Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Королев, О формулах Сельберга, связанных с законом Грама, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 12, 129–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7924>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 14:55:23

УДК 511.331

М. А. Королёв

О формулах Сельберга, связанных с законом Грама

В статье получено новое доказательство формул Сельберга, связанных с законом Грама в теории дзета-функции Римана.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: точки Грама, закон Грама, правило Грама, формулы Сельберга.

§ 1. Введение

Введем несколько обозначений, необходимых для дальнейшего изложения. Для положительного t через $\vartheta(t)$ обозначим приращение непрерывной ветви аргумента функции $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ вдоль отрезка, соединяющего точки $s = 1/2$ и $s = 1/2 + it$. Пусть, далее, $N(t)$ – число нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в области $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leq t$, причем в точках разрыва

$$N(t) = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} (N(t+h) + N(t-h)).$$

Величины $\vartheta(t)$ и $N(t)$ связаны формулой Римана–Мангольдта

$$N(t) = \pi^{-1}\vartheta(t) + 1 + S(t); \quad (1.1)$$

здесь $S(t) = \pi^{-1} \arg \zeta(1/2 + it)$ – аргумент $\zeta(s)$ на критической прямой. С простейшими свойствами $S(t)$ можно ознакомиться в обзорной статье [1].

Можно показать, что при $t > 7$ функция $\vartheta(t)$ монотонно возрастает и удовлетворяет при неограниченном возрастании t следующему асимптотическому равенству:

$$\vartheta(t) = \frac{t}{2} \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + O\left(\frac{1}{t}\right). \quad (1.2)$$

Точкой Грама t_n (n – целое число) будем называть решение уравнения $\vartheta(t_n) = (n-1)\pi$. Из перечисленных выше свойств $\vartheta(t)$ следует, что при любом $n \geq 2$ такое решение существует и единственно.

Пользуясь известной оценкой $S(t) = O(\ln t)$ (см. [2]) наряду с формулами (1.1), (1.2), несложно показать, что при $n \rightarrow +\infty$ справедливы соотношения

$$\gamma_n \sim t_n \sim \frac{2\pi n}{\ln n},$$

где $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots \leq \gamma_n \leq \gamma_{n+1} \leq \dots$ – мнимые части нулей $\zeta(s)$, лежащие в верхней полуплоскости и занумерованные в порядке возрастания (а в случае совпадения – в произвольном порядке). Эта “связь” нулей $\zeta(s)$ с точками Грама t_n и сравнительная простота нахождения последних обусловили большой интерес к изучению свойств последовательности t_n и ее обобщений (см., например, библиографии к статьям [3]–[6]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00759-а).

© М. А. Королёв, 2012

Последовательность точек Грама является монотонно возрастающей. Поэтому для всякого $n \geq 1$ можно указать целое число $m = m(n)$ так, чтобы выполнялись неравенства $t_{m-1} < \gamma_n \leq t_m$. Следуя А. Сельбергу [7], положим $\Delta_n = m - n$.

Законом (правилом) Грама принято называть всякое утверждение общего характера о взаимном расположении точек Грама t_n и ординат нулей дзета-функции Римана. Такой подход оправдан тем, что разные авторы именовали “законом Грама” различные утверждения, не всегда эквивалентные друг другу.

Так, Дж. И. Хатчинсон [8], впервые употребивший словосочетание “закон Грама”, а также Э. Ч. Титчмарш [9] подразумевали под ним свойство двух соседних ординат вещественных нулей функции Харди $Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta(1/2 + it)$ быть отделенными друг от друга точкой Грама.

В ряде же более поздних работ (см., например, [10], [11]) вместо вещественных нулей $Z(t)$ к рассмотрению допускаются ординаты γ_n всех комплексных нулей $\zeta(s)$.

В настоящей статье мы будем придерживаться той интерпретации закона Грама, которая содержится в работе Сельберга [7]. А именно, будем считать, что ордината γ_n нуля $\zeta(s)$ удовлетворяет закону Грама в том, и только том случае, когда выполняются неравенства $t_{n-1} < \gamma_n \leq t_n$, или, что то же, когда $\Delta_n = 0$.

Хотя непосредственное вычисление значений t_n и γ_n показывает, что равенство $\Delta_n = 0$ при $n \leq N$ выполняется в подавляющем большинстве случаев, если N сравнительно невелико, в действительности же среднее значение величин $|\Delta_n|$ неограниченно возрастает при $N \rightarrow +\infty$. Этот факт был впервые установлен Сельбергом. В работе [7] он поместил (без доказательства) найденные им соотношения

$$\sum_{n \leq N} \Delta_n^{2k} = \frac{(2k)!}{k!} \frac{N}{(2\pi)^{2k}} (\ln \ln N)^k + O(N(\ln \ln N)^{k-1/2}), \quad (1.3)$$

$$\sum_{n \leq N} \Delta_n^{2k-1} = O(N(\ln \ln N)^{k-1}), \quad (1.4)$$

в которых $k \geq 1$ – фиксированное целое число.

Два варианта доказательства формул Сельберга (1.3), (1.4) и их обобщений на случай “короткого” промежутка суммирования, предложенные автором в [4]–[6], опираются на полученные в [3] соотношения

$$\sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^{2k}(n) = \frac{(2k)!}{k!} \frac{M}{(2\pi)^{2k}} (\ln \ln N)^k + O_k(M(\ln \ln N)^{k-1/2}), \quad (1.5)$$

$$\sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^{2k-1}(n) = O_k(M(\ln \ln N)^{k-1}). \quad (1.6)$$

Здесь $M = [N^{\alpha+\varepsilon}]$, $\alpha = 27/82$, а при фиксированном n величина $\Delta(n)$ определяется как разность $m - n$, где

$$\gamma_m \leq t_n < \gamma_{m+1}. \quad (1.7)$$

Помимо равенств (1.5), (1.6) первое доказательство формул Сельберга использует тот факт, что количество номеров n , $N < n \leq N+M$, для которых $\Delta_n = a$ (a – заданное целое число) практически совпадает с числом номеров n того же

промежутка, для которых $\Delta(n) = -a$. Второе доказательство опирается на тождество

$$\sum_{t_N < \gamma_m \leq t_{N+M}} \Delta_m^k = (-1)^k \sum_{N < n \leq N+M} \Delta^k(n) + (-1)^k T_{1,k} + O\left(k 2^k \sum_{N < n \leq N+M} (|\Delta(n)|^{k-1} r^2(n) + |r(n)|^{k+1})\right), \quad (1.8)$$

где

$$r(n) = \Delta(n) - \Delta(n-1), \quad T_{1,k} = \sum_{N < n \leq N+M} r(n) \Delta^k(n).$$

Нетривиальная оценка знакопеременной суммы $T_{1,k}$ приводит к соотношению

$$\sum_{t_N < \gamma_m \leq t_{N+M}} \Delta_m^k = (-1)^k \sum_{N < n \leq N+M} \Delta^k(n) + O_k(M(\ln \ln N)^{(k-1)/2}), \quad (1.9)$$

которое наряду с (1.5), (1.6) влечет равенства (1.3), (1.4).

Несмотря на то что оценка знакопеременной суммы $T_{1,k}$ не представляет значительных трудностей, рассмотрение явного вида O -члена в (1.8) позволяет и вовсе избежать применения таких оценок и вывести равенство (1.9) с гораздо более точным остаточным членом. Это и составляет цель настоящей работы.

Пусть, как и выше, $r(n) = \Delta(n) - \Delta(n-1)$, ε – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 10^{-3}$, N, M – целые числа, $N \geq N_0(\varepsilon) > 1$, $N^{\alpha+\varepsilon_1} \leq M \leq N^{\alpha+\varepsilon}$, $\alpha = 27/82$, $\varepsilon_1 = 0.9\varepsilon$. Для неотрицательных целых p и q положим

$$T_{p,q} = \sum_{N < n \leq N+M} r^p(n) \Delta^q(n).$$

Пусть, наконец, B_ν – числа Бернулли: $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, $\dots$, $B_3 = B_5 = B_7 = \dots = 0$.

§ 2. Доказательство формул Сельберга

Доказательство основного результата статьи мы предварим двумя небольшими леммами.

ЛЕММА 1. *Справедливы равенства*

$$\Delta(n) = S(t_n + 0), \quad r(n) = N(t_n + 0) - N(t_{n-1} + 0) - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь формулой (1.1) наряду с определением точек Грама и неравенствами (1.7), находим

$$m = N(t_n + 0) = \pi^{-1}\vartheta(t_n) + 1 + S(t_n + 0) = n + S(t_n + 0),$$

откуда $\Delta(n) = m - n = S(t_n + 0)$. Далее,

$$\begin{aligned} N(t_n + 0) - N(t_{n-1} + 0) &= (\pi^{-1}\vartheta(t_n) + 1 + S(t_n + 0)) \\ &\quad - (\pi^{-1}\vartheta(t_{n-1}) + 1 + S(t_{n-1} + 0)) = 1 + \Delta(n) - \Delta(n-1) = 1 + r(n), \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение леммы.

ЛЕММА 2. *При любых целых $k \geq 1$ и $n \geq 1$ справедливо тождество*

$$\sum_{t_{n-1} < \gamma_m \leq t_n} \Delta_m^k = \sum_{q=0}^k (-1)^q \binom{k}{q} \Delta^q(n) (r^{k-q} + F_{k+1-q}(r)), \quad (2.1)$$

зде $r = r(n)$,

$$F_p(x) = \frac{1}{p} \sum_{\nu=0}^{p-1} \binom{p}{\nu} B_\nu x^{p-\nu}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда промежуток Грама $(t_{n-1}, t_n]$ содержит по меньшей мере одну ординату нуля $\zeta(s)$. Именно, пусть

$$\gamma_{s-1} \leq t_{n-1} < \gamma_s \leq \gamma_{s+1} \leq \dots \leq \gamma_{s+r} \leq t_n < \gamma_{s+r-1},$$

где в силу леммы 1 $r = r(n) \geq 0$. Тогда

$$\Delta(n) = s + r - n, \quad \Delta_s = n - s = r - \Delta(n),$$

$$\Delta_{s+1} = n - s - 1 = r - 1 - \Delta(n), \quad \dots, \quad \Delta_{s+r} = n - s - r = -\Delta(n),$$

откуда

$$\begin{aligned} \sum_{t_{n-1} < \gamma_m \leq t_n} \Delta_m^k &= \sum_{m=s}^{s+r} \Delta_m^k = \sum_{j=0}^r (j - \Delta(n))^k \\ &= \sum_{j=0}^r \sum_{q=0}^k (-1)^q \binom{k}{q} \Delta^q(n) j^{k-q} = \sum_{q=0}^k (-1)^q \binom{k}{q} \Delta^q(n) \sum_{j=0}^r j^{k-q}. \end{aligned}$$

Пользуясь известным свойством чисел Бернулли (см., например, [12; гл. IV, § 1]), при $r \geq 1$ находим

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^r j^{k-q} &= r^{k-q} + \sum_{j=0}^{r-1} j^{k-q} = r^{k-q} + \frac{1}{k-q+1} \sum_{\nu=0}^{k-q} \binom{k-q}{\nu} B_\nu r^{k-q+1-\nu} \\ &= r^{k-q} + F_{k-q+1}(r). \end{aligned}$$

Последнее равенство остается в силе и при $r = 0$, поскольку $F_{k-q+1}(0) = 0$ для любого q , $0 \leq q \leq k$. Таким образом,

$$\sum_{t_{n-1} < \gamma_m \leq t_n} \Delta_m^k = \sum_{q=0}^k (-1)^q \binom{k}{q} \Delta^q(n) (r^{k-q} + F_{k-q+1}(r)).$$

Рассмотрим теперь случай, когда промежуток $(t_{n-1}, t_n]$ не содержит ни одной ординаты. В этом случае согласно лемме 1 имеем

$$r(n) = N(t_n + 0) - N(t_{n-1} + 0) - 1 = -1.$$

Сумма по $t_{n-1} < \gamma_m \leq t_n$ из условия леммы оказывается пустой. Таким образом, достаточно проверить, что правая часть (2.1) обращается в нуль при подстановке $r = -1$. Но это сразу следует из соотношений

$$F_{p+1}(x+1) - F_{p+1}(x) = x^p, \quad F_{p+1}(0) = 0.$$

Лемма доказана.

ПРИМЕР 1. Пусть $k = 2$. Тогда при $r = r(n) \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{t_{n-1} < \gamma_m \leq t_n} \Delta_m^2 &= \sum_{j=0}^r (j - \Delta(n))^2 = \sum_{j=0}^r (j^2 - 2j\Delta(n) + \Delta^2(n)) \\ &= \frac{1}{6} r(r+1)(2r+1) - r(r+1)\Delta(n) + (r+1)\Delta^2(n). \end{aligned}$$

Правая часть равенства обращается в нуль при $r = -1$, совпадая, таким образом, и в этом случае с левой частью.

ТЕОРЕМА 1. При любом $k \geq 1$ имеет место тождество

$$\sum_{t_N < \gamma_m \leq t_{N+M}} \Delta_m^k = (-1)^k T_{0,k} + \alpha^k - \beta^k + F_{k+1}(\alpha) - F_{k+1}(\beta), \quad (2.2)$$

где $\alpha = -\Delta(N)$, $\beta = -\Delta(N+M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2

$$\begin{aligned} \sum_{t_{n-1} < \gamma_m \leq t_n} \Delta_m^k &= \sum_{q=0}^k (-1)^q \binom{k}{q} r^{k-q}(n) \Delta^q(n) \\ &+ \sum_{q=0}^k \frac{(-1)^q}{k+1-q} \binom{k}{q} \sum_{p=1}^{k-q+1} \binom{k+1-q}{p} B_{k+1-q-p} r^p(n) \Delta^q(n). \end{aligned}$$

Суммируя обе части этого равенства по n и обозначая левую часть (2.2) через V_k , находим

$$\begin{aligned} V_k &= \sum_{q=0}^k (-1)^q \binom{k}{q} T_{k-q,q} + \sum_{q=0}^k \frac{(-1)^q}{k+1-q} \binom{k}{q} \sum_{p=1}^{k-q+1} \binom{k+1-q}{p} B_{k+1-q-p} T_{p,q} \\ &= \frac{1}{k+1} T_{k+1,0} + \frac{1}{2} T_{k,0} + \frac{1}{k+1} \sum_{p=1}^{k-1} \binom{k+1}{p} B_{k+1-p} T_{p,0} \\ &+ \sum_{q=1}^k (-1)^q \binom{k}{q} T_{k-q,q} + \sum_{q=1}^k \frac{(-1)^q}{k+1-q} \binom{k}{q} \sum_{p=1}^{k-q+1} \binom{k+1-q}{p} B_{k+1-q-p} T_{p,q}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Выразим теперь каждую из сумм $T_{p,0}$, $1 \leq p \leq k+1$, через суммы $T_{p-q,q}$, $1 \leq q \leq p-1$. Для этого воспользуемся тождеством

$$\Delta^p(n) - \Delta^p(n-1) = \Delta^p(n) - (\Delta(n) - r(n))^p = \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^{p-q-1} \binom{p}{q} r^{p-q}(n) \Delta^q(n).$$

Суммируя обе его части по n и полагая $D_p = \Delta^p(N+M) - \Delta^p(N)$, будем иметь

$$\begin{aligned} D_p &= \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^{p-q-1} \binom{p}{q} T_{p-q,q}, \\ T_{p,0} &= (-1)^{p-1} D_p + \sum_{q=1}^{p-1} (-1)^{q-1} \binom{p}{q} T_{p-q,q}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Заменяя в (2.3) величины $T_{p,0}$ их выражениями (2.4), заметим следующее. Так как слагаемое, содержащее $T_{0,k}$, в формулах (2.4) не встречается ни при каком p , то коэффициент, с которым $T_{0,k}$ входит в (2.3), равен $(-1)^k \binom{k}{k} = (-1)^k$.

Далее, при подстановке в (2.3) выражения для $T_{p,0}$ ($p \neq k$) возникает слагаемое

$$\frac{(-1)^{p-1} D_p}{k+1} \binom{k+1}{p} B_{k+1-p} = \binom{k+1}{p} \frac{B_{k+1-p}}{k+1} (\alpha^p - \beta^p).$$

Коэффициент, с которым в получившееся выражение будет входить сумма $T_{p-q,q}$, $1 \leq q \leq p-1$, равен

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{q-1}}{k+1} \binom{k+1}{p} \binom{p}{q} B_{k+1-p} + \frac{(-1)^q}{k+1-q} \binom{k}{q} \binom{k+1-q}{p-q} B_{k+1-p} \\ & = (-1)^{q-1} B_{k+1-p} \left(\frac{1}{k+1} \binom{k+1}{p} \binom{p}{q} - \frac{1}{k+1-q} \binom{k}{q} \binom{k+1-q}{p-q} \right) = 0. \end{aligned}$$

Наконец, при подстановке в (2.3) выражения для $T_{k,0}$ возникает слагаемое

$$\frac{1}{2}(-1)^{k-1} D_k = \frac{1}{2}(\alpha^k - \beta^k);$$

коэффициент при сумме $T_{k-q,q}$, $1 \leq q \leq k-1$, окажется равным

$$\frac{1}{2}(-1)^{q-1} \binom{k}{q} + (-1)^q \binom{k}{q} + \frac{(-1)^q B_1}{k+1-q} \binom{k}{q} \binom{k+1-q}{k-q} = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} V_k &= (-1)^k T_{0,k} + \frac{1}{2}(\alpha^k - \beta^k) + \sum_{p=1, p \neq k}^{k+1} \binom{k+1}{p} \frac{B_{k+1-p}}{k+1} (\alpha^p - \beta^p) \\ &= (-1)^k T_{0,k} + \alpha^k - \beta^k + \frac{1}{k+1} \sum_{q=0}^k \binom{k+1}{q} B_q (\alpha^{k+1-q} - \beta^{k+1-q}) \\ &= (-1)^k T_{0,k} + \alpha^k - \beta^k + F_{k+1}(\alpha) - F_{k+1}(\beta). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ПРИМЕР 2. Пусть $k = 2$. Суммируя по n обе части равенства

$$\sum_{t_{n-1} < \gamma_m \leq t_n} \Delta_m^2 = \frac{1}{3}r^3 + \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{6}r - r^2\Delta(n) - r\Delta(n) + r\Delta^2(n) + \Delta^2(n)$$

из примера 1, находим

$$V_2 = \frac{1}{3}T_{3,0} + \frac{1}{2}T_{2,0} + \frac{1}{6}T_{1,0} - T_{2,1} - T_{1,1} + T_{1,2} + T_{0,2}. \quad (2.5)$$

Далее, из тождеств

$$\begin{aligned} \Delta^3(n) - \Delta^3(n-1) &= \Delta^3(n) - (\Delta(n) - r)^3 = 3r\Delta^2(n) - 3r^2\Delta(n) + r^3, \\ \Delta^2(n) - \Delta^2(n-1) &= 2r\Delta(n) - r^2, \\ \Delta(n) - \Delta(n-1) &= r \end{aligned}$$

суммированием по n находим

$$D_3 = 3T_{1,2} - 3T_{2,1} + T_{3,0}, \quad D_2 = 2T_{1,1} - T_{2,0}, \quad D_1 = T_{1,0},$$

откуда

$$T_{3,0} = D_3 - 3T_{1,2} + 3T_{2,1}, \quad T_{2,0} = -D_2 + 2T_{1,1}, \quad T_{1,0} = D_1.$$

Подставляя эти выражения в (2.5), будем иметь

$$\begin{aligned} V_2 &= \left(\frac{1}{3}D_3 - T_{1,2} + T_{2,1} \right) + \left(-\frac{1}{2}D_2 + T_{1,1} \right) + \frac{1}{6}D_1 \\ &\quad - T_{2,1} - T_{1,1} + T_{1,2} + T_{0,2} = T_{0,2} + \frac{1}{3}D_3 - \frac{1}{2}D_2 + \frac{1}{6}D_1. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. При любом целом $k \geq 1$ имеет место оценка

$$\left| \sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^k - (-1)^k \sum_{N < n \leq N+M} \Delta^k(n) \right| \leq 16k! (9 \ln N)^{k+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, пользуясь оценкой $|S(t)| \leq 8.9 \ln t$ (см. [1]), находим $|D_p| \leq 2H^p$, где $H = 9 \ln N$. Далее, замечая, что

$$|B_{2s}| = \frac{2(2s)!}{(2\pi)^{2s}} \zeta(2s) < \frac{4(2s)!}{(2\pi)^{2s}},$$

находим $|B_q| < 4q! (2\pi)^{-q}$ при любом $q \geq 1$, так что

$$\begin{aligned} |V_k - (-1)^k T_{0,k}| &\leq 2H^k + |F_{k+1}(\alpha) - F_{k+1}(\beta)| \\ &\leq 2H^k + \frac{1}{k+1} \sum_{q=0}^k \binom{k+1}{q} |B_q| 2H^{k+1-q} \\ &\leq 2H^k + \frac{2}{k+1} \sum_{q=0}^k \frac{(k+1)!}{(k+1-q)! q!} \frac{4q!}{(2\pi H)^q} H^{k+1} \\ &\leq 2H^k + 8k! H^{k+1} \sum_{q=0}^k \frac{1}{(k+1-q)!} < 2H^k + 8(e-1)k! H^{k+1} < 14k! H^{k+1}. \end{aligned}$$

Из равенств $N(t_N + 0) = N + \Delta(N)$, $N(t_{N+M} + 0) = N + M + \Delta(N + M)$ следует, что сумма V_k отличается от суммы $\sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^k$ не более чем $|\Delta(N)| + |\Delta(N + M)|$ слагаемыми, каждое из которых не превосходит H^k по абсолютной величине. Замечая, что $2H \cdot H^k + 14k! H^{k+1} \leq 16k! H^{k+1}$, приходим к искомому утверждению.

ТЕОРЕМА 2. Пусть k – целое число, $1 \leq k \leq \sqrt{\ln \ln N}$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^{2k} &= \frac{(2k)!}{k!} \frac{M}{(2\pi)^{2k}} (\ln \ln N)^k \left(1 + \frac{1.1\theta A^k}{\sqrt{\ln \ln N}} \right), \\ \left| \sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^{2k-1} \right| &\leq \frac{3.6}{\sqrt{B}} (Bk)^k M (\ln \ln N)^{k-1}, \end{aligned}$$

где $|\theta| \leq 1$, $A = e^{21} \varepsilon^{-1.5}$, $B = e^{34} \varepsilon^{-3}$.

Доказательство этого утверждения сразу получается из следствия теоремы 1 и теорем 1, 2 работы [3].

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательство леммы 2, теоремы 1 и ее следствия, по сути, не используют специфику последовательностей $\{\gamma_n\}$, $\{t_n\}$. В действительности аналоги перечисленных утверждений имеют место и в более общей ситуации.

Именно, пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – неубывающие неограниченные последовательности с условием $\beta_1 < \alpha_2 \leq \beta_2$. Для фиксированного $n \geq 1$ определим номер $m = m(n)$ из неравенств $\beta_{m-1} < \alpha_n \leq \beta_m$ и положим $\Delta_n = m - n$. Аналогично, при фиксированном $\nu \geq 2$ определим $\mu = \mu(\nu)$ из условий $\alpha_\mu \leq \beta_\nu < \alpha_{\mu+1}$ и положим $\Delta(\nu) = \mu - \nu$. Пусть, наконец, $D = D(N)$ обозначает максимум из

величин $|\Delta_n|$, $|\Delta(n)|$ по всем $n \leq 2N$. Тогда при любом целом $k \geq 1$ имеет место оценка

$$\left| \sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^k - (-1)^k \sum_{N < n \leq N+M} \Delta^k(n) \right| \leq 16k! D^{k+1}.$$

Автор искренне благодарен А. В. Устинову, который тщательно ознакомился с рукописью статьи и прислал ряд ценных замечаний.

Список литературы

- [1] А. А. Карацуба, М. А. Королёв, “Аргумент дзета-функции Римана”, *УМН*, **60**:3 (2005), 41–96; англ. пер.: А. А. Karatsuba, М. А. Korolev, “The argument of the Riemann zeta function”, *Russian Math. Surveys*, **60**:3 (2005), 433–488.
- [2] Н. von Mangoldt, “Zur Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Funktion $\gamma(t)$ ”, *Math. Ann.*, **60**:1 (1905), 1–19.
- [3] М. А. Королёв, “Закон Грама и гипотеза Сельберга о распределении нулей дзета-функции Римана”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:4 (2010), 83–118; англ. пер.: М. А. Korolev, “Gram’s law and Selberg’s conjecture on the distribution of zeros of the Riemann zeta function”, *Izv. Math.*, **74**:4 (2010), 743–780.
- [4] М. А. Korolev, “Gram’s law and the argument of the Riemann zeta function”, *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, **92**:106 (2012) (в печати).
- [5] М. Korolev, “On Gram’s law in the theory of Riemann zeta function”, *Международная конференция “Диофантовы приближения. Современное состояние и приложения”* (Минск, Беларусь, 2011), Ин-т матем. НАН Беларуси, Минск, 2011, 37–38.
- [6] М. А. Королёв, “О законе Грама в теории дзета-функции Римана”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:2 (2012), 67–102; англ. пер.: М. А. Korolev, “On Gram’s law in the theory of the Riemann zeta function”, *Izv. Math.*, **76**:2 (2012), 275–309.
- [7] A. Selberg, “The zeta-function and the Riemann hypothesis”, *C. R. Dixieme Congrès Math. Scandinaves* 1946, Jul. Gjellerups Forlag, Copenhagen, 1947, 187–200.
- [8] J. I. Hutchinson, “On the roots of the Riemann zeta function”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **27**:1 (1925), 49–60.
- [9] E. C. Titchmarsh, “The zeros of the Riemann zeta-function”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **151**:873 (1935), 234–255.
- [10] A. Fujii, “Gram’s law for the zeta zeros and the eigenvalues of Gaussian unitary ensembles”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **63**:10 (1987), 392–395.
- [11] T. Trudgian, “On the success and failure of Gram’s law and the Rosser rule”, *Acta Arith.*, **148**:3 (2011), 225–256.
- [12] А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, ГИФМЛ, М., 1959; англ. пер.: А. О. Gel’fond, *Calculus of finite differences*, Hindustan Publ., Delhi, 1971.

М. А. Королёв (М. А. Korolev)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: hardy_ramanujan@mail.ru

Поступила в редакцию

12.08.2011 и 28.10.2011