Общероссийский математический портал

М. С. Куликов, Группы типа Шоттки и минимальные множества орициклического и геодезического потоков, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 1, 37–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm792>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 10:17:18

УДК 519.46

М. С. Куликов

Группы типа Шоттки и минимальные множества орициклического и геодезического потоков

В первой части работы доказываем сформулированную Ф. Дальбо и А. Н. Старковым гипотезу о том, что геодезический поток на поверхности постоянной отрицательной кривизны $M = \mathbb{H}^2/\Gamma$ обладает некомпактным нетривиальным минимальным множеством тогда и только тогда, когда фуксова группа Γ бесконечно порождена или обладает параболическим элементом.

Во второй части строятся любопытные примеры орициклических потоков: 1) поток, ограничение которого на неблуждающее множество не имеет минимальных подмножеств, и 2) поток, не обладающий ни одним минимальным множеством.

Также построен пример бесконечно порожденной дискретной подгруппы в $SL(2, \mathbb{R})$, обладающей только дискретными и плотными в $\mathbb{R}^2$ орбитами.

Библиография: 12 названий.

§ 1. Введение

В работе [1] Дальбо и Старковым изучались минимальные множества геодезического потока $g_{\mathbb{R}}$ на единичном касательном расслоении T^1M к поверхности $M = \mathbb{H}^2/\Gamma$ постоянной отрицательной кривизны (необязательно компактной или конечного объема). Ими была выдвинута

ГИПОТЕЗА 1. Геодезический поток $(T^1M, g_{\mathbb{R}})$ обладает нетривиальным (т.е. отличным от орбиты) некомпактным минимальным множеством тогда и только тогда, когда фуксова группа Γ обладает параболическим элементом или бесконечно порождена.

Первая часть гипотезы, утверждающая, что конечно порожденные группы без параболических элементов не обладают таким множеством, справедлива, поскольку неблуждающее множество геодезического потока для таких групп компактно. В подтверждение гипотезы для простейших бесконечно порожденных групп Шоттки и для всех фуксовых групп с параболическим элементом в [1] было построено нетривиальное некомпактное минимальное множество. При этом основным было построение минимального множества символической динамической системы с бесконечным алфавитом, получающейся в результате геометрического кодирования геодезических. Таким образом, для завершения доказательства гипотезы оставалось построить такое минимальное множество для произвольной бесконечно порожденной фуксовой группы.

Работа выполнена при поддержке Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-457.2003.1).

Здесь мы расширяем метод построения некомпактного минимального множества для геодезического потока [1] на произвольные группы типа Шоттки (см. определение 2).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть Γ – бесконечно порожденная фуксова группа типа Шоттки. Тогда геодезический поток $(T^1M, g_{\mathbb{R}})$ обладает нетривиальным некомпактным минимальным множеством.*

Доказательство теоремы приведено в §3. Поскольку всякая бесконечно порожденная фуксова группа является группой типа Шоттки (см. [2; теорема 4]), из теоремы 1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Гипотеза 1 справедлива.*

В [3] Дальбо и Старков в терминах геометрического кодирования предельного множества группы Шоттки дали простое описание подклассов предельных точек, определяющих поведение соответствующих орбит геодезического потока. Что касается орициклического потока, то были построены примеры, показывающие, что тип предельной точки, характеризующий поведение орицикла, не поддается описанию в терминах кодирования, а имеет более сложную зависимость. При этом рассматривались простейшие бесконечно порожденные группы Шоттки второго рода (т.е. предельное множество которых является канторовым подмножеством абсолюта). Другие интересные примеры групп Шоттки, обладающих предельными точками определенного типа, см. в работе Николса и Уотермана [4].

Во второй части настоящей работы развивается техника доказательства орициклическости предельных точек (§4), при этом область ее применения расширяется по сравнению с [3]; в частности, рассматриваются и группы первого рода (т.е. предельным множеством которых является весь абсолют). Используя эту технику, в настоящей работе строятся два примера орициклических потоков.

ТЕОРЕМА 2. *Существует фуксова группа Γ второго рода такая, что поток $(\Omega^+, u_{\mathbb{R}})$, полученный ограничением орициклического потока $(T^1M, u_{\mathbb{R}})$ на его неблуждающее множество Ω^+ , не имеет минимальных множеств.*

ТЕОРЕМА 3. *Существует фуксова группа Γ первого рода такая, что орициклический поток $(T^1M, u_{\mathbb{R}})$ не имеет минимальных множеств.*

Доказательства приведены в пп. 4.6 и 4.10 соответственно.

По-видимому, теорема 3 дает первый пример алгебраического происхождения потока без минимальных множеств (примеры гладких потоков на некомпактных многообразиях без минимальных множеств были построены недавно в работах [5] и [6]). Заметим, что в отличие от орициклического геодезический поток напротив всегда обладает богатым набором минимальных множеств: периодические орбиты геодезического потока плотны в его неблуждающем множестве, для неэлементарной фуксовой группы всегда имеются минимальные множества, локально устроенные как декартово произведение множества Кантора и интервала, а благодаря следствию 1 существуют и нетривиальные некомпактные минимальные множества, если некомпактно неблуждающее множество потока.

Ввиду сопряженности действий фуксовой группы на $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/\{x \sim -x\}$ и на пространстве орициклов из построенных примеров орициклических потоков лег-

ко получаются аналогичные примеры линейных действий дискретных подгрупп в $SL(2, \mathbb{R})$. Например, теорему 3 можно переформулировать следующим образом:

ТЕОРЕМА 3'. *Существует дискретная подгруппа $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{R})$, линейное действие которой на $\mathbb{R}^2$ обладает единственным (тривиальным) минимальным множеством $\{0\}$.*

В [3] затрагивался вопрос о существовании бесконечно порожденной дискретной подгруппы в $SL(2, \mathbb{R})$, которая обладает только дискретными и плотными в $\mathbb{R}^2$ орбитами. Ввиду двойственности орициклического потока и соответствующего линейного действия дискретной подгруппы это эквивалентно вопросу о существовании бесконечно порожденной фуксовой группы первого рода, предельное множество которой не содержит нерегулярных предельных точек (классификацию предельных точек и ее связь с поведением орбит орициклического потока см. в п. 2.3). В [3] был построен пример бесконечно порожденной фуксовой группы второго рода без нерегулярных предельных точек, однако высказывалось предположение, что таких групп первого рода не существует. Здесь мы предъявляем пример такой группы.

ТЕОРЕМА 4. *Существует бесконечно порожденная фуксова группа Γ первого рода такая, что ее предельное множество не содержит нерегулярных предельных точек. Поэтому орбиты орициклического потока $(T^1M, u_{\mathbb{R}})$ либо замкнуты, либо всюду плотны, а соответствующее линейное действие в $\mathbb{R}^2$ обладает только дискретными и всюду плотными орбитами.*

Конструкция приведена в п. 4.11.

Автор выражает благодарность Ф. Дальбо, А. Н. Старкову, А. М. Стёпину и Д. Ферту за плодотворные обсуждения, ценные замечания и помощь в работе. Автор благодарит Математический институт (IRMAR) университета-1 города Ренн (Франция) за гостеприимство в течение визита (февраль–март 2002 года), который состоялся в рамках программы обмена между Независимым московским университетом и CNRS.

§ 2. Используемые понятия и обозначения

2.1. Фуксовы группы. Мы будем работать с моделью верхней полуплоскости плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$. В этой модели $\mathbb{H}^2$ отождествляется с полуплоскостью $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$, в которой выбрана метрика $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$, $z = x + iy$. Соответствующее расстояние будет обозначаться $\text{dist}(\cdot, \cdot)$. Абсолют $\partial\mathbb{H}^2$ отождествляется с пополненной вещественной прямой $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$; $\overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$ является визуальной компактификацией плоскости Лобачевского. Топология $\overline{\mathbb{H}^2}$ совпадает с топологией одноточечной компактификации $\{\text{Im } z \geq 0\} \cup \{\infty\}$. Пространство единичных касательных векторов $T^1\mathbb{H}^2$ изоморфно группе $\text{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$ изометрий, сохраняющих ориентацию, которая в свою очередь изоморфна группе $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) = \text{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm 1\}$. При этом отождествлении касательное действие $\text{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$ на $T^1\mathbb{H}^2$ есть левое действие группы $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Изометрии плоскости Лобачевского мы будем также называть *автоморфизмами*. Каждый автоморфизм h пространства $\mathbb{H}^2$ единственным образом продолжается до

гомеоморфизма $\overline{\mathbb{H}^2}$, который мы будем обозначать тем же символом h . Аналогично, не будем вводить специального символа и для касательного отображения $T^1\mathbb{H}^2$ в себя, соответствующего автоморфизму h . Нетождественные автоморфизмы классифицируются по количеству неподвижных точек на границе $\partial\mathbb{H}^2$: гиперболический, параболический и эллиптический автоморфизмы имеют соответственно 2, 1 и 0 неподвижных точек.

Фуксовой группой называется дискретная подгруппа в $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Каждой фуксовой группе без эллиптических элементов соответствует поверхность постоянной отрицательной кривизны $M = \mathbb{H}^2/\Gamma$. Можно рассматривать также поверхности, соответствующие произвольным фуксовым группам Γ ; при этом, хотя $M = \mathbb{H}^2/\Gamma$ может иметь особенности, единичное касательное расслоение T^1M – фазовое пространство рассматриваемых здесь динамических систем – является однородным пространством $\Gamma \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ и не содержит особых точек.

2.2. Геодезический и орициклический потоки. *Геодезическими (сжимающимися) орициклическими потоками* называются однородные потоки $(\Gamma \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})$ и $(\Gamma \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}), u_{\mathbb{R}})$, индуцированные соответственно однопараметрическими подгруппами $g_{\mathbb{R}}$ и $u_{\mathbb{R}}$,

$$g_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}, \quad u_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Геометрическая интерпретация геодезического и орициклического потоков состоит в том, что каждый вектор за время t сдвигается на расстояние t вдоль задаваемой им геодезической или сжимающегося орицикла соответственно.

Геодезические мы будем понимать как объекты двух видов: во-первых, как подмножества поверхностей (в $\mathbb{H}^2$ – лучи и полуокружности, перпендикулярные абсолюту $\mathbb{R}$, а в $M = \mathbb{H}^2/\Gamma$ – образы первых при проекции $\mathbb{H}^2 \rightarrow M$); во-вторых, подмножества в единичном касательном расслоении (суть орбиты геодезического потока $\{v_t = g_t(v_0), t \in \mathbb{R}\}$). Нам понадобятся также отображения $\mathrm{Vis}_+, \mathrm{Vis}_-: T^1\mathbb{H}^2 \rightarrow \partial\mathbb{H}^2$, переводящие каждый вектор v соответственно в положительный или отрицательный конец задаваемой им геодезической. Для $\xi^+, \xi^- \in \partial\mathbb{H}^2$ обозначим через $L_{\xi^+, \xi^-} = \mathrm{Vis}_+^{-1}(\xi^+) \cap \mathrm{Vis}_-^{-1}(\xi^-)$ геодезическую с этими концами. Ее образ при проекции $T^1\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ обозначим L_{ξ^+, ξ^-} .

Аналогично, под орициклом также понимаются объекты двух типов. Орицикл в $\mathbb{H}^2$ с *центром* в $\xi \in \partial\mathbb{H}^2$, проходящий через точку $z \in \mathbb{H}^2$, будет обозначаться $O_{\xi}(z)$ (в модели верхней полуплоскости это окружность, касающаяся вещественной прямой в точке ξ при $\xi \neq \infty$, или горизонтальная прямая при $\xi = \infty$), а соответствующий ему орицикл в $T^1\mathbb{H}^2$ обозначим $\mathbf{O}_{\xi}(z)$. Орицикл $\mathbf{O}_{\xi}(z)$ состоит из всех векторов с основанием на $O_{\xi}(z)$, направленных перпендикулярно внутрь. Внутренность орицикла обозначим $\mathrm{Int}(O_{\xi}(z))$.

2.3. Предельные точки и их классификация. Используемые здесь понятия и сведения можно найти в работах [3] и [7].

Предельным множеством $\Lambda = \Lambda(\Gamma)$ *фуксовой группы* Γ называется множество всех точек $\xi \in \partial\mathbb{H}^2$, для которых найдутся $z \in \mathbb{H}^2$ и $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(z) = \xi.$$

Последнее условие не зависит от выбора точки $z \in \mathbb{H}^2$.

Предельная точка $\xi \in \Lambda$ называется *орициклической*, если найдется последовательность $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ такая, что для некоторого $z \in \mathbb{H}^2$ точки последовательности $\{\gamma_n(z)\}$ попадают внутрь любого орицикла с центром в ξ . Множество орициклических предельных точек обозначается Λ_h .

Предельная точка $\xi \in \Lambda$ называется *дискретной*, если для любой последовательности $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ такой, что $\gamma_n(z) \rightarrow \xi$ для некоторого $z \in \mathbb{H}^2$, начиная с некоторого достаточно большого n , все точки $\gamma_n(z)$ оказываются снаружи любого орицикла с центром в ξ . Множество дискретных предельных точек обозначается Λ_d .

Предельная точка $\xi \in \Lambda$ называется *параболической*, если она является неподвижной точкой некоторого параболического элемента группы. Множество параболических предельных точек обозначается Λ_p .

Остальные предельные точки называются *нерегулярными*. Их множество обозначается Λ_{irr} , $\Lambda_{\text{irr}} = \Lambda \setminus (\Lambda_h \cup \Lambda_p \cup \Lambda_d)$. Множества Λ_h , Λ_p , Λ_d и Λ_{irr} попарно дизъюнкты.

Пусть $\pi: T^1\mathbb{H}^2 \rightarrow T^1M$ – проекция. Неблуждающим множеством орициклического потока является множество $\Omega^+ = \pi(\text{Vis}_+^{-1}(\Lambda))$, а геодезического – $\Omega = \pi(\text{Vis}_+^{-1}(\Lambda) \cap \text{Vis}_-^{-1}(\Lambda))$. Прообраз $\pi^{-1}(\Omega) \subset T^1\mathbb{H}^2$ обозначим $\tilde{\Omega}$. Существует следующая связь между поведением орбиты орициклического потока в T^1M и тем, к какому классу предельных точек принадлежит центр проецирующегося в нее орицикла (см. [8], [7; теорема 3]). Пусть $v \in \Omega^+$. Орбита орициклического потока $u_{\mathbb{R}}(v) = \pi(\mathbf{O}_{\xi}(w))$ плотна в Ω^+ , периодична или является непериодической замкнутой орбитой тогда и только тогда, когда соответственно ξ – орициклическая, параболическая или дискретная предельная точка.

Предельная точка $\xi \in \Lambda$ называется *конической*, если найдутся последовательность $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$, точка $z \in \mathbb{H}^2$ и геодезическая L с концом в ξ такие, что расстояния $\text{dist}(\gamma_n(z), L)$ ограничены и $\gamma_n(z) \rightarrow \xi$. Множество конических предельных точек обозначается Λ_c . Очевидно, $\Lambda_c \subset \Lambda_h$.

Ясно, что множества Λ_h , Λ_p , Λ_{irr} , Λ_d и Λ_c инвариантны относительно Γ .

Следующий результат является классическим (теорема Лехнера, см. [9], [10]): фуксова группа конечно порождена тогда и только тогда, когда $\Lambda = \Lambda_c \cup \Lambda_p$.

§3. Минимальные множества геодезического потока

В этом параграфе мы докажем теорему 1. По сути доказательство аналогично рассуждениям в [1; §3]. Основное отличие от [1] состоит в кодировании предельного множества – здесь мы рассматриваем произвольные бесконечно порожденные группы типа Шоттки, в то время как в [1] класс рассматриваемых групп был значительно уже.

Доказательство, которое аналогично рассуждениям в [1], будет проходить по следующему плану. Мы введем символическое кодирование предельного множества группы типа Шоттки, с помощью которого построим кодирование класса так называемых *больших геодезических*. Затем мы построим минимальное множество для полученной символической системы (σ -минимальное множество). Благодаря тому, что класс больших геодезических является сечением действия Γ на пространстве неблуждающих геодезических $\tilde{\Omega}/g_{\mathbb{R}}$ и дополнительно обладает так называемым свойством *полукрытости*, σ -минимальному множеству естественно

соответствует Γ -минимальное множество в $\tilde{\Omega}/g_{\mathbb{R}}$, которому ввиду двойственности действий $(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/g_{\mathbb{R}}, \Gamma)$ и $(\Gamma \setminus \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})$ соответствует искомое минимальное множество геодезического потока. Некомпактность построенного множества легко проверяется исходя из свойств конструкции σ -минимального множества.

3.1. Группы типа Шоттки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Многоугольник D в $\mathbb{H}^2$ (т.е. область, ограниченная не более чем счетным числом геодезических; допускаются многоугольники, замыкание которых $\bar{D} \cap \mathbb{H}^2$ некомпактно или даже имеет бесконечную площадь) называется *многоугольником Шоттки* относительно не более чем счетной системы изометрий $h_j, j = 1, \dots, J, J \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}^1$, если

- 1) D — многоугольник со сторонами $a_j, a_{-j}, j = 1, \dots, J$;
- 2) $h_j(a_{-j}) = a_j$;
- 3) если h_j — гиперболический или параболический элемент, то a_j и a_{-j} — геодезические;
- 4) если h_j — эллиптический элемент, то a_j и a_{-j} — лучи геодезических, выпущенные из его неподвижной точки;
- 5) $h_j(D) \cap D = \emptyset$ при $j = 1, \dots, J$.

Скажем, что *сторона a_j соответствует h_j при $j > 0$ и h_{-j}^{-1} при $j < 0$.*

В [2] показано, что $\gamma(D) \cap D = \emptyset$ для любого элемента γ группы, порожденной $h_j, j = 1, \dots, J, \gamma \neq 1$.

Пример многоугольника Шоттки D относительно системы из трех автоморфизмов (параболического g_1 , гиперболического g_2 и эллиптического третьего порядка g_3) приведен на рис. 1.

Рис. 1. Многоугольник Шоттки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Фуксова группа Γ называется группой *типа Шоттки*, если она обладает фундаментальной областью, которая является многоугольником Шоттки относительно некоторой системы образующих группы. При этом данная фундаментальная область называется *фундаментальной областью Шоттки*, а система образующих — *системой образующих Шоттки*.

¹Здесь и далее запись вида " $j = 1, \dots, J$ " означает " $j \in \mathbb{N}$ " при $J = \infty$ и " $j \in \{1, 2, \dots, J-1, J\}$ " при натуральном $J < \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Здесь мы используем терминологию работы [2]. Встречается и другое использование термина “группа типа Шоттки”, подразумевающее, в частности, отсутствие в группе эллиптических элементов.

Понятие группы типа Шоттки намного шире классического понятия группы Шоттки, поскольку для фундаментальной области группы типа Шоттки отсутствуют требования дизъюнктивности и конечности числа сторон, а также допускается наличие эллиптических элементов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вообще говоря, многоугольник Шоттки относительно системы образующих фуксовой группы не обязательно является ее фундаментальной областью даже в случае конечно порожденной группы. Необходимые и достаточные условия, когда это действительно так, даны в [2; теорема 1].

3.2. Кодирование предельных точек группы типа Шоттки. Пусть Γ – группа типа Шоттки с набором образующих $H = \{h_j : j = 1, \dots, J\}$, J – натуральное число или бесконечность и D – фундаментальная область Шоттки относительно H . Обозначим $h_j = h_{-j}^{-1}$ при $j < 0$.

Рассмотрим алфавит $A = A(H, D)$, состоящий из следующих символов:

- 1) образующие и их обратные h_j, h_j^{-1} , если $\text{ord}(h_j) = \infty$;
- 2) степени эллиптических образующих $h_j^s, 1 \leq s \leq \text{ord}(h_j) - 1$;
- 3) точки накопления множества, образованного концами сторон $\{\overline{a_{\pm j}} \cap \partial \mathbb{H}^2\}$, $j = 1, \dots, J$, – такие элементы будем называть *терминальными символами*. Заметим, что каждый терминальный символ является предельной точкой группы Γ .

Далее мы будем рассматривать конечные и бесконечные одно- и двусторонние последовательности $x = (x_j)$ из символов алфавита A . Мы будем предполагать, что для односторонних *правых* последовательностей индекс j принимает натуральные значения $1, 2, \dots, r(x)$, где $r(x)$ – длина правой последовательности, а для односторонних *левых* – целые неположительные $-l(x), \dots, -1, 0$, где $r(x), l(x) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Для двусторонних последовательностей (x_j) множество значений индекса j меняется от $-l(x)$ до $r(x)$ (включительно, когда соответствующая граница отлична от бесконечности), причем всегда $l(x) \geq 0$ и $r(x) \geq 1$. При записи двусторонних последовательностей в строку $x = (\dots, x_{-1}, x_0; x_1, x_2, \dots)$ точка с запятой всегда будет отделять нулевой символ от первого. Если x и y – соответственно односторонние левая и правая последовательности, то $z = (x; y)$ обозначает двустороннюю последовательность, полученную приписыванием y справа от x , при этом $z^- = x$ и $z^+ = y$ обозначают левую и правую части последовательности z . Для правой односторонней (конечной или бесконечной) последовательности $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ обозначим через x^{-1} левую последовательность $(\dots, y_{-2}, y_{-1}, y_0)$, где $y_k = x_{1-k}^{-1}$, $-l(y) = -r(x) + 1 \leq k \leq 0$, и для терминального символа ξ по определению полагаем $\xi^{-1} = \xi$. Аналогично, для левой последовательности x x^{-1} будет обозначать обращенную правую последовательность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Скажем, что пара (x, y) , $x, y \in A$, не допускает сокращения, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) x и y – два различных терминальных символа;
- 2) один из символов x, y терминальный, а другой нет;

- 3) x и y – автоморфизмы, не являющиеся степенью одного и того же эллиптического образующего, и $x \neq y^{-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Правой допустимой односторонней последовательностью* называется конечная или бесконечная последовательность $x = (x_1, x_2, \dots)$ символов алфавита A , удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) x содержит терминальный символ тогда и только тогда, когда $r(x) < \infty$, причем в этом случае последний символ $x_{r(x)}$ – единственный терминальный символ в последовательности;
- 2) пара (x_k, x_{k+1}) не допускает сокращения при $1 \leq k < r(x)$.

Пространство всех допустимых последовательностей обозначим $X = X(A)$. Введем топологию на X . Для этого рассмотрим вложение $I: A \rightarrow \partial\mathbb{H}^2$, при котором

- 1) каждый терминальный символ $\xi \in A \cap \Lambda$ переходит в себя;
- 2) каждый параболический или гиперболический автоморфизм $h_j \in A$ переходит в произвольную точку $I(h_j)$ строго внутри интервала границы $\partial\mathbb{H}^2$, лежащего по другую, чем D , сторону от геодезической a_j ;
- 3) каждый эллиптический автоморфизм h_j и его степени h_j^d переходят в произвольные точки $I(h_j^d)$ строго внутри интервала границы $\partial\mathbb{H}^2$, лежащего по другую, чем D , сторону от ломаной $a_j \cup a_{-j}$, причем точки $I(h_j^d)$, $d = 1, \dots, \text{ord}(h_j) - 1$, попарно различны.

Введем на A топологию, индуцированную при этом вложении обычной топологией окружности $S^1 \cong \partial\mathbb{H}^2$. Отметим, что нетерминальные символы и только они являются изолированными точками A . Рассмотрим пространство A^* последовательностей символов из A , состоящее из всех бесконечных односторонних последовательностей и конечных последовательностей, оканчивающихся на терминальный символ. Далее, рассмотрим отображение $F: A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^*$, где $A^{\mathbb{N}}$ – пространство бесконечных односторонних последовательностей из элементов A , при котором последовательности, не содержащие терминальных символов, переходят в себя, а для каждой последовательности x , имеющей начальный отрезок $(x_1, \dots, x_n)$, где x_n – первый терминальный символ в x , положим $F(x) = (x_1, \dots, x_n)$. Очевидно, при этом $X \subset F(A^{\mathbb{N}})$. На $A^{\mathbb{N}}$ рассмотрим обычную тихоновскую топологию счетного декартова произведения, которая задает на $F(A^{\mathbb{N}})$ топологию факторпространства, которая, в свою очередь, индуцирует топологию на X как на подпространстве.

Другой эквивалентный способ задать топологию на X состоит в определении сходящихся последовательностей $x(n) \rightarrow x$. Рассмотрим сначала случай, когда $r(x) = \infty$. Скажем, что $x(n) \rightarrow x$, если для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется $M \in \mathbb{N}$ такое, что

$$r(x(j)) > n, \quad x(j)_i = x_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad j \geq M.$$

В случае $r(x) < \infty$ сходимость $x(n) \rightarrow x$ имеет место, если существует $M \in \mathbb{N}$ такое, что

$$r(x(j)) \geq r(x), \quad x(j)_i = x_i, \quad 1 \leq i < r(x), \quad j \geq M,$$

и $x(j)_{r(x)} \rightarrow x_{r(x)}$, $j \rightarrow \infty$, в топологии A .

Определим *отображение кодирования* $\alpha: X \rightarrow \Lambda$ следующим образом. Для бесконечной последовательности $x = (x_1, x_2, \dots) \in X$, где все x_j – автоморфизмы, выберем произвольную точку $z \in \mathbb{H}^2$ и положим

$$\alpha(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_1 \cdots x_n(z),$$

причем, легко видеть, $\alpha(x)$ не зависит от выбора z . Для конечной последовательности $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$, где $x_j, j = 1, \dots, n-1$, – автоморфизмы, а $x_n \in \partial \mathbb{H}^2$, положим

$$\alpha(x) = x_1 \cdots x_{n-1}(x_n).$$

Другой эквивалентный способ задания кодирования α состоит в следующем. Каждому символу a алфавита A поставим в соответствие замкнутую дугу $E(a)$ (возможно, вырождающуюся в точку) абсолюта $\partial \mathbb{H}^2 \cong S^1$ следующим образом. Терминальному символу $a \in \partial \mathbb{H}^2$ ставится в соответствие вырожденная дуга $E(a) = \{a\}$, автоморфизму $a = h_j$ бесконечного порядка – замкнутая дуга абсолюта, соединяющая концы a_j и лежащая по другую, чем D , сторону от a_j , а степени эллиптического автоморфизма $a = h_j^d$ соответствует дуга абсолюта, соединяющая концы лучей $h_j^{d-1}(a_j)$ и $h_j^d(a_j)$ и граничащая с $a(D)$. Правой допустимой последовательности $x = (x_1, x_2, \dots)$ соответствует убывающая последовательность вложенных дуг $E_n(x) \subset \partial \mathbb{H}^2$, $E_n(x) \supset E_{n+1}(x)$ при $n \in \mathbb{N}$, построенная по правилу $E_n(x) = x_1 x_2 \cdots x_{n-1}(E(x_n))$, если $n \leq r(x)$, и $E_n(x) = E_{r(x)}(x)$, если $n > r(x)$. Из того факта, что D – фундаментальная область, следует, что последовательность дуг $\{E_n(x)\}$ стягивается в точку. Тогда кодирование можно задать так: $\{\alpha(x)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(x)$. Пример кодирования предельной точки приведен на рис. 2. Здесь $\xi = \alpha(g_1, g_2^2, g_3, \dots)$, $\text{ord } g_2 = 3$.

Рис. 2. Геометрическое кодирование

Если x и y – правые бесконечные допустимые последовательности, то дуги $E_n(x)$ и $E_m(y)$ совпадают только при $m = n$ и $x_j = y_j$, $j = 1, \dots, n$. Отсюда следует, что точка $\xi \in \Lambda$ кодируется не более чем двумя различными последовательностями x и y , причем в этом случае, начиная с некоторого номера n_0 , ξ является общим концом дуг $E_n(x)$ и $E_n(y)$, $n > n_0$.

Примером точки, обладающей двумя кодировками, является параболическая предельная точка. При доказательстве теоремы 3 в п. 4.10 мы увидим еще один пример точки, допускающей две различные кодировки, а именно, нос крокодила (см. определение в п. 4.9). Примеры точек с двумя различными кодированиями изображены на рис. 3. В первом примере $\xi = \alpha(p, p, \dots) = \alpha(p^{-1}, p^{-1}, \dots) = \text{Fix } p$ – предельная параболическая точка, $p = g_1$ – параболический образующий; во втором примере $\zeta = \alpha(\zeta) = \alpha(g_1, g_3, g_5, \dots)$ – терминальный символ, предельная точка в A для последовательности $\{g_{2k}\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Рис. 3. Различные кодировки одной точки

Из вышесказанного вытекает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Отображение α является непрерывной сюръекцией X на Λ относительно введенной топологии на X , причем каждая точка в Λ имеет не более двух прообразов.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для рассматриваемых в [1] групп Шоттки не было необходимости вводить терминальные символы, поскольку допускалась единственная точка накопления сторон – бесконечность, т.е. алфавит обладал единственным терминальным символом. Предложенная там конструкция кодирования становится частным случаем нашей, если к каждой конечной последовательности дописать символ ∞ .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В терминах кодирования α легко описать действие Γ на Λ . Для этого нужно разложить элемент $\gamma \in \Gamma$ в несократимое произведение образующих, их обратных и степеней эллиптических элементов $\gamma = g_1^{p_1} \cdots g_k^{p_k}$, $g_l \in H$, $p_l = \pm 1$, если $\text{ord}(g_l) = \infty$, $1 \leq p_l < \text{ord}(g_l)$, если $\text{ord}(g_l) < \infty$, и последовательно справа

налево подействовать каждым элементом произведения:

$$g_l^{p_l} \alpha(x_1, x_2, \dots) = \begin{cases} \alpha(g_l^{p_l}, x_1, x_2, \dots), & (g_l, x_1) \text{ не допускает сокращения;} \\ \alpha(x_2, x_3, \dots), & g_l^{p_l} = x_1^{-1}; \\ \alpha(g_l^{p_l} x_1, x_2, \dots), & \text{ord}(g_l) < \infty, \ x_1 - \text{степень } g_l. \end{cases}$$

Следующее простое предложение нам понадобится позже при исследовании типов предельных точек.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots) \in X$ – бесконечная правая допустимая последовательность и $\xi = \alpha(x) \in \Lambda$. Если множество различных встречающихся в x символов конечно, то $\xi \in \Lambda_h \cup \Lambda_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим группу Γ' , порожденную автоморфизмами, входящими в запись x . Тогда $x \in \Lambda(\Gamma')$. Поскольку Γ' конечно порождена, то $\Lambda(\Gamma') = \Lambda_c(\Gamma') \cup \Lambda_p(\Gamma')$. Очевидно, $\Lambda_p(\Gamma') \subset \Lambda_p(\Gamma)$ и $\Lambda_c(\Gamma') \subset \Lambda_h(\Gamma') \subset \Lambda_h(\Gamma)$, откуда следует утверждение предложения.

3.3. Большие геодезические. Здесь мы покажем, что если Γ – группа типа Шоттки, то двойственное к $(\Omega^+, g_{\mathbb{R}})$ действие $(\tilde{\Omega}/g_{\mathbb{R}}, \Gamma)$ группы Γ на множестве неблуждающих геодезических допускает сечение (т.е. замкнутое подмножество, пересекающееся с каждой Γ орбитой), которое обладает некоторой топологической регулярностью (а именно, свойством *полуоткрытости*, о котором пойдет речь в лемме 3.3), и допускает символическое описание. Это позволяет свести изучение минимальных множеств геодезического потока к изучению минимальных множеств некоторого (частично определенного) двустороннего сдвига.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Скажем, что геодезическая $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\xi^+, \xi^-} \subset \mathbb{T}^1 \mathbb{H}^2$ является *большой*, если выполнены следующие условия:

- 1) $\xi^+, \xi^- \in \Lambda$;
- 2) точки ξ^+, ξ^- обладают соответственно кодировками $x^+ \in \alpha^{-1}(\xi^+)$, $x^- \in \alpha^{-1}(\xi^-)$ такими, что пара $(x_1^+, (x_1^-)^{-1})$ не допускает сокращения.

Первое условие означает, что большая геодезическая целиком содержится в прообразе $\tilde{\Omega}$ неблуждающего множества геодезического потока, а из второго условия вытекает, что пересечение $\mathbf{L}_{\xi^+, \xi^-} \cap \overline{D}$ является отрезком, лучом или геодезической целиком, но не точкой (однако может являться стороной области D).

Множество всех больших геодезических обозначим $\mathbf{B}$. Отметим, что $\mathbf{B}$ – замкнутое подмножество в $\tilde{\Omega}$.

ЛЕММА 1. Множество $\mathbf{B}$ является сечением для $(\tilde{\Omega}/g_{\mathbb{R}}, \Gamma)$, т.е. для каждой геодезической $\mathbf{L} \subset \tilde{\Omega}$ найдется $\gamma \in \Gamma$ такой, что $\gamma(\mathbf{L}) \in \mathbf{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{L}$ имеет своими концами ξ^+ и ξ^- с кодировками x^+ и x^- соответственно. Поскольку концы различны, можно выбрать натуральное K так, чтобы $x_k^+ = x_k^-$ при $k < K$ и $x_K^+ \neq x_K^-$. Если пара $(x_K^+, (x_K^-)^{-1})$ не допускает сокращения, то $\gamma = (x_{K-1}^+)^{-1} \dots (x_1^+)^{-1}$ является искомым. В противном случае x_K^+ и x_K^- суть различные степени одного и того же эллиптического образующего и искомым является $\gamma = (x_K^+)^{-1} \dots (x_1^+)^{-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Двусторонняя последовательность $x = (x_k)$, $k = -l, \dots, r$, $l \geq 0$ и $r > 0$ — целые числа или бесконечность, состоящая из символов алфавита A , называется *допустимой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) все символы x_k при $-l < k < r$ являются автоморфизмами;
- 2) если $l < \infty$ ($r < \infty$), то символ x_{-l} (соответственно x_r) — терминальный;
- 3) (x_k, x_{k+1}) не допускает сокращения при $-l \leq k < r$;
- 4) $\alpha(x^+) \neq \alpha((x^-)^{-1})$.

Другими словами, $x = (x^-; x^+)$ является допустимой двусторонней последовательностью тогда и только тогда, когда $(x^-)^{-1}$ и x^+ — односторонние допустимые последовательности, кодирующие различные предельные точки, и (x_0, x_1) не допускает сокращения. Пространство всех двусторонних допустимых последовательностей обозначим $Y = Y(A)$. Топология на Y вводится как на подмножестве в $X \times X$, т.е. $y(n) \rightarrow y$ в Y , если $y(n)^+ \rightarrow y^+$ и $(y(n)^-)^{-1} \rightarrow (y^-)^{-1}$ в X .

Определим теперь *кодирование больших геодезических* $\tilde{\alpha}: Y \rightarrow \mathbf{B}$ следующим образом:

$$\tilde{\alpha}(x) = \mathbf{L}_{\alpha((x^-)^{-1}), \alpha(x^+)}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Отображение $\tilde{\alpha}$ является непрерывной сюръекцией $Y \rightarrow \mathbf{B}$, причем каждая большая геодезическая имеет не более четырех прообразов.*

Отметим, что большая геодезическая $\tilde{\alpha}(\dots, x_0; x_1, \dots)$ пересекает $\overline{D}$ по отрезку с концами a, b , где a лежит на замыкании стороны $\overline{a_j}$, если $x_1 = h_j$ — автоморфизм бесконечного порядка, на ломаной $\overline{a_j} \cup \overline{a_{-j}}$, если $x_1 = h_j$ — эллиптический автоморфизм, и $a = x_1$, если x_1 — терминальный символ. Положение b определяется аналогично a с заменой x_1 на x_0^{-1} . Примеры больших геодезических изображены на рис. 4. В этом примере большие геодезические $L_1 = \tilde{\alpha}(\dots, g_1; g_1, \dots)$, $L_2 = \tilde{\alpha}(\dots, g_1^{-1}; g_2, \dots)$, $L_3 = \tilde{\alpha}(\zeta; g_3, \dots)$ (ζ — терминальный символ), $L_4 = \tilde{\alpha}(\dots, g_8^{-1}, g_6^{-1}, g_4^{-1}; g_3^2, \dots)$. Геодезическая L_5 не является большой, потому что кодировки ее концов начинаются на g_3^{-1} и g_3 , а так как g_3 — эллиптический, то пара $((g_3^{-1})^{-1}, g_3)$ допускает сокращение.

Пусть $x = (x_k)$, $k = -l, \dots, r$, — допустимая двусторонняя последовательность. Если $l > 0$, то определим ее *сдвиг* $y = \sigma(x)$: $y_k = x_{k-1}$, $k = -(l-1), \dots, (r+1)$. Таким образом, σ является частично определенным инъективным отображением Y в себя.

Из замечания 4, описывающего действие Γ на Λ в терминах кодирования α , легко следует

ЛЕММА 2. *Если обе геодезические $\mathbf{L}$ и $\gamma(\mathbf{L})$ для некоторого $\gamma \in \Gamma$ являются большими, то найдутся $y \in \tilde{\alpha}^{-1}(\mathbf{L})$ и $k \in \mathbb{Z}$ такие, что определено $\sigma^k(y)$ и $\tilde{\alpha}(\sigma^k(y)) = \gamma(\mathbf{L})$. Наоборот, если для $y \in \tilde{\alpha}^{-1}(\mathbf{L})$ и $k \in \mathbb{Z}$ определено $\sigma^k(y)$, то $\tilde{\alpha}(\sigma^k(y)) = \gamma(\tilde{\alpha}(y))$ для некоторого $\gamma \in \Gamma$.*

ЛЕММА 3 (Свойство полуоткрытости). *Для любой большой геодезической $\mathbf{L} \in \mathbf{B}$ найдутся ее окрестность $U \subset \tilde{\Omega}/g_{\mathbb{R}}$ и элемент $\gamma \in \Gamma$ такие, что $U \subset \mathbf{B} \cup \gamma(\mathbf{B})$.*

Рис. 4. Кодирование больших геодезических

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{L}$ пересекает $\bar{D}$ по отрезку с концами $a, b \in \overline{\mathbb{H}^2}$. Если $a \in \overline{a_j}$, $b \in \overline{a_{-j}}$, $\text{ord } h_j < \infty$, или $a, b \in \overline{a_j}$, $\text{ord } h_j = \infty$, то можно взять $\gamma = h_j$. В остальных случаях достаточно маленькая окрестность $U \subset \tilde{\Omega}/g_{\mathbb{R}}$ геодезической L сама содержится в B и γ можно брать произвольным.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Понятие полуоткрытости было введено в предварительном варианте [1], и там же была доказана лемма 3 для случая группы $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$.

3.4. σ -МИНИМАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО. Две последовательности y_1, y_2 в Y называются *эквивалентными*, $y_1 \sim y_2$, если $y_1 = \sigma^k(y_2)$ для некоторого целого k . Множество $C \subset Y$ называется *σ -инвариантным*, если для любых $y \in C$ и $y' \in Y$ из $y \sim y'$ следует $y' \in C$. Множество $C \subset Y$ называется *σ -минимальным*, если оно непусто, σ -инвариантно, замкнуто и не содержит собственных замкнутых σ -инвариантных подмножеств.

В этом пункте мы построим допустимую последовательность s , замыкание σ -орбиты которой является σ -минимальным множеством, для бесконечно порожденной группы Γ типа Шоттки. Как будет показано в дальнейшем, σ -минимальное множество $\overline{\sigma^{\mathbb{Z}}(s)}$ соответствует искомому некомпактному минимальному множеству геодезического потока. Способ построения последовательности s предложен в [1; § 3]; здесь мы адаптируем его для эллиптических элементов.

Мы будем предполагать, что имеется образующий (не ограничивая общности, h_1), порядок которого не меньше 3. В случае, когда все образующие имеют порядок 2, согласно [2; теорема 7] можно перейти к рассмотрению подгруппы Γ_1 конечного индекса в Γ , не содержащей элементов конечного порядка, и заметить, что образ нетривиального некомпактного минимального множества геодезического потока на $\Gamma_1 \setminus \mathbb{T}^1\mathbb{H}^2$ при конечном накрытии $\Gamma_1 \setminus \mathbb{T}^1\mathbb{H}^2 \rightarrow \Gamma \setminus \mathbb{T}^1\mathbb{H}^2$ тоже является нетривиальным некомпактным минимальным множеством по отношению к геодезическому потоку на $\Gamma \setminus \mathbb{T}^1\mathbb{H}^2$.

Положим $Q_n = h_{n+1}$, $n \geq 1$. Если h_1 бесконечного порядка, положим $P_1 = h_1$ и $P_{n+1} = P_n Q_n P_n$ при $n \geq 1$. Поскольку P_{n+1} начинается с P_n , можно

определить двустороннюю последовательность $s = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n; P_n)$, т.е. s такова, что s^+ начинается с P_n , а s^- — заканчивается на P_n для всех n .

В противном случае h_1 эллиптичен, причем $\text{ord}(h_1) \geq 3$. Тогда положим $P_2 = Q_1 h_1^2 Q_1$, $P_{n+1} = P_n h_1 Q_n h_1 P_n h_1^2 P_n h_1 Q_n h_1 P_n$ при $n \geq 2$, $s = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n; h_1^2 P_n)$. Другими словами, s получается тем же построением, что и в случае $\text{ord}(h_1) = \infty$, с последующей заменой двух подряд идущих символов $h_1 h_1$ на символ h_1^2 .

Очевидно, что в обоих случаях s — допустимая бесконечная в обе стороны последовательность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Для любого конечного отрезка b в s найдется натуральное M такое, что любой отрезок в s длины M содержит b в качестве подотрезка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению любой отрезок b содержится для некоторого n в качестве подотрезка в отрезке $P_n P_n$, если $\text{ord}(h_1) = \infty$, или в отрезке $P_n h_1^2 P_n$, если $\text{ord}(h_1) < \infty$, который, в свою очередь, содержится в P_{n+1} . Поскольку зазор между соседними отрезками P_{n+1} оставляет не более трех символов, в качестве искомого M можно взять удвоенную длину P_{n+1} , увеличенную на три.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В рассуждениях [1] имеется небольшая неточность: вместо леммы 3.4 из [1] на самом деле используется утверждение сформулированного предложения 4 (см. [11]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть $C = \overline{\sigma^{\mathbb{Z}}(s)}$. Тогда C — σ -минимальное множество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку s не содержит последовательности отрезков вида $(h_{k_n}^{p_n} w h_{l_n}^{q_n})$, где $k_n, l_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, а w — фиксированный отрезок конечной длины, замыкание орбиты не содержит конечных последовательностей. Рассмотрим произвольное $c \in C$ и выберем произвольный отрезок b в s . Выберем M из предложения 4, отвечающее этому отрезку b .

Поскольку последовательность s бесконечна хотя бы в одну из сторон, из свойств топологии на Y следует, что все отрезки длины M в s (за исключением, быть может, крайнего, если s бесконечна только в одну сторону) содержатся в s . Поэтому любой отрезок в s длины $M + 1$ содержит b в качестве подотрезка. Ввиду произвольности b это означает, что $s \in \overline{\sigma^{\mathbb{Z}}(c)}$.

Поскольку $c \in C$ было выбрано произвольно, отсюда следует, что множество C является σ -минимальным.

3.5. Доказательство теоремы 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть C — произвольное σ -минимальное подмножество в Y . Тогда $\Gamma(\tilde{\alpha}(C))$ является Γ -минимальным множеством в $T^1\mathbb{H}^2/g_{\mathbb{R}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C является замыканием σ -орбиты некоторого $s \in Y$. Обозначим $\mathbf{L} = \tilde{\alpha}(s) \in \tilde{\Omega}/g_{\mathbb{R}}$ и рассмотрим произвольную геодезическую $\mathbf{L}'$ такую, что $g_n(\mathbf{L}) \rightarrow \mathbf{L}'$, $g_n \in \Gamma$. Так как $\tilde{\Omega}/g_{\mathbb{R}}$ замкнуто в $T^1\mathbb{H}^2/g_{\mathbb{R}}$ и Γ -инвариантно, то $\mathbf{L}' \in \tilde{\Omega}/g_{\mathbb{R}}$. По лемме 1 можно выбрать такое $h \in \Gamma$, что $h(\mathbf{L}') \in \mathbf{B}$. По лемме 3 можно считать (переходя, если нужно, к подпоследовательности), что для

некоторого $g \in \Gamma$ выполнено $ghg_n(\mathbf{L}) \in \mathbf{B}$ для всех n и $gh(\mathbf{L}') \in \mathbf{B}$. По лемме 2 существует последовательность целых чисел $\{k_n\}$ такая, что $\tilde{\alpha}(\sigma^{k_n}(s)) = ghg_n(\mathbf{L})$. Поскольку отображение $\tilde{\alpha}: Y \rightarrow \mathbf{B}$ сюръективно и получается ограничением непрерывного сюръективного отображения компактов $\alpha \times \alpha: X \times X \rightarrow \Lambda \times \Lambda$, то $\tilde{\alpha}$ отображает замкнутые в Y множества во множества, замкнутые в $\mathbf{B}$. Так как $\tilde{\alpha}(\sigma^{k_n}(s)) = ghg_n(\mathbf{L}) \rightarrow gh(\mathbf{L}')$ и $\tilde{\alpha}(\sigma^{k_n}(s)) \in C$, то найдется $s' \in C$ такое, что $\tilde{\alpha}(s') = gh(\mathbf{L}')$. Поскольку C σ -минимально, существует последовательность целых чисел $\{l_n\}$ такая, что $\sigma^{l_n}(s') \rightarrow s$. Но из леммы 2 следует, что $\tilde{\alpha}(\sigma^{l_n}(s')) = \gamma_n(\mathbf{L}')$ для некоторых $\gamma_n \in \Gamma$. Поскольку $\tilde{\alpha}$ непрерывно, то $\gamma_n(\mathbf{L}') = \tilde{\alpha}(\sigma^{l_n}(s')) \rightarrow \tilde{\alpha}(s) = \mathbf{L}$, т.е. $\mathbf{L} \in \Gamma(\mathbf{L}')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть s – построенная в п. 3.4 последовательность и $C = \overline{\sigma^{\mathbb{Z}}(s)}$. Покажем, что множество $S = \pi(\tilde{\alpha}(C)) \subset T^1M$ является некомпактным, нетривиальным $g_{\mathbb{R}}$ -минимальным множеством.

Минимальность S следует из предложения 6 и из двойственности действий $(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/g_{\mathbb{R}}, \Gamma)$ и $(\Gamma \setminus \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})$.

Так как s содержит бесконечно много различных символов, то геодезические $\gamma(\tilde{\alpha}(s))$, $\gamma \in \Gamma$, пересекают бесконечно много сторон многоугольника $\overline{D}$ и, следовательно, их пересечение с $\overline{D}$ не содержится ни в каком наперед заданном компакте. Поэтому S некомпактно.

Из построения s следует, что C содержит элемент вида $s' = (s^-; \xi)$ при $\mathrm{ord}(h_1) = \infty$ или $s' = (s^-h_1; \xi)$ при $\mathrm{ord}(h_1) < \infty$, где ξ – произвольная предельная точка в A последовательности $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Очевидно, $\tilde{\alpha}(s)$ и $\tilde{\alpha}(s')$ принадлежат разным Γ -орбитам. Поэтому S содержит две различные геодезические $\pi(\tilde{\alpha}(s))$ и $\pi(\tilde{\alpha}(s'))$, т.е. S нетривиально.

§ 4. Орициклический поток и орициклические предельные точки

В этом параграфе разрабатывается техника доказательства орициклическости предельных точек для некоторых классов групп типа Шоттки. В ее основе лежит анализ взаимного расположения полукружностей, отвечающих соседним элементам геометрического кода предельной точки (техника “прыжков”).

Задача построения орициклического потока с требуемыми свойствами сводится к нахождению фуксовой группы, предельное множество которой обладает только некоторыми из подклассов предельных точек, отвечающих поведению орициклического потока. При этом полезно выделить класс точек, обладающих так называемым *свойством сдвига*, которое является препятствием к существованию минимальных множеств.

Конструкция, доказывающая теорему 2, приведена в п. 4.6. На базе этой конструкции в п. 4.10 строится пример орициклического потока, существование которого утверждалось в теореме 3. В завершение приведено построение бесконечно порожденной группы типа Шоттки первого рода, не обладающей нерегулярными предельными точками, доказывающее теорему 4 (п. 4.11).

4.1. Предельные точки со свойством сдвига. В этом пункте мы выделяем особый класс предельных точек, обладающих так называемым свойством сдвига. Это свойство весьма полезно для построения орициклических потоков без минимальных множеств ввиду предложения 7 ниже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть Γ – неэлементарная фуксова группа и Λ – ее предельное множество. Скажем, что предельная точка $\xi \in \Lambda$ обладает свойством сдвига, если замыкание некоторого (а значит, и любого) орицикла $\pi(\mathbf{O}_\xi(w))$ с центром в ξ содержит орициклы вида $\pi(\mathbf{O}_\eta(z_1)), \pi(\mathbf{O}_\eta(z_2))$, полученные проекцией двух различных орициклов $\mathbf{O}_\eta(z_1) \neq \mathbf{O}_\eta(z_2)$ с общим центром η ($z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$). Множество точек, обладающих свойством сдвига, обозначим Λ_s .

Происхождение термина “свойство сдвига” объясняется тем, что два орицикла $\pi(\mathbf{O}_\eta(z_1)), \pi(\mathbf{O}_\eta(z_2))$ получены один из другого сдвигом g_{t_0} вдоль траекторий геодезического потока за некоторое время t_0 . Другое эквивалентное определение свойства сдвига состоит в том, что замыкание $\pi(\mathbf{O}_\xi(w))$ пересекается некоторой геодезической $\{g_t(v)\}$ при двух различных значениях t .

Орициклическая предельная точка является тривиальным примером точки со свойством сдвига, поскольку орбиты соответствующих орициклов плотны в неблуждающем множестве Ω^+ . Более интересным примером нерегулярной предельной точки со свойством сдвига является нос крокодила (см. п. 4.9). Очевидно, что дискретные предельные точки не обладают свойством сдвига. Ясно, что множество Λ_s инвариантно относительно Γ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Если $\Lambda = \Lambda_s$ и $\Lambda_{\text{ит}} \neq \emptyset$, то Ω^+ не содержит $u_{\mathbb{R}}$ -минимальных подмножеств.

Разобьем доказательство на несколько лемм.

ЛЕММА 4. Пусть Γ – неэлементарная фуксова группа и $C \subset \Omega^+$ – $u_{\mathbb{R}}$ -минимальное множество. Предположим, C содержит точку $g_{t_0}(v)$ для некоторых $v \in C$ и $t_0 \neq 0$. Тогда $C = \Omega^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если зафиксировать $w_0 \in \mathbb{H}^2$, то пространство всех орициклов $\text{Nor}(\mathbb{H}^2)$ становится естественным образом гомеоморфным цилиндру $\partial\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Гомеоморфизм устанавливается при помощи отображения $O_\zeta(w) \mapsto (\zeta, \beta_\zeta(w_0, w))$, где β – коцикл Буземана, который определяется как $\beta_\zeta(w_0, w) = \text{dist}(O_\zeta(w), w_0)$, если $w \in \text{Int}(O_\zeta(w_0))$, и $\beta_\zeta(w_0, w) = -\text{dist}(O_\zeta(w), w_0)$ – в противном случае, где $\zeta \in \partial\mathbb{H}^2$, $w \in \mathbb{H}^2$.

Действие Γ на $\text{Nor}(\mathbb{H}^2)$ является косым произведением с Γ -действием на $\partial\mathbb{H}^2$ в качестве базы и сдвигами вещественной прямой $\mathbb{R}$ в качестве действий на слоях. В явной форме $\gamma(\zeta, t) = (\gamma(\zeta), t + c(\gamma, \zeta))$, $\gamma \in \Gamma$, $\zeta \in \partial\mathbb{H}^2$, $t \in \mathbb{R}$, где $c(\gamma, \zeta) = \beta_{\gamma(\zeta)}(w_0, \gamma(w_0))$. Отсюда следует, что вертикальные прямые $\{(\zeta, t) : t \in \mathbb{R}\}$, $\zeta \in \partial\mathbb{H}^2$, переходят в вертикальные прямые и расстояния на них сохраняются.

Поскольку $g_{t_0}(C)$ также является $u_{\mathbb{R}}$ -минимальным и $C \cap g_{t_0}(C) \neq \emptyset$, то $C = g_{t_0}(C)$ и, следовательно, $g_{kt_0}(v) \in C$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Выберем произвольное $z_0 \in \pi^{-1}(v)$ и положим $\eta = \text{Vis}_+(z_0)$, $z_k = g_{kt_0}(z)$, $k \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что $\text{Vis}_+(z_k) = \eta$, $k \in \mathbb{Z}$. Заметим, что $\pi(z_k) = g_{kt_0}(v) \in C$ и $\pi(\mathbf{O}_\eta(p_k)) = g_{kt_0}(u_{\mathbb{R}}(v))$, где $p_k = p(z_k)$, $p : \mathbb{T}^1\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ – проекция. Известно, что действие неэлементарной группы Γ на Λ минимально (см., например, [9; гл. 3, § 1]). Поэтому для любого $\xi \in \Lambda_h$ найдется последовательность $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ такая, что $\gamma_n(\eta) \rightarrow \xi$, $n \rightarrow \infty$. Поскольку окружность $\mathbb{R}/(t_0\mathbb{Z})$ компактна, найдутся $s \in \mathbb{R}$ и последовательности $\{n_j\}$, $\{k_j\}$ такие, что $n_j \rightarrow \infty$ и $(\gamma_{n_j}(\eta), \beta_\eta(w_0, z_0) + c(\gamma_{n_j}, \eta) + k_j t_0) \rightarrow (\xi, s)$, $j \rightarrow \infty$. Это означает, что $\gamma_{n_j}(\mathbf{O}_\eta(p_{k_j})) \rightarrow \mathbf{O}_\xi(w)$, $j \rightarrow \infty$, для некоторого $w \in \mathbb{H}^2$.

такого, что $\beta_\xi(w_0, w) = s$. Поэтому замыкание орицикла $C = \overline{\pi(\mathbf{O}_\eta(z_0))}$ содержит орицикл вида $\pi(\mathbf{O}_\xi(w))$. Из $\xi \in \Lambda_h$ следует плотность орицикла $\pi(\mathbf{O}_\xi(w))$ в неблуждающем множестве, следовательно, $C = \Omega^+$.

Из другого эквивалентного определения свойства сдвига вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\xi \in \Lambda_s$ и замыкание орицикла $C = \overline{\pi(\mathbf{O}_\xi(w))}$ минимально относительно орициклического потока, то $C = \Omega^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 7. Поскольку $\Lambda_{\text{irr}} \neq \emptyset$, найдется неплотный в Ω^+ орицикл, поэтому само Ω^+ не минимально. Из $\Lambda = \Lambda_s$ и предыдущего следствия вытекает, что замыкание любого орицикла из неблуждающего множества не может быть минимальным.

В заключение этого пункта докажем простое достаточное условие обладания свойством сдвига.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $\zeta \in \Lambda_s$, $\xi \neq \zeta$ и $\overline{\pi(\mathbf{O}_\xi(w))} \supset \pi(\mathbf{O}_\zeta(z))$ для некоторых $z, w \in \mathbb{H}^2$. Тогда $\xi \in \Lambda_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замыкание $\overline{\pi(\mathbf{O}_\zeta(z))}$ содержит проекции двух различных орициклов с общим центром и вместе с ними содержится в $\overline{\pi(\mathbf{O}_\xi(w))}$. Значит, $\xi \in \Lambda_s$.

4.2. Группы с парами равных полуокружностей. В этом пункте мы вводим специальный подкласс групп Шоттки, построенный при помощи семейства пар равных полуокружностей, в рамках которого будет построен пример, доказывающий теорему 3. Здесь мы будем работать с моделью верхней полуплоскости плоскости Лобачевского. Под полуокружностью всегда понимается полуокружность в верхней полуплоскости с концами на вещественной прямой, т.е. геодезическая, концы которой отличны от бесконечности.

Для заданной полуокружности S обозначим через $r(S)$ и $c(S) \in \mathbb{R}$ ее евклидовы радиус и центр соответственно. Через $\text{Int}(S) = \{z : \text{Im } z > 0, |z - c(S)| < r(S)\}$ и $\text{Ext}(S) = \{z : \text{Im } z > 0, |z - c(S)| > r(S)\}$ соответственно обозначаются внутренность и внешность полуокружности. Если заданы две полуокружности S и S' , $r(S) = r(S')$, $|c(S) - c(S')| \geq 2r(S)$, то через $h(S, S')$ обозначим единственный автоморфизм (гиперболический, если $|c(S) - c(S')| > 2r(S)$, и параболический, если полуокружности касаются) такой, что $h(\text{Ext}(S)) = \text{Int}(S')$ и S является изометрической окружностью автоморфизма h (т.е. $|h'(z)| = 1$ при $z \in S$). Другими словами, h является последовательной композицией инверсии по отношению к S и отражения $z \mapsto c(S) + c(S') - \bar{z}$.

Пусть задано конечное или счетное семейство пар полуокружностей $S_{\pm k}$, $r(S_k) = r(S_{-k})$, $k \in \mathbb{N}$, все полуокружности расположены попарно внешним образом, но допускаются касания между ними. Рассмотрим группу Γ , порожденную образующими $h_k = h(S_k, S_{-k})$, $k \in \mathbb{N}$. Обозначим $h_{-k} = h_k^{-1} = h(S_{-k}, S_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть также $S(h)$ обозначает изометрическую полуокружность автоморфизма h ; в нашем случае $S(h_k) = S_k$. Условие допустимости правой бесконечной последовательности $(h_{k_1}, h_{k_2}, \dots)$ имеет вид $k_j + k_{j+1} \neq 0$, $j \in \mathbb{N}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть Γ – группа, определенная выше. Внешность к полуокружностям $D = \bigcap_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \text{Ext}(S_k)$ является фундаментальной областью группы Γ тогда и только тогда, когда для любой последовательности целых ненулевых чисел $\{k_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ такой, что $k_j + k_{j+1} \neq 0$, $j \in \mathbb{N}$, имеем $\lim_{j \rightarrow \infty} r(h_{k_1} \cdots h_{k_j}(S_{-k_{j+1}})) = 0$. При этом Γ является группой типа Шоттки с системой образующих Шоттки h_k , $k \in \mathbb{N}$, и с фундаментальной областью Шоттки D со сторонами $a_k = S_{-k}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Существует пример, когда D не является фундаментальной областью в том смысле, что $\gamma(\overline{D})$, $\gamma \in \Gamma$, не покрывают всю гиперболическую плоскость, причем можно добиться того, чтобы полуокружности S_k попарно не касались друг друга. Разумеется, при этом условия предыдущего предложения не выполнены. В связи с этим утверждения §4 работы [3] нуждаются в уточнении (см. [12]).

Предположим, что условия этого предложения выполнены. Для удобства будем также считать, что мнимая единица $i \in D$. Такую группу назовем *группой с парами равных полуокружностей*. Если не сказано противное, то будет всегда подразумеваться бесконечно порожденная группа.

Отметим, что для элемента h , являющегося образующим группы с парами равных полуокружностей или его обратным, $h(\text{Ext}(S(h))) \subset \text{Int}(S(h^{-1}))$. Далее многократно будет использоваться тот факт, что h не увеличивает евклидово расстояние между точками из $\text{Ext}(S(h))$.

Предложение 10 и первая часть предложения 11 были по сути доказаны при построении примеров в [3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Для группы с парами равных полуокружностей $\infty \notin \Lambda_h \cup \Lambda_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $\infty \in \Lambda$. То, что бесконечность не является параболической предельной точкой, следует из того, что Γ не содержит параллельных переносов.

Чтобы проверить $\infty \notin \Lambda_h$, достаточно доказать ограниченность сверху всех последовательностей вида $\{\text{Im } \gamma_n(i)\}$, где $\gamma_n \in \Gamma$, $\gamma_n(i) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Представим γ_n в виде несократимого произведения образующих $\gamma_n = h_{k_1} \cdots h_{k_J}$, $k_j + k_{j+1} \neq 0$, $1 \leq j < J$. Поскольку при $1 \leq j \leq J$ точки $h_{k_j} \cdots h_{k_J}(i)$ получены из $h_{k_{j+1}} \cdots h_{k_J}(i) \in \text{Ext}(S_{k_j})$ инверсией относительно S_{k_j} (при которой уменьшается мнимая часть точек, лежащих в $\text{Ext}(S_{k_j})$) с последующим отражением относительно некоторой вертикальной оси (которое сохраняет мнимую часть точек), мы заключаем, что $\text{Im } \gamma_n(i) \leq 1$. Поэтому $\infty \notin \Lambda_h$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть Γ – группа с парами равных полуокружностей, образующими которой являются $h_k = h(S_k, S_{-k})$, $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что найдется такая последовательность индексов $\{k_j\}$, что $c(S_{k_j}) = -c(S_{-k_j})$, $c(S_{k_j}) \rightarrow +\infty$, $j \rightarrow \infty$, и существует предел

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{r(S_{k_j})}{c(S_{k_j})} = q.$$

Тогда

- 1) если $q > 0$, то $\infty \in \Lambda_{\text{irr}}$;

2) если $0 < q < 1$, то $\infty \in \Lambda_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\infty \in \Lambda$. Предположим сначала, что $q > 0$. Тогда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(h_{k_j}(i)) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{r(S_{k_j})^2}{1 + c(S_{k_j})^2} = \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{r(S_{k_j})}{c(S_{k_j})} \right)^2 > 0,$$

откуда следует $\infty \notin \Lambda_d$. Поскольку $\infty \notin \Lambda_h \cup \Lambda_p$ по предложению 10 и по определению $\Lambda_{\text{irr}} = \Lambda \setminus (\Lambda_p \cup \Lambda_h \cup \Lambda_d)$, получаем $\infty \in \Lambda_{\text{irr}}$.

Рис. 5. Доказательство второй части предложения 11

Предположим теперь дополнительно, что $q < 1$. Рассмотрим орицикл $O_\infty(i)$ и его образ $h_{-k_j}(O_\infty(i)) = I_{k_j}(O_\infty(i))$, где I_{k_j} — инверсия относительно S_{k_j} (см. рис. 5). Обозначим для краткости луч мнимой оси $\{z : \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ через L . Рассмотрим самую нижнюю точку s пересечения $h_{-k_j}(O_\infty(i)) \cap L$. Ее образ $I_{k_j}(s)$ есть ближайшая к L точка пересечения $I_{k_j}(L) \cap I_{k_j}(h_{-k_j}(O_\infty(i))) = I_{k_j}(L) \cap O_\infty(i)$. Поскольку $I_{k_j}(L)$ — полуокружность с концами $c(S_{k_j})$ и $c(S_{k_j}) - r(S_{k_j})^2/c(S_{k_j})$, а $O_\infty(i)$ — горизонтальная прямая на расстоянии 1 от вещественной прямой, ясно, что $I_{k_j}(s) = c(S_{k_j}) - r(S_{k_j})^2/c(S_{k_j}) + i + o(1)$ при $j \rightarrow \infty$. Поэтому $s = ic(S_{k_j})/r(S_{k_j}) + o(1) = i/q + o(1)$ при $j \rightarrow \infty$. Поскольку евклидов радиус орицикла $h_{-k_j}(O_\infty(i))$ стремится к бесконечности при $j \rightarrow \infty$, мы заключаем, что $h_{-k_j}(O_\infty(i)) \rightarrow O_\infty(i/q)$, т.е. орицикл $\pi(\mathbf{O}_\infty(i/q))$ лежит в замыкании $\overline{\pi(\mathbf{O}_\infty(i))}$. Поскольку сам орицикл $\pi(\mathbf{O}_\infty(i))$, очевидно, тоже содержится в этом замыкании, свойство сдвига точки ∞ доказано.

4.3. Группы с парами симметричных полуокружностей. Пусть Γ — группа типа Шоттки, рассмотренная в предыдущем пункте, и предположим дополнительно, что $c(S_{-k}) = -c(S_k)$, $k \in \mathbb{N}$, т.е. парные полуокружности симметричны относительно мнимой оси. В этом случае условия предложения 9 выполнены, поскольку D — фундаментальная область Дирихле, отвечающая точке i (или любой другой точке на мнимой оси). Такую группу назовем *группой с парами симметричных полуокружностей*. В рамках класса таких групп будут построены примеры, доказывающие теоремы 2 и 4.

Условие симметричности полуокружностей существенно в следующей лемме (см. [3; следствие 5.2]):

ЛЕММА 5. Пусть $\gamma = h_{k_1} \cdots h_{k_J}$, $k_j + k_{j+1} \neq 0$, $1 \leq j < J$, где $h_k = h(S_k, S_{-k})$, $c(S_k) = -c(S_{-k})$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\operatorname{Im} \gamma(i) < \operatorname{Im} h_{k_1}(i)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12 (ср. с [3; лемма 5.3, ч. (1)]). Пусть Γ – группа с парами симметричных полуокружностей, образующими которой являются $h_k = h(S_k, S_{-k})$, $k \in \mathbb{N}$. Если $c(S_k) \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, и $\lim_{k \rightarrow \infty} r(S_k)/c(S_k) = 0$, то $\infty \in \Lambda_d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из $c(S_k) \rightarrow \infty$ следует $\infty \in \Lambda$. Нужно показать, что для любой последовательности $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ такой, что $\gamma_n(i) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, выполнено $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Im } \gamma_n(i) = 0$. Пусть $\gamma_n = h_{k_{n,1}} \cdots h_{k_{n,j(n)}}$ – несократимое разложение γ_n в произведение образующих. Из $\gamma_n(i) \rightarrow \infty$ следует $|k_{n,1}| \rightarrow \infty$. По предыдущей лемме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Im } \gamma_n(i) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Im } h_{k_{n,1}}(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r(S_{k_{n,1}})^2}{c(S_{k_{n,1}})^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r(S_{k_{n,1}})^2}{c(S_{k_{n,1}})^2} = 0,$$

следовательно, $\infty \in \Lambda_d$.

4.4. Метод доказательства орицикличности точек. В [3] для доказательства орицикличности точек использовался следующий прием.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Пусть $\xi \neq \infty$. Предположим, что найдутся последовательности $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ и $\{w_n\} \subset L_{\xi, \infty}$, где $L_{\xi, \infty}$ – вертикальный луч, выпущенный из ξ , такие, что $w_n \rightarrow \xi$, $n \rightarrow \infty$, и $\gamma_n(w_n) \notin \text{Int}(O_{\gamma_n(\xi)}(i))$. Тогда $\xi \in \Lambda_h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точка $\xi \in \Lambda_h$ тогда и только тогда, когда найдется последовательность $\{g_n\} \subset \Gamma$ такая, что $r(O_\xi(g_n(i))) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Условие предположения эквивалентно $w_n \notin \text{Int}(O_\xi(\gamma_n^{-1}(i)))$, следовательно, $r(O_\xi(\gamma_n^{-1}(i))) \leq (\text{Re } w_n)/2 \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, и достаточно положить $g_n = \gamma_n^{-1}$.

4.5. Прыжки первого и второго рода. Пусть Γ – группа с парами равных полуокружностей и d обозначает евклидово расстояние.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Скажем, что множество M совершает *прыжок первого рода* уровня $a > 0$ в полуокружность S , если

$$M \subset \{z : \text{Im } z > 0, d(z, c(S)) > (1 + a)r(S)\}.$$

Скажем, что множество M совершает *прыжок второго рода* уровня $a > 0$ в полуокружность S , если

$$M \subset \{z : \text{Im } z > 0, d(z, c(S)) > r(S) + a \max\{r(S), |c(S)|, 1\}\}.$$

Пусть $x = (h_{k_1}, h_{k_2}, \dots)$ – бесконечная правая допустимая последовательность образующих (или их обратных) группы с парами равных полуокружностей. Скажем, что x *содержит прыжок первого (второго) рода* уровня $a > 0$ на j -м месте, $j > 1$, если $S_{k_{j-1}}$ совершает прыжок первого (соответственно, второго) рода уровня a в S_{-k_j} .

Разумеется, прыжок второго рода является прыжком первого рода того же уровня.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Пусть diam обозначает диаметр по отношению к евклидовой метрике. Если M совершает прыжок первого рода уровня a в полуокружность S_{-k_j} , то $\text{diam}(h_{-k_j}(M)) \leq \text{diam}(M)/(1+a)$. В частности, это выполнено, если $x \in X$ содержит прыжок первого рода уровня a на j -м месте и $M \subset \overline{\text{Int}(S_{k_{j-1}})}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из того, что автоморфизм h_{-k_j} является композицией инверсии относительно S_{-k_j} , которая сжимает евклидово расстояние на множестве $\{z : d(z, c(S_{-k_j})) \geq (1+a)r(S_{-k_j})\}$ по крайней мере в $(1+a)$ раз, и отражения относительно некоторой вертикальной оси.

ЛЕММА 6. Существует $\delta > 0$, зависящее только от $a > 0$, такое, что для любых двух полуокружностей S, S' таких, что S' совершает прыжок второго рода уровня a в S , и для всех $\xi \in \overline{\text{Int}(S)} \cap \mathbb{R}$ имеем (см. рис. 6)

$$\text{Int}(O_\xi(i)) \cap \text{Int}(S') \subset \{z : \text{Im } z \geq \delta\}.$$

При этом для некоторой константы $B > 0$ при $a \leq 1$ можно выбрать $\delta \geq Ba^4$.

Рис. 6. Прыжок второго рода

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда S содержится в полосе $\{z : |\text{Re } z| \leq a/4\}$. Поскольку $d(S, S') \geq a$, S' заведомо лежит в области $\{z : |\text{Re } z| \geq 3a/4\}$. Поэтому в этом случае можно взять $\delta = \delta_0$, где δ_0 – минимальная мнимая часть точек пересечения орициклов $O_{\pm a/4}(i)$ с прямыми $\{\text{Re } z = \pm 3a/4\}$. Ясно, что при этом δ_0 имеет порядок a^2 при $a \rightarrow 0$.

Рассмотрим теперь случай $|c(S)| > r(S) + a/4$. Не ограничивая общности, будем считать $c(S) > 0$. Дуга окружности $F = O_\xi(i) \cap \{z : \text{Im } z < 1\}$ имеет своими концами i и $i + 2\xi$. Если S' не пересекает множество $\{z : 0 < \text{Re } z < 2c(S) + 2r(S)\} \supset \{z : 0 < \text{Re } z < 2\xi\}$, то $\delta = 1$ удовлетворяет утверждению леммы. По условиям леммы S' не пересекает полосу $\{z : (1-a)c(S) - r(S) < \text{Re } z < (1+a)c(S) + r(S)\}$. Дуга $F \cap \{z : 0 < \text{Re } z < c(S) - r(S), \text{Im } z < 1\}$ лежит выше дуги орицикла $O_{c(S)-r(S)}(i) \cap \{z : 0 < \text{Re } z < c(S) - r(S), \text{Im } z < 1\}$. Пусть последняя пересекает прямую $\{z : \text{Re } z = (1-a)c(S) - r(S)\}$ в точке $(1-a)c(S) - r(S) + is^-$. Аналогично, дуга орицикла $O_{c(S)+r(S)}(i) \cap \{z : c(S) + r(S) < \text{Re } z < 2c(S) + 2r(S), \text{Im } z < 1\}$ лежит ниже дуги $F \cap \{z : c(S) + r(S) < \text{Re } z < 2c(S) + 2r(S), \text{Im } z < 1\}$, и

пусть $(1+a)c(S) + r(S) + is^+$ обозначает точку пересечения $O_{c(S)+r(S)}(i)$ с прямой $\{z : \operatorname{Re} z = (1+a)c(S) + r(S)\}$.

Радиус оришка $O_{c(S)\pm r(S)}(i)$ равен $((c(S) \pm r(S))^2 + 1)/2$. Если $s^\pm$ определено, то

$$s^\pm = \frac{(c(S) \pm r(S))^2 + 1}{2} - \sqrt{\left(\frac{(c(S) \pm r(S))^2 + 1}{2}\right)^2 - a^2 c(S)^2}$$

и неравенство $s^\pm \geq \delta$ эквивалентно $\delta^2 - ((c(S) \pm r(S))^2 + 1)\delta + a^2 c(S)^2 \geq 0$, которое заведомо выполнено при $0 < \delta \leq \min\{a^2/8, a^4/32\}$, поскольку $(c(S) \pm r(S))^2 a^2/8 \leq 4c(S)^2 a^2/8 = (a^2 c(S)^2)/2$, так как $c(S) > r(S)$, и $a^4/32 \leq (a^2 c(S)^2)/2$, так как $c(S) \geq a/4$.

Наконец, для произвольного расположения S рассмотрим меньшую полуокружность $\tilde{S}$, $\xi \in \overline{\operatorname{Int}(\tilde{S})} \subset \overline{\operatorname{Int}(S)}$, причем $\tilde{S}$ содержится в том же множестве $\{z : |\operatorname{Re} z| \leq a/4\}$ или $\{z : |\operatorname{Re} z| > a/4\}$, что и ξ . Поскольку S' совершает прыжок второго рода уровня a в $\tilde{S}$, то этот случай сводится к одному из двух предыдущих.

Таким образом, можно положить $\delta = \min\{\delta_0, a^2/8, a^4/32, 1\}$.

ЛЕММА 7. Пусть Γ – группа с парами равных полуокружностей и $\xi = \alpha(x)$, где $x \in X$ – правая допустимая бесконечная последовательность, для некоторого $a > 0$, содержащая бесконечно много прыжков второго рода уровня a . Тогда ξ – орициклическая предельная точка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S_{\pm k}$, $k \in \mathbb{N}$, – пары равных полуокружностей, ограничивающих фундаментальную область группы, и $h_k = h(S_k, S_{-k})$, $k \in \mathbb{N}$, – образующие группы. Пусть $x = (h_{k_1}, h_{k_2}, \dots)$, $k_j \neq 0$, $k_j + k_{j+1} \neq 0$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{k_1} \cdots h_{k_n}(i)$. Для каждого n возьмем точку $w_n \in h_{k_1} \cdots h_{k_n}(D) \cap L_{(\xi, \infty)}$. Ясно, что это пересечение непусто и по предложению 9 $w_n \rightarrow \xi$, $n \rightarrow \infty$.

Выберем l_n так, что $l_n \geq n + 2$, на l_n -м месте происходит прыжок второго рода уровня a и $(1+a)^{-J(n+2, l_n-1, a)} \operatorname{diam}(S_{k_{l_n-1}}) < \delta$, где δ соответствует a в утверждении леммы 6, $J(r, s, a)$ – число прыжков второго рода уровня a с r -го по s -е место включительно при $r \leq s$, $J(r, s, a) = 0$ при $r > s$; поскольку по условию $J(n+2, m-1, a) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$ и фиксированном n , такое l_n можно подобрать.

Положим $\gamma_n = h_{-k_{l_n-1}} \cdots h_{-k_1}$. Тогда $\gamma_n(\xi) \in \overline{\operatorname{Int}(S_{-k_{l_n}})}$ и $\gamma_n(w_n) \in h_{-k_{l_n-1}} \cdots h_{-k_{n+1}}(D) \subset G_{l_n-1, n+1} \subset \overline{\operatorname{Int}(S_{k_{l_n-1}})}$, где $G_{r, s} = h_{-k_r} \cdots h_{-k_{s+1}}(\overline{\operatorname{Int}(S_{k_s})}) \subset \overline{\operatorname{Int}(S_{k_r})}$, $r \geq s$ (см. рис. 7).

Рис. 7. К доказательству леммы 7

Если прыжок второго рода уровня a совершается на j -м месте, то по предложению 14 $\text{diam}(G_{j,b}) \leq \text{diam}(G_{j-1,b})/(1+a)$, а при остальных j имеем

$$\text{diam}(G_{j,b}) \leq \text{diam}(G_{j-1,b}).$$

Поэтому при $r \geq s$ мы имеем

$$\text{diam}(G_{r,s}) \leq (1+a)^{-J(s+1,r,a)} \text{diam}(S_{k_s}).$$

В силу выбора l_n получаем $G_{l_n-1,n+1} \subset \{z : \text{Im } z < \delta\}$. Из условий $G_{l_n-1,n+1} \subset \overline{\text{Int}(S_{k_{l_n-1}})}$, $\gamma_n(\xi) \in \overline{\text{Int}(S_{-k_{l_n}})}$, леммы 6 и из того, что на l_n -м месте совершается прыжок уровня a второго рода, вытекает $G_{l_n-1,n+1} \cap \text{Int}(O_{\gamma_n(\xi)}(i)) = \emptyset$. Из того, что $\gamma_n(w_n) \in G_{l_n-1,n+1}$, и из предложения 13 следует, что $\xi \in \Lambda_h$.

4.6. Орициклический поток без минимальных подмножеств неблуждающего множества. Имеющейся уже у нас техники достаточно для построения орициклического потока без минимальных подмножеств в Ω^+ , т.е. для доказательства теоремы 2. Положим $r(S_k) = 4^{k-1}$, $c(S_k) = c(S_{-k}) = 2r(S_k)$. Тогда соответствующая группа Γ – фуксова группа второго рода, которая является группой с парами симметричных полуокружностей.

Из следующего предложения и предложения 7 следует, что Γ – искомая группа в теореме 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. *Справедливо следующее: $\Lambda = \Lambda_s$ и $\infty \in \Lambda_{\text{irr}} \cap \Lambda_s$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $r(S_k)/c(S_k) = \frac{1}{2}$, из предложения 11 следует $\infty \in \Lambda_{\text{irr}} \cap \Lambda_s$. Осталось показать, что все остальные точки из $\Lambda \setminus \Gamma(\infty)$ орициклические, так как $\Lambda_h \subset \Lambda_s$.

Возьмем произвольную точку $\xi \in \Lambda \setminus \Gamma(\infty)$. Поскольку бесконечность является единственным терминальным символом алфавита A , ξ можно закодировать бесконечной допустимой последовательностью x .

Поскольку любые две различные полуокружности из семейства $\{S_{\pm k}\}$ совершают прыжок второго рода уровня $\frac{1}{8}$ одна в другую, то x содержит прыжок второго рода уровня $\frac{1}{8}$ на любом месте. Поэтому из леммы 7 следует, что $\xi \in \Lambda_h$.

4.7. Составные прыжки. Пусть Γ – группа с парами равных полуокружностей $S_{\pm k}$, $k \in \mathbb{N}$, и $h_k = h(S_k, S_{-k})$, $k \in \mathbb{N}$, – образующие группы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть $x = (h_{k_1}, h_{k_2}, \dots)$ – бесконечная правая допустимая последовательность. Скажем, что x *содержит составной прыжок первого (второго) рода уровня $a > 0$ на j -м месте*, $j > 2$, если $h_{-k_{j-1}}(S_{k_{j-2}})$ совершает прыжок первого (соответственно второго) рода уровня a в S_{-k_j} .

ЛЕММА 8. *Пусть $\xi = \alpha(x)$, где $x \in X$ – правая допустимая бесконечная последовательность, для некоторого $a > 0$ содержащая бесконечно много составных прыжков второго рода уровня a . Тогда ξ – орициклическая предельная точка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет доказательство леммы 4.4 со следующими изменениями:

- 1) вместо $l_n \geq n + 2$ мы требуем $l_n \geq n + 3$;
- 2) $J(r, s, a)$ теперь будет обозначать число прыжков второго рода уровня a с r -го по s -е место, происходящих на четных местах;
- 3) если на j -м месте совершается составной прыжок второго рода уровня a , то $\text{diam}(G_{j,b}) \leq \text{diam}(G_{j-2,b})/(1+a)$;
- 4) лемма 6 и предложение 14 применяются не к $S_{k_{l_n-1}}$, совершающей прыжок в $S_{-k_{l_n}}$, а к $h_{-k_{l_n-1}}(S_{k_{l_n-2}})$, совершающей прыжок в $S_{-k_{l_n}}$; здесь используется тот факт, что $G_{l_n-1,n+1} \subset \overline{\text{Int}(h_{-k_{l_n-1}}(S_{k_{l_n-2}}))}$ при $l_n \geq n + 3$.

4.8. Конечно порожденные группы с парами равных полуокружностей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. *Всякая конечно порожденная группа, определенная в начале п. 4.2, удовлетворяет условиям предложения 9. То есть внешность к полуокружностям является фундаментальной областью группы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h_k = h(S_k, S_{-k})$ являются образующими группы, где $r(S_k) = r(S_{-k})$, $k = 1, \dots, K$, $K < \infty$. Рассмотрим произвольную правую бесконечную допустимую последовательность $x = (h_{k_1}, h_{k_2}, \dots)$. Положим для краткости $S(j) = S_{-k_j}$, $h(j) = h_{k_j}$. Нужно доказать, что

$$r(h(1) \cdots h(n-1)(S(n))) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Поскольку $K < \infty$, найдется $a > 0$ такое, что любые две полуокружности S_l, S_m , $l \neq m$, $l, m \in \{-K, \dots, -1, 1, \dots, K\}$, либо касаются, либо совершают прыжки первого рода уровня a одна в другую. Обозначим через $J(m, n)$ количество таких j , $m \leq j \leq n$, что S_{-k_j} совершает прыжок первого рода уровня a в $S_{k_{j-1}}$.

Рассмотрим случай, когда $J(2, n) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Тогда по предложению 14

$$r(h(1) \cdots h(n-1)(S(n))) \leq (1+a)^{-J(2,n)} \max_{1 \leq k \leq K} r(S_k) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим теперь случай, когда для некоторого j_0 при $j \geq j_0$ полуокружности S_{-k_j} и $S_{k_{j-1}}$ касаются друг друга. Снова, поскольку $K < \infty$, найдется $b > 0$ такое, что для любых $l_1, l_2, l_3 \in \{-K, \dots, -1, 1, \dots, K\}$, $l_1 + l_2 \neq 0$, $l_2 + l_3 \neq 0$, полуокружности $h_{l_2}(S_{-l_1})$ и S_{l_3} либо касаются, либо совершают прыжки первого рода уровня b одна в другую. Обозначим через $J_l(m, n)$, $l = 1$ или 2 , количество соответственно нечетных или четных j , $m \leq j \leq n$, таких, что $h_{k_j}(S_{-k_{j+1}})$ совершает прыжок первого рода уровня b в $S_{k_{j-1}}$. Предположим, что $J_1(2, n) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Тогда по предложению 14

$$r(h(1) \cdots h(n-1)(S(n))) \leq (1+b)^{-J_1(2,n-1)} \max_{1 \leq k \leq K} r(S_k) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Аналогично рассматривается случай $J_2(2, n) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$.

Наконец остался случай, когда при всех $j \geq j_1$ полуокружности $h(j)(S(j+1))$ и $S_{k_{j-1}}$ касаются. Не ограничивая общности, можно считать $j_0 = j_1 = 2$. Это

означает, что при $j = 1, \dots, n-1$ полуокружность $h(j+1) \cdots h(n-1)(S(n))$ касается S_{-k_j} , причем $h(j) \cdots h(n-1)(S(n))$ получается из $h(j+1) \cdots h(n-1)(S(n))$ инверсией относительно S_{-k_j} с последующей симметрией относительно некоторой оси. Заметим, что если полуокружности S' и S касаются внешним образом, то $1/r(I_S(S')) = 1/r(S') + 2/r(S)$, где I_S – инверсия относительно S . Поэтому

$$\begin{aligned} r(h(1) \cdots h(n-1)(S(n))) &= \left(\frac{1}{r(S(n))} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{r(S(j))} \right)^{-1} \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq K} \frac{r(S_k)}{2n-1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

4.9. Крокодилы. Семейство полуокружностей $S_{\pm l}$, $l \in \mathbb{N}$, назовем *крокодилом* с коэффициентом $q \in (0, 1)$, расположенным на отрезке $[a, b]$, если их диаметры расположены слева направо внутри отрезка в порядке, образующем последовательность “коммутаторов” $S_{2l-1}, S_{2l}, S_{-2l+1}, S_{-2l}$:

$$S_1, S_2, S_{-1}, S_{-2}, S_3, S_4, S_{-3}, S_{-4}, \dots$$

(соседние диаметры имеют общие концы, а левый конец диаметра S_1 совпадает с a). При этом окружности накапливаются к b , $r(S_{2l}) = r(S_{-2l}) = r(S_{2l-1}) = r(S_{-2l+1})$ при всех $l \in \mathbb{N}$, и радиусы полуокружностей в коммутаторах $r(S_{2l})$, $l \in \mathbb{N}$, образуют геометрическую прогрессию с коэффициентом q ; в явном виде $r(S_{2l}) = q^{l-1}(1-q)(b-a)/8$, $l \in \mathbb{N}$ (см. рис. 8). При этом правый конец b отрезка называется *носом крокодила*. Крокодилу соответствует последовательность гиперболических автоморфизмов $\{h_l\}$, $h_l = h(S_l, S_{-l})$, $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; при этом $h_{-l} = h_l^{-1}$.

Рис. 8. Крокодил

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. *Предположим, что гиперболические автоморфизмы, соответствующие крокодилу, входят в набор системы образующих группы Γ с парами равных полуокружностей так, что полуокружности крокодила являются сторонами соответствующей фундаментальной области Шоттки. Тогда нос крокодила ξ является предельной точкой, обладающей свойством сдвига.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямое вычисление по формуле $r(O_\zeta(\zeta + c + id)) = (c^2 + d^2)/(2d)$ дает, что $h_{-2l}(O_\xi(\xi + 2i)) \rightarrow O_\xi(\xi + 2ir)$ при $l \rightarrow +\infty$ для некоторого $r < 1$.

4.10. Орициклический поток без минимальных множеств. Здесь мы приведем пример группы первого рода, для которой орициклический поток не имеет минимальных множеств, т.е. докажем теорему 3.

Пусть $Q > 1$, $\gamma, K \in (0, 1)$. Рассмотрим семейство полуокружностей $S_{\pm(2k-1),0}$, $r(S_{2k-1,0}) = r(S_{-2k+1,0}) = \gamma Q^k$, $c(S_{2k-1,0}) = -c(S_{-2k+1,0}) = Q^k$, $k \in \mathbb{N}$. При ограничении $(1 + \gamma)/(1 - \gamma) < Q$ окружности $S_{2k-1,0}$ расположены друг к другу внешним образом и без касаний, поэтому автоморфизмы $h_{2k-1,0} = h(S_{2k-1,0}, S_{-2k+1,0})$ гиперболичны; обозначим также $h_{-2k+1,0} = h_{2k-1,0}^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Далее, пусть полуокружности $S_{2k,\pm l}$, $l \in \mathbb{N}$, образуют крокодил на отрезке $[c(S_{2k-1,0}) + r(S_{2k-1,0}), c(S_{2k+1,0}) - r(S_{2k+1,0})]$ с коэффициентом K , и пусть $\{h_{2k,\pm l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ — соответствующая последовательность автоморфизмов, $k \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим группу Γ , порожденную всеми элементами $h_{k,l}$, $k \in \mathbb{Z}$, $l = 0$, если k нечетно, $l \in \mathbb{N}$, если k четно (см. рис. 9). Отметим, что $S(h_{k,l}) = S_{h,l}$; $h_{k,l}^{-1} = h_{k,-l}$ при четном k и $h_{k,0}^{-1} = h_{-k,0}$ при нечетном k .

Рис. 9. Группа первого рода с крокодилами

Можно так выбрать Q, γ, K и константы C_j , $j = 1, \dots, 6$, чтобы эта конструкция удовлетворяла следующим свойствам:

- 1) если $|k_1 - k_2| > 1$, то полуокружность S_{k_1,l_1} совершает прыжки первого и второго рода уровня $C_1 > 0$ в S_{k_2,l_2} для допустимых l_1, l_2 ;
- 2) если $|k| > 2m + 1$, то множество $\{z : |\operatorname{Re} z| \leq c(S_{2m+1,0})\}$ совершает прыжок второго рода уровня $C_2 > 0$ в полуокружность $S_{k,l}$ для допустимых l ;
- 3) если $|k| < 2m + 1$, то множество $\{z : |\operatorname{Re} z| \geq c(S_{2m+1,0})\}$ совершает прыжок второго рода уровня $C_3 > 0$ в полуокружность $S_{k,l}$ для допустимых l ;
- 4) если $|k| < 2m + 1$, то множество $\{z : |\operatorname{Re} z| \geq c(S_{2m+1,0})\}$ совершает прыжок первого рода уровня $C_4 > Q^2 - 1$ в полуокружность $S_{k,l}$ для допустимых l ;
- 5) если $|k_1| \leq 2m_1 - 1$, $|k_2| \geq 2m_2 - 2$, $m_2 - m_1 > 1$, то полуокружность S_{k_2,l_2} совершает прыжок первого рода в S_{k_1,l_1} уровня $C_5 Q^{m_2 - m_1 + 1} - 1$, $C_5 > 1$, для допустимых l_1, l_2 ;
- 6) (уточнение свойства 1)) если $|k_1 - k_2| > 1$, то полуокружность S_{k_1,l_1} совершает прыжок первого рода в S_{k_2,l_2} уровня $C_6 > Q - 1$ для допустимых l_1, l_2 .

Если выбрать произвольное $Q > 1$, то положительные константы C_1, C_2, C_3 найдутся для любых $\gamma, K \in (0, 1)$, $(1 + \gamma)/(1 - \gamma) < Q$. Для того чтобы можно было

выбрать $C_5 > 1$, $C_6 > Q - 1$, $C_4 > Q^2 - 1$, нужно выбрать γ достаточно близким к нулю, а затем K — достаточно близким к единице.

Терминальными символами алфавита A здесь являются бесконечность и носы крокодилов $c(S_{2k+1,0}) - r(S_{2k+1,0})$, $k \in \mathbb{Z}$. Однако носы крокодилов допускают и бесконечные кодировки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. *Группа Γ является фуксовой группой первого рода, причем Γ — группа с парами равных полуокружностей, удовлетворяющая условиям предложения 9.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим правую бесконечную допустимую последовательность $x = (h_{k_1, l_1}, h_{k_2, l_2}, \dots)$. Обозначим $h(j) = h_{k_j, l_j}$, $S(j) = S(h(j)^{-1})$, $S'(j) = S(h(j))$. Нужно доказать, что

$$r(h(1) \cdots h(n-1)(S(n))) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Рассмотрим сначала случай, когда последовательность $\{|k_j|\}$ ограничена. Если $\{|l_j|\}$ ограничена, то x содержит конечное множество различных символов, и утверждение справедливо по предложению 16. Если же $\{|l_j|\}$ неограничена, то среди $S(j)$ содержатся полуокружности сколь угодно малого радиуса и

$$r(h(1) \cdots h(n-1)(S(n))) \leq \min_{j=1, \dots, n} r(S(j)) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\sup\{|k_j|\} = \infty$. Построим последовательности $\{j_s\}$ и $\{m_s\}$ следующим образом. Положим $j_1 = 1$, $m_1 = [(|k_1| + 2)/2]$, где $[\cdot]$ — целая часть. Затем для $s > 1$ индуктивно определим j_s как наименьшее возможное натуральное число, удовлетворяющее условиям $j_s > j_{s-1}$ и $|k_{j_s}| > 2m_{s-1} - 1$, и положим $m_s = [(|k_{j_s}| + 2)/2]$. Тогда $\{m_s\}$ строго возрастает, $|k_{j_s}| = 2m_s - 1$ или $|k_{j_s}| = 2m_s - 2$, $|k_j| \leq 2m_{s-1} - 1 \leq 2(m_s - 1) - 1$ при $j < j_s$.

Заметим, что левая часть (1) монотонно убывает по n , поэтому сходимость к нулю достаточно доказать для подпоследовательности, т.е. осталось показать, что $r(h(1) \cdots h(j_t - 1)(S(j_t))) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$.

Если $m_s - m_{s-1} > 1$, $s > 1$, то $|k_{j_s}| \geq 2m_s - 2$, $|k_{j_{s-1}}| \leq 2m_{s-1} - 1$, и по свойству 5) полуокружность $S(j_s)$ делает прыжок первого рода в $S'(j_s - 1)$ уровня $C_5 Q^{m_s - m_{s-1} + 1} - 1$. Поэтому полуокружность $h(j_s) \cdots h(j_t - 1)(S(j_t)) \subset \text{Int}(S(j_s))$ по предложению 14 сжимается под действием $h(j_s - 1)$ не менее чем в $C_5 Q^{m_s - m_{s-1} + 1}$ раз.

Если $m_s = m_{s-1} + 1$, $s > 2$, то возможны четыре случая.

Случай 1: $|k_{j_{s-1}}| < 2m_{s-1} - 1$. Тогда по свойству 6) $S(j_s)$ делает прыжок первого рода в $S'(j_s - 1)$ уровня C_6 .

Случай 2: $|k_{j_{s-1}}| = 2m_{s-1} - 1$, $S'(j_s - 1)$ и $S(j_s)$ лежат по разные стороны от мнимой оси. Тогда по свойству 6) $S(j_s)$ делает прыжок первого рода в $S'(j_s - 1)$ уровня C_6 .

Случай 3: $|k_{j_{s-1}}| = 2m_{s-1} - 1$, $S'(j_s - 1)$ и $S(j_s)$ лежат по одну сторону от мнимой оси, $|k_{j_s}| = 2m_{s-1} + 1$. Тогда полуокружность $S(j_s)$ по свойству 6) делает прыжок первого рода уровня C_6 в полуокружность $S'(j_s - 1)$.

В первых трех случаях полуокружность $h(j_s) \cdots h(j_t - 1)(S(j_t)) \subset \overline{\text{Int}(S(j_s))}$ сжимается под действием автоморфизма $h(j_s - 1)$ не менее чем в $\min\{C_6, C_4\} + 1 = ((\min\{C_6, C_4\} + 1)/Q)Q^{m_s - m_{s-1}}$ раз.

Случай 4: $|k_{j_s-1}| = 2m_{s-1} - 1$, $S'(j_s - 1)$ и $S(j_s)$ лежат по одну сторону от мнимой оси, $|k_{j_s}| = 2m_{s-1}$. Тогда полуокружность $h(j_s - 1)(S(j_s))$ лежит внутри четверти круга $\{z \in \text{Int}(S(j_s - 1)) : |\text{Re } z| > |c(S(j_s - 1))|\}$, а потому по свойству 4) делает прыжок первого рода уровня C_4 в полуокружность $S'(j_s - 2)$. В случае $j_{s-1} < j_s - 1$ полуокружность $h(j_s - 1) \cdots h(j_t - 1)(S(j_t)) \subset \overline{\text{Int}(S(j_s - 1))}$ сжимается под действием $h(j_s - 2)$ не менее чем в $C_4 + 1 = ((C_4 + 1)/Q)Q^{m_s - m_{s-1}}$ раз. Рассмотрим случай $j_{s-1} = j_s - 1$. Если $m_{s-1} - m_{s-2} > 1$, то по доказанному выше полуокружность $h(j_s - 1) \cdots h(j_t - 1)(S(j_t)) \subset \overline{\text{Int}(S(j_s - 1))}$ сжимается под действием $h(j_s - 2)$ не менее чем в $C_5 Q^{m_{s-1} - m_{s-2} + 1} = (\sqrt{C_5})^2 Q^{m_s - m_{s-2}}$ раз; если же $m_{s-1} - m_{s-2} = 1$, то эта полуокружность сжимается под действием $h(j_s - 2)$ не менее чем в $C_4 + 1 = (\sqrt{(C_4 + 1)/Q})^2 Q^{m_s - m_{s-2}}$ раз.

При остальных $j \neq j_s$ полуокружность $h(j) \cdots h(j_t - 1)(S(j_t)) \subset \overline{\text{Int}(S(j))}$ не растягивается под действием $h(j - 1)$.

Учитывая $r(S(j_t)) \leq \gamma Q^{m_t}$, имеем

$$r(h(1) \cdots h(j_t - 1)(S(j_t))) \leq C^{t-2} Q^{-m_t + m_2} r(S(j_t)) \leq \gamma Q^{m_2} C^{t-2} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

где $C = \max\{\sqrt{Q/(C_4 + 1)}, Q/(C_6 + 1), 1/\sqrt{C_5}\} < 1$. Предложение доказано.

ЛЕММА 9. Пусть $x = (h_{k_j, l_j})$, $j \in \mathbb{N}$, — бесконечная допустимая последовательность. Если для каждого $a > 0$ последовательность x содержит только конечное число прыжков и составных прыжков второго рода уровня a , то для некоторых $j_0 \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ при $j \geq j_0$

$$2m - 1 \leq |k_j| \leq 2m + 1. \quad (2)$$

В частности, все полуокружности $S(h_{k_j, l_j}^{\pm 1})$, $j \geq j_0$, содержатся в полосе $\{z : |\text{Re } z| \leq M\}$, $M = (1 + \gamma)Q^{m+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что если для некоторого m выполнено одно из условий а) $|k_{j-1}|, |k_j| \leq 2m + 1$, $|k_{j+1}| > 2m + 1$ или б) $|k_{j-1}| > 2m + 1$, $|k_j|, |k_{j+1}| \leq 2m + 1$, то x содержит на j -м или на $(j + 1)$ -м месте прыжок или составной прыжок второго рода уровня $\min\{C_1, C_2, C_3\}$.

В случае а) полуокружность $h_{k_j, l_j}^{-1}(S(h_{k_{j-1}, l_{j-1}}))$ содержится в $\{z : |\text{Re } z| \leq c(S_{2m+1})\}$, и наличие прыжка второго рода уровня C_2 полуокружности $h_{k_j, l_j}^{-1}(S(h_{k_{j-1}, l_{j-1}}))$ в $S(h_{k_{j+1}, l_{j+1}}^{-1})$ следует из свойства 2) нашей конструкции, т.е. на $(j + 1)$ -м месте происходит составной прыжок второго рода уровня C_2 .

Пусть теперь $|k_{j-1}| > 2m + 1$, $|k_j|, |k_{j+1}| \leq 2m + 1$.

Если $|k_j| < 2m + 1$, то из свойства 1) следует, что $S(h_{k_{j-1}, l_{j-1}})$ совершает прыжок второго рода уровня в $S(h_{k_j, l_j}^{-1})$ уровня C_1 , т.е. на j -м месте происходит прыжок второго рода уровня C_1 .

Пусть теперь $|k_j| = 2m + 1$. Рассмотрим случай $k_j = -2m - 1$. Тогда $h_{k_j, l_j} = h_{-2m-1, 0}$, $h_{k_j, l_j}^{-1} = h_{2m+1, 0}$. Если $k_{j-1} < 0$, то полуокружность $S(h_{k_{j-1}, l_{j-1}})$ лежит по другую сторону от мнимой оси, чем $S(h_{k_j, l_j}^{-1}) = S_{2m+1, 0}$, и потому по

свойству 1) совершает прыжок второго рода уровня C_1 в $S_{2m+1,0}$, т.е. на j -м месте происходит прыжок второго рода уровня C_1 .

В противном случае $k_{j-1} > 0$ и $S(h_{k_{j-1}, l_{j-1}})$ расположена правее $S_{2m+1,0}$, поэтому

$$h_{2m+1,0}(S(h_{k_{j-1}, l_{j-1}})) \subset \{z : -r(S_{2m+1,0}) - c(S_{2m+1,0}) \leq \operatorname{Re} z \leq -c(S_{2m+1,0})\},$$

и по свойству 3) полуокружность $h_{2m+1,0}(S(h_{k_{j-1}, l_{j-1}}))$ совершает прыжок второго рода уровня C_3 в $S(h_{k_{j+1}, k_{j+1}}^{-1})$, т.е. на $(j+1)$ -м месте происходит составной прыжок второго рода уровня C_3 . Случай $k_j = 2m+1$ рассматривается аналогично.

Теорема 3 следует теперь из следующего предложения и предложения 7.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19. *Справедливо следующее: $\Lambda = \partial\mathbb{H}^2$, $\Lambda = \Lambda_s$, $\Lambda_{\text{irr}} \neq \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Бесконечнопорожденность Γ очевидна. Из того, что диаметры полуокружностей $S_{k,l}$ покрывают всю вещественную прямую $\mathbb{R}$, и из предложения 18 следует $\Lambda = \partial\mathbb{H}^2$.

По предложению 11 имеем $\infty \in \Lambda_{\text{irr}} \cap \Lambda_s$.

Покажем, что $\Lambda \setminus \Gamma(\infty) \subset \Lambda_s$. Каждая предельная точка ξ , не принадлежащая $\Gamma(\infty)$, кодируется бесконечной последовательностью $\xi = \alpha(x)$, $x = (h_{k_1, l_1}, h_{k_2, l_2}, \dots)$.

В случае, когда x содержит бесконечное число прыжков или составных прыжков второго рода некоторого уровня $a > 0$, по леммам 7 и 8 точка ξ орициклическая, а значит, обладает свойством сдвига. Поэтому согласно лемме 9 остается рассмотреть случай, когда x удовлетворяет условию (2). Не ограничивая общности, можно считать $j_0 = 1$.

В случае, когда последовательность $\{|l_j|\}$ ограничена, множество различных символов h_{k_j, l_j} , входящих в x , конечно и точка ξ предельная орициклическая по предложению 2.

Рассмотрим теперь случай $\sup\{|l_j|\} = \infty$. Тогда можно выбрать такую последовательность индексов j_s , что $|l_{j_s}| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и $k_{j_s} = 2m$ при всех s или $k_{j_s} = -2m$ при всех s . Предположим, что $k_{j_s} = 2m$, $s \in \mathbb{N}$.

Возьмем, как обычно, $w_n \in h_{k_1, l_1} \cdots h_{k_n, l_n}(D) \cap L_{(\xi, \infty)}$ (при этом $w_n \rightarrow \xi$ при $n \rightarrow \infty$ по предложениям 9 и 18) и $\gamma(j) = h_{k_{j-1}, l_{j-1}}^{-1} \cdots h_{k_1, l_1}^{-1}$. Отметим, что $\gamma(j)(\xi) \in \overline{\operatorname{Int}(S(h_{k_j, l_j}^{-1}))}$, а поэтому из $|l_{j_s}| \rightarrow \infty$, $s \rightarrow \infty$, следует, что $\gamma(j_s)(\xi) \rightarrow \zeta$, $s \rightarrow \infty$, где $\zeta = c(S_{2m+1,0}) - r(S_{2m+1,0})$ — нос крокодила.

Если для некоторого фиксированного n последовательность евклидовых радиусов $\{r(O_{\gamma(j_s)(\xi)}(\gamma(j_s)(w_n)))\}_{s \in \mathbb{N}}$ обладает предельной точкой $R_0 \in (0, \infty)$, то $\gamma(j_s)(O_\xi(w_n)) \rightarrow O_\zeta(2R_0)$, $s \rightarrow \infty$. Поэтому $\overline{\pi(O_\xi(w_n))} \supset \pi(O_\zeta(2R_0))$, и так как $\zeta \in \Lambda_s$ по предложению 17, то из предложения 8 следует, что $\xi \in \Lambda_s$.

В противном случае для всех n последовательность $\{r(O_{\gamma(j_s)(\xi)}(\gamma(j_s)(w_n)))\}_{s \in \mathbb{N}}$ не ограничена и поэтому для некоторого j_s выполнено $r(O_{\gamma(j_s)(\xi)}(\gamma(j_s)(w_n))) > r(O_M(i)) \geq r(O_{\gamma(j_s)(\xi)}(i))$, т.е. $\gamma(j_s)(w_n) \notin \operatorname{Int} O_{\gamma(j_s)(\xi)}(i)$. Из предложения 13 следует, что $\xi \in \Lambda_h \subset \Lambda_s$.

Случай $k_{j_s} = -2m$, $s \in \mathbb{N}$, рассматривается аналогично.

Таким образом, $\Lambda = \Lambda_s$. Так как носы крокодилов и бесконечность являются нерегулярными предельными точками, то $\Lambda_{\text{irr}} \neq \emptyset$. Предложение доказано.

4.11. Бесконечнопорожденная группа первого рода без нерегулярных точек. В этом пункте мы построим пример бесконечнопорожденной фуксовой группы Γ первого рода с $\Lambda_{\text{irr}} = \emptyset$ и тем самым докажем теорему 4.

Рассмотрим семейство полуокружностей $S_{\pm(2n-1),0}$, $S_{\pm 2n,l}$, $l = 1, \dots, L_n$, $n \in \mathbb{N}$, где $\{L_n\}$ – некоторая последовательность натуральных чисел. Пусть $r_n = r(S_{2n-1,0}) = r(S_{-2n+1,0})$, $c_n = c(S_{2n-1,0}) = -c(S_{-2n+1,0}) > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $c(S_{1,0}) = r(S_{1,0})$ (т.е. $S_{1,0}$ и $S_{-1,0}$ касаются в точке 0), последовательность $\{c_n\}$ строго возрастает, $c_n + r_n < c_{n+1} - r_{n+1}$, $r(S_{2n,l}) = r(S_{-2n,l}) \leq r_n$, $c(S_{2n,l}) = -c(S_{-2n,l})$, $1 \leq l \leq L_n$, и диаметры полуокружностей $\{S_{2n,l}\}$, $l = 1, \dots, L_n$, образуют разбиение отрезка $[c_n + r_n, c_{n+1} - r_{n+1}]$ так, что полуокружности $S_{2n-1,0}$, $S_{2n,1}, \dots, S_{2n,L_n}$, $S_{2n+1,0}$ последовательно касаются друг друга, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим группу Γ , порожденную автоморфизмами $h_{n,l} = h(S_{n,l}, S_{-n,l})$, $n \in \mathbb{N}$, $l = 0$ при нечетных n , $l = 1, \dots, L_n$ при четных n (см. рис. 10). Обозначим также $h_{-n,l} = h_{n,l}^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$ (так что $h_{n,l} = h(S_{n,l}, S_{-n,l})$ для всех ненулевых целых n и допустимых l). Тогда Γ – группа с парами симметричных полуокружностей. Поскольку диаметры полуокружностей покрывают всю вещественную прямую, Γ – фуксова группа первого рода, т.е. $\Lambda = \partial\mathbb{H}^2$. Очевидно, Γ бесконечно порождена. Теорему 4 доказывает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20. Положим $c_n = 4^n$, $r_n = c_n/n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\Lambda_{\text{irr}} = \emptyset$.

Отметим геометрические свойства нашей конструкции.

Рис. 10. Бесконечно порожденная группа без нерегулярных точек

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 21. Существует $C_1 > 0$ такое, что если k_1, k_2 – ненулевые целые и $|k_1 - k_2| > 2$, то для всех допустимых l_1, l_2 полуокружность S_{k_1,l_1} совершает прыжок второго рода в S_{k_2,l_2} уровня C_1 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22. Существуют $C_2, C_3 > 0$ такие, что если k_1, k_2, k_3 – ненулевые целые, $|k_1|, |k_2| \leq 2m - 1$ и $|k_3| \geq 2m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, то для всех допустимых l_1, l_2, l_3 , для которых пары символов $(h_{k_1,l_1}, h_{k_2,l_2})$ и $(h_{k_2,l_2}, h_{k_3,l_3})$ не допускают сокращения, полуокружность $h_{-k_2,l_2}(S_{k_1,l_1})$ совершает прыжки в полуокружность S_{-k_3,l_3} первого рода уровня C_2 и второго рода уровня C_3/m^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $|k_2| < 2m - 1$. Тогда $h_{-k_2,l_2}(S_{k_1,l_1}) \subset \{z : |\operatorname{Re} z| \leq c_m - r_m\}$.

В другом случае $|k_2| = 2m - 1$. Без ограничения общности можно считать $k_2 = 2m - 1$. Тогда $S_{k_1,l_1} \subset \{z : \operatorname{Re} z \leq c_m - r_m\}$ и $h_{-k_2,l_2}(S_{k_1,l_1}) = h_{-2m+1,0}(S_{k_1,l_1}) \subset \operatorname{Int}(S_{2m-1,0}) \cap \{z : c_m - r_m \leq \operatorname{Re} z \leq c_m\}$. В самом деле, при

инверсии относительно $S_{-2m+1,0}$ все точки с абсциссой правее полуокружности переходят в точки, лежащие внутри $S_{-2m+1,0}$ с абсциссами правее ее центра. Затем отражение относительно мнимой оси переводит их в точки, лежащие внутри $S_{2m-1,0}$ с абсциссами слева от центра $S_{2m-1,0}$.

Итак, в любом из двух случаев $h_{-k_2,l_2}(S_{k_1,l_1}) \subset \{z : |\operatorname{Re} z| \leq c_m\}$, а полуокружность S_{-k_3,l_3} расположена внутри множества $\{z : |\operatorname{Re} z| \geq c_m + r_m\}$.

Рассмотрим случай $|k_3| > 2m$. Пусть $2d - 1 \leq |k_3| \leq 2d$, $d > m$. Тогда $r(S_{-k_3,l_3}) < |c(S_{-k_3,l_3})| \leq c_d$ и евклидово расстояние от S_{-k_3,l_3} до отрезка $[-c_m, c_m]$ не меньше $c_d - r_d - c_m \geq c_d(1 - 1/d^2) - c_d/4 \geq c_d/2 = c_{d+1}/8 \geq \max\{1/2, r(S_{-k_3,l_3})/2, |c(S_{-k_3,l_3})|/8\}$, откуда следует, что $h_{-k_2,l_2}(S_{k_1,l_1})$ совершает прыжки первого и второго рода уровня $\frac{1}{8}$ в S_{-k_3,l_3} .

Пусть теперь $|k_3| = 2m$. Тогда $r(S_{-k_3,l_3}) \leq r_m$ и $h_{-k_2,l_2}(S_{k_1,l_1})$ совершает прыжок первого рода в $S_{-k_3,l_3} = S_{\pm 2m,l_3}$ уровня 1. Поскольку $|c(S_{\pm 2m,l_3})| \leq c_{m+1} = 4c_m$ и расстояние между этими полуокружностями не меньше $r_m = c_m/m^2 = c_{m+1}/(4m^2)$, то $h_{-k_2,l_2}(S_{k_1,l_1})$ совершает прыжок второго рода в S_{-k_3,l_3} уровня $1/(4m^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 20. По предложению 12 бесконечность — дискретная предельная точка.

Достаточно доказать, что все остальные точки из $\partial\mathbb{H}^2 \setminus \Gamma(\infty)$ параболические или орициклические. Поскольку ∞ является единственным терминальным символом алфавита A , каждая предельная точка $\xi \in \Lambda \setminus \Gamma(\infty)$ кодируется бесконечной допустимой последовательностью $x = (h_{k_1,l_1}, h_{k_2,l_2}, \dots)$, $\xi = \alpha(x)$.

В случае, когда в x используется только конечное число различных символов, ξ — параболическая или орициклическая предельная точка по предложению 2. Поэтому далее считаем, что в x встречается бесконечно много различных символов. Рассмотрим два случая.

Первый случай. Найдется бесконечно много таких q , что $|k_{q-1} + k_q| > 2$. Тогда по предложению 21 последовательность x содержит прыжок второго рода уровня C_1 на q -м месте и по лемме 7 точка ξ орициклическая.

Второй случай. Для некоторого q_0 при $q > q_0$ выполнено $||k_{q-1}| - |k_q|| \leq 2$. Заменяя, если необходимо, ξ на $\gamma(\xi)$ для подходящего $\gamma \in \Gamma$, можно считать, что $||k_{q-1}| - |k_q|| \leq 2$ для всех $q > 1$.

Как обычно, для каждого n возьмем точку $w_n \in h_{k_1,l_1} \cdots h_{k_n,l_n}(D) \cap L_{\xi,\infty}$, $w_n \rightarrow \xi$ при $n \rightarrow \infty$.

Положим $\gamma(q) = h_{-k_{q-1},l_{q-1}} \cdots h_{-k_1,l_1}$. Согласно предложению 13 для доказательства $\xi \in \Lambda_h$ достаточно для каждого n найти такое $q = q(n)$, что $\gamma(q)(w_n) \notin \operatorname{Int}(O_{\gamma(q)(\xi)}(i))$.

Ясно, что при $q > n$ имеем $\gamma(q)(\xi) \in \overline{\operatorname{Int}(S_{-k_q,l_q})}$ и

$$\gamma(q)(w_n) \in h_{-k_{q-1},l_{q-1}} \cdots h_{-k_{n+1},l_{n+1}}(D) \subset G(q-1, n+1) \subset \overline{\operatorname{Int}(S_{k_{q-1},l_{q-1}})},$$

где, как и в доказательстве леммы 7, $G_{t,s} = h_{-k_t} \cdots h_{-k_{s+1}}(\overline{\operatorname{Int}(S_{k_s})}) \subset \overline{\operatorname{Int}(S_{k_t})}$, $t \geq s$.

Возьмем возрастающую последовательность индексов $\{q_j\}$ такую, что $q_j > n + 2$, $|k_{q_j-2}| \leq 2m_j - 1$, $|k_{q_j-1}| \leq 2m_j - 1$, $|k_{q_j}| \geq 2m_j$ для некоторого натурального m_j , $m_j > m_{j-1}$, $q_j > q_{j-1}$ при $j > 1$, причем q_j — наименьшее возможное среди натуральных чисел, обладающих этими свойствами. Поскольку x содержит бесконечно много различных символов, эта последовательность бесконечна. Из $||k_{q-1}| - |k_q|| \leq 2$ следует, что на самом деле $m_j = m_{j-1} + 1$.

По предложению 22, примененному к каждой четверке $k_{q_j-2}, k_{q_j-1}, k_{q_j}$ и m_j , на местах q_j , $j \in \mathbb{N}$, происходят составные прыжки первого рода уровня C_2 . Поэтому из предложения 14 следует оценка

$$\text{diam}(G(q_j - 1, n + 1)) \leq (1 + C_2)^{-(j-1)/2} \text{diam}(S_{k_{n+1}, l_{n+1}}).$$

Поскольку $m_j = m_1 + j - 1$, можно выбрать такое $j = j(n)$, что $C_3/m_j^2 < 1$ и что $(1 + C_2)^{-(j-1)/2} \text{diam}(S_{k_{n+1}, l_{n+1}}) < B(C_3)^4/(m_j^2)^4 \leq \delta$, где B — константа из леммы 6, а δ в этой же лемме выбрано для $a = C_3/m_j^2$.

Тогда $G(q_j - 1, n + 1) \subset \overline{\text{Int}(S_{k_{q_j-1}, l_{q_j-1}})} \cap \{z : \text{Im } z < \delta\}$. Поскольку на q_j -м месте происходит прыжок второго рода уровня C_3/m_j^2 , то по предложению 22 и лемме 6 имеем $\overline{\text{Int}(S_{k_{q_j-1}, l_{q_j-1}})} \cap \{z : \text{Im } z < \delta\} \cap \text{Int}(O_{\gamma(q_j)(\xi)}(i)) = \emptyset$. Поэтому $\gamma(q_j)(w_n) \notin \text{Int}(O_{\gamma(q_j)(\xi)}(i))$ и $\xi \in \Lambda_h$.

Список литературы

1. Dal'bo F., Starkov A. N. On noncompact minimal sets of the geodesic flow // J. Dynam. Control Systems. 2002. V. 8. №1. P. 47–64.
2. Purzitsky N. A cutting and pasting of noncompact polygons with applications to fuchsian groups // Acta Math. 1979. V. 143. №3–4. P. 233–250.
3. Dal'bo F., Starkov A. N. On classification of limit points of infinitely generated Schottky groups // J. Dynam. Control Systems. 2000. V. 6. №4. P. 561–578.
4. Nicholls P. J., Waterman P. L. Limit points via Schottky pairings // Discrete groups and geometry (Birmingham, 1991). Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. P. 190–195. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 173.)
5. Beniere J.-C., Meigniez G. Flows without minimal set // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1999. V. 19. №1. P. 21–30.
6. Inaba T. An example of a flow on a non-compact surface without minimal set // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1999. V. 19. №1. P. 31–33.
7. Starkov A. N. Fuchsian groups from the dynamical viewpoint // J. Dynam. Control Systems. 1995. V. 1. №3. P. 427–445.
8. Hedlund G. A. Fuchsian groups and transitive horocycles // Duke Math. J. 1936. V. 2. P. 530–542.
9. Анапасов Б. Н. Геометрия дискретных групп и многообразий. М.: Наука, 1991.
10. Beardon A. F. The geometry of discrete groups. New York: Springer-Verlag, 1983.
11. Dal'bo F., Starkov A. N. Correction to: “On noncompact minimal sets of the geodesic flow” // J. Dynam. Control Systems (to appear).
12. Dal'bo F., Starkov A. N. Correction to: “On classification of limit points of infinitely generated Schottky groups” // J. Dynam. Control Systems (to appear).