Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Гришухин, Сумма по Минковскому зонотопа и многогранника Вороного корневой решетки E_7 , *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 11, 41–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7915>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:30:32

УДК 511.9

В. П. Гришухин

Сумма по Минковскому зонотопа и многогранника Вороного корневой решетки E_7

Показано, что сумма по Минковскому $P_V(E_7) + Z(U)$ многогранника Вороного $P_V(E_7)$ корневой решетки E_7 и зонотопа $Z(U)$ есть 7-мерный параллелепипед тогда и только тогда, когда векторы множества U с точностью до множителя есть минимальные векторы двойственной к E_7 решетки E_7^* и множество U не содержит запрещенных множеств. Минимальные векторы решетки E_7 есть векторы r классической системы корней E_7 . Если норма r^2 корней выбрана равной 2, то скалярные произведения минимальных векторов решетки E_7^* принимают лишь два значения $\pm 1/2$. Множество минимальных векторов называется запрещенным, если оно есть множество из шести таких векторов, что изменениями их знаков можно получить множество векторов с попарными скалярными произведениями $1/2$.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: сумма по Минковскому, многогранник Вороного, зонотоп, унимодулярное множество, матроид.

§ 1. Введение

Параллелепипед – это такой многогранник, параллельными смещениями которого можно замостить пространство без зазоров и пересечений по внутренним точкам. Частным случаем параллелепипеда является многогранник Вороного $P_V(L)$ решетки L . Он есть замыкание множества точек пространства, которые ближе к данной точке решетки, чем к другим ее точкам. Разбиение пространства на многогранники Вороного имеет двойственное разбиение, называемое разбиением Делоне и состоящее из многогранников Делоне.

В настоящей работе рассматривается многогранник Вороного $P_V(E_7)$ корневой семимерной решетки E_7 . Разбиение Делоне этой решетки состоит из полуправильных многогранников Госсета и правильных симплексов (см. [1], [2]).

Сумма по Минковскому многогранника Вороного $P_V(E_7)$ корневой решетки E_7 и отрезка $z(g)$ прямой $l(g)$, натянутой на вектор g , может быть параллелепипедом или не быть им. Аналогично тому, как это сделано в [3] для многогранника Вороного $P_V(E_6)$ корневой решетки E_6 , нетрудно показать, что сумма $P_V(E_7) + z(g)$ есть 7-мерный параллелепипед тогда и только тогда, когда вектор g с точностью до множителя является минимальным вектором двойственной решетки E_7^* . В [4] показано, что сумма любого параллелепипеда с множеством отрезков может быть параллелепипедом той же размерности, только если прямые, соответствующие этим отрезкам, натянуты на множество векторов некоторой

унимодулярной системы. Напомним, что множество векторов U есть унимодулярная система, если для любого базисного подмножества $B \subseteq U$ векторы системы имеют целочисленные координаты в этом базисе.

Минимальными векторами решетки E_7 являются корни r классической системы корней E_7 . Как обычно, норма корня r равна $r^2 = 2$. В этом случае норма минимальных векторов двойственной к E_7 решетки E_7^* равна $3/2$. Пусть $\mathcal{Q}$ есть множество минимальных векторов E_7^* . Скалярные произведения минимальных векторов решетки E_7^* принимают лишь два значения $\pm 1/2$. Подмножество минимальных векторов U называется *допустимым*, если оно не содержит подмножества из шести таких векторов, что переключением их знаков можно получить множество из шести векторов с попарными скалярными произведениями $1/2$. Пусть $U \subseteq \mathcal{Q}$ есть некоторое допустимое подмножество в $\mathcal{Q}$. Обозначим через $Z(U) = \sum_{q \in U} z(q)$ зонотоп, являющийся суммой по Минковскому отрезков $z(q)$.

В настоящей статье будет показано, что многогранник Вороного $P_V(E_7)$ и зонотоп $Z(U)$ для допустимых множеств $U \subset \mathcal{Q}$ имеют вид

$$P(a) = \{x \in \mathbb{R}^7 : (p - q)^T x \leq a(p - q) \text{ для } p, q \in \mathcal{Q}\};$$

здесь $a(p - q) = a(q - p)$ — неотрицательная симметричная функция на векторах $p - q$, где $p, q \in \mathcal{Q}$. В частности, $P_V(E_7) = P(a_0)$, где $a_0(p - q) = (p - q)^2/2$, и $Z(U) = P(a_U)$ для некоторой неотрицательной симметричной функции $a_U = a_U(p - q)$. Пусть a, a' суть две неотрицательные симметричные функции на векторах $p - q$. Так как многогранники $P(a)$ и $P(a')$ описываются одинаковыми с точностью до правых частей системами неравенств, то для их суммы по Минковскому имеем равенство $P(a) + P(a') = P(a + a')$. Поэтому $P_V(E_7) + Z(U) = P(a_0 + a_U)$. Этот многогранник может быть или не быть параллелепипедом. Мы покажем, что эта сумма является 7-мерным параллелепипедом тогда и только тогда, когда множество U допустимо. Отсюда, в частности, вытекает, что векторы допустимых подмножеств множества $\mathcal{Q}$ пропорциональны векторам некоторой унимодулярной системы. В действительности же оказалось, что допустимые подмножества сами унимодулярны. В конце статьи будут перечислены максимальные по включению допустимые подмножества в $\mathcal{Q}$, а также идентифицирована их унимодулярность.

Приведем некоторые обозначения и определения.

Многогранник размерности n назовем n -многогранником. *Фасетами* n -многогранника называются его $(n - 1)$ -границы.

Пусть P есть центрально симметричный многогранник. Отрезок, соединяющий пару его вершин v и v' , обозначим через (v, v') . Отрезок, соединяющий пару противоположных вершин P , называется *диагональю* многогранника P . Если отрезок (v, v') параллелен и равен по величине вектору $p \in \mathbb{R}^n$, то скажем, что этот отрезок *конформен* вектору p .

Пусть P есть n -многогранник, чьи фасеты центрально симметричны. Тогда k фасет $F_1, F_2, \dots, F_k$ образуют k -*поясок*, если пересечения $F_{i-1} \cap F_i$ и $F_i \cap F_{i+1}$ являются $(n - 2)$ -гранями, противоположными в F_i , где $1 \leq i \leq k$ и индексы i рассматриваются по модулю k .

Для любых вектор-столбцов $p, q \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $p^T q = q^T p$ их скалярное произведение. Введем гиперплоскости

$$H(p) = \{x \in \mathbb{R}^7 : p^T x = 0\}, \quad H_1(p) = \left\{x \in \mathbb{R}^7 : p^T x = \frac{1}{2}p^2\right\}. \quad (1)$$

Гиперплоскость $H_1(p)$ есть параллельный сдвиг гиперплоскости $H(p)$ на половину вектора p . Назовем вектор, который ортогонален гиперплоскостям $H(p)$ и $H_1(p)$, *фасетным вектором* каждой из этих гиперплоскостей.

Для любого множества векторов X и числа $\alpha \in \mathbb{R}$ обозначим через αX множество кратных векторов $\{\alpha x : x \in X\}$. В частности, множество $-X$ есть множество обратных векторов. Назовем размерностью множества векторов X размерность пространства $L(X)$, натянутого на X . Обозначим ее через $\dim X$.

Для положительного целого $m \in \mathbb{Z}$ положим $N_m = \{1, 2, \dots, m\}$. Для $S \subseteq N_m$ положим $\bar{S} = N_m - S$.

Для правильных n -мерных симплексов и ортаэдров (кросс-политопов) используются обозначения Кокстера α_n и β_n соответственно.

§ 2. Решетка E_7 и двойственная ей решетка E_7^*

Хорошо известно, что разбиение Делоне решетки E_7 состоит из центрально симметричных многогранников Госсета P_G и правильных симплексов α_7 (см. [1], [2]). Двойственная решетка E_7^* получается из решетки E_7 добавлением центров всех многогранников Госсета разбиения Делоне решетки E_7 . Поэтому решетка E_7 есть подрешетка своей двойственной решетки E_7^* . Решетки E_7 и E_7^* удобно задавать в базисе $\mathcal{B} = \{b_i : i \in N_7\}$ таким, что

$$b_i^2 = \frac{7}{8}, \quad i \in N_7, \quad b_i^T b_j = -\frac{1}{8}, \quad i, j \in N_7, \quad i \neq j.$$

Введем вектор b_8 такой, что $b_8 = -\sum_{i \in N_7} b_i$. Легко проверить, что

$$b_8^2 = \frac{7}{8}, \quad b_8^T b_i = -\frac{1}{8} \quad \text{для всех } i \in N_7 \quad \text{и} \quad \sum_{i \in N_8} b_i = 0.$$

Вектор $b = \sum_{i \in N_7} z_i b_i$ с целочисленными координатами z_i есть вектор решетки E_7 или E_7^* тогда и только тогда, когда $\sum_{i \in N_7} z_i \equiv 0 \pmod{4}$, если $b \in E_7$, или $\sum_{i \in N_7} z_i \equiv 0 \pmod{2}$, если $b \in E_7^*$.

Минимальные векторы классов смежности в факторгруппе $E_7/2E_7$ приведены в таблице 1. Здесь для $S \subseteq N_8$ введено сокращение $b(S) = \sum_{i \in S} b_i$. В таблице 1 столбец n_m содержит число минимальных векторов в данном классе смежности без учета знака векторов. Столбец nc дает число классов с минимальными векторами данного вида.

Напомним, что диагонали любой центрально симметричной грани разбиения Делоне конформны минимальным векторам некоторого класса смежности. Размерность соответствующей грани приведена в столбце $\dim$ таблицы 1. Если эта размерность равна 1, то соответствующий класс называется *простым*.

ТАБЛИЦА 1. Минимальные векторы классов смежности из $E_7/2E_7$

Мно- жество	Типы векторов	Множество индексов	Норма	n_m	nc	dim
$\mathcal{R}$	$b_i - b_j$	$i, j \in N_8, i \neq j$	2	1	28	1
	$\pm b(S)$	$S \subset N_8, S = 4$	2	1	35	1
$\mathcal{D}$	$\pm(b_i + b_j + 2b_k)$	$k \in N_8 - \{i, j\}$	4	6	28	6
	$\pm(b(S) - 2(b_i + b_j))$	$i, j \in S, S = 4, S \subset N_8$	4	6	35	6
$2\mathcal{Q}$	$\pm 2(b_i + b_j)$	$i, j \in N_8, i \neq j$	6	28	1	7

Стоит обратить внимание на то, что количества классов в $\mathcal{R}$ и в $\mathcal{D}$ совпадают и равны 63. Это не случайно. Существует следующее взаимно однозначное соответствие между этими классами. Каждый класс из $\mathcal{D}$ содержит с точностью до знака шесть векторов, которые порождают гиперплоскость. Эта гиперплоскость ортогональна некоторому вектору $r \in \mathcal{R}$. Обозначим соответствующий класс через $\mathcal{D}_0(r)$. Мы имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_0(b_i - b_j) &= \{\pm(b_i + b_j + 2b_k) : k \in N_8 - \{i, j\}\}, \\ \mathcal{D}_0(b(S)) &= \{\pm(b(S) - 2(b_i + b_j)) : i, j \in S\}\end{aligned}$$

(см. конец § 3).

Соответствие между классами $\mathcal{R}$ и $\mathcal{D}$ объясняется тем, что ребра многогранника Вороного $P_V(E_7)$, конформные векторам $r \in \mathcal{R}$, являются, как мы увидим ниже, стандартными гранями в смысле Долбилина (см. [5]). Каждая стандартная k -грань n -многогранника Вороного центрально симметрична. Она ортогональна некоторой центрально симметричной $(n - k)$ -грани разбиения Делоне.

§ 3. Множества векторов $\mathcal{Q}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{D}$

Напомним, что решетка E_7^* получается из решетки E_7 добавлением центров всех многогранников Делоне типа P_G . Поэтому класс смежности $2\mathcal{Q}$ из таблицы 1 состоит из удвоенных минимальных векторов решетки E_7^* , так как на эти векторы натянуты диагонали многогранника Делоне P_G . Таким образом множество минимальных векторов решетки E_7^* в базисе $\mathcal{B}$ есть множество векторов

$$\mathcal{Q} = \{\pm(b_i + b_j) : i, j \in N_8, i \neq j\}$$

нормы $(b_i + b_j)^2 = 3/2$. Нетрудно проверить, что для любых $p, q \in \mathcal{Q}$ имеем $p^T q \in \{\pm 1/2\}$. Поэтому 28 прямых, натянутых на векторы множества $\mathcal{Q}$, образуют семейство равноугольных прямых. Острый угол между любыми двумя прямыми этого семейства один и тот же.

Концевые точки $v(q)$ всех векторов $q \in \mathcal{Q}$ суть те вершины многогранника Вороного $P_V(E_7)$, которые я называю *вершинами Госсета*. Остальные вершины $v(s)$ многогранника $P_V(E_7)$ называются *симплициальными вершинами*.

Здесь векторы s принадлежат множеству

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \bigcup_S \{ \mathcal{S}(S) : S \subset N_8, |S| = 4 \},$$

где

$$\mathcal{S}_0 = \{ \pm b_i, i \in N_8 \}, \quad \mathcal{S}(S) = \left\{ \pm \left(\frac{1}{2} b(S) + \varepsilon(i, S) b_i \right) \right\},$$

$$\varepsilon(i, S) = 1 - 2|\{i\} \cap S| \in \{ \pm 1 \}.$$

Заметим, что $\mathcal{S}(S) = \mathcal{S}(\bar{S})$. Восемь пар противоположных векторов каждого из 36 множеств $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}(S)$ являются минимальными векторами непростых классов смежности факторгруппы $E_7^*/2E_7^*$. Множествами минимальных векторов простых классов смежности в $E_7^*/2E_7^*$ являются $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$. В таблице 2 приведены необходимые для дальнейшего значения попарных скалярных произведений векторов множеств $\mathcal{Q}, \mathcal{R}$ и $\mathcal{S}$.

Множество $\mathcal{R}$ представляет в базисе $\mathcal{B}$ все 126 корней корневой системы $\mathbf{E}_7$.

Таблица 2. Скалярные произведения векторов семейств $\mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{S}$

	$q \in \mathcal{Q}$	$r \in \mathcal{R}$	$s \in \mathcal{S}$
$q' \in \mathcal{Q}$	$q^T q' \in \{ \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2} \}$	$r^T q' \in \{ 0, \pm 1 \}$	$s^T q' \in \{ \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4} \}$
$r' \in \mathcal{R}$		$r^T r' \in \{ 0, \pm 1, \pm 2 \}$	$s^T r' \in \{ 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1 \}$
$s' \in \mathcal{S}$			$s^T s' \in \{ \pm \frac{1}{8}, \pm \frac{3}{8}, \pm \frac{5}{8}, \pm \frac{7}{8} \}$

Нетрудно видеть, что $(p - q)^2 = 2$, если $p^T q = 1/2$, и $(p - q)^2 = 4$, если $p^T q = -1/2$, для любых $p, q \in \mathcal{Q}$. Используя это свойство векторов множества $\mathcal{Q}$, легко проверить, что множества $\mathcal{R}$ и $\mathcal{D}$ из таблицы 1 представимы следующим образом:

$$\mathcal{R} = \left\{ p - q : p, q \in \mathcal{Q}, p^T q = \frac{1}{2} \right\}, \quad \mathcal{D} = \left\{ p - q : p, q \in \mathcal{Q}, p^T q = -\frac{1}{2} \right\}.$$

Кроме того, важно отметить, что если $s^T q = 3/4$ и $s^T s' = 1/8$ для $s, s' \in \mathcal{S}$ и $q \in \mathcal{Q}$, то $q - s \in \mathcal{S}$, $s - s' \in \mathcal{Q}$ и $s + s' \in \mathcal{R}$.

Для множества векторов $\mathcal{T} \in \{ \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{D} \}$ введем множества

$$\mathcal{T}_\mu(r) = \{ t \in \mathcal{T} : r^T t = \mu \}, \quad \mu \in \{ 0, \pm 1 \}.$$

Очевидно, что $\mathcal{T}_{-1}(r) = -\mathcal{T}_1(r) = \mathcal{T}_1(-r)$.

Нетрудно проверить, что множества $\mathcal{Q}_1(r)$ и $\mathcal{Q}_0(r)$ содержат 12 и 32 вектора соответственно. Множество $\mathcal{R}_0(r)$ содержит 60 векторов, которые представляют в базисе $\mathcal{B}$ все корни 6-мерной системы корней $\mathbf{D}_6$. Множество $\mathcal{Q}_0(r)$ для любого $r \in \mathcal{R}$ есть множество минимальных векторов того класса смежности семейства $\mathcal{D}$, который соответствует корню r .

§ 4. Многогранник Вороного $P_V(E_7)$

Каждый вектор $r \in \mathcal{R}$ простого класса смежности факторгруппы $E_7/2E_7$ определяет фасету $F(r)$ многогранника Вороного $P_V(E_7)$, лежащую в гиперплоскости $H_1(r)$.

Многогранник Вороного $P_V(E_7)$ легко получается из многогранника Госсета P_G , являющегося одним из многогранников Делоне решетки E_7 . Строение многогранника P_G хорошо известно (см., например, [1], [2]).

Многогранник Госсета P_G имеет 126 фасет $F_G(r)$, ортогональных корням $r \in \mathcal{R}$ и лежащих в гиперплоскостях $H_1(r)$, и 56 вершин $v(q)$, являющихся концами всех векторов $q \in \mathcal{Q}$. Фасета $F_G(r)$ является правильным ортаэдром β_6 с 12 вершинами $v(q)$. Кроме фасет $F_G(r)$ многогранник Госсета имеет 576 симплициальных фасет $F_G(s)$ типа α_6 , ортогональных всем 576 векторам $s \in \mathcal{S}$. Фасета $F_G(s)$ смежна только с семью фасетами $F_G(r)$ для $r \in \mathcal{R}(s)$, где $\mathcal{R}(s) = \{r \in \mathcal{R} : r^T s = 1\}$.

Многогранник P_G может быть вписан в многогранник Вороного $P_V(E_7)$ так, что для всех $r \in \mathcal{R}$ его фасета $F_G(r)$ лежит на фасете $F(r)$ многогранника $P_V(E_7)$ и каждая вершина P_G является вершиной многогранника $P_V(E_7)$. Так как $r^T s = 1$ для $r \in \mathcal{R}(s)$, то концевая точка $v(s)$ вектора s лежит на несущих гиперплоскостях $H_1(r)$ фасет $F(r)$ многогранника $P_V(E_7)$ для всех $r \in \mathcal{R}(s)$. Иными словами, $v(s)$ есть симплициальная вершина $P_V(E_7)$, являющаяся пересечением семи фасет $F(r)$ для $r \in \mathcal{R}(s)$.

Если две вершины Госсета $v(q)$, $v(q')$ смежны, то $q^T q' = 1/2$ и $q - q' = r'$ для некоторого корня $r' \in \mathcal{R}$. Поэтому ребро $(v(q), v(q'))$ конформно корню r' . Назовем такое ребро r -ребром. Симплициальная вершина $v(s)$ смежна только с семью вершинами Госсета $v(q)$ для векторов q таких, что $s^T q = 3/4$. При этом ребро $(v(s), v(q))$ конформно некоторому вектору $s' \in \mathcal{S}$. Назовем такое ребро s -ребром.

Множество симплициальных вершин фасеты $F(r)$ состоит из 16 пар противоположных в этой фасете вершин $v(s_j), v(s'_j)$ таких, что $s_j^T s'_j = 1/8$, где $j \in N_{16}$, т.е. (см. § 3)

$$\mathcal{S}_1(r) = \{s_j, s'_j : j \in N_{16}\}, \quad s_j + s'_j = r \quad \text{для всех } j \in N_{16}.$$

Диагонали $(v(s_j), v(s'_j))$ конформны 16 векторам $s_j - s'_j = q^j$, где $q^j \in \mathcal{Q}_0(r)$. Векторы q^j для всех $j \in N_{16}$ суть все с точностью до знака 16 векторов множества $\mathcal{Q}_0(r)$. Фасета $F(r)$ имеет $16 \times 6 = 96$ таких s -ребер, которые конформны всем (с точностью до знака) векторам множества $\mathcal{S}_0(r)$.

Множество вершин Госсета фасеты $F(r)$ есть $\{v(q) : q \in \mathcal{Q}_1(r)\}$. Выпуклая оболочка $F_G(r)$ вершин Госсета фасеты $F(r)$ есть ортаэдр β_6 . Ортаэдр β_6 имеет 12 вершин, которые разбиты на шесть пар противоположных в фасете вершин $v(q_i), v(q'_i)$, где $i \in N_6$. Поэтому (см. § 3)

$$\mathcal{Q}_1(r) = \{q_i, q'_i : i \in N_6\}, \quad q_i + q'_i = r \quad \text{для всех } i \in N_6.$$

Вершина $v(q_i)$ смежна в точности с одной вершиной каждой из 16 пар симплициальных вершин $v(s_j), v(s'_j)$ для всех $j \in N_{16}$. Другая вершина пары

$v(s_j)$, $v(s'_j)$ смежна вершине $v(q'_i)$. Если вершины $v(q_i)$ и $v(s_j)$ смежны, то ребро $(v(q_i), v(s_j))$ конформно вектору $s_j^i = q_i - s_j \in \mathcal{S}_0(r)$.

Так как вершины ортаэдра, не являющиеся противоположными, попарно смежны, то

$$q_i^T q_j = q_i^T q'_j = (q'_i)^T q'_j = \frac{1}{2} \quad \text{для всех } i, j \in N_6, \quad i \neq j.$$

Поэтому

$$q_i - q_j, \quad q_i - q'_j, \quad q'_i - q'_j \in \mathcal{R}_0(r).$$

Очевидно, $q_i^T q'_i = -1/2$ и $q_i - q'_i \in \mathcal{D}_0(r)$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} d_i = q_i - q'_i, \quad r_{ij} = q_i - q_j = q'_j - q'_i, \quad r'_{ij} = q_i - q'_j = q_j - q'_i, \\ i, j \in N_6, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что 60 векторов r_{ij}, r'_{ij} исчерпывают все множество $\mathcal{R}_0(r)$. Диагонали $(v(q_i), v(q'_i))$ фасеты $F(r)$ многогранника $P_V(E_7)$ конформны векторам $d_i \in \mathcal{D}_0(r)$.

Отметим, что $v(-q_i)$, $v(-q'_i)$ для $i \in N_6$ суть вершины противоположной фасеты $F(-r)$, которая есть параллельный сдвиг на вектор r фасеты $F(r)$. Легко видеть, что шесть пар отрезков $e_i = (v(q_i), v(-q'_i))$ и $-e_i = (v(-q_i), v(q'_i))$ суть r -ребра, которые все конформны корню r . При этом для данного i ребра e_i и $-e_i$ противоположны друг другу в многограннике $P_V(E_7)$. Положим

$$E(r) = \{\pm e_i : i \in N_6\}.$$

Для вершины v и ребра e обозначим через $\text{conv}(v, e)$ их выпуклую оболочку.

ЛЕММА 1. Пусть $v(q_i)$, $v(q'_i)$ для $i \in N_6$ и $v(s_j)$, $v(s'_j)$ для $j \in N_{16}$ суть все вершины фасеты $F(r)$. Не теряя общности, положим, что для фиксированного $i \in N_6$ вершина Госсета $v(q_i)$ смежна симплициальным вершинам $v(s_j)$ для всех $j \in N_{16}$, так что ребра $(v(q_i), v(s_j))$ конформны 16 векторам $s_j^i = q_i - s_j \in \mathcal{S}_0(r)$.

Пусть диагонали фасеты $F(r)$ конформны векторам $d_i = q_i - q'_i \in \mathcal{D}_0(r)$ и $q^j = s_j - s'_j \in \mathcal{D}_0(r)$, и пусть $e_i = (v(q_i), v(-q'_i)) \in E(r)$ есть одно из ребер, конформных корню r .

Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) Ребро e_i принадлежит 16 треугольным 2-граням $F_j^2(e_i) = \text{conv}(v(s_j^i), e_i)$, и каждая из 16 пар противоположных векторов $\pm q^j \in \mathcal{D}_0(r)$ параллельна своей 2-грану $F_j^2(e_i)$, где $j \in N_{16}$.

(ii) Для $i \in N_6$ имеем

$$H(d_i) \cap \mathcal{Q} = \mathcal{Q}^i(r) \cup (-\mathcal{Q}^i(r)), \quad \text{где } \mathcal{Q}^i(r) = \mathcal{Q}_1(r) - \{q_i, q'_i\},$$

и множество $\mathcal{Q}^i(r)$ порождает гиперплоскость $H(d_i)$.

(iii) Гиперплоскость $H_1(d_i)$ есть опорная гиперплоскость многогранника $P_V(E_7)$. При этом

$$H_1(d_i) \cap P_V(E_7) = e_i = (v(q_i), v(-q'_i)).$$

(iv) *Справедливы равенства*

$$r_{ij}^T r'_{ij} = 0, \quad r_{ij} + r'_{ij} = d_i, \quad r'_{ij} - r_{ij} = d_j, \quad r_{ij} = \frac{d_i - d_j}{2}, \quad r'_{ij} = \frac{d_i + d_j}{2},$$

$$F(r_{ij}) \cap F(r'_{ij}) = e_i.$$

Гиперплоскости $H(d_i)$ и $H_1(d_i)$ определены в (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Вершины $v(-q'_i)$ и $v(-s'_j)$ получаются параллельным сдвигом вершин $v(q_i)$ и $v(s_j)$ соответственно. Поэтому вершина $v(-q'_i)$ смежна в фасете $F(-r)$ вершинам $v(-s'_j)$ для всех $j \in N_{16}$, а ребра $(v(-q'_i), v(-s'_j))$ конформны векторам $s'_j - q'_i = s_j^i \in \mathcal{S}_0(r)$. Так как $q_i^T s_j^i = (-q'_i)^T s_j^i = 3/4$, то 16 вершин $v(s_j^i)$ для $j \in N_{16}$ смежны обеим вершинам $v(q_i)$ и $v(-q'_i)$ ребра e_i . Поэтому выпуклая оболочка $\text{conv}(v(s_j^i), e_i)$ есть 2-грань $F_j^2(e_i)$ многогранника $P_V(E_7)$ для всех $j \in N_{16}$. Так как ребра $(v(q_i), v(s_j^i))$ и $(v(-q'_i), v(s_j^i))$ грани $F_j^2(e_i)$ конформны векторам s_j и $-s'_j$, то вектор $s_j - s'_j = q^j \in \mathcal{Q}_0(r)$ параллелен 2-грану $F_j^2(e_i)$.

(ii) Напомним, что $H(d_i)$ есть гиперплоскость, ортогональная вектору d_i , а $H_1(d_i)$ есть ее сдвиг на половину вектора d_i . Так как $d_i^2 = 4$, то концевая точка вектора x принадлежит $H_1(d_i)$ тогда и только тогда, когда $x^T d_i = 2$.

Очевидно, $q_i^T d_i = (-q'_i)^T d_i = 2$. Поэтому $q_i, q'_i \notin H(d_i)$, а $v(q_i), v(-q'_i) \in H_1(d_i)$. Из равенств $d_i = q_i - q'_i$ и $p^T q_i = p^T q'_i = 1/2$ для $p \in \mathcal{Q}^i(r)$ вытекает, что $\mathcal{Q}^i(r) \subset H(d_i)$. Так как множество $\{v(q) : q \in \mathcal{Q}^i(r)\}$ есть множество вершин 5-ортаэдра $F_G(r) \cap H(d_i)$, то векторы множества $\mathcal{Q}^i(r)$ порождают гиперплоскость $H(d_i)$. Напомним, что $r = q_i + q'_i$ для всех $i \in N_6$. Пусть $q \in \mathcal{Q}_0(r)$, т.е. $q^T r = 0$. Тогда $q^T (q_i + q'_i) = q^T r = 0$. Поэтому

$$q^T q_i = -q^T q'_i, \quad q^T d_i = q^T q_i - q^T q'_i = 2q^T q_i \neq 0,$$

т.е. $\mathcal{Q}_0(r) \cap H(d_i) = \emptyset$. Так как $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_0(r) \cup \mathcal{Q}_{\pm 1}(r)$, то получаем утверждение (ii).

(iii) Мы видели, что $v(q_i), v(-q'_i) \in H_1(d_i)$. Если $p \in \mathcal{Q} - \{\pm q_i, \pm q'_i\}$, то согласно таблице 2 $p^T d_i \in \{0, \pm 1\}$. Поэтому все вершины Госсета $v(p)$, отличные от $v(q_i)$, $v(-q'_i)$, не лежат на $H_1(d_i)$. Аналогично, $s^T d_i \leq 3/2 < 2$, так как согласно таблице 2 $s^T q \leq 3/4$. Поэтому все симплицальные вершины не лежат на $H_1(d_i)$. Более того, согласно той же таблице 2 все вершины многогранника $P_V(E_7)$, не лежащие на $H_1(d_i)$, находятся в одном полупространстве, определяемом гиперплоскостью $H_1(d_i)$. Получаем утверждение (iii).

(iv) Используя (2), нетрудно проверить справедливость приведенных равенств между r и d с индексами. Из них вытекает, что $H(r_{ij}) \cap H(r'_{ij}) \subseteq H(d_i)$, т.е. согласно утверждению (iii) имеем

$$F(r_{ij}) \cap F(r'_{ij}) \subseteq (v(q_i), v(-q'_i)) = e_i.$$

Нетрудно убедиться, что в этом выражении включение выполняется как равенство. Получено утверждение (iv).

Заметим, что отсутствие симплицальных вершин в пересечении $F(r_{ij}) \cap F(r'_{ij})$ следует из таких соображений. Поскольку симплицальная вершина $v(s)$

многогранника $P_V(E_7)$ есть пересечение фасет $\bigcap_{r \in \mathcal{R}(s)} F(r)$, где $r^T r' = 1$ для любых $r, r' \in \mathcal{R}(s)$, то симплицальная вершина не может лежать в пересечении $F(r) \cap F(r')$ фасет $F(r)$ и $F(r')$ таких, что $r^T r' = 0$.

Из леммы 1 следует, что ребро e_i , а значит, и все r -ребра, являются стандартными гранями. Согласно работе Н. П. Долбилина [5] грань параллеледра называется *стандартной*, если она есть пересечение двух параллеледтров. Так как d_i есть вектор решетки E_7 и ребро e_i лежит в гиперплоскости $H_1(d_i)$, которая делит d_i пополам, то концевая точка вектора d_i есть центр многогранника Вороного, который пересекается с $P_V(E_7)$ в точности по ребру e_i . Таким образом, e_i есть стандартное ребро.

Напомним, что фасеты всякого параллеледра образуют 6- и 4-пояски. Множество из шести фасет $\{F(\pm r_i) : i = 1, 2, 3\}$ образует 6-поясок многогранника $P_V(E_7)$, если при некотором выборе знаков справедливо равенство $r_1 + r_2 + r_3 = 0$. Если четыре фасеты $F(\pm r_1)$ и $F(\pm r_2)$ некоторого многогранника Вороного образуют 4-поясок, то справедливо равенство $r_1^T r_2 = 0$. Для многогранника $P_V(E_7)$, используя таблицу 1, нетрудно проверить, что $r_1 \pm r_2 \in \mathcal{Q}$, если $r_1^T r_2 = 0$. Пусть $r_1 \pm r_2 = d_{\pm}$, где знаки согласованы. Очевидно, что оба вектора d_+ и d_- принадлежат одному классу смежности, скажем классу $\mathcal{Q}_0(r)$. Тогда $d_+ = d_i$ и $d_- = d_j$ для некоторых $i, j \in N_6$. Учитывая п. (iv) леммы 1, получаем $r_1 = (d_i + d_j)/2 = r'_{ij}$ и $r_2 = (d_i - d_j)/2 = r_{ij}$. Отсюда следует, что в многограннике $P_V(E_7)$ нет 4-поясков.

Скажем, что четыре фасеты $F(\pm r)$, $F(\pm r')$ многогранника Вороного $P_V(E_7)$, где $r^T r' = 0$, образуют *квази-4-поясок*, если $F(r) \cap F(r')$ есть ребро. Два корня r_{ij} и r'_{ij} порождают квази-4-поясок, который обозначим через $B_{ij}(r)$. Так как $-r_{ij} = r_{ji} = q_j - q_i$ и $r'_{ij} = q_j - q'_i$, то

$$F(-r_{ij}) \cap F(r'_{ij}) = (v(q_j), v(-q'_i)) = e_j.$$

Таким образом, четыре пересечения четырех фасет квази-4-пояска $B_{ij}(r)$ состоят из четырех ребер $\pm e_i, \pm e_j$. Более того, любая пара не противоположных ребер $e_i, e_j \in E(r)$ однозначно соответствует квази-4-пояску $B_{ij}(r)$.

§ 5. Когда сумма $P_V(E_7) + Z(U)$ не является параллеледром

Пусть $z(q)$ есть симметричный относительно начала координат отрезок прямой $l(q)$, натянутой на вектор $q \in \mathcal{Q}$, и G есть грань многогранника $P_V(E_7)$. Пусть $l_G(q)$ – такой параллельный сдвиг прямой $l(q)$, что пересечение $l_G(q) \cap G$ не пусто. Тогда грань G превращается в сумме $P_V(E_7) + z(q)$ в грань $G + z(q)$ размерности $\dim(G + z(q)) = \dim G + 1$ тогда и только тогда, когда $l_G(q) \cap G = l_G(q) \cap P_V(E_7)$ и это пересечение есть точка. В противном случае размерность грани не меняется.

Пусть $U \subseteq \mathcal{Q}$. Так как $z(-q) = z(q)$, то в сумме $G + Z(U)$ достаточно рассматривать множества U такие, что из пары противоположных векторов $\pm q$ множеству U принадлежит не более одного вектора. В связи с этим введем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Два множества векторов $U, U' \subseteq \mathcal{Q}$ называются *переключательно эквивалентными*, если одно из них получается из другого переменной знаков некоторых векторов.

ЛЕММА 2. Положим $U^i = U \cap \mathcal{Q}^i(r)$, где $\mathcal{Q}^i(r) = \mathcal{Q}_1(r) - \{q_i, q'_i\}$. Тогда ребро $e_i \in E(r)$ преобразуется в сумме $P_V(E_7) + Z(U)$ в грань $e_i + Z(U^i)$ размерности $\dim(U^i \cup \{r\})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно п. (i) леммы 1 $l_{e_i}(q) \cap F_i^2(e_i)$ есть отрезок, если $q \in \mathcal{Q}_0(r)$. Очевидно, что пересечения $l_{e_i}(q_i) \cap P_V(E_7)$ и $l_{e_i}(q'_i) \cap P_V(E_7)$ суть отрезки. Поэтому равенство $l_{e_i}(q) \cap e_i = l_{e_i}(q) \cap P_V(E_7)$ пересечений, являющихся точками, справедливо только для $q \in \mathcal{Q}^i(r)$. Так как множество векторов $\mathcal{Q}^i(r)$ порождает гиперплоскость $H(d_i)$, то сумма $e_i + Z(U^i)$ содержится в гиперплоскости $H_1(d_i)$ и $\dim(e_i + Z(U^i)) \leq 6$. Так как ребро e_i конформно корню r , то в сумме $P_V(E_7) + Z(U^i)$ ребро e_i преобразуется в грань $e_i + Z(U^i)$ размерности $\dim(U^i \cup \{r\})$.

Ребро e_i переходит в фасету, если множество $U^i \cup \{r\}$ содержит шесть линейно независимых векторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Подмножество $X \subset \mathcal{Q}$ из шести векторов называется *запретным*, если оно переключательно эквивалентно множеству векторов с одинаковыми попарными скалярными произведениями, равными $1/2$. Назовем множество $U \subset \mathcal{Q}$ *допустимым*, если оно не содержит запретных подмножеств.

Для дальнейшего важны следующие запретные подмножества множества $\mathcal{Q}_1(r)$, определенные для произвольных подмножеств $J \subseteq N_6$:

$$\mathcal{Q}_J(r) = \{q_i : i \in J\} \cup \{q'_i : i \in \bar{J}\},$$

где $\bar{J} = N_6 - J$. Для любого $i \in N_6$ пересечение $\mathcal{Q}_J(r) \cap \mathcal{Q}^i(r)$ состоит из пяти линейно независимых векторов.

Множество $\mathcal{Q}_J(r)$ для любого $J \subseteq N_6$ содержит шесть линейно независимых векторов, попарные скалярные произведения которых равны $q^T p = 1/2$. Вспоминая определение множества $\mathcal{Q}_1(r)$, нетрудно понять, что множество $\{v(q) : q \in \mathcal{Q}_J(r)\}$ есть множество вершин некоторой симплицальной 5-грани фасеты $F_G(r)$ многогранника Госсета P_G . Так как фасета $F_G(r)$ есть ортаэдр β_6 , то каждая ее 5-грань определяется некоторым подмножеством $J \subseteq N_6$.

ЛЕММА 3. Пусть $X \subset \mathcal{Q}$ есть множество из шести векторов с попарными скалярными произведениями, равными $1/2$. Тогда $X = \mathcal{Q}_J(r)$ для некоторого подмножества $J \subseteq N_6$ и корня $r \in \mathcal{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как вершины $v(q)$ для $q \in X$ попарно смежны в многограннике P_G , то $\{v(q) : q \in X\}$ есть множество вершин некоторой симплицальной 5-грани $G(X)$ многогранника P_G . Поэтому $G(X)$ есть грань либо фасеты $F_G(r)$ для некоторого $r \in \mathcal{R}$, либо симплицальной фасеты $F_G(s)$. Но так как симплицальные фасеты смежны в P_G только фасетам вида $F_G(r)$, то 5-грань $G(X)$ фасеты $F_G(s)$ есть также грань фасеты $F_G(r)$ для некоторого $r \in \mathcal{R}$. Поэтому она определяется множеством $\mathcal{Q}_J(r)$ для некоторого $J \subseteq N_6$.

ТЕОРЕМА 1. *Сумма $P_V(E_7) + Z(U)$ не является параллелоэдром, если множество $U \subseteq \mathcal{Q}$ содержит запретное подмножество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U содержит запретное множество, которое согласно лемме 3 переключительно эквивалентно множеству $\mathcal{Q}_J(r)$ для некоторых $r \in \mathcal{R}$ и $J \subseteq N_6$. Поэтому, не теряя общности, можно положить $U = \mathcal{Q}_J(r)$.

Для этого r и для некоторых $i, j \in N_6$ рассмотрим квази-4-поясок $B_{ij}(r)$ и его четыре ребра $\pm e_i, \pm e_j$. Каждое из пересечений $X_i = \mathcal{Q}^i(r) \cap \mathcal{Q}_J(r)$ и $X_j = \mathcal{Q}^j(r) \cap \mathcal{Q}_J(r)$ состоит из пяти векторов, порождающих вместе с корнем r гиперплоскости $H(d_i)$ и $H(d_j)$. Согласно лемме 2 ребра e_i и e_j преобразуются в грани $e_i + Z(X_i)$ и $e_j + Z(X_j)$, обе размерности $1 + \dim X_i = 1 + \dim X_j = 6$. Поэтому в сумме $P_V(E_7) + Z(\mathcal{Q}_J(r))$ каждое из этих четырех ребер и превращается в фасету, а квази-4-поясок $B_{ij}(r)$ превращается в 8-поясок. Но так как параллелоэдр не может иметь 8-поясков, то рассматриваемая сумма не является параллелоэдром.

Ниже будет показано, что сумма $P_V(E_7) + Z(U)$ есть параллелоэдр, если множество $U \subset \mathcal{Q}$ не содержит запретных подмножеств, т.е. если оно допустимо.

§ 6. Комбинаторика множества векторов $\mathcal{Q}$

Вместо абстрактного множества $\mathcal{Q}$ в дальнейшем удобно рассматривать множество $\mathcal{Q}^+ = \{b_i + b_j : i, j \in N_8, i \neq j\}$, заданное в базисе $\mathcal{B}$. Очевидно, что в этом базисе $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^+ \cup (-\mathcal{Q}^+)$ и любое подмножество из $\mathcal{Q}$ переключительно эквивалентно подмножеству из $\mathcal{Q}^+$. В дальнейшем полагаем, что $U \subseteq \mathcal{Q}^+$.

Чтобы понять устройство зонотопа $Z(U)$, где $U \subseteq \mathcal{Q}^+$, необходимо изучить свойства множества векторов $\mathcal{Q}^+$.

Подмножество $X \subseteq \mathcal{Q}^+$ удобно обозначать подграфом $G(X)$ полного графа K_8 на множестве вершин N_8 . Вектору $b_i + b_j$ соответствует ребро (i, j) графа K_8 , которое есть полный граф $K_2(\{i, j\})$ на множестве двух вершин $i, j \in N_8$. Подмножество $X \subseteq \mathcal{Q}^+$ естественным образом соответствует подмножеству ребер графа K_8 . Эти ребра и порождают граф $G(X)$. Заметим, что ребра, соответствующие векторам $q, q' \in \mathcal{Q}^+$, смежны (несмежны), если $q^T q' = 1/2$ (соответственно $q^T q' = -1/2$).

Группа перестановок множества N_8 есть подгруппа группы симметрии множества $\mathcal{Q}^+$. Поэтому абстрактному графу $G \subseteq K_8$ соответствует орбита множеств X таких, что граф $G(X)$ изоморфен графу G .

Приведем шесть графов, соответствующих всем запретным подмножествам множества $\mathcal{Q}^+$:

$$K_{1,6}, \quad K_{1,5} \oplus K_2, \quad K_{1,4} \oplus K_{1,2}, \quad K_{1,3} \oplus K_{1,3}, \quad K_{1,3} \oplus C_3, \quad C_3 \oplus C_3,$$

где $G_1 \oplus G_2$ означает объединение непересекающихся по вершинам графов G_1 и G_2 . Как обычно, K_n есть полный граф на n вершинах, $K_{m,n}$ есть полный двудольный граф на долях мощностей m и n , а C_n есть цикл на n вершинах.

Для дальнейшего важны максимальные по включению подмножества $X \subset \mathcal{Q}^+$ размерности $\dim X = 6$, т.е. множества X , порождающие гиперплоскости

$H(X)$ такие, что $H(X) \cap \mathcal{Q}^+ = X$. Очевидно, что всякое подмножество из шести линейно независимых векторов порождает гиперплоскость. Множество векторов из $\mathcal{Q}^+$, лежащих в этой гиперплоскости, и есть одно из максимальных по включению подмножеств размерности 6. Не очень сложный перебор множеств из шести линейно независимых векторов показывает, что существуют следующие семь графов $G(X)$, соответствующих максимальным по включению множествам X размерности 6:

$$K_{1,6}, \quad K_{1,4} \oplus K_{1,2}, \quad K_{1,3} \oplus C_3, \quad K_6 \oplus K_2, \quad K_{4,4}, \quad K_4 \oplus C_4, \quad K_{2,5}.$$

Здесь первые три графа соответствуют запретным множествам. Следующие два графа соответствуют множествам, порождающим гиперплоскости, ортогональные корням $r \in \mathcal{R}$. Остальные два графа соответствуют множествам, порождающим гиперплоскости, ортогональные векторам $d \in \mathcal{D}$. Заметим, что векторы, ортогональные гиперплоскостям, порожденным множествами, соответствующими первым трем графам, не пропорциональны векторам семейств $\mathcal{R}$ и $\mathcal{D}$.

В таблице 3 дано явное соответствие графов и фасетных векторов гиперплоскостей, порождаемых допустимыми множествами. Так как допустимые множества не содержат запретных множеств, то допустимые множества порождают только такие гиперплоскости, фасетные векторы которых принадлежат множествам $\mathcal{R}$ и $\mathcal{D}$. Назовем *типом* гиперплоскости $H(X)$ граф $G(X)$ порождающего ее множества X .

Таблица 3. Гиперплоскости, порождаемые допустимыми множествами, и их фасетные векторы

Тип G	Граф $G(X)$	Фасетный вектор
$K_6 \oplus K_2$	$K_6(N_8 - \{i, j\}) \oplus K_2(\{i, j\})$	$b_i - b_j \in \mathcal{R}$
$K_{4,4}$	$K_{4,4}(S, N_8 - S), \quad S = 4$	$b(S) \in \mathcal{R}$
$K_4 \oplus C_4$	$K_4(N_8 - \{i, j, k, l\}) \oplus C_4(i, j, k, l)$	$b_i + b_k - (b_j + b_l) \in \mathcal{D}$
$K_{2,5}$	$K_{2,5}(\{i, j\}, N_8 - \{i, j, k\})$	$b_i + b_j + 2b_k \in \mathcal{D}$

В таблице 3 в обозначении $K_{m,n}(S, T)$ двудольного графа $K_{m,n}$ явно указаны его доли S и T мощностей $|S| = m$ и $|T| = n$. Цикл $C_4(i, j, k, l)$ состоит из ребер (i, j) , (j, k) , (k, l) , (l, i) . Сравнивая таблицы 1 и 3, видим, что с точностью до знака каждому вектору $r \in \mathcal{R}$ и $d \in \mathcal{D}$ соответствует свое множество $X(r)$ и $X(d)$, порождающее гиперплоскость $H(r)$ и $H(d)$ соответственно.

Нетрудно проверить, что графы $K_6 \oplus K_2$ и $K_{4,4}$ соответствуют множествам вида $\mathcal{Q}_0(r) \cap \mathcal{Q}^+$, а графы $K_4 \oplus C_4$ и $K_{2,5}$ соответствуют множествам, которые переключательно эквивалентны множествам вида $\mathcal{Q}^i(r)$, согласно лемме 1 порождающим гиперплоскости вида $H(d_i)$.

Для дальнейшего важны также максимальные по включению подмножества $Y \subset \mathcal{Q}^+$ размерности 5. Каждое такое подмножество лежит в пересечении по крайней мере двух гиперплоскостей $H(X)$, где $X \supset Y$ и $\dim X = 6$. Фасетные

векторы этих гиперплоскостей лежат в двумерной плоскости, ортогональной 5-пространству $L(Y)$, натянутому на множество векторов Y . Если $L(Y)$ есть пересечение более чем двух гиперплоскостей, то между фасетными векторами этих гиперплоскостей существует линейная зависимость.

Перебор показывает, что существует девять различных графов $G(Y)$, соответствующих максимальным по включению множествам Y размерности 5. Эти графы приведены в таблице 4.

ТАБЛИЦА 4. Графы максимальных по включению множеств размерности 5

Множества пазмерности 5	Зависимость фасетных векторов
$K_{1,5}, K_{1,4} \oplus K_2, K_{1,3} \oplus K_{1,2}, C_3 \oplus K_{1,2}$	$r + d_1 + d_2 = 0$
$K_5, K_{3,3} \oplus K_2$	$r_1 + r_2 + r_3 = 0$
$K_{2,4}, K_4 \oplus K_2 \oplus K'_2, C_4 \oplus C'_4$	$r_1^T r_2 = d_+^T d_- = 0, d_{\pm} = r_1 \pm r_2$

Для дальнейшего здесь особенно важна третья строка. Покажем, что множества из восьми векторов, описываемые графами этой строки, переключательно эквивалентны множествам вида $\mathcal{Q}^{ij}(r) = \mathcal{Q}^i(r) \cap \mathcal{Q}^j(r)$ для $r \in \mathcal{R}$ и $i, j \in N_6$, где $i \neq j$. Действительно, мы имеем

$$\mathcal{Q}^{ij}(r) = \{q_k, q'_k : k \in N_6 - \{i, j\}\},$$

где $r = q_k + q'_k$ для всех k . Напомним, что так как $q_k^T q'_k = -1/2$, то паре векторов q_k, q'_k соответствует пара несмежных ребер, а переключательно эквивалентной ей паре векторов $q_k, -q'_k$ соответствует пара смежных ребер.

Пусть x, y есть пара вершин двухвершинной доли графа $K_{2,4}$, а $N_6 - \{i, j\}$ есть множество вершин другой его доли. Тогда паре ребер $(x, k), (y, k)$, где $k \in N_6 - \{i, j\}$, соответствует пара векторов $b_x + b_k = q_k$ и $b_y + b_k = -q'_k$. Очевидно, что $q_k^T q'_k = -1/2$ и $q_k + q'_k = b_x - b_y = r \in \mathcal{R}$ для всех $k \in N_6 - \{i, j\}$. Поэтому множество векторов, соответствующих графу $K_{2,4}$, переключательно эквивалентно множеству векторов $\mathcal{Q}^{ij}(r)$.

Графы $K_4 \oplus K_2 \oplus K'_2$ и $C_4 \oplus C'_4$ содержат по четыре пары несмежных ребер. Пусть множества вершин графов K_4, K_2 и K'_2 суть $\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\}$ и $\{7, 8\}$ соответственно. Тогда ребрам графа $K_4 \oplus K_2 \oplus K'_2$ соответствуют векторы

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 = q_1, & \quad b_3 + b_4 = q'_1, & b_1 + b_3 = q_2, & \quad b_2 + b_4 = q'_2, \\ b_1 + b_4 = q_3, & \quad b_2 + b_3 = q'_3, & b_5 + b_6 = -q_4, & \quad b_7 + b_8 = -q'_4. \end{aligned}$$

Так как $\sum_{i=1}^8 b_i = 0$, то $q_k + q'_k = b(S) = r \in \mathcal{R}$ для всех k , где $S = \{1, 2, 3, 4\} \subset N_8$. Поэтому множество векторов, соответствующих графу $K_4 \oplus K_2 \oplus K'_2$, переключательно эквивалентно множеству векторов $\mathcal{Q}^{5,6}(r)$, где $\{5, 6\} = N_6 - \{k : 1 \leq k \leq 4\}$.

Пусть циклам C_4 и C'_4 соответствуют векторы $b_i + b_{i+1}$, где $1 \leq i \leq 4$ и $5 \leq i \leq 8$ соответственно, и для $i = 4, 8$ имеем $b_{i+1} = b_1, b_5$ соответственно. Тогда аналогично тому, как это было сделано выше, нетрудно показать, что

множество векторов, соответствующих графу $C_4 \oplus C'_4$, переключательно эквивалентно множеству векторов $\mathcal{Q}^{ij}(r)$, где $r = b(S)$ и $S = \{1, 2, 3, 4\}$, а i, j – некоторые индексы множества N_6 .

§ 7. Многогранники $P(a)$

Далее в этой статье будет показано, что сумма $P_V(E_7) + Z(U)$ является параллелепипедом, если множество $U \subset \mathcal{Q}$ допустимо. Для этого рассмотрим класс многогранников, который содержит многогранник Вороного $P_V(E_7)$ и зонотопы $Z(U)$ для допустимых подмножеств $U \subseteq \mathcal{Q}$.

Пусть $a(p - q) = a(q - p)$ есть неотрицательная симметричная функция на векторах $p - q$, где $p, q \in \mathcal{Q}$. Для $a = a(p - q)$ рассмотрим многогранник

$$P(a) = \{x \in \mathbb{R}^7 : (p - q)^T x \leq a(p - q) \text{ для всех пар } p, q \in \mathcal{Q}, p \neq q\}.$$

Напомним, что если $p^T q = 1/2$, то $p - q = r \in \mathcal{R}$, и каждый корень представим в виде такой разности. Если же $p^T q = -1/2$, то $p - q \in \mathcal{D}$, т.е. $p - q = d_i \in \mathcal{D}$ для некоторого i . Поэтому $P(a)$ можно записать в виде

$$P(a) = \{x \in \mathbb{R}^7 : r^T x \leq a(r), d^T x \leq a(d), r \in \mathcal{R}, d \in \mathcal{D}\}.$$

Так как множество $\mathcal{R}$ содержит все фасетные векторы многогранника Вороного $P_V(E_7)$, то

$$P_V(E_7) = \left\{x \in \mathbb{R}^7 : r^T x \leq \frac{1}{2}r^2 \text{ для всех } r \in \mathcal{R}\right\}.$$

Согласно лемме 1 гиперплоскости $H_1(d)$ для $d \in \mathcal{D}$ опорны для многогранника $P_V(E_7)$. Поэтому $P_V(E_7) = P(a_0)$, где $a_0 = a_0(p, q) = (p - q)^2/2$. При этом неравенства в $P(a_0)$ для $p - q = d$ избыточны.

Рассмотрим теперь зонотоп $Z(U)$ для допустимого подмножества $U \subseteq \mathcal{Q}$. Покажем, что фасетные векторы зонотопа $Z(U)$ принадлежат множеству $\mathcal{R} \cup \mathcal{D}$. Фасеты зонотопа $Z(U)$ есть зонотопы вида $Z(U_F)$, где подмножество $U_F \subset U$ порождает гиперплоскость $H_F \subset \mathbb{R}^7$. Фасетный вектор гиперплоскости H_F и есть с точностью до множителя фасетный вектор фасеты $Z(U_F)$. Напомним, что множество U допустимо, а зонотоп $Z(U)$ и все его фасеты центрально симметричны. Из таблицы 3 следует, что фасетные векторы зонотопа $Z(U)$ принадлежат множеству $\mathcal{R} \cup \mathcal{D}$. Поэтому $Z(U) = P(a'_U)$ для некоторой симметричной функции $a'_U(p - q)$.

Так как многогранники $P(a_1)$ и $P(a_2)$ описываются одинаковыми с точностью до правой части системами неравенств, то $P(a_1) + P(a_2) = P(a_1 + a_2)$. Отсюда следует, что $P_V(E_7) + Z(U) = P(a_U)$, где $a_U = a_0 + a'_U$, если множество U допустимо. Таким образом, имеем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть U есть допустимое множество. Тогда:

- (i) $Z(U) = P(a'_U)$ для некоторой симметричной функции $a'_U = a'_U(p - q)$;
- (ii) для суммы Минковского многогранника Вороного $P_V(E_7) = P(a_0)$ и зонотопа $Z(U) = P(a'_U)$ имеем

$$P_V(E_7) + Z(U) = P(a_U), \quad \text{где } a_U = a_0 + a'_U.$$

Теперь докажем основной результат нашей работы. Доказательство теоремы 2, приведенной ниже, основано на следующем обстоятельстве. Каждый k -поясок многогранника $P(a)$ определяется своими 5-гранями, вернее, множеством $X \subset \mathcal{Q}$, содержащимся в пересечении гиперплоскостей, определяющих фасеты этого пояска. Чем больше фасет имеет пояска, тем большее множество векторов из $\mathcal{Q}$ должно породить эти гиперплоскости. В нашем случае, если $k > 6$, то пояска порождается таким большим множеством векторов, что оно обязательно содержит запретное множество.

ТЕОРЕМА 2. Пусть множество $U \subseteq \mathcal{Q}$ допустимо и зонотоп имеет вид $Z(U) = P(a'_U)$. Тогда:

(i) сумма Минковского $P_V(E_7) + Z(U) = P(a_U)$, где $a_U = a_0 + a'_U$, есть параллелоэдр;

(ii) зонотоп $Z(U) = P(a'_U)$ есть параллелоэдр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По хорошо известной теореме Венкова n -многогранник P является параллелоэдром тогда и только тогда, когда он и все его фасеты центрально симметричны, и его фасеты образуют только 4- и 6-пояски. Очевидно, что зонотоп $Z(U)$ и все его грани (тоже являющиеся зонотопами) центрально симметричны. Так как сумма по Минковскому центрально симметричных многогранников тоже центрально симметрична, то сумма $P_V(E_7) + Z(U)$ и все ее фасеты центрально симметричны.

Покажем, что многогранники $P(a_U)$ и $P(a'_U)$ имеют только 4- и 6-пояски. Согласно определению многогранника $P(a)$ несущие гиперплоскости фасет этих многогранников параллельны r - и d -гиперплоскостям $H(r)$ и $H(d)$ для $r \in \mathcal{R}$, $d \in \mathcal{D}$.

Рассмотрим k -поясок B и пересечение k гиперплоскостей, параллельных фасетам этого пояска. Каждая 5-грань пояска B параллельна этому пересечению. Поэтому фасетные векторы этих гиперплоскостей лежат в двумерной плоскости, ортогональной всем 5-граням пояска B .

Во втором столбце таблицы 4 приведены зависимости между фасетными векторами пересекающихся гиперплоскостей. Согласно таблице 4 существуют следующие три типа 5-мерных пересечений гиперплоскостей:

$$H(r) \cap H(d_1) \cap H(d_2), \quad \text{где } r + d_1 + d_2 = 0; \quad (3)$$

$$H(r_1) \cap H(r_2) \cap H(r_3), \quad \text{где } r_1 + r_2 + r_3 = 0; \quad (4)$$

$$H(r_1) \cap H(r_2) \cap H(d_+) \cap H(d_-), \quad (5)$$

$$\text{где } r_1^T r_2 = d_+^T d_- = 0, \quad r_1 + r_2 = d_+, \quad r_1 - r_2 = d_-.$$

Очевидно, пересечения (3) и (4) соответствуют 6-пояскам или (в вырожденном случае) 4-пояскам. Пересечение вида (5) может породить 8-поясок. Рассмотрим это пресечение подробнее.

Заметим, что гиперплоскость $H(d)$ порождает фасету зонотопа $Z(U) = P(a'_U)$, если пересечение $H(d) \cap U$ имеет размерность 6. Пусть $X_+ = H(d_+) \cap U$ и $X_- = H(d_-) \cap U$. В случае многогранника $P(a_U)$ его 5-грани содержат ребра, конформные корням $r \in \mathcal{R}$. Поэтому пересечения вида (5) могут породить 8-поясок, если множества $X_{\pm}$ имеют размерность 5 или 6. Покажем, что если

пересечения вида (5) порождают 8-поясок, то множество $X_+ \cup X_-$ содержит запретное подмножество.

Напомним, что множества векторов, соответствующие графам третьей строки таблицы 4, переключательно эквивалентны множествам $\mathcal{Q}^{ij}(r)$ для $r \in \mathcal{R}$ и $i, j \in N_6$, где $i \neq j$. В частности, пересечения в (5) соответствуют квази-4-пояскам $B_{ij}(r)$ многогранника $P_V(E_7)$. Рассмотрим подробнее, как преобразуется квази-4-поясок $B_{ij}(r)$ в сумме $P_V(E_7) + Z(U)$.

Согласно лемме 2 ребра $e_i, e_j \in E(r)$ пояска $B_{ij}(r)$ преобразуются в грани $e_i + Z(U^i)$ и $e_j + Z(U^j)$, где $U^i = U \cap \mathcal{Q}^i(r)$ и $U^j = U \cap \mathcal{Q}^j(r)$. Предположим, что $\dim(U^i \cup \{r\}) = \dim(U^j \cup \{r\}) = 6$, т.е. квази-4-поясок $B_{ij}(r)$ превращается в 8-поясок. Положим $U^{ij} = U^i \cap U^j = U \cap \mathcal{Q}^{ij}(r)$. Множество $U^{ij} \cup \{r\}$ порождает 5-грань нового пояска. Здесь имеются две возможности: пространство $L^{ij} = L(U^{ij})$, натянутое на U^{ij} , содержит или не содержит вектор r .

Пусть $r \notin L^{ij}$ и размерность пространства L^{ij} равна 4. Тогда множество U^{ij} содержит подмножество X из четырех линейно независимых векторов. Напомним, что $U^{ij} \subseteq \{q_k, q'_k : k \in N_6 - \{i, j\}\}$ и $q_k + q'_k = r$ для любого $k \in N_6 - \{i, j\}$. Так как $r \notin L^{ij}$, то множество X содержит из каждой пары q_k, q'_k , где $k \in N_6 - \{i, j\}$, по одному вектору. Так как $\dim(U^i \cup \{r\}) = \dim(U^j \cup \{r\}) = 6$, а $\dim L^{ij} = 4$, то множества $U^i - U^{ij}$ и $U^j - U^{ij}$ содержат хотя бы по одному вектору из пар q_j, q'_j и q_i, q'_i соответственно. Таким образом, множество $U^i \cup U^j$, а значит, и само множество U , содержит подмножество из шести векторов вида $\mathcal{Q}_J(r)$, которое является запретным.

Пусть теперь $r \in L^{ij}$. В этом случае пространство L^{ij} является 5-мерным и множество U^{ij} содержит по крайней мере пять линейно независимых векторов. Это есть также и случай зонотопа $Z(U) = P(a'_U)$. Так как $q_k + q'_k = q_l + q'_l = r$, то среди этих пяти линейно независимых векторов имеется лишь одна пара вида q_l, q'_l . Так как $r \in L^{ij} \subset L(U^i)$, то

$$\dim L(U^i) = \dim L(U^i \cup \{r\}) = 6 = \dim L^{ij} + 1.$$

Аналогичное утверждение верно и для множества U^j . Поэтому множества $U^i - U^{ij}$ и $U^j - U^{ij}$ содержат хотя бы по одному вектору из пар q_j, q'_j и q_i, q'_i соответственно. Таким образом, множество $U^i \cup U^j$, а значит, и само множество U , содержит подмножество из шести векторов вида $\mathcal{Q}_J(r)$.

Итак, мы получили, что если пересечение вида (5) порождает 8-поясок, то множество U недопустимо. Полученное противоречие доказывает теорему.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. *Сумма Минковского $P_V(E_7) + Z(U)$ есть параллелоэдр тогда и только тогда, когда множество $U \subseteq \mathcal{Q}$ допустимо.*

Хорошо известно, что зонотоп $Z(U)$ является параллелоэдром тогда и только тогда, когда векторы множества U параллельны векторам некоторого унимодулярного множества (см., например, [6], [7]). Напомним, что множество векторов U унимодулярно, если для любого его базисного подмножества векторы U имеют целочисленное разложение по этому базису. Поэтому из теоремы 2

вытекает, что если подмножество $U \subseteq \mathcal{Q}^+$ допустимо, то его векторы пропорциональны векторам некоторого унимодулярного множества. В действительности же оно само унимодулярно. В следующем параграфе максимальные по включению допустимые множества будут идентифицированы как конкретные унимодулярные множества.

§ 8. Максимальные допустимые унимодулярные подмножества в $\mathcal{Q}$

Всякое унимодулярное множество векторов представляет регулярный, или, что то же, унимодулярный матроид. Согласно результату Сеймура (см. [8]), все регулярные матроиды классифицированы. Матроид есть обобщение на точки абстрактного множества линейной зависимости или независимости векторов некоторого пространства (см., например, [9]).

Матроид $M(E)$ на множестве E задается любым из семейств специальных подмножеств $Y \subseteq E$, например, семействами циклов, независимых множеств, замкнутых множеств и т.п. Каждое семейство определяется своей системой аксиом. Например семейство $\mathcal{C}$ циклов $C \subseteq E$ удовлетворяет следующим двум аксиомам:

- если $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, то $C_1 \not\subseteq C_2$ и $C_2 \not\subseteq C_1$;
- если $e \in C_1 \cap C_2$, то существует цикл $C_3 \in \mathcal{C}$ такой, что $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 - \{e\}$.

Множество векторов X представляет матроид $M(E)$, если существует взаимно однозначное соответствие $\varphi: E \rightarrow X$ такое, что $\varphi(C) = \{\varphi(e) : e \in C\}$ есть минимальное по включению линейно зависимое множество векторов для любого $C \in \mathcal{C}$ и любое минимальное по включению зависимое подмножество в X имеет вид $\varphi(C)$ для некоторого $C \in \mathcal{C}$.

Матроид называется *регулярным* или *унимодулярным*, если он может быть представлен унимодулярным множеством векторов. (Другие эквивалентные определения регулярного матроида см. в [8]–[10]). Самыми распространенными классами регулярных матроидов являются графические и кографические матроиды.

С каждым графом G связаны два важных матроида на множестве E его ребер: графический матроид $M(G)$, циклами которого являются циклы графа G , и кографический матроид $M^*(G)$, циклами которого являются минимальные по включению разрезы графа G .

Существует регулярный матроид R_{10} ранга 5 на 10 элементах, который играет важную роль в знаменитой статье П. Сеймура [8]. Этот матроид не графический и не кографический. Он является неграфическим расширением графического матроида $M(K_{3,3})$. Это расширение новым элементом Ω таково, что элемент Ω образует 4-циклы с каждым совершенным паросочетанием графа $K_{3,3}$. (*Паросочетание* в графе G есть множество попарно не смежных ребер графа G . Паросочетание в графе G называется *совершенным*, если его ребра покрывают все вершины графа G .) Регулярный матроид R_{10} представляется унимодулярным множеством векторов, которое является максимальным среди 5-мерных унимодулярных множеств (см. [10], где это множество обозначается как E_5).

П. Сеймур (см. [8]) доказал, что всякий регулярный матроид есть 1-, 2- и 3-сумма графических, кографических матроидов и копий матроида R_{10} .

Матроид R_{10} имеет два вида представлений векторами множества $\mathcal{Q}^+$. Одно из них есть описанное выше расширение матроида $M(K_{3,3})$. Множество векторов, представляющих это расширение, описывается графом $K_{3,3} \oplus K_2 \subset K_8$. Второе представление описывается полным графом $K_5 \subset K_8$. Оба эти представления матроида R_{10} упоминаются в [11], где явно показан изоморфизм этих представлений.

Заметим, что множество векторов $X \subseteq \mathcal{Q}^+$, описываемое графом $G(X) \subseteq K_8$, не всегда представляет графический матроид $M(G(X))$. Например, нечетный не самопересекающийся цикл $C_{2k+1} \subset K_8$ соответствует независимому множеству векторов. Множество из четырех векторов, соответствующее совершенному паросочетанию $Pm \subset K_8$, образует цикл, т.е. минимальное по включению зависимое множество. Но множество векторов, соответствующее двудольному графу $K_{m,n} \subset K_8$, где $m + n < 8$, представляет графический матроид $M(K_{n,m})$.

М. Дютур, по просьбе автора, с помощью компьютера определил, что с точностью до группы симметрий множества $\mathcal{Q}$ существуют ровно четыре максимальных по включению допустимых подмножества в $\mathcal{Q}^+$. Зная этот результат, оказалось нетрудно найти все типы графов, соответствующих максимальным допустимым подмножествам, и идентифицировать их унимодулярность. Полученные сведения приведены в таблице 5.

Таблица 5. Максимальные по включению допустимые подмножества $X \subseteq \mathcal{Q}^+$

Граф $G(X)$	Матроид $M(X)$	$ X $	$\dim X$
$K_{2,5}, K_4 \oplus C_4$	$M(K_{2,5})$	10	6
∇C_5	$M^*(K_5)$	10	6
$K_5 \oplus_1 C_4, K_5 \oplus_1 Pm,$ $(K_{3,3} \oplus K_2) \oplus_1 C_4, (K_{3,3} \oplus K_2) \oplus_1 Pm$	$R_{10} \oplus_1 M(C_4)$	13	7
$G_1, G_2, K_5^e \oplus_1 C_4$	$M(K_{4,4} - \vee)$	14	7

Теперь поясним обозначения, используемые в таблице 5.

Мощность множества X обозначена через $|X|$. Для цикла $C \subset K_8$ и вершины u графа K_8 , не принадлежащей C , граф, порожденный циклом C и всеми ребрами между u и вершинами C , называется *колесом* и обозначается ∇C . Через $Pm = K_2 \oplus K_2 \oplus K_2 \oplus K_2$ обозначен граф из четырех попарно несмежных ребер графа K_8 . Граф Pm является совершенным паросочетанием графа K_8 .

Определим 1-сумму $G \oplus_1 G'$ произвольных графов G и G' как объединение этих графов, имеющих одно общее ребро. Обозначим через K_5^e подграф K_8 , получающийся из графа $K_5 \subset K_8$ заменой ребра e графа K_5 цепью из двух смежных ребер. Таким образом, $K_5^e = (C_3 \oplus_1 K_5) - e$ и $e = C_3 \cap K_5$. Через $K_5^e \oplus_1 C_4$ обозначим 1-сумму графа K_5^e и цикла C_4 , в которой общее ребро не смежно двум ребрам цепи, заменившей ребро e в графе K_5 .

Пусть двудольный граф $K_{3,4} = K_{3,4}(V_3, V_4) \subset K_8$ задан на долях $V_3, V_4 \subset N_8$ мощностей $|V_3| = 3$ и $|V_4| = 4$, где $V_3 \cap V_4 = \emptyset$. Пусть $\{w\} = N_8 - (V_3 \cup V_4)$ и $V_4 = \{v_0, v_1, v, v'\}$. Рассмотрим ребра $e = (v, v_0)$, $e' = (v', v_0)$ и $e'' = (v, v')$ графа K_8 , которые не являются ребрами графа $K_{3,4}(V_3, V_4)$. Эти три ребра образуют 3-цикл Δ графа K_8 . Для $u \in V_3$ ребро $e_1 = (u, v_1)$ принадлежит графу $K_{3,4}(V_3, V_4)$. Определим два графа:

$$G_1 = K_{3,4}(V_3, V_4) + e + e', \quad G_2 = K_{3,4}(V_3, V_4) + \Delta - e_1.$$

Оба графа G_1 и G_2 имеют по $7 = |V_3| + |V_4|$ вершин и по 14 ребер.

Через $K_{4,4} - \vee$ обозначен полный двудольный граф $K_{4,4}$, в котором удалена вилка $\vee$, т.е. два смежных ребра.

В заключение заметим, что все четыре упомянутых выше регулярных матроида являются подматроидами (т.е. ограничениями на соответствующее множество) следующего матроида $M_m(K_8)$, определенного на множестве 28 ребер графа K_8 . Семейство циклов этого матроида состоит из четных циклов C_{2k} , где $k \leq 3$, пар нечетных циклов с общей вершиной, совершенных паросочетаний Pm графа K_8 и всех симметрических разностей этих трех типов циклов. Для каждого графа $G(X)$ таблицы 5 регулярный матроид $M(X)$ изоморфен матроиду $M_m(G(X))$.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензенту, взявшему на себя труд значительно улучшить понимание текста статьи.

Список литературы

- [1] Е. П. Барановский, “Разбиение евклидовых пространств на L -многогранники некоторых совершенных решеток”, *Дискретная геометрия и топология*, Тр. МИАН СССР, **196**, Наука, М., 1991, 27–46; англ. пер.: Е. P. Baranovskii, “Partitioning of Euclidean spaces into L -polytopes of some perfect lattices”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **196** (1992), 29–51.
- [2] J. H. Conway, N. J. A. Sloane, “The cell structures of certain lattices”, *Miscellanea mathematica*, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 71–107.
- [3] В. П. Гришукhin, “Кое-что о решетках E_6 и E_6^* ”, *Чебышевский сб.*, **7:2** (2006), 78–94.
- [4] В. П. Гришукhin, “Параллелоэдры ненулевой толщины”, *Матем. сб.*, **195:5** (2004), 59–78; англ. пер.: V. P. Grishukhin, “Parallelotopes of non-zero width”, *Sb. Math.*, **195:5** (2004), 669–686.
- [5] Н. П. Долбилин, “Свойства граней параллелоэдров”, *Геометрия, топология и математическая физика. II*, Тр. МИАН, **266**, МАИК, М., 2009, 112–126; англ. пер.: N. P. Dolbilin, “Properties of faces of parallelohedra”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **266** (2009), 105–119.
- [6] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, G. M. Ziegler, *Oriented matroids*, Encyclopedia Math. Appl., **46**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [7] M. Deza, V. Grishukhin, “Voronoi’s conjecture and space tiling zonotopes”, *Matematika*, **51:1–2** (2004), 1–10.
- [8] P. D. Seymour, “Decomposition of regular matroids”, *J. Combin. Theory Ser. B*, **28:3** (1980), 305–359.
- [9] М. Айгнер, *Комбинаторная теория*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: M. Aigner, *Combinatorial theory*, Grundlehren Math. Wiss., **234**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979.

- [10] V. Danilov, V. Grishukhin, “Maximal unimodular systems of vectors”, *European J. Combin.*, **20**:6 (1999), 507–526.
- [11] В. И. Данилов, В. П. Гришухин, Г. А. Кошевой, “Унимодулярные системы векторов вложимы в $(0, 1)$ -куб”, *Матем. заметки*, **88**:6 (2010), 938–941; англ. пер.: V. P. Grishukhin, V. I. Danilov, G. A. Koshevoi, “Unimodular systems of vectors are embeddable in the $(0, 1)$ -cube”, *Math. Notes*, **88**:6 (2010), 891–893.

В. П. Гришухин (V. P. Grishukhin)
Центральный экономико-математический
институт РАН, г. Москва
E-mail: grishuhn@cemi.rssi.ru

Поступила в редакцию
21.07.2011 и 06.10.2011