Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Никонов, Гомологии Хованова граф-зацеплений,
Матем. сб., 2012, том 203, номер 8, 125–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7914>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 16:48:05

УДК 515.16+519.17

И. М. Никонов**Гомологии Хованова граф-зацеплений**

Граф-зацепления возникают как графы пересечений поворачивающих хордовых диаграмм зацеплений и представляют собой, неформально говоря, комбинаторное описание зацеплений с точностью до мутаций. Многие инварианты зацеплений допускают переформулировку на языке граф-зацеплений. В настоящей статье мы даем для граф-зацеплений определение такого известного и полезного инварианта узлов, как гомологии Хованова, в случае, когда характеристика основного поля равна двум.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: граф-зацепления, гомологии Хованова.

§ 1. Введение

1.1. Граф-зацепления [1]–[3] представляют собой комбинаторный аналог виртуальных зацеплений. “Диаграммами” граф-зацеплений являются простые неориентированные помеченные графы, а сами граф-зацепления суть классы эквивалентности графов по модулю формальных движений Рейдемейстера. В теории узлов граф-зацепления возникают как графы пересечений поворачивающих хордовых диаграмм зацеплений. Известно, что граф пересечений определяет хордовую диаграмму с точностью до мутаций [4], [5]. Таким образом, любой инвариант зацеплений, который сохраняется при мутациях, может рассматриваться в качестве кандидата на роль инварианта граф-зацеплений. Например, такими инвариантами являются полиномы Джонса и Александера. Препятствие к переносу инвариантов зацеплений на уровень граф-зацеплений может возникнуть, если окажется, что некоторые зацепления, имеющие один и тот же граф пересечений, не переводятся друг в друга движениями Рейдемейстера и мутациями. Вопрос о существовании таких зацеплений является открытым. Таким образом, задача построения естественной конструкции, которая бы расширяла инвариант зацеплений, сохраняющийся при мутациях, до инварианта граф-зацеплений, является нетривиальной. Для полинома Джонса эта задача была решена Ильютко и Мантуровым [1]. В настоящей работе рассматривается решение данной проблемы для (нечетных) гомологий Хованова с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00748-а), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3224.2010.1), Программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (грант № РНП-2.1.1.3704), а также Министерства образования и науки (гранты № 02.740.11.5213 и № 14.740.11.0794).

Тральди и Цулли [6], [7] разработали теорию, аналогичную теории граф-зацеплений. В основе их подхода (именуемого теорией петлевых графов) лежит рассмотрение гауссовых хордовых диаграмм узлов (вместо поворачивающих). Ильяютко показал, что обе теории тесно связаны между собой [8], [9]. Таким образом, описываемая ниже конструкция гомологий Хованова может быть использована для определения гомологий Хованова петлевых графов.

1.2. Открытие М. Ховановым гомологического инварианта узлов в 90-х гг. прошлого века [10] создало новое направление в теории узлов и привело к появлению целого ряда новых инвариантов, известных как категорификации полиномиальных инвариантов узлов. Конструкция гомологий Хованова для граф-зацеплений, рассматриваемая в данной статье, по сути является комбинаторной переформулировкой нечетных гомологий Хованова, которые были определены П. Ожватом, Я. Расмуссеном и З. Сабо в работе [11]. Дж. Блум показал, что нечетные гомологии Хованова инвариантны относительно мутаций [12], так что можно ожидать, что их удастся перенести на граф-зацепления. На самом деле конструкция Блума в случае характеристики 2 дословно переносится на уровень граф-зацеплений. Этот инвариант можно также рассматривать как определение обычных гомологий Хованова граф-зацеплений, так как теории нечетных и обычных гомологий Хованова совпадают, если их рассматривать над полем характеристики 2. С другой стороны, целочисленные гомологии Хованова не сохраняются при мутациях [13], что исключает возможность определения соответствующего инварианта для граф-зацеплений. Вопрос же о том, являются ли гомологии Хованова инвариантами относительно мутаций узлов, и можно ли построить их аналог для граф-узлов, остается на настоящий момент нерешенным.

Статья организована следующим образом. В §2 определяются движения Рейдемейстера, действующие на меченых графах и вводится понятие граф-зацепления. В §3 описывается конструкция гомологий Хованова граф-зацеплений и доказывается ее корректность. В §4 показывается, как связаны гомологии Хованова и полином Джонса для граф-узлов.

§ 2. Граф-зацепления

Пусть G – граф без петель и кратных ребер и $\mathcal{V} = \mathcal{V}(G)$ – множество его вершин. Предположим также, что граф G *меченый*, т.е. каждой вершине v в G соответствует пара (a, α) , где $a \in \{0, 1\}$ есть *оснащение* $\text{fr}(v)$ вершины v , а $\alpha \in \{-1, 1\}$ – *знак* $\text{sgn}(v)$ вершины v .

Фиксируем произвольную нумерацию вершин графа G и определим *матрицу смежности* $A(G) = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ следующим образом: если $i \neq j$, то $a_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда вершины v_i и v_j соединены ребром, иначе $a_{ij} = 0$. Кроме того, положим $a_{ii} = \text{fr}(v_i)$.

Пусть $v \in \mathcal{V}$. Множество вершин из $\mathcal{V}$, смежных с v , называется *окрестностью* вершины v и обозначается как $N_G(v)$ либо $N(v)$.

Определим движения Рейдемейстера меченых графов. Определения, приводимые ниже, являются по сути переформулировкой обычных движений Рейдемейстера на диаграммах зацеплений: мы смотрим, как преобразуются графы смежности поворачивающих хордовых диаграмм при применении этих движений к исходным диаграммам зацеплений. Получающиеся перестройки графов оказываются локальными, что позволяет применять их к произвольным графам, в том числе и к тем, которым не соответствуют никакие диаграммы зацеплений.

Ω_1 . Первое движение Рейдемейстера состоит в добавлении/удалении изолированной вершины с меткой $(0, \pm 1)$.

Ω_2 . Второе движение Рейдемейстера заключается в добавлении/удалении пары смежных (соответственно несмежных) вершин с метками $(1, -1)$ и $(1, 1)$ (соответственно $(0, -1)$ и $(0, 1)$), которые имеют совпадающие окрестности.

Ω_3 . Третье движение Рейдемейстера определим следующим образом. Пусть u, v, w – вершины графа G с метками $(0, -1)$ такие, что u является смежной только с вершинами v и w , а вершины v и w не соединены ребром. Тогда мы меняем смежность вершины u с вершинами $t \in N(v) \setminus N(w) \cup N(w) \setminus N(v)$ (для других пар вершин смежность не меняется). Кроме того, поменяем знаки вершин v и w на “+1”. Обратная операция также называется третьим движением Рейдемейстера.

Ω_4 . Четвертое движение Рейдемейстера определяется так. Рассмотрим пару смежных вершин: u с меткой $(0, \alpha)$ и v с меткой $(0, \beta)$. Заменим метку вершины u на $(0, -\beta)$, а метку вершины v – на $(0, -\alpha)$. Помимо этого, поменяем смежность для каждой пары вершин (t, w) , где $t \in N(u)$ и $w \in N(v) \setminus N(u)$, либо $t \in N(v)$ и $w \in N(u) \setminus N(v)$.

Ω'_4 . Другой вариант четвертого движения получается, если взять вершину v с меткой $(1, \alpha)$. В этом случае мы меняем смежность у каждой пары вершин (t, w) таких, что $t, w \in N(u)$. Кроме того, меняется знак вершины v и оснащение вершин $w \in N(u)$.

Четвертые движения Ω_4 и Ω'_4 не имеют аналогов на уровне обычных диаграмм зацеплений. Эти движения отражают неоднозначность выбора поворачивающего обхода на диаграмме зацепления: применение преобразования Ω_4 или Ω'_4 соответствует переходу от одного поворачивающего обхода к другому. Заметим, что при этом преобразовании исходная диаграмма зацепления не меняется.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Граф-зацепление* – это класс эквивалентности простого меченого графа относительно движений Рейдемейстера Ω_1 – Ω'_4 .

§ 3. Гомологии Хованова граф-зацеплений

Пусть G есть простой меченный граф с n вершинами, а $A = A(G)$ – его матрица пересечения. Далее мы формулируем $\mathbb{Z}_2$ -версию конструкции Блума

нечетных гомологий Хованова. Причина использования коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ заключается в том, что цепной комплекс в конструкции Блума определяется по элементам матрицы смежности A , которые лежат в $\mathbb{Z}_2$.

Рассмотрим подмножество $s \subset \mathcal{V} = \mathcal{V}(G)$. Мы будем называть подмножества множества вершин $\mathcal{V}$ *состояниями*. Определим $G(s)$ как полный подграф в G со множеством вершин s и обозначим $A(s) = A(G(s))$. Рассмотрим векторное пространство

$$V(s) = \mathbb{Z}_2 \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1^s, \dots, r_n^s \rangle$$

с образующими $x_1, \dots, x_n$ и соотношениями $r_1^s, \dots, r_n^s$, заданными формулой

$$r_i^s = \begin{cases} x_i + \sum_{\{j|v_j \in s\}} a_{ij} x_j, & \text{если } v_i \notin s, \\ \sum_{\{j|v_j \in s\}} a_{ij} x_j, & \text{если } v_i \in s. \end{cases} \quad (3.1)$$

Размерность пространства $V(s)$ равна $\text{rang } A(s)$.

Между состояниями $s \subset \mathcal{V}$ и вершинами n -мерного куба $\{0, 1\}^n$ имеется естественная биекция: состоянию s отвечает вектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_i = 0$, если $v_i \in s$ и $\text{sgn } v_i = 1$ или $v_i \notin s$ и $\text{sgn } v_i = -1$, в противном случае $\alpha_i = 1$. Любое ребро куба тогда имеет вид $s \rightarrow s \oplus i$, где состояние $s \oplus i$ равно $s \cup \{v_i\}$, если $v_i \notin s$, и равно $s \setminus \{v_i\}$, если $v_i \in s$. Направление ребра определяется так, чтобы выполнялось $v_i \notin s$, если $\text{sgn}(v_i) = -1$, и $v_i \in s$, если $\text{sgn}(v_i) = 1$.

Каждому ребру $s \rightarrow s \oplus i$ мы сопоставляем линейное отображение

$$\partial_{s \oplus i}^s: \bigwedge^* V(s) \rightarrow \bigwedge^* V(s \oplus i)$$

внешних алгебр, заданное формулой

$$\partial_{s \oplus i}^s(u) = \begin{cases} x_i \wedge u, & \text{если } x_i = 0 \in V(s), \\ u, & \text{если } x_i \neq 0 \in V(s). \end{cases} \quad (3.2)$$

Рассмотрим градуированное векторное пространство

$$C(G) = \bigoplus_{s \subset \mathcal{V}} \bigwedge^* V(s)$$

и отображение на нем

$$\partial(u) = \sum_{\{s, s' \subset \mathcal{V} \mid s \rightarrow s'\}} \partial_{s'}^s(u).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Отображение ∂ корректно определено и задает на $C(G)$ структуру цепного комплекса.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо показать, что отображения $\partial_{s \oplus i}^s$ определены корректно и что каждая двумерная грань куба состояний коммутативна. Нам потребуются несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. Рассмотрим состояние s и индекс i такой, что $v_i \notin s$. Без потери общности можно считать, что $A(s \oplus i) = \begin{pmatrix} A & a^T \\ a & \alpha \end{pmatrix}$, где $A = A(s)$. Тогда:

- 1) $x_i = 0 \in V(s)$, если и только если $\text{rank } A = \text{rank} \begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix}$;
- 2) $x_i = 0 \in V(s \oplus i)$, если и только если $\text{rank} \begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix} + 1 = \text{rank} \begin{pmatrix} A & a^T \\ a & \alpha \end{pmatrix}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $x_i = \sum_{\{j|v_j \in s\}} a_{ij}x_j$ следует равенство $x_i = 0 \in V(s)$, которое означает, что вектор a линейно зависит от строк матрицы смежности A . Таким образом, первое утверждение леммы истинно.

Из равенства $x_i = 0 \in V(s \oplus i)$ следует, что вектор $(0 \ 1)$ линейно выражается через строки матрицы $A(s \oplus i)$. Тогда

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & a^T \\ a & \alpha \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} A & a^T \\ a & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Но

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & a^T \\ a & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} A & 0 \\ a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix} + 1.$$

ЛЕММА 2. Для любой симметрической матрицы A , если верно, что

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & a^T \\ a & \alpha \end{pmatrix} = \text{rank } A + 1,$$

то справедливо равенство $\text{rank} \begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix} = \text{rank } A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix} \neq \text{rank } A.$$

Тогда

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & a^T \\ a & \alpha \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix},$$

и вектор $\begin{pmatrix} a^T \\ \alpha \end{pmatrix}$ линейно зависит от столбцов матрицы $\begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix}$. Следовательно, вектор a^T зависит от столбцов матрицы A и (после применения транспозиции) вектор a линейно зависит от строк матрицы A . Тогда $\text{rank } A = \text{rank} \begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix}$, что противоречит начальному предположению.

ЛЕММА 3. Для любого s и любого индекса i справедливы утверждения:

- 1) $\dim V(s \oplus i) = \dim V(s) + 1$ тогда и только тогда, когда $x_i = 0 \in V(s)$ и $x_i \neq 0 \in V(s \oplus i)$;
- 2) $\dim V(s \oplus i) = \dim V(s) - 1$ тогда и только тогда, когда $x_i \neq 0 \in V(s)$ и $x_i = 0 \in V(s \oplus i)$;
- 3) $\dim V(s \oplus i) = \dim V(s)$ тогда и только тогда, когда $x_i = 0 \in V(s)$ и $x_i = 0 \in V(s \oplus i)$.

Случай $x_i \neq 0 \in V(s)$ и $x_i \neq 0 \in V(s \oplus i)$ не реализуется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения леммы вытекают из лемм 1, 2 и равенств

$$\dim V(s) = \text{corank } A(s), \quad \dim V(s \oplus i) = \text{corank } A(s \oplus i).$$

Мы будем называть первые два случая леммы 3 *четными*, а третий случай – *нечетным*. Из определения дифференциала следует, что в нечетном случае $\partial_{s \oplus i}^s = 0$. Приступим к доказательству утверждения.

Корректность цепных отображений. Рассмотрим отображение

$$\partial_{s \oplus i}^s: \bigwedge^* V(s) \rightarrow \bigwedge^* V(s \oplus i).$$

Нужно проверить, что соотношения переводятся в соотношения, т.е. что для любого элемента u и любого индекса j найдутся элементы $u_k \in V(s \oplus i)$ такие, что

$$\partial_{s \oplus i}^s(r_j^s \wedge u) = \sum_k r_k^{s \oplus i} \wedge u_k \in V(s \oplus i).$$

Для любого индекса j мы имеем $r_j^s = r_j^{s \oplus i} + \alpha x_i$ при некотором $\alpha \in \mathbb{Z}_2$. Если $x_i = 0 \in V(s \oplus i)$, то

$$\partial_{s \oplus i}^s(r_j^s \wedge u) = r_j^s \wedge u = r_j^{s \oplus i} \wedge u + \alpha x_i \wedge u = r_j^{s \oplus i} \wedge u'$$

в пространстве $V(s \oplus i)$, где $u' = u$ или $u' = 0$ (в нечетном случае). Если $x_i \neq 0 \in V(s \oplus i)$, тогда $x_i = 0 \in V(s)$ и

$$\partial_{s \oplus i}^s(r_j^s \wedge u) = x_i \wedge r_j^s \wedge u = x_i \wedge r_j^{s \oplus i} \wedge u + \alpha x_i \wedge x_i \wedge u = r_j^{s \oplus i} \wedge (x_i \wedge u).$$

В любом случае отображение $\partial_{s \oplus i}^s$ определено корректно.

Рис. 1. Четные двумерные грани куба состояний

Коммутативность двумерных граней. Любая двумерная грань куба состояний имеет вид

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^* V(s \oplus j) & \xrightarrow{\partial_{s \oplus i \oplus j}^{s \oplus j}} & \bigwedge^* V(s \oplus i \oplus j) \\ \partial_{s \oplus j}^s \uparrow & & \uparrow \partial_{s \oplus i \oplus j}^{s \oplus i} \\ \bigwedge^* V(s) & \xrightarrow{\partial_{s \oplus i}^s} & \bigwedge^* V(s \oplus i) \end{array}$$

Относительно изменения размерности пространств

$$V(s'), \quad s' = s, s \oplus i, s \oplus j, s \oplus i \oplus j,$$

диаграммы без нечетных ребер можно разбить на пять типов (см. рис. 1).

Здесь число в вершине диаграммы, соответствующей состоянию s' , равно разности $\dim V(s') - \dim V(s) = \text{corank } A(s') - \text{corank } A(s)$, а метка $z = 1, x_i, x_j$ на ребре, отвечающем отображению $\partial_{s''}^{s'}$, означает, что $\partial_{s''}^{s'}(u) = z \wedge u$.

Двумерные грани типов 1, 2, 3 очевидно коммутативны. Любая грань типа 4 является коммутативной, поскольку $x_i = x_j = 0 \in V(s \oplus i \oplus j)$. Для грани типа 5 нужно показать, что $x_i = x_j \in V(s \oplus i \oplus j)$. С точностью до перенумерации переменных есть три возможных случая.

1. $\text{sgn}(v_i) = \text{sgn}(v_j) = -1$. Тогда $v_i, v_j \in s \oplus i \oplus j$. Без потери общности, можно считать, что v_i и v_j – это последние вершины состояния $s \oplus i \oplus j$. Матрицу смежности $A(s \oplus i \oplus j)$ можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} A & a^T & b^T \\ a & \alpha & \gamma \\ b & \gamma & \beta \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где $A = A(s)$.

Так как $\text{corank } A(s \oplus i) = \text{corank } A(s) - 1$, то $x_i = 0 \in V(s \oplus i)$. Тогда строки матрицы $A(s \oplus i) = \begin{pmatrix} A & a^T \\ a & \alpha \end{pmatrix}$ порождают вектор $(0 \ 1)$. Следовательно, строки матрицы $A(s \oplus i \oplus j)$ порождают вектор $(0 \ 1 \ \delta)$, $\delta \in \mathbb{Z}_2$. Если $\delta = 0$, то $x_i = 0 \in V(s \oplus i \oplus j)$, что невозможно. Тогда $\delta = 1$, и мы получаем соотношение $x_i + x_j = 0$ в пространстве $V(s \oplus i \oplus j)$.

2. $\text{sgn}(v_i) = -1, \text{sgn}(v_j) = 1$. Тогда $v_i \in s \oplus i \oplus j$ и $v_j \notin s \oplus i \oplus j$. Мы можем считать, что матрица смежности $A(s \oplus i)$ имеет вид (3.3), где $A = A(s \oplus j)$.

Имеет место равенство $x_i = 0 \in A(s \oplus i)$. Из него вытекает, что вектор $(0 \ 1 \ 0)$ является линейной комбинацией строк матрицы смежности $A(s \oplus i)$. Если коэффициент в данной линейной комбинации при строке $(b \ \gamma \ \beta)$ равен нулю, то строки матрицы $A(s \oplus i \oplus j) = \begin{pmatrix} A & a^T \\ a & \alpha \end{pmatrix}$ порождают вектор $(0 \ 1)$. Таким образом, $x_i = 0 \in V(s \oplus i \oplus j)$, что приводит к противоречию. По этой причине коэффициент при $(b \ \gamma \ \beta)$ равен 1. Тогда вектор $(b \ \gamma + 1)$ порождается строками матрицы $A(s \oplus i \oplus j)$, что означает $x_i + x_j = 0 \in V(s \oplus i \oplus j)$.

3. $\text{sgn}(v_i) = \text{sgn}(v_j) = -1$. Тогда матрица $A(s)$ имеет вид (3.3), где $A = A(s \oplus i \oplus j)$. Равенство $x_i + x_j = 0 \in V(s \oplus i \oplus j)$ отвечает вектору-соотношению $a + b$. Поскольку

$$\text{rank } A(s) = \text{rank } A(s \oplus j) = \text{rank} \begin{pmatrix} A & a^T \\ a & \alpha \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} A & a^T & b^T \\ a & \alpha & \gamma \end{pmatrix},$$

последняя строка матрицы $A(s)$ выражается через остальные строки. Если коэффициент при строке $(a \ \alpha \ \gamma)$ в соответствующей линейной комбинации равен нулю, то вектор $(b \ \gamma \ \beta)$ зависит от строк матрицы $\begin{pmatrix} A & a^T & b^T \end{pmatrix}$, а вектор b – от строк матрицы A . Следовательно, $x_j = 0 \in V(s \oplus i \oplus j)$, что неверно. Таким образом, коэффициент при $(a \ \alpha \ \gamma)$ нулю не равен, так что вектор $a + b$ порождается строками матрицы A , что означает $x_i + x_j = 0 \in V(s \oplus i \oplus j)$.

Так как отображения, отвечающие нечетным ребрам куба состояний, являются нулевыми, нужно проверить коммутативность только двух типов двумерных граней, содержащих нечетные ребра (см. рис. 2).

Рис. 2. Нечетные двумерные грани куба состояний

Диаграмма типа 6 коммутативна, так как

$$\dim V(s \oplus i) = \dim V(s \oplus i \oplus j),$$

так что $x_j = 0 \in V(s \oplus i \oplus j)$.

Для установления коммутативности диаграммы типа 7 необходимо доказать, что $x_i = 0 \in V(s \oplus i \oplus j)$. Предположим, что это не так.

Пусть

$$\operatorname{sgn}(v_i) = \operatorname{sgn}(v_j) = -1.$$

Тогда матрица смежности имеет вид (3.3). Так как $x_j = 0 \in V(s \oplus i)$, мы имеем

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & a^T \\ a & \alpha \\ b & \gamma \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & a^T \\ a & \alpha \end{pmatrix}.$$

Тогда вектор b линейно зависит от строк матрицы $\begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix}$. Но $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix} = \operatorname{rank} A$, значит, b зависит от строк матрицы A . С другой стороны, выполняется равенство $x_j \neq 0 \in V(s)$, откуда $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A \\ b \end{pmatrix} \neq \operatorname{rank} A$. Мы получили противоречие.

Случаи, когда вершины имеют другие знаки, рассматриваются аналогично.

Таким образом, предложение 1 доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Гомологии $\overline{\operatorname{Kh}}(G)$ комплекса $(C(G), \partial)$ назовем *приведенными (нечетными) гомологиями Хованова* меченого графа G .

Основной результат настоящего раздела состоит в том, что гомологии Хованова являются корректно определенным инвариантом граф-зацеплений.

ТЕОРЕМА 1. Гомологии Хованова $\overline{\operatorname{Kh}}(G)$ инвариантны относительно движений $\Omega_1 - \Omega'_4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G есть произвольный меченый граф и $\tilde{G}$ – граф, получающийся из G при помощи одного из движений Рейдемейстера $\Omega_1 - \Omega'_4$.

Инвариантность относительно Ω_1 . Пусть $\tilde{G}$ получается из G добавлением изолированной вершины v . Комплекс $C(\tilde{G})$ изоморфен произведению комплексов $C(G) \otimes C(v)$, где комплекс $C(v)$ равен

$$\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{x \wedge} \bigwedge^* \mathbb{Z}_2 \langle x \rangle,$$

если $\text{sgn}(v) = -1$, и равен

$$\bigwedge^* \mathbb{Z}_2 \langle x \rangle \xrightarrow{x=0} \mathbb{Z}_2,$$

если $\text{sgn}(v) = 1$. В любом случае $H_*(C(v)) = \mathbb{Z}_2 \cdot 1$, где $1 \in H_0(C(v))$ при $\text{sgn}(v) = 1$ и $1 \in H_1(C(v))$ при $\text{sgn}(v) = -1$. Таким образом, мы получаем

$$\overline{\text{Kh}}(\tilde{G}) = \overline{\text{Kh}}(G) \otimes \overline{\text{Kh}}(v) \cong \overline{\text{Kh}}(G).$$

Инвариантность относительно Ω_2 . Предположим, что граф $\tilde{G}$ получается добавлением вершин v и w , причем $\text{sgn}(v) = 1$, $\text{sgn}(w) = -1$. Без потери общности можно считать, что матрица смежности $A(\tilde{G})$ записывается в одной из двух следующих форм:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^T \\ 0 & 0 & a^T \\ a & a & A(G) \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & a^T \\ 1 & 1 & a^T \\ a & a & A(G) \end{pmatrix}.$$

В обоих случаях для любой вершины $s \in \mathcal{V}(G)$ выполняются равенства

$$\text{corank } A(G(s)) = \text{corank } A(\tilde{G}(s)),$$

$$\text{corank } A(\tilde{G}(s \cup \{v\})) = \text{corank } A(\tilde{G}(s \cup \{w\})) = \text{corank } A(\tilde{G}(s \cup \{v, w\})) - 1.$$

Эти соотношения определяют вид верхнего и левого отображений в комплексе $C(\tilde{G})$, записанном в форме

$$\begin{array}{ccc} C_{vw} & \xrightarrow{1} & C_w \\ x_2 \uparrow & & \uparrow \partial \\ C_v & \xrightarrow{\quad} & C \end{array}$$

Здесь пространство C_v содержит цепи, состояние которых включает вершину v , но не включает вершину w , пространства C , C_w , C_{vw} определяются аналогично.

Для каждого состояния s из C_{vw} определим линейную функцию $f: V(s) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ при помощи формулы $f(\sum_i \lambda_i x_i) = \lambda_1 + \lambda_2$. Функция f корректно определена, так как она обращается в нуль на любом соотношении: $f(r_i^s) = a_{i1} + a_{i2} = 0$, поскольку $a_{i1} = a_{i2}$. Тогда

$$\bigwedge^* V(s) = \bigwedge^* \ker f \oplus x_2 \bigwedge^* V(s), \quad C_{vw} = X \oplus x_2 C_{vw}.$$

Подкомплекс $X \rightarrow C_w$ является стягиваемым. Следовательно, гомологии комплекса $C(\tilde{G})$ равны гомологиям факторкомплекса

$$\begin{array}{ccc} x_2 C_{vw} & & \\ x_2 \uparrow & & \\ C_v & \xrightarrow{\quad} & C \end{array}$$

Данный факторкомплекс после факторизации по подкомплексу C также становится стягиваемым. Таким образом, комплекс $C(\tilde{G})$ имеет те же гомологии, что и комплекс $C = C(G)$.

Инвариантность относительно Ω_3 . Без потери общности можно считать, что вершины u, v, w , участвующие в третьем движении Рейдемейстера, имеют номера 1, 2, 3 в $\mathcal{V}(G) = \mathcal{V}(\tilde{G})$. Матрицы смежности графов G и $\tilde{G}$ имеют вид

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0^T \\ 1 & 0 & 0 & a^T \\ 1 & 0 & 0 & b^T \\ 0 & a & b & B \end{pmatrix}, \quad A(\tilde{G}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (a+b)^T \\ 0 & 0 & 0 & a^T \\ 0 & 0 & 0 & b^T \\ a+b & a & b & B \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\tilde{V}(s) = V(\tilde{G}(s))$. Тогда для любого состояния $s \subset \mathcal{V}(G) \setminus \{u, v, w\}$ имеем

$$\begin{aligned} V(s) &\cong \tilde{V}(s), & V(s \oplus v) &\cong \tilde{V}(s \oplus v), & V(s \oplus w) &\cong \tilde{V}(s \oplus w), \\ V(s \oplus v \oplus w) &\cong \tilde{V}(s \oplus u \oplus v) \cong \tilde{V}(s \oplus u \oplus w), \\ V(s \oplus u \oplus v \oplus w) &\cong \tilde{V}(s \oplus u), & V(s \oplus u \oplus v) &\cong V(s \oplus u \oplus w) \cong V(s), \end{aligned}$$

причем соответствующие изоморфизмы внешних алгебр перестановочны с дифференциалом.

Запишем комплексы $C(G)$ и $C(\tilde{G})$ в форме куба:

$$\begin{array}{ccccc} & & C_{uw} & \longrightarrow & C_{uvw} \\ & \nearrow^1 & \uparrow & & \nearrow \\ C_u & \xrightarrow{1} & C_{uv} & & \\ \uparrow x_1 & & \downarrow & & \\ & \nearrow & C_w & \longrightarrow & C_{vw} \\ C & \longrightarrow & C_v & & \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & \tilde{C}_{uv} & \longrightarrow & \tilde{C}_u \\ & \nearrow^1 & \uparrow & & \nearrow \\ \tilde{C}_{uvw} & \xrightarrow{1} & \tilde{C}_{uv} & & \\ \uparrow x_1 & & \downarrow & & \\ & \nearrow & \tilde{C}_v & \longrightarrow & \tilde{C} \\ \tilde{C}_{vw} & \longrightarrow & \tilde{C}_w & & \end{array}$$

Для каждого состояния s из C_u рассмотрим линейную функцию $f: V(s) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, заданную формулой $f(\sum_i \lambda_i x_i) = \lambda_1$. Функция корректно определена и индуцирует разложения пространств

$$\bigwedge^* V(s) = \bigwedge^* \ker f \oplus x_1 \bigwedge^* V(s), \quad C_u = X \oplus x_1 C_u.$$

Рассмотрим подкомплекс

$$\begin{array}{ccccc} & & C_{uw} & \longrightarrow & C_{uvw} \\ & \nearrow^1 & \uparrow & & \nearrow \\ X & \xrightarrow{1} & C_{uv} & & \\ & \downarrow & \uparrow & & \\ & & C_w & \longrightarrow & C_{vw} \\ & & \uparrow & & \nearrow \\ & & C_v & & \end{array}$$

Факторкомплекс $C \rightarrow x_1 C_u$ является стягиваемым, так что гомологии комплекса $C(G)$ изоморфны гомологиям рассматриваемого подкомплекса. Подкомплекс содержит стягиваемую часть $X \rightarrow \partial(X)$. Отображения $X \rightarrow C_{uv}$ и $X \rightarrow C_{uw}$ являются изоморфизмами, так что после факторизации мы получим комплекс

$$\begin{array}{ccc} C_{uw} & \longrightarrow & C_{uvw} \\ \uparrow \parallel & \nearrow & \uparrow \\ & C_{uv} & \\ \uparrow & \uparrow & \\ C_w & \longrightarrow & C_{vw} \\ & \uparrow \nearrow & \\ & C_v & \end{array}$$

где пространства C_v и C_w отождествляются.

Аналогичные рассуждения сводят комплекс $C(\tilde{G})$ к комплексу (для состояний s из $\tilde{C}_{uvw}$ нужно определить функцию $f: \tilde{V}(s) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ при помощи формулы $f(\sum_i \lambda_i x_i) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$)

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}_{uv} & \longrightarrow & \tilde{C}_u \\ \uparrow \parallel & \nearrow & \uparrow \\ & \tilde{C}_{uw} & \\ \uparrow & \uparrow & \\ \tilde{C}_v & \longrightarrow & C \\ & \uparrow \nearrow & \\ & \tilde{C}_w & \end{array}$$

Оба построенных комплекса изоморфны комплексу

$$C_v \oplus C_w \rightarrow C \oplus C_{vw} \rightarrow C_{uvw}.$$

Таким образом, гомологии комплексов $C(G)$ и $C(\tilde{G})$ совпадают.

Инвариантность относительно Ω_4 . Пусть вершины u и v , участвующие в движении Ω_4 , имеют номера p и q в $V(G) = V(\tilde{G})$. Коэффициенты матриц смежности $A(G) = (a_{ij})$ и $A(\tilde{G}) = (\tilde{a}_{ij})$ связаны соотношением

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + a_{ip}a_{jq} + a_{iq}a_{jp}, & \{i, j\} \cap \{p, q\} = \emptyset, \\ a_{ij}, & \{i, j\} \cap \{p, q\} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Рассмотрим отображение $\varphi: C(G) \rightarrow C(\tilde{G})$, действующее на состояниях по формуле

$$\varphi(s) = \begin{cases} s \cup \{u, v\}, & \{u, v\} \cap s = \emptyset, \\ s \setminus \{u, v\}, & \{u, v\} \cap s = \{u, v\}, \\ s, & \{u, v\} \cap s \neq \emptyset, \{u, v\}, \end{cases}$$

а также линейные отображения $\Phi: V(s) \rightarrow \tilde{V}(\varphi(s))$, заданные формулой

$$\Phi(x_i) = \begin{cases} x_i, & i \neq p, q, \\ x_q, & i = p, \\ x_p, & i = q. \end{cases}$$

Отображение Φ является изоморфизмом линейных пространств и после соответствующего расширения до изоморфизма внешних алгебр

$$\bigwedge^* V(s) \rightarrow \bigwedge^* \tilde{V}(\varphi(s))$$

задает изоморфизм градуированных линейных пространств $\Phi: C(G) \rightarrow C(\tilde{G})$. Φ является цепным отображением комплексов. Следовательно, комплексы $C(G)$ и $C(\tilde{G})$, а также их гомологии изоморфны.

Инвариантность относительно Ω'_4 . Пусть вершина v , участвующая в движении Ω'_4 , имеет номер p . Коэффициенты матриц смежности $A(G) = (a_{ij})$ и $A(\tilde{G}) = (\tilde{a}_{ij})$ связаны соотношением

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + a_{ip}a_{jp}, & i, j \neq p, \\ a_{ip}, & j = p, \\ a_{pj}, & i = p. \end{cases}$$

Определим отображение $\varphi: C(G) \rightarrow C(\tilde{G})$, действующее на множестве состояний, формулой

$$\varphi(s) = s \oplus p,$$

а линейные отображения $\Phi: V(s) \rightarrow \tilde{V}(\varphi(s))$ — формулой $\Phi(x_i) = x_i$, $i = 1, \dots, n$. Отображения Φ задают изоморфизм комплексов $C(G)$ и $C(\tilde{G})$, так что гомологии комплексов совпадают.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Гомологии Хованова $\overline{\text{Kh}}(G)$ являются инвариантом граф-зацеплений.*

§ 4. Полином Джонса граф-зацеплений и гомологии Хованова

Рассмотрим простой меченый граф G . Комплекс $C(G)$ имеет две градуировки: гомологическую градуировку M_0 и алгебраическую градуировку $\deg$ в градуированных алгебрах $\bigwedge^* V(s)$. Дифференциал не является однородным относительно $\deg$, однако он согласован с градуировкой Q_0 , которая элементу $u \in \bigwedge^r V(s)$ сопоставляет число

$$Q_0(u) = \dim_{\mathbb{Z}_2} V(s) - 2r + M_0(s).$$

Дифференциал увеличивает на единицу гомологическую градуировку M_0 и не меняет градуировку Q_0 . Эти градуировки определяют разложение гомологий Хованова в прямую сумму

$$\overline{\text{Kh}}(G) = \bigoplus_{m, q \in \mathbb{Z}} \overline{\text{Kh}}(G)_{(m, q)}.$$

Определение скобки Кауфмана для граф-зацеплений было дано Д. П. Ильюто и В. О. Мантуровым [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть G есть простой меченый граф с n вершинами. *Полином Кауфмана* графа G определяется как

$$\langle G \rangle(a) = \sum_{s \subset \mathcal{V}(G)} a^{\alpha(s) - \beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\text{corank } A(s)},$$

где $\alpha(s) = \#\{v \in s \mid \text{sgn}(v) = -1\} + \#\{v \notin s \mid \text{sgn}(v) = 1\}$ и $\beta(s) = n - \alpha(s)$.

Оказывается, что скобка Кауфмана с точностью до сдвига градуировки совпадает с эйлеровой характеристикой биградуированных гомологий Хованова.

ТЕОРЕМА 2. Для любого меченого графа G имеет место равенство

$$\sum_{m, q \in \mathbb{Z}} (-1)^m \dim_{\mathbb{Z}_2} \overline{\text{Kh}}(G)_{(m, q)} \cdot t^q = (-it^{1/2})^n \langle G \rangle(it^{-1/2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левая часть выражения совпадает с эйлеровой характеристикой комплекса $C(G)$. Каждое состояние $s \subset \mathcal{V}(G)$ имеет гомологическую градуировку $\beta(s)$, и соответствующее пространство цепей $\bigwedge^* V(s)$ вносит в эйлерову характеристику вклад

$$(-1)^{\beta(s)} (t + t^{-1})^{\dim V(s)} t^{\beta(s)}.$$

Так как

$$\dim V(s) = \text{corank } A(s), \quad \beta(s) = -\frac{1}{2}(\alpha(s) - \beta(s) - n),$$

сумма по всем состояниям равна правой части доказываемого равенства.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим граф Буше W_5 [14] (рис. 3), все вершины которого помечены $(0, +)$. Гомологии Хованова данного помеченного графа G были вычислены Дж. Блумом:

$$\begin{aligned} \overline{\text{Kh}}_{(1,0)}(G) &= \overline{\text{Kh}}_{(2,0)}(G) = \overline{\text{Kh}}_{(3,2)}(G) = \overline{\text{Kh}}_{(3,4)}(G) \\ &= \overline{\text{Kh}}_{(4,6)}(G) = \overline{\text{Kh}}_{(5,6)}(G) = \mathbb{Z}_2, \end{aligned}$$

остальные группы гомологий равны нулю. Скобка Кауфмана в данном случае равна

$$\langle G \rangle(a) = -a^{-2} - a^2.$$

Отсюда, в частности, следует, что граф-зацепление G нетривиально. Оказывается, верен более сильный факт – нереализуемость граф-зацепления G (см. [3]). Иными словами, любой меченый граф, получающийся из G движениями Рейдемейстера, не является графом пересечения никакой хордовой диаграммы.

Заметим, что граф G не является граф-узлом в смысле определения 4 ниже.

Градуировки M_0, Q_0 комплекса Хованова не сохраняются при движениях Рейдемейстера, как показано в таблице 1.

Здесь $\Omega_1^\pm$ означает добавление изолированной вершины со знаком ± 1 , а Ω_2 означает движение, добавляющее две вершины. В ячейках таблицы стоят сдвиги градуировок после совершения соответствующего движения.

Итак, группы $\overline{\text{Kh}}(G)_{(m, q)}$ не являются инвариантами граф-зацеплений. Тем не менее, они допускают нормализацию для граф-узлов.

Рис. 3. Граф Буше W_5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 (см. [1]). Граф-зацепление G называется *граф-узлом*, если $\text{corank}(A(G) + E) = 0$, где E обозначает единичную матрицу.

Соотношение $\text{corank}(A(G) + E) = 0$ сохраняется при движениях Рейдемейстера, так что определение корректно.

Таблица 1. Сдвиг градуировок при движениях Рейдемейстера

	M_0	Q_0
Ω_1^-	0	-1
Ω_1^+	1	2
Ω_2	1	1
Ω_3	0	0
Ω_4	0	0
Ω_4'	0	0

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 (см. [1]). Число закрученности графа G с n вершинами равно сумме

$$w(G) = \sum_{i=1}^n (-1)^{\text{corank } B_i(G)} \text{sgn } v_i,$$

где $B_i(G) = A(G) + E + E_{ii}$, матрица E_{ii} содержит единственный ненулевой элемент, который лежит в i -й строке и i -м столбце.

Число закрученности инвариантно относительно движений Ω_2 - Ω_4 . Движение $\Omega_1^\pm$ меняет число закрученности на ∓ 1 . Опираясь на этот факт и таблицу 1 мы строим две градуировки, сохраняющиеся при движениях Рейдемейстера,

$$M = M_0 + \frac{w(G) - n(G)}{2}, \quad Q = Q_0 + \frac{3w(G) - n(G)}{2},$$

здесь $n(G)$ есть число вершин графа G .

Обозначим через $\overline{\text{Kh}}_{m,q}(G)$ однородную часть гомологий $\overline{\text{Kh}}(G)$, имеющую градуировки $M = m$ и $Q = q$. Группы $\overline{\text{Kh}}_{m,q}(G)$ являются инвариантами граф-узлов.

Число закрученности позволяет определить другой инвариант граф-узлов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 (см. [1]). *Полином Джонса* граф-узла G определяется как

$$X(G)(a) = (-a)^{-3w(G)} \langle G \rangle(a).$$

Из теоремы 2 следует

ТЕОРЕМА 3. *Биградуированные гомологии Хованова граф-узлов $\overline{\text{Kh}}_{m,q}(G)$ представляют собой категорификацию полинома Джонса, т.е.*

$$\sum_{m,q \in \mathbb{Z}} (-1)^m \dim_{\mathbb{Z}_2} \overline{\text{Kh}}_{m,q}(G) \cdot t^q = X(G)(it^{-1/2}).$$

Автор благодарен В. О. Мантурову и Д. П. Илютко за многочисленные полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] D. P. Ilyutko, V. O. Manturov, “Introduction to graph-link theory”, *J. Knot Theory Ramifications*, **18**:6 (2009), 791–823.
- [2] Д. П. Илютко, В. О. Мантуров, “Граф-зацепления”, *Докл. РАН*, **428**:5 (2009), 591–594; англ. пер.: D. P. Ilyutko, V. O. Manturov, “Graph-links”, *Dokl. Math.*, **80**:2 (2009), 739–742.
- [3] D. Ilyutko, V. Manturov, “Graph-links”, *Introductory lectures on knot theory* (Trieste, 2009), Ser. Knots Everything, **46**, World Scientific, Hackensack, NJ, 2012, 135–161.
- [4] L. Ghier, “Double occurrence words with the same alternance graph”, *Ars Combin.*, **36** (1993), 57–64.
- [5] S. V. Chmutov, S. K. Lando, “Mutant knots and intersection graphs”, *Algebr. Geom. Topol.*, **7** (2007), 1579–1598.
- [6] L. Traldi, L. Zulli, “A bracket polynomial for graphs. I”, *J. Knot Theory Ramifications*, **18**:12 (2009), 1681–1709.
- [7] L. Traldi, “A bracket polynomial for graphs. II. Links, Euler circuits and marked graphs”, *J. Knot Theory Ramifications*, **19**:4 (2010), 547–586.
- [8] D. P. Ilyutko, *An equivalence between the set of graph-knots and the set of homotopy classes of looped graphs*, arXiv: 0911.5504.
- [9] Д. П. Илютко, “Оснащенные 4-графы: эйлеровы циклы, гауссовы циклы и поворачивающие обходы”, *Матем. сб.*, **202**:9 (2011), 53–76; англ. пер.: D. P. Ilyutko, “Framed 4-graphs: Euler tours, Gauss circuits and rotating circuits”, *Sb. Math.*, **202**:9 (2011), 1303–1326.
- [10] M. Khovanov, “A categorification of the Jones polynomial”, *Duke Math. J.*, **101**:3 (1997), 359–426.
- [11] P. Ozsvath, J. Rasmussen, Z. Szabó, *Odd Khovanov homology*, arXiv: 0710.4300.

- [12] J. M. Bloom, “Odd Khovanov homology is mutation invariant”, *Math. Res. Lett.*, **17**:1 (2010), 1–10.
- [13] S. M. Wehrli, *Khovanov Homology and Conway Mutation*, arXiv:0301312.
- [14] A. Bouchet, “Circle graph obstructions”, *J. Combin. Theory Ser. B*, **60**:1 (1994), 107–144.

И. М. Никонов (I. M. Nikonov)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: nikonov@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию

21.07.2011 и 03.02.2012