in E$. Подпредельное выражение равно сумме простейших дробей с простыми полюсами в точках $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}$, а значит, выражается как преобразование Коши некоторой меры μ_k , равной линейной комбинации единичных атомных мер, сосредоточенных в указанных точках. Таким образом, при достаточно больших n найдется такая мера μ_k с носителем $\{a_n, \dots, a_{n+k-1}\} \subset K$, что для каждого $w \in E$ выполнено неравенство

$$\left| \hat{\mu}_k(w) - \frac{1}{w^k} \right| < \frac{1}{2(|c_m| + \dots + |c_1|)}.$$

Тогда для меры $\mu = c_m \mu_m + \dots + c_1 \mu_1$ имеем $\text{supp } \mu \subset K$, $|\hat{\mu}(w) - f(w)| < 1/2$, откуда $|\hat{\mu}(w) - 1| < 1$ при $w \in E$. Это, в частности, означает, что $\text{Re } \hat{\mu}(w) > 0$ при каждом $w \in E$. При этом мера μ как ненулевая мера с конечным носителем определяет ненулевой функционал $\mu \in (AC(K))^*$: нетрудно подобрать многочлен $Q(z)$, для которого $\mu(Q) \neq 0$. Таким образом, по лемме 1 наипростейшие дроби с полюсами из E не плотны в пространстве $AC(K)$. Теорема доказана.

В связи с теоремой 1 естественно возникает

Задача В. Пусть K – компакт со связным дополнением и не пересекающийся с ним компакт E таков, что $\hat{E} \supset K$. Верно ли, что наипростейшие дроби с полюсами из E плотны в $AC(K)$?

В случае, когда K лежит в одной компоненте связности D множества $\hat{E} \setminus E$, положительное решение задачи В вытекает из следующего результата Кореваара (см. [3]): всякая функция, голоморфная в ограниченной односвязной области D и не имеющая нулей в D , может быть с любой точностью равномерно внутри D приближена многочленами, все нули которых лежат на границе ∂D этой области. Действительно, пусть K лежит в связной компоненте D множества $\hat{E} \setminus E$. Область D ограничена, и ее можно считать односвязной (если нужно, заменив дополнением к замыканию внешней компоненты разности $\mathbb{C} \setminus \bar{D}$). Если f – произвольная голоморфная в D функция, то функция

$$F(z) = \exp \left(\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \right),$$

где z_0 – фиксированная точка из D , не имеет нулей в D и по теореме Кореваара приближается многочленами p с нулями на $\partial D \subset E$ равномерно внутри D . Следовательно, функция $f = F'/F$ равномерно внутри D (в частности, равномерно на K) приближается наипростейшими дробями p'/p с полюсами на ∂D . Остается заметить, что голоморфные в D функции плотны в $AC(K)$.

Для произвольных компактов K и для “толстых” компактов E задача В решается положительно и достаточно просто, как показывает следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть K – компакт в комплексной плоскости, $\mathbb{C} \setminus K$ связно, и пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ – набор замкнутых простых взаимно внешних жордановых контуров, объединение $\bigcup_{k=1}^m \text{Int } \Gamma_k$ внутренностей которых содержит K . Если множество E содержит все Γ_k вместе с некоторыми их окрестностями, то наипростейшие дроби с полюсами из E плотны в пространстве $AC(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Гильберта (см. [7]) объединение контуров $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ можно сколь угодно точно в хаусдорфовой метрике приблизить лемниской $L = L(P, R) = \{z : |P(z)| = R\}$ некоторого комплексного многочлена P . Поэтому можно считать, что $L \subset E$ и $K \subset (\hat{L})^\circ = \{z : |P(z)| < R\}$. Наипростейшие дроби

$$r_n(z) = \frac{nP^{n-1}(z)P'(z)}{P^n(z) - R^n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

имеют полюсы на L (т.е. на E) и равномерно на K стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Кроме того, полюсы всех дробей r_n образуют всюду плотное множество на L . Отсюда следует, что всякая дробь $-1/(z - a)$ при $a \in L$ может быть с любой точностью равномерно на K приближена наипростейшими дробями с полюсами из L .

При малых действительных ε лемнискаты $L(P, R + \varepsilon)$ также лежат в E . Применяя к ним аналогичные рассуждения, получаем, что для всякого a из некоторой окрестности $U(L)$ лемнискаты L дробь $-1/(z - a)$ с любой точностью равномерно на K приближается наипростейшими дробями с полюсами из E .

Для доказательства теоремы достаточно приблизить каждую функцию из пространства $AC(K)$ с любой точностью суммами дробей вида $\pm 1/(z - a)$, $a \in U(L)$.

Докажем, что такими суммами приближается любая дробь вида $c/(z - a)^2$, $a \in U(L)$, $c \in \mathbb{C}$. Действительно, для достаточно больших натуральных m имеем $a + c/m \in U(L)$, и при этом

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{c}{(z - a)^2} - \left(\frac{m}{z - (a + c/m)} - \frac{m}{z - a} \right) \right\|_{C(K)} \\ &= \left\| \frac{c^2}{m(z - a)^2(z - (a + c/m))} \right\|_{C(K)} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Далее, всякий многочлен $f(z)$ в точках $z \in K$ выражается через свою первообразную $F(z)$ по формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

и последний интеграл может быть с любой точностью равномерно по $z \in K$ приближен своими интегральными суммами, каждая из которых представляет собой сумму дробей вида $c_k/(z - \zeta_k)^2$, $\zeta_k \in L$, $c_k \in \mathbb{C}$ (это доказывается так же, как в теореме Рунге; см., например, [8; гл. 2, § 6]). Как было показано выше, любая такая дробь с любой точностью равномерно на компакте K приближается суммами дробей вида $\pm 1/(z - a)$, $a \in U(L)$. Следовательно, всякий

многочлен f , а тогда по теореме С. Н. Мергеляна (см., например, [9; гл. 2, § 9]) и всякая функция $f \in AC(K)$, с любой точностью равномерно на K приближается такими суммами. Теорема доказана.

Теорема 2 наводит на мысль, что для любого компакта E ответ в задаче В положительный. Это удастся доказать в случае “спрямляемого” компакта E .

§ 3. Основной результат

ТЕОРЕМА 3. Пусть компакт K имеет связное дополнение и не пересекающееся с ним множество E содержит такие взаимно внешние замкнутые жордановы спрямляемые контуры $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, что $K \subset \bigcup_{j=1}^m \text{Int } \Gamma_j$. Тогда наипростейшие дроби с полюсами из E плотны в $AC(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что внутри каждого контура Γ_j есть бесконечно много точек компакта K (если нужно, расширим этот компакт).

Как и в доказательстве теоремы 2, покажем, что справедливы следующие утверждения.

I. Для любого $a \in \Gamma := \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j$ функция $-1/(z-a)$ с любой точностью равномерно на K приближается наипростейшими дробями с полюсами из Γ , т.е. замыкание в $AC(K)$ множества наипростейших дробей с полюсами из Γ – аддитивная подгруппа.

II. Эта подгруппа совпадает с $AC(K)$.

Утверждение I вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 2. В условиях теоремы 3 существуют такие наипростейшие дроби r_n степеней $n = 1, 2, \dots$ с полюсами на $\Gamma = \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j$, что $\|r_n\|_{C(K)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Дело в том, что полюсы всех дробей r_n из леммы 2 всюду плотны на Γ : если какая-то дуга $\gamma \subset \Gamma$ свободна от этих полюсов, то, поскольку разность $K \setminus (\widehat{\Gamma \setminus \gamma})$ содержит бесконечно много точек, найдутся такие мера $\mu \in rca(K)$ и число $\delta > 0$, что $\text{Re } \widehat{\mu}(w) > \delta$ при всех $w \in \Gamma \setminus \gamma$ (см. доказательство теоремы 1), а тогда

$$\|r_n\|_{C(K)} \geq \frac{\text{Re } \mu(r_n)}{\|\mu\|_{(C(K))^*}} > \frac{n\delta}{\|\mu\|_{(C(K))^*}} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Из всюду плотности полюсов дробей r_n на Γ следует, что для заданной точки $a \in \Gamma$ найдутся такие (подправленные) наипростейшие дроби $\tilde{r}_n$ с полюсами на Γ , что каждая из них имеет полюс в a и $\|\tilde{r}_n\|_{C(K)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Это и означает, что функция $-1/(z-a)$ с любой точностью равномерно на K приближается наипростейшими дробями с полюсами из Γ , т.е. утверждение I справедливо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Рассмотрим нормированную равновесную меру ν компакта Γ (см. [10; гл. 2, § 4]). Эта положительная вероятностная мера с носителем на Γ обладает тем свойством, что ее логарифмический потенциал

$$V_\nu(z) = \int_\Gamma \log \frac{1}{|\zeta - z|} d\nu(\zeta)$$

постоянен на открытом множестве $U := \bigcup_{j=1}^m \text{Int } \Gamma_j$. Беря сопряженный градиент от этого потенциала, для преобразования Коши меры ν получаем равенство

$$\widehat{\nu}(z) = \int_{\Gamma} \frac{d\nu(\zeta)}{\zeta - z} = 0$$

при всех $z \in U$.

Пусть $\theta_j = \nu(\Gamma_j)$, $j = 1, \dots, m$. По теореме Дирихле о совместных приближениях (см. [11; гл. 1, § 5]) существует бесконечная последовательность Λ натуральных чисел n , для каждого из которых все числа $n\theta_j$ отличаются от ближайших к ним целых неотрицательных чисел n_j меньше чем на $n^{-1/m}$. Для каждого j возьмем на контуре Γ_j какую-нибудь точку и от нее последовательно отложим n_j связных дуг, которые включают в себя свои концы и мера ν каждой из которых равна $1/n$. При этом последняя дуга либо не “дойдет” до первой, либо перекроет ее. В любом случае образуется лишняя дуга α_j (не покрытая совсем или покрытая дважды), для которой $\nu(\alpha_j) < n^{-(1+1/m)}$. В итоге весь ориентированный составной контур Γ разобьется на дуги $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ с $\nu(\gamma_k) = 1/n$, $k = 1, \dots, n$ (сумма чисел n_j близка к сумме $\sum n\theta_j = n$, а значит, сама равна n), и дуги $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ с $\nu(\alpha_j) < n^{-(1+1/m)}$, $j = 1, \dots, m$, причем некоторые из дуг α_j проходятся в противоположном направлении.

Для каждого $k = 1, \dots, n$ точка

$$\zeta_k = n \int_{\gamma_k} \zeta d\nu(\zeta),$$

являясь средним нормированного сужения меры ν на соответствующую дугу γ_k , лежит в выпуклой оболочке $\text{conv } \gamma_k$ этой дуги. Пусть a_k – точка на γ_k , ближайшая к ζ_k .

Положим $\delta = \inf\{|\zeta - z| : \zeta \in \Gamma, z \in K\}$. Для всякого $z \in K$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k} \right| &= \left| n \int_{\Gamma} \frac{d\nu(\zeta)}{\zeta - z} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k - z} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^m n \left| \int_{\alpha_j} \frac{d\nu(\zeta)}{\zeta - z} \right| + \left| \sum_{k=1}^n n \int_{\gamma_k} \frac{d\nu(\zeta)}{\zeta - z} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\zeta_k - z} \right| + \left| \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\zeta_k - z} - \frac{1}{a_k - z} \right) \right| \\ &\leq \frac{m \cdot n \cdot n^{-(1+1/m)}}{\delta} + \sum_{k=1}^n \frac{|\zeta_k - a_k|}{|\zeta_k - z| \delta} \\ &\quad + \left| \sum_{k=1}^n n \int_{\gamma_k} \left(\frac{1}{\zeta_k - z} + \frac{\zeta_k - \zeta}{(\zeta_k - z)^2} + \frac{(\zeta_k - \zeta)^2}{(\zeta_k - z)^2(\zeta - z)} \right) d\nu(\zeta) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\zeta_k - z} \right| \\ &= \frac{m}{\delta n^{1/m}} + \sum_{k=1}^n \frac{|\zeta_k - a_k|}{|\zeta_k - z| \delta} + \left| \sum_{k=1}^n n \int_{\gamma_k} \frac{(\zeta_k - \zeta)^2}{(\zeta_k - z)^2(\zeta - z)} d\nu(\zeta) \right| =: S. \end{aligned}$$

В силу связности дуги γ_k точка $\zeta_k \in \text{conv } \gamma_k$ лежит на некотором отрезке с концами на γ_k , поэтому $|\zeta_k - \zeta| \leq |\gamma_k|$ для всякого $\zeta \in \gamma_k$. При достаточно больших $n \in \Lambda$ дуги γ_k настолько малы, что $|\zeta_k - z| > \delta/2$ для любого $z \in K$ (если длины дуг γ_k с ростом n не стремятся к нулю, то мера ν какой-то

невырожденной дуги $\gamma \subset \Gamma_j$ равна нулю, а тогда $\widehat{\nu}$ не может равняться нулю внутри Γ_j). Наконец,

$$|\zeta_k - a_k| \leq \sup_{\zeta \in \text{conv } \gamma_k} \inf_{a \in \gamma_k} |\zeta - a| =: d(\gamma_k).$$

Учитывая все это, продолжаем оценку:

$$S \leq \frac{m}{\delta n^{1/m}} + \sum_{k=1}^n \frac{d(\gamma_k)}{(\delta/2)\delta} + \sum_{k=1}^n \frac{|\gamma_k|^2}{(\delta/2)^2\delta} \leq \frac{m}{\delta n^{1/m}} + \frac{2}{\delta^2} \sum_{k=1}^n d(\gamma_k) + \frac{4}{\delta^3} \max_k |\gamma_k| \cdot |\Gamma|.$$

В последнем выражении первое и третье слагаемые стремятся к нулю с ростом n . Осталось доказать, что $\sum_{k=1}^n d(\gamma_k) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$.

Обозначим через l_k длину отрезка, соединяющего концы дуги γ_k . Сумма расстояний от любой точки дуги γ_k до концов этой дуги не превосходит $|\gamma_k|$. Поэтому дуга γ_k лежит внутри эллипса с фокусами в концах этой дуги и большей полуосью $|\gamma_k|/2$. В этом же эллипсе лежит и выпуклая оболочка $\text{conv } \gamma_k$. Нетрудно видеть, что тогда величина $d(\gamma_k)$ не превосходит удвоенной меньшей полуоси этого эллипса, т.е.

$$d(\gamma_k) \leq 2\sqrt{\frac{|\gamma_k|^2}{4} - \frac{l_k^2}{4}} = \sqrt{|\gamma_k|^2 - l_k^2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n d(\gamma_k) &\leq \sum_{k=1}^n \sqrt{|\gamma_k|^2 - l_k^2} \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{2|\gamma_k|} \sqrt{|\gamma_k| - l_k} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n 2|\gamma_k| \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n (|\gamma_k| - l_k) \right)^{1/2} \\ &\leq \left(2|\Gamma| + 2 \sum_{j=1}^m |\alpha_j| \right)^{1/2} \left(|\Gamma| + \sum_{j=1}^m |\alpha_j| - \sum_{k=1}^n l_k \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

С ростом n дуги γ_k становятся все мельче, и суммарная длина $\sum_{k=1}^n l_k$ ломаных, вписанных в контуры $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, стремится к $|\Gamma|$ (эти ломаные становятся замкнутыми, если к ним добавить отрезки, соединяющие концы дуг $\alpha_1, \dots, \alpha_m$; длины этих дуг стремятся к нулю). Следовательно, $\sum_{k=1}^n d(\gamma_k) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Лемма 2 и утверждение I доказаны.

§ 4. Плотность подгруппы

Выявим теперь некоторые свойства аддитивных подгрупп гильбертова пространства – в той мере, насколько это необходимо для доказательства заявленного выше утверждения II.

ЛЕММА 3. Пусть в гильбертовом пространстве H задана замкнутая аддитивная подгруппа G . Если две точки $a, b \in G$ обладают тем свойством, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой набор точек $x_0, x_1, \dots, x_n \in G$, что $x_0 = a$, $x_n = b$ и $\sum_{k=1}^n \|x_k - x_{k-1}\|^2 < \varepsilon$, то весь отрезок $[a, b]$ лежит в G .

Точность этого утверждения показывает пример подгруппы $L_{\mathbb{Z}}^2[0, 1]$, состоящей из целозначных функций пространства $L^2[0, 1]$: для любых двух различных элементов $a, b \in L_{\mathbb{Z}}^2[0, 1]$ отрезок $[a, b]$ не лежит в $L_{\mathbb{Z}}^2[0, 1]$ и в то же время для любого $\delta > 0$ найдутся такие $x_0, \dots, x_n \in L_{\mathbb{Z}}^2[0, 1]$, что $x_0 = a$, $x_n = b$, $\|x_k - x_{k-1}\| < \delta$ и сумма $\sum_{k=1}^n \|x_k - x_{k-1}\|^2$ ограничена константой, зависящей только от a и b . Вообще, структура замкнутой аддитивной подгруппы гильбертова пространства может быть весьма нетривиальной (см. [12]); имеются, например, гомотопически нетривиальные связные подгруппы (см. [13], [14]).

Лемма 3 является следствием известной леммы об округлении коэффициентов в L_p (см., например, [15; гл. 2, § 3]): *если $y_1, \dots, y_n \in L_p$, $1 < p < \infty$, $y = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n$, $\lambda_k \in [0, 1]$, $k = 1, \dots, n$, то найдутся такие числа $\theta_k \in \{0, 1\}$, что*

$$\left\| y - \sum_{k=1}^n \theta_k y_k \right\| \leq C_p \left(\sum_{k=1}^n \|y_k\|^r \right)^{1/r},$$

где $r = \min\{2, p\}$ и константа C_p зависит только от p .

Прямое доказательство леммы 3 приведем для полноты изложения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Пространство H можно считать действительным. При $\theta \in [0, 1]$ положим

$$x(\theta) = \theta a + (1 - \theta)b, \quad \rho(\theta) = \rho(x(\theta), G) = \inf\{\|x(\theta) - g\| : g \in G\}.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ возьмем точки $x_0 = a$, $x_1, \dots, x_n = b$ из условия леммы. Зафиксируем θ и рассмотрим какой-нибудь элемент $y \in G$ со свойством $\|y - x(\theta)\|^2 < \rho^2(\theta) + \varepsilon/n$.

Открытый шар $B(x(\theta) - y, \rho(\theta))$ не пересекается с G . В силу симметричности G открытый шар $B(y - x(\theta), \rho(\theta))$ также не содержит точек из G . Следовательно, для любого $g \in G$ имеем

$$\begin{aligned} \|g \pm (x(\theta) - y)\| &\geq \rho(\theta) \iff \|g\|^2 \pm 2(g, x(\theta) - y) + \|x(\theta) - y\|^2 \geq \rho^2(\theta) \\ &\implies |(g, x(\theta) - y)| \leq \frac{1}{2} \left(\|g\|^2 + \frac{\varepsilon}{n} \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |(b - a, x(\theta) - y)| &\leq \sum_{k=1}^n |(x_k - x_{k-1}, x(\theta) - y)| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\|x_k - x_{k-1}\|^2 + \frac{\varepsilon}{n} \right) < \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, если $y_n \in G$ и $\|x(\theta) - y_n\| \rightarrow \rho(\theta)$, то $(b - a, x(\theta) - y_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда при фиксированном $\Delta\theta$ имеем

$$\begin{aligned} \rho^2(\theta + \Delta\theta) &\leq \|x(\theta + \Delta\theta) - y_n\|^2 \\ &= \|x(\theta) - y_n\|^2 + |\Delta\theta|^2 \|a - b\|^2 + 2\Delta\theta(a - b, x(\theta) - y_n) \\ &\rightarrow \rho^2(\theta) + |\Delta\theta|^2 \|a - b\|^2, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

так что $\rho^2(\theta + \Delta\theta) - \rho^2(\theta) \leq \|a - b\|^2 |\Delta\theta|^2$. Отсюда $\rho^2(\theta) \equiv \text{const}$, а поскольку $\rho(0) = \rho(1) = 0$, получаем $\rho(\theta) \equiv 0$ и $[a, b] \in G$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть E – связное множество на плоскости. Для любых двух точек $a, b \in E$ и для любого $\varepsilon > 0$ в E найдутся такие точки $z_0 = a, z_2, \dots, z_n = b$, что $\sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}|^2 < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что E замкнуто (если указанные точки $z_1, \dots, z_n$ найдутся в замыкании E , то найдутся и в E) и ограничено (заданные точки a и b содержатся в ограниченной связной части множества E).

Итак, пусть E – связный компакт в $\mathbb{C}$ и $a, b \in E$.

Если плоская мера Лебега $\text{mes}_2 E$ компакта E равна нулю, то E может быть покрыто конечным числом замкнутых кругов с суммой квадратов радиусов меньше ε . Можно считать, что в каждом из этих кругов есть точки из E . В силу связности E найдутся такие круги $U_0, \dots, U_n$ из этого покрытия, что $a \in U_0, b \in U_n$ и $U_k \cap U_{k-1} \neq \emptyset$ для каждого k . Беря $z_0 = a, z_n = b$ и произвольные точки $z_k \in U_k \cap E, k = 1, \dots, n-1$, получаем

$$\sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}|^2 < \sum_{k=1}^n (2r_k + 2r_{k-1})^2 \leq 4 \sum_{k=1}^n (2r_k^2 + 2r_{k-1}^2) < 16\varepsilon,$$

где r_k – радиус круга U_k .

Рассмотрим теперь случай, когда $\text{mes}_2 E > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\text{mes}_2 E = 1$. Если замостить всю плоскость замкнутыми клетками – квадратами со стороной δ , а затем выбрать те N из них, которые содержат точки из E , то при достаточно малом $\delta < \varepsilon$ сумма $N\delta^2$ площадей выбранных квадратов удовлетворяет неравенству $N\delta^2 < 1 + \varepsilon^4$ (здесь существенно, что E – компакт). Разобьем выбранные N квадратов на два типа. К первому типу отнесем квадраты Δ , удовлетворяющие неравенству $\text{mes}_2(\Delta \cap E) \leq \delta^2(1 - \varepsilon^2)$, а остальные отнесем ко второму типу. Для числа N_1 квадратов первого типа имеем

$$1 = \text{mes}_2 E \leq (N - N_1)\delta^2 + N_1\delta^2(1 - \varepsilon^2) = N\delta^2 - N_1\delta^2\varepsilon^2 < 1 + \varepsilon^4 - N_1\delta^2\varepsilon^2,$$

откуда $N_1 < \varepsilon^2/\delta^2$.

В силу связности множества E среди выбранных квадратов найдутся такие квадраты $\Delta_0, \dots, \Delta_m$, что $\Delta_0 \ni a, \Delta_m \ni b$ и каждые два квадрата Δ_{k-1} и Δ_k имеют либо общую сторону, либо общую вершину.

Построим теперь требуемую цепочку точек $z_0 = a, z_1, \dots, z_n = b$, последовательно выбирая по одной или по несколько этих точек в квадратах $\Delta_1, \dots, \Delta_{m-1}$. Если квадрат Δ_1 первого типа, то в качестве z_1 возьмем любую точку из пересечения $\Delta_1 \cap E$ и очередную точку z_2 будем искать уже в Δ_2 . Если же квадрат Δ_1 имеет второй тип, то разобьем его на $1/\varepsilon^2$ маленьких квадратов со стороной $\delta\varepsilon$ (здесь без ограничения общности считаем $1/\varepsilon$ натуральным числом). Эти маленькие квадраты имеют площади $\delta^2\varepsilon^2$ каждый, поэтому в любом из них есть точки из E (напомним, $\text{mes}_2(E \cap \Delta_1) > \delta^2(1 - \varepsilon^2)$). Выберем наименьшую по количеству цепочку маленьких квадратов, в которой каждые два соседних квадрата граничат по стороне или вершине, первый квадрат в цепочке – ближайший к точке $z_0 = a \in \Delta_0$, а последний квадрат в цепочке одной

стороной или вершиной касается большого квадрата Δ_2 . Нетрудно видеть, что число q маленьких квадратов в такой цепочке не превосходит $1/\varepsilon$. Выбираем точки $z_1, \dots, z_q \in E$ последовательно в маленьких квадратах выбранной цепочки, а очередную точку z_{q+1} будем искать уже в Δ_2 . Продолжая так далее, строим всю последовательность $z_1, \dots, z_{n-1}$, выбирая в каждом очередном квадрате Δ_k либо одну точку, если он первого типа, либо не более чем $1/\varepsilon$ точек, если он второго типа.

Если точка z_j выбрана в квадрате Δ_k первого типа, то каждое из расстояний $|z_j - z_{j-1}|$, $|z_{j+1} - z_j|$ не превосходит $2\sqrt{2}\delta$, а если набор точек $z_{j+1}, \dots, z_{j+q}$ выбран в одном и том же квадрате Δ_k второго типа, то $|z_{j+p+1} - z_{j+p}| \leq 2\sqrt{2}\delta\varepsilon$, $p = 1, \dots, q-1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |z_j - z_{j-1}|^2 &\leq |z_1 - a|^2 + |b - z_{n-1}|^2 + N_1 2(2\sqrt{2}\delta)^2 + (N - N_1) \frac{1}{\varepsilon} (2\sqrt{2}\delta\varepsilon)^2 \\ &\leq (2\sqrt{2}\delta)^2 + (2\sqrt{2}\delta)^2 + \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} 16\delta^2 + N \frac{1}{\varepsilon} 8\delta^2 \varepsilon^2 \leq 16\delta^2 + 16\varepsilon^2 + 8(1 + \varepsilon^4)\varepsilon < 48\varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть G – замкнутая аддитивная подгруппа гильбертова пространства H , E – связное множество на плоскости и липшицево отображение $\varphi: E \rightarrow H$ таково, что $\varphi(E) \subset G$. Тогда G содержит замкнутое $\mathbb{R}$ -линейное подпространство L , порожденное элементами вида $a - b$, $a, b \in \varphi(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $a, b \in \varphi(E)$ и любого $\varepsilon > 0$ по условию и в силу леммы 4 найдутся такие точки $z_0, z_1, \dots, z_n \in E$ и константа $C > 0$, что $a = \varphi(z_0)$, $b = \varphi(z_n)$ и

$$\sum_{k=1}^n \|\varphi(z_k) - \varphi(z_{k-1})\|^2 \leq C \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}|^2 < C\varepsilon.$$

Следовательно, элементы $0 = a - a$ и $a - b$ удовлетворяют условиям леммы 3 (при $x_k = a - \varphi(z_k)$), и по этой лемме весь отрезок $[0, a - b]$ лежит в G . Но тогда G содержит всю прямую $\{\lambda(a - b) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Теорема доказана.

Компакт E в комплексной плоскости будем называть *множеством единственности для гармонических функций*, если любые две функции, гармонические в некоторой области $D \supset E$ и совпадающие на E , совпадают всюду в D .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть связные компакты E_1 и E_2 лежат соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости и каждый из них является множеством единственности для гармонических функций. Тогда суммы дробей вида $\pm 1/(z - a)$ (т.е. логарифмические производные рациональных функций, или разности наипростейших дробей) с полюсами $a \in E_1 \cup E_2$ плотны в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – замыкание в $L_2(\mathbb{R})$ множества сумм дробей вида $\pm 1/(z - a)$, $a \in E_1 \cup E_2$. Нетрудно видеть, что G – замкнутая аддитивная подгруппа в $L_2(\mathbb{R})$.

Подгруппа G содержит липшицевы образы связанных плоских компактов E_1 и E_2 (отображение $\varphi: E_j \rightarrow L_2(\mathbb{R})$, $\varphi(a) = 1/(z - a)$, удовлетворяет условию Липшица), поэтому по теореме 4 подгруппа G содержит все замкнутое линейное подпространство L над полем $\mathbb{R}$, порожденное функциями $R_{ab}(z) = 1/(z - a) - 1/(z - b)$, где a, b – произвольная пара точек из одного E_j , $j = 1, 2$.

Покажем, что L совпадает с $L_2(\mathbb{R})$. Если это не так, то найдется такая ненулевая функция $h \in L_2(\mathbb{R})$, что

$$\operatorname{Re}(R_{ab}, h) = 0 \quad \forall a, b \in E_j, \quad j = 1, 2.$$

Это означает, что гармоническая в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ функция

$$u(z) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \frac{\overline{h(x)}}{x - z} dx$$

постоянна на E_1 и на E_2 . По условию оба этих компакта являются множествами единственности для гармонических функций, так что u постоянна в обеих полуплоскостях, а поскольку $u(iy) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \pm\infty$, получаем $u(z) \equiv 0$ при $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Отсюда $h = 0$, что противоречит предположению.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть связный компакт E не пересекается с положительной полуосью $\mathbb{R}_+$ действительной оси и является множеством единственности для гармонических функций. Тогда суммы дробей вида $\pm 1/(z - a)$ с полюсами $a \in E$ плотны в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+)$.

Доказательство этого следствия аналогично предыдущему.

Отметим, что наипростейшие дроби с полюсами из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ не плотны в $L_2(\mathbb{R})$ (это замечено в [3] и следует из более ранних результатов В. И. Данченко; функции, с любой точностью приближаемые в $L_2(\mathbb{R})$ наипростейшими дробями, описаны В. Ю. Протасовым в [16]). В случае полуоси ситуация иная: наипростейшие дроби с полюсами из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ плотны в $L_2(\mathbb{R}_+)$, но для любого $\varepsilon > 0$ наипростейшие дроби с полюсами из угла $\{z : \arg z \in (\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)\}$ не плотны в $L_2(\mathbb{R}_+)$ (см. [4]).

ТЕОРЕМА 5. Пусть в комплексной плоскости заданы компакт K со связным дополнением и компакт $E \subset \mathbb{C} \setminus K$, удовлетворяющий одному из следующих условий:

- 1) $\widehat{E} \supset K$;
- 2) E связан и является множеством единственности для гармонических функций.

Тогда суммы дробей вида $\pm 1/(z - a)$ с полюсами $a \in E$ плотны в пространстве $AC(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале E удовлетворяет условию 1). В этом случае компакт K покрывается конечным числом ограниченных связанных компонент $D_1, \dots, D_m$ дополнения $\mathbb{C} \setminus E$. Обозначим через F_j внешнюю границу

области D_j , т.е. границу внешней компоненты дополнения к $\overline{D_j}$, $j = 1, \dots, m$. Для каждого j открытое множество $\widehat{F_j} \setminus F_j$ состоит из непересекающихся односвязных областей; выберем из них ту, которая содержит область D_j , и обозначим ее D'_j . Для различных j и k области D'_j и D'_k либо не пересекаются, либо одна из них содержится внутри другой (в противном случае найдутся точки $\alpha \in D'_j \cap F_k$ и $\beta \in (\mathbb{C} \setminus \overline{D'_j}) \cap F_k$, вблизи которых найдутся точки $\alpha' \in D'_j \cap D_k$ и $\beta' \in (\mathbb{C} \setminus \overline{D'_j}) \cap D_k$, и получится, что непрерывная кривая, соединяющая эти точки внутри области $D_k \subset \mathbb{C} \setminus E$, должна пересекать множество $F_j \subset E$). Поэтому можно считать, что области D'_j не пересекаются.

Итак, компакт K лежит в объединении непересекающихся односвязных областей D'_j с границами $E_j \subset F_j \subset E$. В каждой из областей D'_j возьмем такой простой спрямляемый жорданов контур S_j , что $K \subset \bigcup_{j=1}^m \text{Int } S_j =: \text{Int } S$, где $S := \bigcup_{j=1}^m S_j$. Контур S_j , $j = 1, \dots, m$, взаимно внешние.

Рассмотрим гильбертово пространство H – пополнение пространства $AC(\widehat{S})$ по норме

$$\|f\|_H = \left(\sum_{j=1}^m \int_{S_j} |f(z)|^2 |dz| \right)^{1/2}. \quad (*)$$

Пространство H является подпространством пространства $L_2(S, |dz|)$. Пусть G – замыкание в H множества сумм дробей вида $\pm 1/(z - a)$, $a \in \bigcup_{j=1}^m E_j$ (каждая из этих дробей лежит в H). Нетрудно видеть, что G – замкнутая аддитивная подгруппа в H .

Подгруппа G содержит липшицевы образы связных плоских компактов E_j , $j = 1, \dots, m$ (отображение $\varphi: E_j \rightarrow H$, $\varphi(a) = 1/(z - a)$, удовлетворяет условию Липшица), поэтому по теореме 4 подгруппа G содержит все замкнутое линейное подпространство L над полем $\mathbb{R}$, порожденное функциями $R_{ab}(z) = 1/(z - a) - 1/(z - b)$, где a, b – произвольная пара точек из одного E_j , $j = 1, \dots, m$.

Покажем, что L совпадает с H . Если бы это было не так, то нашелся бы такой ненулевой элемент $h \in H$, что

$$\text{Re}(R_{ab}, h) = 0 \quad \forall a, b \in E_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Для соответствующей функции $h \in L_2(S, |dz|)$ это означает, что гармоническая в $\mathbb{C} \setminus S$ функция

$$u(w) = \text{Re} \sum_{j=1}^m \int_{S_j} \frac{\overline{h(z)}}{z - w} |dz|$$

постоянна на каждом компакте E_j , $j = 1, \dots, m$. Функция u является действительной частью преобразования Коши $\widehat{\mu}_h$ меры $d\mu_h = \overline{h(z)} |dz|$, сосредоточенной на S . Получается, что функция $\widehat{\mu}_h$, будучи голоморфной и ограниченной во внешней компоненте связности дополнения $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^m \widehat{E_j}$, отображает эту компоненту (если она не постоянна) на ограниченную область, граница которой лежит на одной или нескольких вертикальных прямых. Это невозможно, поэтому $\widehat{\mu}_h$ постоянна в указанной компоненте связности, а поскольку $\widehat{\mu}_h(\infty) = 0$, получаем $\widehat{\mu}_h \equiv 0$ всюду в области $\mathbb{C} \setminus \widehat{S}$. Следовательно, мера μ_h ортогональна к алгебре $AC(\widehat{S})$ (см., например, [9; гл. 2, § 8]). Функции из $AC(\widehat{S})$ плотны в H ,

поэтому мера μ_h ортогональна и элементу h :

$$\sum_{j=1}^m \int_{S_j} h(z) \overline{h(z)} |dz| = 0.$$

Таким образом, $h = 0$, а это противоречит нашему предположению.

Итак, L совпадает с H , т.е. любая функция $f \in AC(\hat{S})$ с любой точностью в норме $(*)$ приближается суммами дробей $\pm 1/(z - a)$, $a \in E$. В силу интегральной формулы Коши функция f приближается такими суммами равномерно на K . Остается вспомнить, что функции из $AC(\hat{S})$ плотны в $AC(K)$ (теорема С. Н. Мергеляна).

Пусть теперь компакт E удовлетворяет условию 2). В этом случае дополнение к E состоит из непересекающихся ограниченных односвязных областей и неограниченной двусвязной области. Компакт K покрывается конечным числом этих областей, и опять можно взять такие взаимно внешние простые спрямляемые жордановы контуры $S_1, \dots, S_m$, что $K \subset \bigcup_{j=1}^m \text{Int } S_j =: \text{Int } S$, где $S := \bigcup_{j=1}^m S_j$, и E лежит во внешности каждого из контуров S_j (для существования нужного контура в неограниченной двусвязной области важно, что K имеет связное дополнение).

Рассмотрим опять гильбертово пространство H – пополнение пространства $AC(\hat{S})$ по норме $(*)$. Пусть опять G – замыкание в H множества сумм дробей вида $\pm 1/(z - a)$, $a \in E$. Как и выше, доказывается, что G содержит все замкнутое линейное подпространство L над полем $\mathbb{R}$, порожденное функциями $R_{ab} = 1/(z - a) - 1/(z - b)$, $a, b \in E$.

Если предположить, что L не совпадает с H , т.е. допустить существование такого ненулевого вектора $h \in H$, что $\text{Re}(R_{ab}, h) = 0$ для всех пар $a, b \in E$, то для соответствующей функции $h \in L_2(S, |dz|)$ преобразование Коши $\hat{\mu}_h$ меры $d\mu_h = \overline{h(z)} |dz|$, сосредоточенной на S , имеет постоянную действительную часть на E . Поскольку E – множество единственности для гармонических функций, получаем $\text{Re } \hat{\mu}_h \equiv \text{const}$, а значит, и $\hat{\mu}_h \equiv \text{const} = \hat{\mu}_h(\infty) = 0$ всюду в области $\mathbb{C} \setminus \hat{S}$.

Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным выше.

Теорема 5, а вместе с ней и теорема 3 доказаны.

§ 5. Основная проблема

Рассуждения, приведенные в начале доказательства теоремы 3, и теорема 5 позволяют свести задачу В к следующей.

Задача С. Пусть непересекающиеся компакты K и E таковы, что $K \subset \hat{E}$. Верно ли, что существуют такие наипростейшие дроби r_n , $n = 1, 2, \dots$, с полюсами на E , что $\|r_n\|_{C(K)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$?

Возможно, задачу С удастся решить с помощью более тонкого, чем в доказательстве леммы 2, анализа свойств равновесной меры границы внешней компоненты связности дополнения $\mathbb{C} \setminus E$.

В уже упоминавшейся работе Дж. Кореваара задача С фактически положительно решается в случае, когда K лежит в одной компоненте связности D

разности $\widehat{E} \setminus E$ (см. [3; теорема 3.1]). Доказательство Кореваара использует тонкие свойства конформного отображения внешности круга на внешнюю компоненту множества $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$.

§ 6. Приближение на конечном компакте

ТЕОРЕМА 6. Пусть $K = \{z_1, \dots, z_n\}$ – конечный компакт в комплексной плоскости, все точки z_k различны, $p(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$, и множество E не пересекается с K . Для плотности в $C(K)$ наипростейших дробей с полюсами из E необходимо, а в случае, когда E связно и $d(E, K) := \inf\{|z - w| : z \in K, w \in E\} > 0$, и достаточно, чтобы для любого ненулевого многочлена q степени меньше n существовала такая точка $w \in E$, что

$$\operatorname{Re} \frac{q(w)}{p(w)} < 0.$$

Существование условия $d(E, K) > 0$ в этом утверждении показывает пример из § 2, а существование условия связности E подтверждает измененный пример: $K = \{0\}$ и $E = \{w : |w - 1/2| = 1/2, |w| \geq 1/2\} \cup \{w : |w + 1/2| = 1/2, |w| \geq 1/2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Необходимость. Пусть существует такой ненулевой многочлен q степени меньше n , что $\operatorname{Re}(q(w)/p(w)) \geq 0$ для всякого $w \in E$. Раскладывая рациональную функцию $q(w)/p(w)$ на простейшие дроби, получаем

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{w - z_k} \geq 0$$

для любого $w \in E$, причем не все λ_k равны нулю. Для меры μ , сосредоточенной на K и имеющей вес $-\lambda_k$ в точке z_k , $k = 1, \dots, n$, это означает, что $\operatorname{Re} \widehat{\mu}(w) \geq 0$ на E , откуда по лемме 1 наипростейшие дроби с полюсами на E не плотны в $C(K)$ (нетрудно видеть, что мера μ определяет ненулевой функционал на пространстве $C(K)$).

Достаточность. Пусть множество E связно, $d(E, K) > 0$ и для любого набора комплексных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ действительная часть суммы

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{w - z_k}$$

при $w \in E$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. Это означает, что в пространстве $\mathbb{C}^n$ начало координат 0 лежит внутри выпуклой оболочки множества

$$M = \left\{ v(w) = \left(\frac{1}{w - z_1}, \dots, \frac{1}{w - z_n} \right) : w \in E \right\}.$$

Пространство $C(K)$ изоморфно рассматриваемому пространству $\mathbb{C}^n$, и наипростейшие дроби степени s с полюсами из E в $C(K)$ соответствуют в $\mathbb{C}^n$ векторам из суммы

$$M_s = \underbrace{M + \dots + M}_s.$$

Поэтому для доказательства плотности в $C(K)$ наипростейших дробей с полюсами из E достаточно доказать, что множество $R(M) = \bigcup_{s=1}^{\infty} M_s$ плотно в $\mathbb{C}^n$.

Для всякого вектора $v \in M$ найдется столь малое положительное число λ_0 , что $-\lambda_0 v$ лежит в той окрестности нуля, которая попадает в выпуклую оболочку M . Значит, найдутся такие векторы $v_1, \dots, v_s \in M$ и положительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, что $\lambda_0 v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s$; по теореме Каратеодори (см. [17; § 2]) можно взять $s \leq n + 1$. Следовательно, $-v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s$ для некоторых положительных $\alpha_1, \dots, \alpha_s$. По теореме Дирихле (см. [11; гл. 1, § 5]) для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое натуральное N , что каждое число $N\alpha_k$ отличается от некоторого целого неотрицательного числа N_k меньше чем на $\varepsilon/(\|v_1\| + \dots + \|v_s\|)$ (нормы берутся в пространстве $\mathbb{C}^n$). Имеем

$$\begin{aligned} & \| -v - ((N-1)v + N_1 v_1 + \dots + N_s v_s) \| \\ & \leq \| -Nv - N(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s) \| + \sum_{k=1}^s |N\alpha_k - N_k| \|v_k\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Вектор $(N-1)v + N_1 v_1 + \dots + N_s v_s$ лежит в $R(M)$, поэтому $-v \in \overline{R(M)}$. Таким образом, $\overline{R(M)}$ – замкнутая аддитивная подгруппа в $\mathbb{C}^n$, т.е. сумма замкнутого $\mathbb{R}$ -линейного подпространства L и дискретной решетки (см. [18; гл. 7, § 1]). Множество M связано в $\mathbb{C}^n$ в силу связности E и того, что $d(E, K) > 0$, поэтому $M \subset L$, а поскольку выпуклая оболочка M содержит 0 внутри себя, получаем $L = \mathbb{C}^n = \overline{R(M)}$, что и требовалось.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если многочлен $p(z)$ с простыми нулями является многочленом Чебышёва соответствующей степени для какого-то компактного подмножества $E' \subset E$ (т.е. многочленом, имеющим на E' минимальную равномерную норму среди всех многочленов той же степени и с тем же старшим коэффициентом) и E' связано, то наипростейшие дроби с полюсами из E плотны в $C(K = \{z : p(z) = 0\})$.

Действительно, в этом случае по теореме А. Н. Колмогорова (см. [19]) для любого многочлена q со степенью меньше степени p найдется такая точка $w \in \{\zeta \in E' : |p(\zeta)| = \|p\|_{C(E')}\}$, что $\operatorname{Re} q(w)/p(w) < 0$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если хоть одна точка компакта K (не обязательно конечного) лежит вне выпуклой оболочки множества E , то наипростейшие дроби с полюсами из E не плотны в $C(K)$.

Это утверждение очевидно и без теоремы 6: если $a \in K \setminus \operatorname{conv} E$, то все числа $a - w$, $w \in E$, лежат в некоторой полуплоскости, а значит, и значения в точке a всех наипростейших дробей с полюсами из E лежат в некоторой полуплоскости.

§ 7. Универсальная последовательность полюсов

ТЕОРЕМА 7. Существует такая последовательность E , стремящаяся к бесконечности, что наипростейшие дроби с полюсами из $E \setminus K$ плотны в $AC(K)$ для любого компакта K со связным дополнением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\alpha_{nk}\}_{k=1}^n$, $\{\beta_{nk}\}_{k=1}^n$, $\{\gamma_{nk}\}_{k=1}^n$ и $\{\delta_{nk}\}_{k=1}^n$ – наборы всех корней степени n из 1, i , -1 и $-i$ соответственно. Возьмем произвольную последовательность положительных чисел $R_m \rightarrow \infty$ и положим

$$E = \{R_m \alpha_{nk}, R_m \beta_{nk}, R_m \gamma_{nk}, R_m \delta_{nk} : k = 1, \dots, n, n = 1, \dots, m, m = 1, 2, 3, \dots\}.$$

В силу теоремы С. Н. Мергеляна достаточно доказать, что наипростейшими дробями с полюсами из E можно на любом компакте K приблизить любой одночлен вида Az^{n-1} , $A \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Для этого в свою очередь достаточно рассмотреть случаи $A > 0$, $A < 0$, $iA > 0$ и $iA < 0$.

В случае $A > 0$ наипростейшие дроби

$$\left[\frac{AR_m^n}{n} \right] \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - R_m \gamma_{nk}} = \left[\frac{AR_m^n}{n} \right] \frac{nz^{n-1}}{z^n + R_m^n}$$

(стоящая перед суммой целая часть дроби AR_m^n/n при достаточно больших m является натуральным числом) при $m \rightarrow \infty$ равномерно на K стремятся к Az^{n-1} .

Аналогично рассматриваются случаи $A < 0$, $iA > 0$ и $iA < 0$: вместо полюсов $R_m \gamma_{nk}$ надо брать $R_m \alpha_{nk}$, $R_m \delta_{nk}$ и $R_m \beta_{nk}$ соответственно, а перед суммой надо ставить целую часть дроби $-AR_m^n/n$, iAR_m^n/n и $-iAR_m^n/n$ соответственно. Теорема доказана.

Было бы интересно описать все стремящиеся к бесконечности последовательности E , универсальные в смысле теоремы 7.

Автор благодарен В. Банашику (W. Banaszczyk) за указание на связь леммы 3 с леммой об округлении коэффициентов, а также В. С. Буярову, В. И. Данченко и Я. Грабовскому (J. Grabowski) за ценные замечания.

Список литературы

- [1] В. И. Данченко, Д. Я. Данченко, “О равномерном приближении логарифмическими производными многочленов”, *Теория функций, ее приложения и смежные вопросы*, Изд-во Казан. ун-та, Казань, 1999, 74–79.
- [2] В. И. Данченко, Д. Я. Данченко, “О приближении наипростейшими дробями”, *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 553–559; англ. пер.: V. I. Danchenko, D. Ya. Danchenko, “Approximation by simplest fractions”, *Math. Notes*, **70**:4 (2001), 502–507.
- [3] J. Korevaar, “Asymptotically neutral distributions of electrons and polynomial approximation”, *Ann. of Math.* (2), **80**:2 (1964), 403–410.
- [4] П. А. Бородин, О. Н. Косухин, “О приближении наипростейшими дробями на действительной оси”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, № 1, 3–8; англ. пер.: P. A. Borodin, O. N. Kosukhin, “Approximation by the simplest fractions on the real axis”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **60**:1 (2005), 1–6.
- [5] П. А. Бородин, “Приближение наипростейшими дробями на полуоси”, *Матем. сб.*, **200**:8 (2009), 25–44; англ. пер.: P. A. Borodin, “Approximation by simple partial fractions on the semi-axis”, *Sb. Math.*, **200**:8 (2009), 1127–1148.
- [6] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, УРСС, М., 2004; пер. с англ.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators. I. General theory*, Wiley Classics Lib., Wiley, New York, 1988.

- [7] D. Hilbert, “Über die Entwicklung einer beliebigen analytischen Funktion einer Variablen in eine unendliche nach ganzen rationalen Funktionen fortschreitende Reihe”, *Gött. Nachr.*, 1897, 63–70.
- [8] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, 4-е изд., Лань, СПб., 2004; фр. пер. 3-го изд.: B. V. Shabat, *Introduction à l'analyse complexe*, Mir, Moscow, 1990.
- [9] Т. Гамелин, *Равномерные алгебры*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: T. W. Gamelin, *Uniform algebras*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1969.
- [10] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966; англ. пер.: N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory*, Grundlehren Math. Wiss., **180**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.
- [11] Дж. В. С. Касселс, *Введение в теорию диофантовых приближений*, ИЛ, М., 1961; пер. с англ.: J. W. S. Cassels, *An introduction to Diophantine approximation*, Cambridge Univ. Press, New York, 1957.
- [12] T. Dobrowolski, J. Grabowski, “Subgroups of Hilbert spaces”, *Math. Z.*, **211**:4 (1992), 657–669.
- [13] R. Cauty, “Un exemple de sous-groupe additif de l'espace de Hilbert”, *Colloq. Math.*, **77**:1 (1998), 147–162.
- [14] J. Grabowski, “Homotopically non-trivial additive subgroups of Hilbert spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **127**:5 (1999), 1563–1565.
- [15] В. М. Кадец, М. И. Кадец, *Перестановки рядов в пространствах Банаха*, Изд. Тарт. гос. ун-та, Тарту, 1988; англ. пер.: V. M. Kadets, M. I. Kadets, *Rearrangements of series in Banach spaces*, Transl. Math. Monogr., **86**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [16] В. Ю. Протасов, “Приближения наименьшими дробями и преобразование Гильберта”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:2 (2009), 123–140; англ. пер.: V. Yu. Protasov, “Approximation by simple partial fractions and the Hilbert transform”, *Izv. Math.*, **73**:2 (2009), 333–349.
- [17] Т. Боннезен, В. Фенхель, *Теория выпуклых тел*, Фазис, М., 2002; пер. с нем.: T. Bonnesen, W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper*, Chelsea Publ., Providence, RI, 1971.
- [18] Н. Бурбаки, *Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства*, Наука, М., 1969; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématiques. Fasc. III. Première partie. Livre III: Topologie générale. Chap. 3: Groupes topologiques (théorie élémentaire). Chap. 4: Nombres réels*, Hermann & Cie, Paris, 1960.
- [19] А. Н. Колмогоров, “Замечание по поводу многочленов П. Л. Чебышёва, наименее уклоняющихся от заданной функции”, *УМН*, **3**:1 (1948), 216–221.

П. А. Бородин (P. A. Borodin)

Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: pborodin@inbox.ru

Поступила в редакцию
 11.07.2011 и 17.04.2012