Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Довгошей, Е. А. Петров, Субдоминантная псевдоультраметрика на графах, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 8, 51–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7925>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 13:09:34

УДК 519.173+515.124

А. А. Довгошей, Е. А. Петров

Субдоминантная псевдоультраметрика на графах

Пусть (G, w) — взвешенный граф. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых вес $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ продолжается до псевдоультраметрики на $V(G)$, получен критерий единственности такого продолжения. Доказано, что граф является полным k -дольным с $k \geq 2$ тогда и только тогда, когда для любого веса, продолжающегося до псевдоультраметрики, среди всех таких продолжений найдется наименьшая псевдоультраметрика, согласованная с w . Дана структурная характеристика графов, для которых субдоминантная псевдоультраметрика является ультраметрикой для любого строго положительного веса, продолжающегося до псевдоультраметрики.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: взвешенный граф, бесконечный граф, ультраметрическое пространство, метрика кратчайшего пути, полный k -дольный граф.

DOI: 10.4213/sm7925

§ 1. Введение

В этой работе под *графом* мы понимаем пару (V, E) , состоящую из непустого множества V и (возможно пустого) множества E , элементы которого есть неупорядоченные пары различных точек из V . Для графа $G = (V, E)$ множество $V = V(G)$ называется *множеством вершин*, а $E = E(G)$ — *множеством ребер*.

В основном мы будем придерживаться терминологии, принятой в [1]. Приведем некоторые определения. Граф H является *подграфом* графа G , $H \subseteq G$, если $V(H) \subseteq V(G)$ и $E(H) \subseteq E(G)$. Напомним, что G называется *полным*, если любые две различные вершины u, v являются *смежными*, $\{u, v\} \in E(G)$. Граф G *конечен*, если $|V(G)| < \infty$, а если $E(G) = \emptyset$, то G — *пустой граф*. Конечный непустой граф $P \subseteq G$ называется *путем* (в G), если вершины из P можно без повторений занумеровать в последовательность $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ так, что

$$(\{v_i, v_j\} \in E(P)) \iff (|i - j| = 1).$$

Мы будем отождествлять путь P с последовательностью $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ и говорить, что P соединяет v_1 и v_n . Конечный подграф $C \subseteq G$ называется *циклом*, если $|V(C)| \geq 3$ и существует нумерация $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, $n = |V(C)|$, его вершин такая, что

$$(\{v_i, v_j\} \in E(C)) \iff (|i - j| = 1 \text{ или } |i - j| = n - 1).$$

Две вершины в графе *связаны*, если существует соединяющий их путь. *Связный граф* – граф, в котором все вершины связаны.

Граф $G = (V, E)$ вместе с функцией $w: E \rightarrow \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ называется *взвешенным*, а функция w – *весом* или *весовой функцией*. Взвешенные графы будем обозначать через (G, w) .

Напомним теперь необходимые определения из теории метрических пространств. *Ультраметрикой* на множестве X называется функция $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ такая, что при всех $x, y, z \in X$:

- (i) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (ii) $d(x, y) = 0 \iff (x = y)$,
- (iii) $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$.

Если (ii) заменяется на более слабое условие (ii') $d(x, x) = 0$, то d – *псевдоультраметрика*. Неравенство (iii) часто называют *сильным неравенством треугольника*.

Функция $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$, удовлетворяющая обычному неравенству треугольника и свойствам (i)–(ii'), называется *псевдометрикой*.

Если (G, w) – взвешенный граф и

$$2 \max_{e \in E(C)} w(e) \leq \sum_{e \in E(C)} w(e) \quad (1.1)$$

для всех циклов $C \subseteq G$, то существует псевдометрика $d: V(G) \times V(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ такая, что

$$w(\{x, y\}) = d(x, y) \quad (1.2)$$

для всех $\{x, y\} \in E(G)$. Для взвешенных графов (G, w) со связным G в качестве такой псевдометрики можно взять хорошо известную “псевдометрику кратчайшего пути”

$$d_w(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ \inf_{P \in \mathfrak{P}_{x,y}} \sum_{e \in P} w(e), & \text{если } x \neq y, \end{cases} \quad (1.3)$$

где $\mathfrak{P}_{x,y}$ – множество путей, соединяющих x и y в G . Этот результат был доказан в [2] и там же сформулирован следующий вопрос. При каких условиях вес w является псевдоультраметризуемым, т.е. существует псевдоультраметрика d , продолжающая w в том смысле, что (1.2) справедливо для всех ребер $\{x, y\}$ графа G ?

В настоящей работе получены следующие результаты.

- Теорема 2. Критерием псевдоультраметризуемости w является наличие в каждом цикле по крайней мере двух ребер максимального веса. Это дает ответ на приведенный выше вопрос.
- Теорема 1, теорема 3, следствие 1. Функция

$$\rho_w(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ \inf_{P \in \mathfrak{P}_{x,y}} (\max_{e \in P} w(e)), & \text{если } x \neq y, \end{cases} \quad (1.4)$$

дает субдоминантную псевдоультраметрику для произвольного веса w и является наибольшей псевдоультраметрикой для псевдоультраметризуемого w .

- Теорема 5, следствие 7. Для связных G существование строго положительного псевдоультраметризуемого веса w , не имеющего продолжающей его ультраметрики, эквивалентно существованию двух вершин $u^*, v^* \in V(G)$ и последовательности путей $F_i \in \mathfrak{P}_{u^*, v^*}$, для которой $\limsup_{i \rightarrow \infty} V(F_i)$ – независимое подмножество $V(G)$.
- Теорема 6. G – полный k -дольный граф тогда и только тогда, когда для любого псевдоультраметризуемого веса w найдется наименьшая продолжающая его псевдоультраметрика.
- Теорема 7. Критерий единственности продолжения в терминах ε -связности вершин графа.

Исходной точкой доказательства основных результатов в статье служит формула (1.4), которую можно рассматривать как “естественный ультраметрический аналог” псевдометрики кратчайшего пути. Действительно, можно показать, что метрическое пространство (X, d) будет ультраметрическим, если и только если d^α – метрика при любом $\alpha > 0$ (см. [3]). Переходя теперь от $\sum_{e \in P} w(e)$ в (1.3) к $(\sum_{e \in P} w^\alpha(e))^{1/\alpha}$ и пределу при $\alpha \rightarrow \infty$, получаем выражение $\max_{e \in P} w(e)$, входящее в (1.4).

Приведенные соображения “объясняют” почему многие результаты настоящей работы являются аналогичными соответствующим результатам из [2]. В более формальном виде аналогия между псевдометрикой кратчайшего пути и субдоминантной псевдоультраметрикой отражена в следствиях 4–6 и утверждении 1.

Отметим, что задача построения продолжения веса, заданного на ребрах графа, до ультраметрики или, в более общем случае, до метрики некоторого специального вида естественным образом возникает при исследовании вопроса о том, обладает или нет массив данных, полученных в результате эксперимента над парами объектов, свойствами, интересующими исследователя.

§ 2. Субдоминантная псевдоультраметрика

В следующей лемме и далее мы отождествляем псевдоультраметрическое пространство (X, d) с полным взвешенным графом (G, w_d) , для которого $V(G) = X$ и

$$w_d(\{x, y\}) = d(x, y) \quad (2.1)$$

для любой пары различных точек $x, y \in X$.

ЛЕММА 1. Пусть (X, d) – псевдоультраметрическое пространство, тогда для любого цикла C с $V(C) \subseteq X$ найдутся как минимум два различных ребра e_1, e_2 , для которых

$$w_d(e_1) = w_d(e_2) = \max_{e \in E(C)} w_d(e). \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q(C)$ – число ребер цикла C . Если $q(C) = 3$, то (2.2) следует из сильного неравенства треугольника. Предположим (2.2)

верно при $q(C) \leq n$, но существует цикл с $q(C) = n + 1$, имеющий ровно одно ребро $e_1 = \{x, y\}$ такое, что

$$w_d(e_1) = \max_{e \in C} w_d(e).$$

Пусть z – вершина цикла C , смежная с y и отличная от x . В силу единственности ребра максимального веса имеем

$$d(y, z) < d(x, y).$$

Отсюда и из сильного неравенства треугольника следует $d(x, z) = d(x, y)$. Пусть C_1 – цикл, для которого

$$V(C_1) = V(C) \setminus \{y\}, \quad E(C_1) = (E(C) \setminus \{\{x, y\}, \{y, z\}\}) \cup \{\{x, z\}\}.$$

Тогда $q(C_1) = n$ и $\{x, z\}$ – единственное ребро максимального веса, что противоречит предположению индукции.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вероятно, доказанная лемма является известной. Во всяком случае, наличие в графе двух ребер максимальной длины – часто встречающийся факт при работе с ультраметриками и их обобщениями. Например, так называемые 2-ультраметрические пространства характеризуются тем, что в любом четырехточечном подпространстве по крайней мере два ребра имеют длину, равную диаметру подпространства, см. [4].

Перейдем теперь к определению субдоминантной псевдоультраметрики.

На множестве $\mathfrak{F}$ псевдометрик, заданных на X , определим частичный порядок $\preceq$ как

$$d_1 \preceq d_2 \iff \forall x, y \in X : d_1(x, y) \leq d_2(x, y). \quad (2.3)$$

В [5] для данного метрического пространства (X, d) субдоминантной ультраметрикой называется наибольший элемент частично упорядоченного множества $(\mathfrak{F}_d, \preceq)$, где $\mathfrak{F}_d \subseteq \mathfrak{F}$ – множество ультраметрик δ таких, что

$$\delta(x, y) \leq d(x, y)$$

для всех $x, y \in X$. Обобщим это определение на взвешенные графы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть (G, w) – непустой взвешенный граф, а $\mathfrak{F}_{w,u}$ – семейство всех псевдоультраметрик ρ таких, что

$$\rho(u, v) \leq w(\{u, v\})$$

для любого ребра $\{u, v\} \in E(G)$. Если частично упорядоченное множество $(\mathfrak{F}_{w,u}, \preceq)$ содержит наибольший элемент, то называем его субдоминантной псевдоультраметрикой для веса w .

Отметим, что $\mathfrak{F}_{w,u} \neq \emptyset$, так как нулевая псевдоультраметрика

$$\rho(u, v) = 0 \quad \forall u, v \in V(G)$$

принадлежит $\mathfrak{F}_{w,u}$.

Перейдем теперь к построению субдоминантной псевдоультраметрики.

Пусть u, v – две различные вершины связного взвешенного графа (G, w) . Как и в (1.3), обозначим через $\mathfrak{P}_{u,v}$ множество путей, соединяющих u и v . Определим на декартовом квадрате $V(G) \times V(G)$ функцию ρ_w формулой (1.4).

ТЕОРЕМА 1. *Функция ρ_w является субдоминантной псевдоультраметрикой для любого непустого связного взвешенного графа (G, w) .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим выполнение сильного неравенства треугольника

$$\rho_w(u, v) \leq \max\{\rho_w(u, p), \rho_w(p, v)\} \quad (2.4)$$

для любых трех различных вершин $u, v, p \in V(G)$.

Пусть ε – произвольное положительное число. Существуют пути $P_1 \in \mathfrak{P}_{u,p}$ и $P_2 \in \mathfrak{P}_{p,v}$ такие, что

$$\rho_w(u, p) + \varepsilon \geq \max_{e \in P_1} w(e), \quad \rho_w(p, v) + \varepsilon \geq \max_{e \in P_2} w(e). \quad (2.5)$$

Подграф $G_1 \subseteq G$ с $V(G_1) = V(P_1) \cup V(P_2)$ и $E(G_1) = E(P_1) \cup E(P_2)$ является связным. Пусть P_3 – путь в G_1 , соединяющий u и v . Тогда, используя (2.5), находим

$$\rho_w(u, v) \leq \max_{e \in P_3} w(e) \leq \max\{\max_{e \in P_1} w(e), \max_{e \in P_2} w(e)\} \leq \max\{\rho_w(u, p) + \varepsilon, \rho_w(p, v) + \varepsilon\}.$$

Отсюда, устремляя ε к нулю, получим (2.4).

Осталось проверить, что ρ_w – субдоминантная. Допустим, что существуют $\rho \in \mathfrak{F}_{w,u}$ и $v_1, v_2 \in V(G)$, для которых

$$\rho(v_1, v_2) > \rho_w(v_1, v_2). \quad (2.6)$$

Это неравенство и (1.4) влекут существование пути $P \in \mathfrak{P}_{v_1, v_2}$, для которого

$$\rho(v_1, v_2) > \max_{e \in P} w(e).$$

Заметим, что $\rho(u, v) \leq w(\{u, v\})$ для всех $\{u, v\} \in E(G)$. Следовательно, путь P не содержит $\{v_1, v_2\}$. Рассмотрим в псевдоультраметрическом пространстве $(V(P), \rho)$ цикл C с

$$V(C) = V(P), \quad E(C) = E(P) \cup \{\{v_1, v_2\}\}.$$

Тогда $\{v_1, v_2\}$ – единственное ребро цикла C , на котором достигается $\max\{\rho(x, y) : \{x, y\} \in E(C)\}$, что противоречит лемме 1. Таким образом, для любых $v_1, v_2 \in V(G)$ и любой $\rho \in \mathfrak{F}_{w,u}$ выполнено неравенство $\rho(v_1, v_2) \leq \rho_w(v_1, v_2)$, т.е. ρ_w – наибольший элемент частично упорядоченного множества $(\mathfrak{F}_{w,u}, \preceq)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если G – конечный граф, а вес w определяется некоторой метрикой, как в (1.2), то субдоминантная псевдоультраметрика ρ_w будет ультраметрикой. Для полных G этот классический случай рассматривался еще в [6]. Эффективную процедуру для вычисления субдоминантной ультраметрики для конечных метрических пространств можно найти в [7] и [8].

Перейдем теперь к изучению связи между псевдометрикой кратчайшего пути и субдоминантной псевдоультраметрикой.

По аналогии с определением 1 введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть (G, w) – непустой взвешенный граф, а $\mathfrak{F}_{w,m}$ – множество всех псевдометрик d таких, что

$$d(u, v) \leq w(\{u, v\}) \quad (2.7)$$

для всех ребер $\{u, v\} \in E(G)$. Субдоминантной псевдометрикой (для веса w) назовем наибольший элемент частично упорядоченного множества $(\mathfrak{F}_{w,m}, \preceq)$, если такой элемент существует.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть (G, w) – непустой связный взвешенный граф. Тогда псевдометрика d_w , заданная формулой (1.3), является субдоминантной псевдометрикой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (2.7) выполняется для любого $\{u, v\} \in E(G)$. Это следует из (1.3) и того, что двучленная последовательность u, v – путь, принадлежащий $\mathfrak{P}_{u,v}$. Следовательно, $d_w \in \mathfrak{F}_{w,m}$. Предположим, что существуют $d \in \mathfrak{F}_{w,m}$ и $u, p \in V(G)$, для которых

$$d(u, p) > d_w(u, p).$$

Тогда найдется путь $(u = x_1, \dots, x_n = p) \in \mathfrak{P}_{u,p}$ такой, что

$$d(u, p) > \sum_{i=1}^{n-1} w(x_i, x_{i+1}). \quad (2.8)$$

Так как $d \in \mathfrak{F}_{w,m}$, то $w(x_i, x_{i+1}) \geq d(x_i, x_{i+1})$ при $i = 1, \dots, n-1$. Отсюда и из (2.8) находим

$$d(x_1, x_n) \geq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}),$$

что противоречит неравенству треугольника.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть (G, w) – непустой связный взвешенный граф. Тогда псевдоультраметрика ρ_w , построенная по правилу (1.4), является субдоминантной псевдоультраметрикой для d_w , т.е. $\rho_w \preceq d_w$ и $\rho \preceq \rho_w$ для каждой псевдоультраметрики ρ , удовлетворяющей $\rho \preceq d_w$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через ρ_w^* субдоминантную псевдоультраметрику для d_w . Из (2.1) и (1.3) следует $\rho_w \preceq d_w$, а значит, $\rho_w \preceq \rho_w^*$. Обратное соотношение $\rho_w^* \preceq \rho_w$ следует из того, что любая псевдоультраметрика ρ , удовлетворяющая $\rho \preceq d_w$, принадлежит множеству $\mathfrak{F}_{w,u}$ (см. определение 1). Таким образом, $\rho_w^* = \rho_w$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Интерес представляет вопрос о том, когда d_w и ρ_w являются метрикой и, соответственно, ультраметрикой. Мы вернемся к этому в §4. Отметим, что задача нахождения критерия существования субдоминантной ультраметрики ставилась в [9].

§ 3. Псевдоультраметризация взвешенных графов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть (G, w) – взвешенный граф, $d: V(G) \times V(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ – ультраметрика (псевдоультраметрика). Будем говорить, что d продолжает w , если (1.2) выполняется при всех $\{x, y\} \in E(G)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Вес w является ультраметризуемым (псевдоультраметризуемым), если существует продолжающая его ультраметрика (псевдоультраметрика).

Следующая теорема дает критерий псевдоультраметризуемости веса w .

ТЕОРЕМА 2. Пусть (G, w) – непустой взвешенный граф. Вес w псевдоультраметризуем тогда и только тогда, когда для любого цикла $C \subseteq G$ существуют как минимум два различных ребра $e_1, e_2 \in E(C)$ таких, что

$$w(e_1) = w(e_2) = \max_{e \in E(C)} w(e). \quad (3.1)$$

Если G – связный граф, а w – псевдоультраметризуемый вес, то субдоминантная псевдоультраметрика продолжает w .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 следует, что (3.1) выполнено для любого цикла $C \subseteq G$, если w – псевдоультраметризуемый вес.

Обратно, предположим для любого цикла $C \subseteq G$ найдутся $e_1, e_2 \in E(C)$ такие, что (3.1) выполнено и докажем псевдоультраметризуемость w . Рассмотрим сначала случай связного графа G . В силу теоремы 1 достаточно доказать, что для всех ребер $\{u, v\} \in E(G)$ имеет место равенство

$$\rho_w(u, v) = w(\{u, v\}), \quad (3.2)$$

где ρ_w – субдоминантная псевдоультраметрика для w . По определению мы имеем

$$\rho_w(u, v) \leq w(\{u, v\}).$$

Если это неравенство строгое, то существует путь $P \in \mathfrak{P}_{u,v}$, для которого

$$\max_{e \in P} w(e) < w(\{u, v\}).$$

Из последнего неравенства следует, что $\{u, v\} \notin E(P)$. Так как, если $\{u, v\} \in E(G)$, то существует цикл C , для которого

$$V(C) = V(P), \quad E(C) = E(P) \cup \{\{u, v\}\}.$$

Если e_i – ребро цикла C , отличное от $\{u, v\}$, то $e_i \in E(P)$, а значит,

$$w(e_i) \leq \max_{e \in P} w(e) < w(\{u, v\}) = \max_{e \in C} w(e),$$

что противоречит (3.1). Псевдоультраметризуемость w доказана для связного графа G .

Пусть теперь G не является связным. Рассмотрим $\{G_i : i \in \mathfrak{I}\}$ – множество компонент связности графа G , где $\mathfrak{I}$ – индексирующее множество. Для каждого

Рис. 1. Переход от несвязного графа G к связному $\tilde{G}$

$i \in \mathcal{I}$ выберем $v_i \in V(G_i)$. Зафиксируем индекс $i_0 \in \mathcal{I}$. Рассмотрим новый граф $\tilde{G}$ с

$$V(\tilde{G}) = V(G), \quad E(\tilde{G}) = E(G) \cup \{\{v_i, v_{i_0}\} : i \in \mathcal{I} \setminus \{i_0\}\}.$$

Продолжим w до функции $\tilde{w}: E(\tilde{G}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ как

$$\tilde{w}(e) = \begin{cases} w(e), & \text{если } e \in E(G), \\ c_i, & \text{если } e = \{v_i, v_{i_0}\}, i \in \mathcal{I} \setminus \{i_0\}, \end{cases} \quad (3.3)$$

где c_i – произвольные неотрицательные константы. Так как $\tilde{G}$ – связный граф, то для завершения доказательства теоремы достаточно установить (3.1) с $w = \tilde{w}$ для любого цикла $C \subseteq \tilde{G}$. Последнее следует из того, что каждый цикл $C \subseteq \tilde{G}$ является циклом в G . Это легко заметить, нарисовав соответствующую картинку (см. рис. 1). Формальное доказательство таково. Допустим $C \subseteq \tilde{G}$, но $C \not\subseteq G$. Тогда в C существует ребро вида $\{v_{i_0}, v_{i_1}\}$, $i_1 \in \mathcal{I} \setminus \{i_0\}$, и найдется единственное ребро, инцидентное v_{i_0} и отличное от $\{v_{i_0}, v_{i_1}\}$. Из определения графа $\tilde{G}$ следует, что это ребро вида $\{v_{i_0}, v_{i_2}\}$. Удаляя из цикла C вершину v_{i_0} , получим путь P ,

$$V(P) = V(C) \setminus \{v_{i_0}\}, \quad E(P) = E(C) \setminus \{\{v_{i_0}, v_{i_1}\}, \{v_{i_0}, v_{i_2}\}\},$$

соединяющий v_{i_1} и v_{i_2} . Так как $E(P) \subseteq E(G)$, то v_{i_1} и v_{i_2} лежат в одной компоненте связности, что противоречит их определению.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условие (3.1), очевидно, эквивалентно сильному неравенству треугольника, если цикл C содержит ровно три вершины. Заметим также, что

$$\sum_{e \in E(C)} w(e) \geq w(e_1) + w(e_2) = 2 \max_{e \in E(C)} w(e),$$

если (3.1) выполнено. Таким образом, условие псевдоультраметризуемости веса влечет условие его псевдометризуемости, как и следовало ожидать.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Непосредственно из теоремы 2 следует, что псевдоультраметризуемость веса является локальным свойством, т.е. если для любого конечного подграфа H взвешенного графа (G, w) ограничение веса w на $E(H)$ – псевдоультраметризуемый вес, то и сам вес w псевдоультраметризуем.

Напомним, что *лесом* называется граф не имеющий циклов, а *дерево* – это граф, являющийся связным лесом.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть G – непустой граф. G является лесом, если и только если любой вес $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ псевдоультраметризуем.

Для доказательства достаточно отметить, что существование цикла $C \subseteq G$ влечет существование веса $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$, для которого условие (3.1) не выполняется.

Пусть (G, w) – непустой взвешенный граф с псевдоультраметризуемым весом w . Обозначим через $\mathfrak{U}_w$ семейство всех псевдоультраметрик на $V(G)$, продолжающих w .

ТЕОРЕМА 3. Если граф G связан, то субдоминантная псевдоультраметрика ρ_w является наибольшим элементом частично упорядоченного множества $(\mathfrak{U}_w, \preceq)$. Обратно, если частично упорядоченное множество $(\mathfrak{U}_w, \preceq)$ имеет наибольший элемент, то граф G связан.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F}_{w,u}$ – семейство из определения 1. Предположим, что G – связный граф. Тогда $\mathfrak{F}_{w,u} \supseteq \mathfrak{U}_w$ и субдоминантная псевдоультраметрика ρ_w принадлежит $\mathfrak{F}_{w,u}$. Для доказательства того, что ρ_w – наибольший элемент $(\mathfrak{U}_w, \preceq)$, достаточно проверить соотношение $\rho_w \in \mathfrak{U}_w$, что уже было установлено в теореме 2.

Допустим, что G не является связным. Зафиксируем точки v_{i_0} и v_{i_1} , принадлежащие разным компонентам связности. Рассмотрим взвешенный граф $(\tilde{G}, \tilde{w})$, как это было сделано в доказательстве теоремы 2. Очевидно, что $\mathfrak{U}_w \supseteq \mathfrak{U}_{\tilde{w}}$. Последнее вложение и произвольность постоянных c_i в формуле (3.3) дают равенство

$$\sup_{\rho \in \mathfrak{U}_w} \rho(v_{i_0}, v_{i_1}) = +\infty.$$

Следовательно, для несвязных графов частично упорядоченное множество $(\mathfrak{U}_w, \preceq)$ не содержит наибольшего элемента.

Используя доказанную теорему, легко получить утверждение, обратное к следствию 1.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть (G, w) – непустой взвешенный граф. Если субдоминантная для w псевдоультраметрика существует, то граф G связный.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В следствиях 1 и 3 мы не требуем псевдоультраметризуемости веса w .

Для того чтобы проследить аналогию между ρ_w и d_w , обозначим через $\mathfrak{M}_w$ семейство всех псевдометрик, продолжающих w .

Как показано в [2], для связных G псевдометрика кратчайшего пути d_w принадлежит $\mathfrak{M}_w$ для любого псевдометризуемого w , а если на $\mathfrak{M}_w$ ввести отношение частичного порядка $\preceq$ как на подмножестве частично упорядоченного множества $(\mathfrak{F}, \preceq)$, см. (2.5), то справедлив следующий аналог теоремы 3.

ТЕОРЕМА 4 (см. [2]). Пусть (G, w) – непустой взвешенный граф с псевдометризуемым весом w . Если G связный, то d_w – наибольший элемент частично упорядоченного множества $(\mathfrak{M}_w, \preceq)$. Обратно, если $(\mathfrak{M}_w, \preceq)$ имеет наибольший элемент, то граф G связан.

Теоремы 3 и 4 дают

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть G – непустой граф. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) G – связный граф;
- (ii) частично упорядоченное множество $(\mathfrak{M}_w, \preceq)$ имеет наибольший элемент для любого псевдометризуемого веса $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$;
- (iii) частично упорядоченное множество $(\mathfrak{U}_w, \preceq)$ имеет наибольший элемент для любого псевдоультраметризуемого веса $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Используя следствие 2 и теорему 3 из настоящей работы вместе с утверждением 3.3 и следствием 3.6 из [2], получаем

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть G – непустой граф. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) G – дерево;
- (ii) любой вес $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ псевдометризуем и частично упорядоченное множество $(\mathfrak{M}_w, \preceq)$ содержит наибольший элемент;
- (iii) любой вес $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ псевдоультраметризуем и частично упорядоченное множество $(\mathfrak{U}_w, \preceq)$ содержит наибольший элемент.

Другие примеры, иллюстрирующие аналогию между ρ_w и d_w , даны в следующем параграфе.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Если вес w псевдометризуем, но не псевдоультраметризуем, то возникает задача построения продолжения w , которое было бы “ультраметрично” настолько, насколько это возможно. Подходящую меру “ультраметричности” можно ввести используя так называемый “показатель промежуточности” – верхнюю грань тех $\alpha \geq 1$, для которых d^α продолжает оставаться метрикой для данной метрики d (см. [3], [10]). Отметим, что понятие показателя промежуточности легко обобщается на взвешенные графы и дает при $\alpha = 1$ условие (1.1) псевдометризуемости веса w , а при $\alpha = \infty$ условие (3.1) псевдоультраметризуемости w .

§ 4. Ультраметризация взвешенных графов

В предыдущем параграфе было доказано, что вес $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ является псевдоультраметризуемым тогда и только тогда, когда для любого цикла

$C \subseteq G$ выполнено условие (3.1). Если псевдоультраметризуемый вес w строго положителен, т.е. для любого $e \in E(G)$

$$w(e) > 0,$$

а граф G конечен и связен, то, как легко видеть, субдоминантная псевдоультраметрика ρ_w будет ультраметрикой. Как показывает следующий пример, для бесконечных G строгая положительность w не гарантирует того, что ρ_w будет ультраметрикой.

ПРИМЕР 1. Пусть (G, w) – бесконечный взвешенный граф, изображенный на рис. 2, где

$$\varepsilon_n = w(\{u, s_n\}) = w(\{s_n, t_n\}) = w(\{t_n, v\})$$

– положительные действительные числа такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ и $\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1}$ для любого n . Длина любого цикла $C \subseteq G$ равна шести, а его вершины суть u, s_n, t_n, v, t_m, s_m , где $m > n$. Такой цикл C имеет три различных ребра максимального веса, следовательно, w псевдоультраметризуем. Из определения ρ_w следует

$$\rho_w(u, v) = \max\{w(\{u, s_n\}), w(\{s_n, t_n\}), w(\{t_n, v\})\} = \varepsilon_n.$$

При $n \rightarrow \infty$ получаем $\rho_w(u, v) = 0$.

Рис. 2. Взвешенный граф G с псевдоультраметризуемым положительным весом w , для которого $\mathcal{U}_w$ не содержит ультраметрик

Из теоремы 3 следует, что для связных G множество $\mathcal{U}_w$ содержит ультраметрики тогда и только тогда, когда ρ_w является ультраметрикой.

В настоящем параграфе мы опишем строение графов G , для которых ρ_w является ультраметрикой при любом строго положительном псевдоультраметризуемом весе w .

Отметим, что в работе [11] дана полная характеристика тех метрических пространств (X, d) , для которых субдоминантная для d псевдоультраметрика является ультраметрикой.

Нам понадобится следующая лемма из [2].

ЛЕММА 2. Пусть G – связный граф и u^*, v^* – две несмежные вершины графа G . Пусть $\tilde{F} = \{F_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ – последовательность путей, соединяющих u^* и v^* , для которых выполнено следующие условие:

(i₁) для каждого $e^0 \in E(G)$ существуют $u^0 \in e^0$ и $i = i(e^0)$ такие, что

$$u^0 \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} V(F_{i+k}).$$

Тогда существует подпоследовательность $\{F_{j_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ последовательности $\tilde{F}$ такая, что:

(i₂) при $l \neq k$

$$E(F_{j_l}) \cap E(F_{j_k}) = \emptyset;$$

(i₃) если C – цикл в графе $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_{j_k}$, а

$$k_0 = k_0(C) := \min\{k \in \mathbb{N} : E(C) \cap E(F_{j_k}) \neq \emptyset\}, \quad (4.1)$$

то C и $F_{j_{k_0}}$ имеют по крайней мере два общих ребра.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Здесь и далее под объединением $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} G_i$ подграфов G_i графа G мы понимаем подграф $\tilde{G} \subseteq G$, для которого $V(\tilde{G}) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} V(G_i)$ и $E(\tilde{G}) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} E(G_i)$.

Следующая теорема – основной результат настоящего параграфа.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $G = (V, E)$ – непустой связный граф. Следующие два утверждения эквивалентны:

- (i) для любого строго положительного псевдоультраметризуемого веса w субдоминантная псевдоультраметрика ρ_w является ультраметрикой;
- (ii) для любой пары различных вершин $u^*, v^* \in V(G)$ и произвольной последовательности $\tilde{F}$ путей $F_j \in \mathfrak{P}_{u^*, v^*}$, $j \in \mathbb{N}$, найдется ребро $e^0 = \{u^0, v^0\} \in E(G)$ такое, что для всех $i > 0$

$$u^0, v^0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} V(F_{i+k}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\implies$ (ii). Предположим, условие (ii) не выполнено. Тогда существует пара различных вершин u^*, v^* и существует последовательность $\tilde{F}$ путей $F_j \in \mathfrak{P}_{u^*, v^*}$ таких, что для каждого ребра $e^0 \in E(G)$, $e^0 = \{u^0, v^0\}$, найдется $i \in \mathbb{N}$ и хотя бы одна инцидентная e^0 вершина, например u^0 , такая, что

$$u^0 \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} V(F_{i+k}).$$

Покажем, что в этом случае (i) не выполняется. В силу леммы 2 можем без ограничения общности считать, что

$$E(F_i) \cap E(F_j) = \emptyset \text{ при } i \neq j, \quad (4.2)$$

а любой цикл C из $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} F_j$ имеет по крайней мере два общих ребра с F_{k_0} , где k_0 определяется как в (4.1).

Рассмотрим граф

$$\tilde{G} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i.$$

Пусть $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – строго убывающая последовательность положительных действительных чисел таких, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i = 0$. Определим вес $w_1: E(\tilde{G}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ следующим образом:

$$w_1(e) := \varepsilon_i,$$

если $e \in E(F_i)$. Определение корректно в силу (4.2). Все веса ребер пути F_i , $i \in \mathbb{N}$, равны между собой и веса ребер пути F_{i+1} строго меньше весов ребер пути F_i , $i \in \mathbb{N}$. Любой цикл C , содержащийся в графе $\tilde{G}$, имеет минимум два общих ребра e_1, e_2 с путем F_{k_0} , где k_0 – наименьший порядковый номер из путей, которые пересекаются с циклом C , а значит, веса этих ребер максимальны в этом цикле и равны $w_1(e_1) = w_1(e_2) = \varepsilon_{k_0} = \max_{e \in E(C)} w_1(e)$. В силу теоремы 2 вес w_1 псевдоультраметризуем. Выбрав псевдоультраметризацию $\rho_{w_1}(u, v)$, как в (1.4), мы получаем

$$\rho_{w_1}(u^*, v^*) = \inf_{i \in \mathbb{N}} (\max_{e \in F_i} w(e)) = \inf_{i \in \mathbb{N}} \varepsilon_i = 0. \quad (4.3)$$

Таким образом, ρ_{w_1} – псевдоультраметрика на множестве $V(\tilde{G})$, не являющаяся метрикой.

Используя псевдоультраметрику ρ_{w_1} , продолжим весовую функцию w_1 на множество всех ребер графа G , вершины которых лежат в $V(\tilde{G})$. Докажем, что при этом опять получается строго положительный вес, за которым сохраним обозначение w_1 .

По предположению для хотя бы одной вершины ребра e^0 , например для u^0 , существует индекс i_0 , для которого

$$u^0 \notin V(F_i), \quad (4.4)$$

если $i > i_0$. Пусть F – произвольный путь в $\tilde{G}$, соединяющий u^0 и v^0 , и $e \in E(F)$ – ребро, инцидентное u^0 . Из (4.4) следует

$$e \in \bigcup_{i=1}^{i_0} E(F_i).$$

В силу убывания последовательности $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ мы получаем неравенства $w(e) \geq \varepsilon_{i_0}$ и $\max_{e \in F} w(e) \geq \varepsilon_{i_0} > 0$. А значит,

$$w_1(\{u_0, v_0\}) = \rho_{w_1}(u^0, v^0) > 0.$$

Припишем положительный вес тем ребрам графа G , для которых $u \notin V(\tilde{G})$ или $v \notin V(\tilde{G})$. Максимальный вес ребра e в графе $\tilde{G}$ равен ε_1 . Выберем действительное число $M \geq \varepsilon_1$. Присвоим каждому такому ребру $e = \{u, v\}$ вес $w_2(e) = M$. Кроме того, положим $w_2(e) := \rho_{w_1}(u, v)$ в случае, если $e = \{u, v\}$

с $u, v \in V(\tilde{G})$. Нетрудно видеть, что так определенный вес w_2 , положителен на всех ребрах графа G и является при этом псевдоультраметризуемым. Действительно, если C – цикл в G и все вершины C лежат в $\tilde{G}$, то существование в C двух ребер максимального веса следует из того, что ρ_{w_1} – псевдоультраметрика. Пусть теперь $v \in V(C)$, но $v \notin V(\tilde{G})$, тогда два ребра цикла C , инцидентные v , имеют максимальный вес M . Псевдоультраметризуемость w_2 следует из теоремы 2. Так как $\tilde{G} \subseteq G$ и $w_1 = w_2|_{E(\tilde{G})}$, то из (1.4) следует, что

$$\rho_{w_2}(u, v) \leq \rho_{w_1}(u, v) \quad (4.5)$$

при $u, v \in V(\tilde{G})$. Соотношения (4.3) и (4.5) дают $\rho_{w_2}(u^*, v^*) = 0$. Таким образом, мы нашли строго положительный псевдоультраметризуемый вес w_2 , для которого субдоминантная псевдоультраметрика ρ_{w_2} не является ультраметрикой.

(ii) $\implies$ (i). Пусть (G, w) – взвешенный граф с псевдоультраметризуемым строго положительным весом и выполнено условие (ii). Докажем, что псевдоультраметрика ρ_w , определенная на множестве вершин графа G , является ультраметрикой.

Предположим, что для некоторых вершин u^* и v^* , $u^* \neq v^*$, $\rho_w(u^*, v^*) = 0$. Следовательно, существует последовательность $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такая, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, для которого

$$\max_{e \in F_k} w(e) < \varepsilon \quad (4.6)$$

при $k \geq k(\varepsilon)$. Кроме того, по предположению (ii), найдется ребро $e^0 = \{u^0, v^0\} \in E(G)$, такое, что $u^0, v^0 \in \bigcup_{i=1}^{\infty} V(F_{i+k})$ для всех $k > 0$.

В графе $G_\varepsilon := \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{k(\varepsilon)+i}$ выберем путь P , соединяющий u^0 и v^0 . В силу (4.6) и определения G_ε неравенство

$$w(e) < \varepsilon$$

выполняется при любом $e \in P$. Отсюда и из определения функции ρ_w следует

$$\rho_w(u^0, v^0) \leq \max_{e \in P} w(e) < \varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, получим $\rho_w(u^0, v^0) = 0$, а так как вес w строго положителен и псевдоультраметризуем, то по теореме 2

$$0 < w(\{u^0, v^0\}) = \rho_w(u^0, v^0).$$

Полученное противоречие завершает доказательство.

Доказанная теорема 5 и теорема 3.11 из [2] влекут

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть G – непустой связный граф. Следующие два утверждения эквивалентны:

- (i) для любого строго положительного псевдоультраметризуемого веса $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ субдоминантная псевдоультраметрика ρ_w является ультраметрикой;

- (ii) для любого строго положительного псевдометризуемого $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ псевдометрика кратчайшего пути d_w является метрикой.

Используя теоремы 3 и 5, легко описать структурные свойства графа G , для которого существует строго положительный псевдоультраметризуемый вес w такой, что $\mathfrak{U}_w$ не содержит ни одной ультраметрики.

Для этого напомним некоторые определения.

Для произвольной последовательности множеств $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ верхним пределом этой последовательности ($\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$) называется множество всех элементов a таких, что $a \in A_n$ для бесконечного числа значений индекса n , т.е.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n+k} \right).$$

Подмножество V_0 вершин графа G называется *независимым*, если любые две вершины из V_0 не смежны.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть $G = (V, E)$ – непустой связный граф. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) существует строго положительный псевдоультраметризуемый вес такой, что множество $\mathfrak{U}_w$ не содержит ни одной ультраметрики;
- (ii) существуют две вершины $u^*, v^* \in V(G)$ и последовательность путей $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, $F_j \in \mathfrak{P}_{u^*, v^*}$, такая, что

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} V(F_j)$$

есть независимое множество.

Приведем теперь примеры графов G , для которых любой строго положительный псевдоультраметризуемый вес w продолжается до ультраметрики.

ПРИМЕР 2. Если в каждой компоненте связности непустого графа $G = (V, E)$ содержится не более одной вершины бесконечной степени, то для любого строго положительного псевдоультраметризуемого веса $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ найдется ультраметрика $\rho \in \mathfrak{U}_w$.

Действительно, пусть $\{G_i : i \in \mathcal{I}\}$ – множество компонент связности графа G . Построим граф $\tilde{G}$, если необходимо, до связного графа $\tilde{G}$ как при доказательстве теоремы 2. Если произвольные вершины u^* и v^* лежат в одной и той же компоненте связности G_i , то одна из вершин, например u^* , инцидентна конечному числу ребер $e_1, e_2, \dots, e_n$. Тогда для произвольной бесконечной последовательности путей $F_i \in \mathfrak{P}_{u^*, v^*}$ одно из ребер e_i будет содержаться в бесконечном количестве путей.

Если произвольные вершины u^* и v^* лежат в разных компонентах связности, то существует ребро вида $\{v_{i_0}, v_{i_1}\}$, которое содержит каждый из путей $F_i \in \mathfrak{P}_{u^*, v^*}$. Применив теорему 5 к графу $\tilde{G}$, получим существование ультраметрики $\rho \in \mathfrak{U}_w$.

ПРИМЕР 3. Пусть непустой граф G является деревом, тогда субдоминантная псевдоультраметрика ρ_w является ультраметрикой для любого строго положительного веса $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$. Действительно, известное характеристическое

свойство деревьев гласит, что для любых двух различных вершин $u^*, v^* \in V(G)$ в G найдется ровно один путь, их соединяющий. Следовательно, любая последовательность $\tilde{F}$ путей $F_j \in \mathfrak{P}_{u^*, v^*}$ стационарна, $F_1 = \dots = F_n = F_{n+1} = \dots$. Это ведет к автоматическому выполнению утверждения (ii) из теоремы 5.

§ 5. Наименьший элемент $\mathfrak{U}_w$ и единственность продолжения веса до псевдоультраметрики

В настоящем параграфе мы покажем, что полные k -дольные графы G и только они обладают тем свойством, что для любого псевдоультраметризуемого веса $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ частично упорядоченное множество $(\mathfrak{U}_w, \preceq)$ содержит наименьший элемент. Кроме того, будет дан критерий единственности в задаче продолжения веса w до псевдоультраметрики $\rho: V(G) \times V(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ в случае произвольного непустого графа G . Критерий существования такого продолжения был получен выше в теореме 2.

Напомним, что граф G называется k -дольным, если множество $V(G)$ может быть разбито на k (k – произвольное кардинальное число) непустых непересекающихся подмножеств V_α ,

$$V(G) = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{I}, \quad |\mathcal{I}| = k, \quad V_{\alpha_i} \cap V_{\alpha_j} = \emptyset \quad \text{при } i \neq j,$$

так, что для любого $\{x, y\} \in E(G)$ вершины x и y лежат в разных долях V_α . Если дополнительно для любых двух точек x, y , принадлежащих разным V_α , будет иметь место отношение принадлежности $\{x, y\} \in E(G)$, то G называется *полным k -дольным* графом. Очевидно, что полный k -дольный граф при $k = 1$ является пустым, $E(G) = \emptyset$, а при $k \geq 2$ будет связным.

H $p \bullet$

Рис. 3. Если на $E(H)$ задать любой вес w , для которого $w(\{u, v\}) > 0$, то $(\mathfrak{U}_w, \preceq)$ не содержит наименьшего элемента

Следующая лемма представляет собой переформулировку леммы 3.2 из [12].

ЛЕММА 3. Пусть G – граф с $V(G) \neq \emptyset$. Тогда G будет полным k -дольным с некоторым $k \geq 1$, если и только если G не содержит индуцированных подграфов, изоморфных графу H , изображенному на рис. 3.

Будем обозначать через ТМ (twice-max) множество тех неупорядоченных пар p, q различных несмежных вершин графа (G, w) , для которых любой путь $P \in \mathfrak{P}_{p, q}$ содержит по крайней мере два различных ребра e_1 и e_2 таких, что $w(e_1) = w(e_2) = \max_{e \in P} w(e)$.

ТЕОРЕМА 6. *Следующие условия эквивалентны для каждого непустого графа G :*

- (i) *для каждого псевдоультраметризуемого веса $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ частично упорядоченное множество $(\mathfrak{U}_w, \preceq)$ содержит наименьшую псевдоультраметрику $\rho_{0,w}$, т.е.*

$$\rho_{0,w}(u, v) \leq \rho(u, v) \quad (5.1)$$

для всех $\rho \in \mathfrak{U}_w$ и всех $u, v \in V(G)$;

- (ii) *G – полный k -дольный граф с $k \geq 2$.*

Если условие (ii) выполнено и w – псевдоультраметризуемый вес, тогда при $u \neq v$

$$\rho_{0,w}(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{если } \{u, v\} \in \text{ТМ}, \\ \max_{e \in F} w(e), & \text{если } \{u, v\} \notin \text{ТМ}, \end{cases} \quad (5.2)$$

где F – любой путь из $\mathfrak{P}_{u,v}$, для которого $\max_{e \in F} w(e)$ достигается на единственном ребре.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\implies$ (ii). Пусть (ii) не выполнено. Тогда по лемме 3 существуют вершины $u, v, \{u, v\} \in E(G)$, и вершина $p \in V(G)$, $u \neq p \neq v$, такие, что $\{u, p\} \notin E(G)$ и $\{v, p\} \notin E(G)$. Определим вес $w(e) = 1$ для всех $e \in E(G)$. На множестве вершин $V(G)$ графа (G, w) рассмотрим две псевдоультраметрики:

$\rho_1(u, p) = \rho_1(p, u) = \rho_1(s, s) = 0$ для всех $s \in V(G)$ и $\rho_1(s, t) = 1$ в противном случае;

$\rho_2(v, p) = \rho_2(p, v) = \rho_2(s, s) = 0$ для всех $s \in V(G)$ и $\rho_2(s, t) = 1$ в противном случае.

Нетрудно видеть, что $\rho_1, \rho_2 \in \mathfrak{U}_w$. Предположив, что существует наименьшая псевдоультраметрика $\rho \in \mathfrak{U}_w$, получим противоречие

$$1 = \rho(u, v) \leq \rho(u, p) + \rho(p, v) \leq \min\{\rho_1(u, p), \rho_2(u, p)\} + \min\{\rho_1(p, v), \rho_2(p, v)\} = 0.$$

Таким образом, показано существование псевдоультраметризуемого веса w , для которого частично упорядоченное множество $\mathfrak{U}_w$ не содержит наименьшей псевдоультраметрики.

(ii) $\implies$ (i). Пусть выполнено условие (ii) и (G, w) – произвольный взвешенный граф с псевдоультраметризуемым весом. Так как $k \geq 2$, то, как отмечалось выше, G – связный граф. Покажем, что $\rho_{0,w}$, определенная (5.2), является наименьшим элементом частично упорядоченного множества $\mathfrak{U}_w$.

Отметим, что функция $\rho_{0,w}$ для псевдоультраметризуемого веса w определена корректно. Действительно, предположим, что найдется $\{u, v\} \notin \text{ТМ}$ и существуют два различных пути $F_1, F_2 \in \mathfrak{P}_{u,v}$, содержащие по одному ребру максимального веса. Пусть $\rho \in \mathfrak{U}_w$. Рассмотрим в псевдоультраметрическом пространстве $(V(G), \rho)$ цикл из пути F_1 и ребра $\{u, v\}$. В силу леммы 1 получим, что $\max_{e \in F_1} w(e)$ – единственное возможное значение $\rho(u, v)$. Аналогично, рассмотрев цикл, состоящий из пути F_2 и ребра $\{u, v\}$, получим, что $\rho(u, v) = \max_{e \in F_2} w(e)$ для любой $\rho \in \mathfrak{U}_w$.

Вместе с тем для любого ребра $\{u, v\} \in E(G)$ имеем $\rho_{0,w}(u, v) = w(\{u, v\})$, так как в этом случае $\{u, v\} \notin \text{ТМ}$ и (u, v) – это один из путей, соединяющий вершины u и v .

Покажем, что функция $\rho_{0,w}$ действительно является псевдоультраметрикой. Для этого достаточно установить сильное неравенство треугольника

$$\rho_{0,w}(x, y) \leq \max\{\rho_{0,w}(x, z), \rho_{0,w}(z, y)\} \quad (5.3)$$

для попарно различных вершин $x, y, z \in V(G)$. Покажем, что оно выполнено в случае, если среди трех вершин как минимум две пары смежных. Действительно, если имеем три пары смежных вершин, то неравенство (5.3) следует из псевдоультраметризуемости веса w . Если же смежны только две пары вершин и веса соответствующих ребер различны, то согласно (5.2) вес недостающего ребра будет равен максимальному из них. Неравенство (5.3) снова выполнено. Предположим, что смежны только две пары вершин, их веса равны, $w(\{x, z\}) = w(\{z, y\}) = \rho_{0,w}(x, z) = \rho_{0,w}(z, y) = a$, но $\rho_{0,w}(x, y) = b > a$. Тогда существует путь $F \in \mathfrak{P}_{x,y}$ с единственным ребром e_0 максимального веса. Рассмотрим цикл, состоящий из пути F и ребер $\{x, z\}$ и $\{z, y\}$ (либо одного из этих ребер, в зависимости от того, содержит ли путь F одно из них). Этот цикл содержит единственное ребро e_0 максимального веса, что согласно теореме 2 противоречит псевдоультраметризуемости веса w .

В силу леммы 3 случай, когда ровно две вершины смежны, невозможен. Поэтому считаем, что вершины x, y, z попарно не смежны. Пусть $\rho_{0,w}(x, y) = a > 0$ (если $\rho_{0,w}(x, y) = 0$ неравенство (5.3) очевидно). Так как $a > 0$, то существует путь $F \in \mathfrak{P}_{x,y}$ с единственным ребром $e_0 = \{u_0, v_0\}$ максимального веса $w(e_0) = a$. Предположим сначала, что путь F не проходит через точку z . Из (ii) следует, что одна из вершин u_0, v_0 , например u_0 , смежна с z . Рассмотрим путь $F_1 \in \mathfrak{P}_{x,z}$, состоящий из ребра $\{u_0, z\}$ и некоторой части пути F , и путь $F_2 \in \mathfrak{P}_{y,z}$, также состоящий из ребра $\{u_0, z\}$ и оставшейся части пути F . Без ограничения общности считаем, что $\{u_0, v_0\} \in E(F_2)$. Если $w(\{u_0, z\}) > a$, то $\{u_0, z\}$ – единственное ребро максимального веса для каждого из путей F_1, F_2 . Тогда из (5.2) следует

$$\rho_{0,w}(x, z) = w(\{u_0, z\}) = \rho_{0,w}(z, y) > a,$$

что дает (5.3). Поэтому считаем, что $w(\{u_0, z\}) \leq a$. Если последнее неравенство строгое, то $\{u_0, v_0\}$ – единственное ребро максимального веса в F_2 . Значит

$$\rho_{0,w}(y, z) = w(\{u_0, v_0\}) = a$$

и (5.3) выполнено. Если $w(\{u_0, z\}) = a$, то $\{u_0, z\}$ – единственное ребро максимального веса в F_1 и мы опять получаем (5.3). В случае, если путь F проходит через точку z , разбивая его на два пути $F_1 \in \mathfrak{P}_{x,z}$ и $F_2 \in \mathfrak{P}_{z,y}$, получим, что одно из значений $\rho_{0,w}(x, z)$, $\rho_{0,w}(z, y)$ равно a , что снова дает (5.3).

Осталось доказать, что неравенство (5.1) выполнено для всех $\rho \in \mathfrak{U}_w$ и всех $u, v \in V(G)$. Действительно, это тривиально, если $\rho_{0,w}(u, v) = 0$. Допустим, что $\rho_{0,w}(u, v) = a > 0$, тогда $\{u, v\} \notin \text{ТМ}$ и существует путь $F \in \mathfrak{P}_{u,v}$ с единственным ребром e_0 максимального веса $w(e_0) = a$. Допустим $\rho(u, v) < a$. Тогда

функция $\rho(x, y)$ не будет являться псевдоультраметрикой, так как существует цикл, содержащий ровно одно ребро максимального веса.

В качестве применения теоремы 6 получим характеризацию графов, являющихся звездами. Напомним, что звездой называется полный двудольный граф, одна из долей которого – одноточечное множество.

СЛЕДСТВИЕ 8. *Следующие условия эквивалентны:*

- (i) *любой вес $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ псевдоультраметризуем и частично упорядоченное множество $(\mathfrak{U}_w, \preceq)$ содержит наименьший элемент;*
- (ii) *G – звезда.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) следует из теоремы 6 и следствия 5. Пусть выполнено (i), тогда опять, используя теорему 6 и следствие 5, находим, что G – полный k -дольный граф с $k \geq 2$ и одновременно дерево. Если $k \geq 3$, то G содержит треугольник, чтобы построить его, достаточно взять по одной точке в трех различных долях графа G . Но в деревьях нет циклов, значит $k = 2$. Если каждая из долей G содержит не менее двух точек, то легко построить четырехсторонник (4-цикл) $C \subseteq G$, что опять противоречит ацикличности G . Таким образом, G – полный двудольный граф, одна из долей которого одноточечна.

Обратимся теперь к условиям единственности в задаче продолжения веса w до псевдоультраметрики. С этой целью введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть (G, w) – непустой взвешенный связный граф, u и v – две его различные несмежные вершины. Назовем u и v *хорошо сцепленными*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует путь $u = u_1, u_2, \dots, u_n = v$ такой, что $\{u_i, u_{i+1}\} \in E(G)$ и $w(\{u_i, u_{i+1}\}) \leq \varepsilon$ для $i = 1, \dots, n-1$.

Будем обозначать множество всех таких пар $\{u, v\}$ через WCh (well chained).

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Понятие хорошо сцепленных точек часто используется в теории метрических континуумов [13] и играет важную роль при рассмотрении задач, относящихся к связности в метрических пространствах, см., например, [14].

ЗАМЕЧАНИЕ 10. “Хорошая сцепленность” натуральным образом возникает при исследовании субдоминантных ультраметрик, см. [8] и [11]. В частности, для строго положительного псевдоультраметризуемого веса w и связного G легко показать, что вершины u и v , $u \neq v$, хорошо сцеплены тогда и только тогда, когда $\rho_w(u, v) = 0$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть (G, w) – непустой взвешенный связный граф с псевдоультраметризуемым весом w . Множество $\mathfrak{U}_w$ состоит из одного элемента тогда и только тогда, когда

$$\text{TM} \subseteq \text{WCh}. \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено (5.4), покажем, что продолжение w до псевдоультраметрики единственно. Для этого достаточно установить, что

$$\rho(u, v) = \rho_w(u, v) \quad (5.5)$$

для любой пары различных несмежных вершин u, v и любой $\rho \in \mathfrak{U}_w$. Пусть u, v – различные несмежные вершины, для которых $\{u, v\} \notin \text{ТМ}$. В этом случае, рассуждая как при проверке корректности определения (5.2), видим, что значение $\rho(u, v)$ не зависит от выбора $\rho \in \mathfrak{U}_w$, а значит, (5.5) справедливо. Рассмотрим теперь случай $\{u, v\} \in \text{ТМ}$. В силу включения (5.4) вершины u и v хорошо сцеплены. Отсюда и из определения субдоминантной псевдоультраметрики ρ_w следует

$$\rho_w(u, v) = 0. \quad (5.6)$$

Так как G – связный граф, то по теореме 3 $\rho(u, v) \leq \rho_w(u, v)$. Кроме того, $0 \leq \rho(u, v)$ для всех $u, v \in V(G)$. Последние два неравенства и (5.6) дают (5.5).

Пусть (5.4) не имеет места. Докажем неединственность продолжения w до псевдоультраметрики.

Так как (5.4) ложно, то найдется пара u_0, v_0 различных несмежных вершин, не являющихся хорошо сцепленными, но таких, что $\{u_0, v_0\} \in \text{ТМ}$. Так как $\{u_0, v_0\} \notin \text{WCh}$, то $\rho_w(u_0, v_0) > 0$, а значит, существует $\varepsilon_0 > 0$, для которого

$$\max_{e \in P} w(e) \geq \varepsilon_0 \quad (5.7)$$

при любом $P \in \mathfrak{P}_{u,v}$. Пусть ε_1 и ε_2 – два различных числа из $[0, \varepsilon_0)$. Рассмотрим граф $\tilde{G}$ такой, что

$$V(\tilde{G}) = V(G), \quad E(\tilde{G}) = E(G) \cup \{\{u_0, v_0\}\},$$

т.е. $\tilde{G}$ получается из G добавлением ребра $\{u_0, v_0\}$. Зададим на графе $\tilde{G}$ веса $w_i: E(\tilde{G}) \rightarrow \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2$, по правилу

$$w_i(e) = \begin{cases} w(e) & \text{при } e \in E(G), \\ \varepsilon_i & \text{при } e = \{u_0, v_0\}. \end{cases}$$

Проверим, что вес w_1 – псевдоультраметризуемый. В соответствии с теоремой 2 для этого достаточно убедиться в том, что для любого цикла $C \subseteq \tilde{G}$ найдутся два различных ребра $e_1, e_2 \in E(C)$, для которых

$$\max_{e \in E(C)} w_1(e) = w_1(e_1) = w_1(e_2). \quad (5.8)$$

Если $\{u_0, v_0\} \notin E(C)$, то (5.8) следует из псевдоультраметризуемости w . Допустим, $\{u_0, v_0\} \in E(C)$. Удалив из цикла C ребро $\{u_0, v_0\}$, получим путь $P \in \mathfrak{P}_{u_0, v_0}$. Так как $\{u_0, v_0\} \in \text{ТМ}$, то найдутся два различных ребра e_1, e_2 из $E(P)$ такие, что

$$\max_{e \in P} w_1(e) = \max_{e \in P} w(e) = w(e_1) = w(e_2) = w_1(e_1) = w_1(e_2).$$

В силу неравенств (5.7) и $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ видим, что для этих ребер выполнено (5.8). Следовательно, вес $w_1: E(\tilde{G}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ псевдоультраметризуемый. Аналогично убеждаемся, что и $w_2: E(\tilde{G}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ – псевдоультраметризуемый вес. Пусть ρ_1 и ρ_2 – псевдоультраметрики на $V(\tilde{G}) = V(G)$, продолжающие соответственно w_1 и w_2 . Тогда очевидно, что ρ_1 и ρ_2 продолжают и вес w . В силу того, что

$\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, имеем $w_1 \neq w_2$, а значит, $\rho_1 \neq \rho_2$. Следовательно, продолжение веса w до псевдоультраметрики на $V(G)$ не является однозначным при нарушении условия (5.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Если G – непустой несвязный граф, то для любого псевдоультраметризуемого веса w справедливо неравенство

$$\text{card}(\mathfrak{U}_w) \geq \mathfrak{c},$$

где кардинальное число $\mathfrak{c}$, как обычно, мощность континуума. Это неравенство сразу следует из (3.3).

ПРИМЕР 4. Для полных k -дольных графов с $k \geq 2$ единственность продолжения w эквивалентна равенству

$$\rho_w = \rho_{0,w}, \quad (5.9)$$

где ρ_w – субдоминантная псевдоультраметрика, а $\rho_{0,w}$ – псевдоультраметрика, заданная равенством (5.2). Действительно, при $k \geq 2$ полный k -дольный граф связан. В соответствии с теоремами 2 и 6 псевдоультраметрика ρ_w – наибольший элемент $(\mathfrak{U}_w, \preceq)$, а $\rho_{0,w}$ – наименьший элемент этого множества. Следовательно, для любой $\rho \in \mathfrak{U}_w$

$$\rho_{0,w} \preceq \rho \preceq \rho_w,$$

а в силу (5.9)

$$\rho_{0,w} = \rho = \rho_w,$$

что и дает единственность продолжения. Покажем, что равенство (5.9) эквивалентно включению (5.4). Для этого заметим, что в доказательстве теоремы 6 установлено равенство

$$\rho_{0,w}(u, v) = \rho_w(u, v) \quad (5.10)$$

для $\rho_{0,w}(u, v) > 0$. Кроме того, (5.10) должно выполняться для смежных u и v , так как $\rho_{0,w}, \rho_w \in \mathfrak{U}_w$. Непосредственно из определений имеем

$$\text{WCh} = \{ \{u, v\} : u \text{ и } v \text{ не смежные, } u \neq v \text{ и } \rho_w(u, v) = 0 \}, \quad (5.11)$$

а для полных k -дольных графов с $k \geq 2$

$$\text{TM} = \{ \{u, v\} : u \text{ и } v \text{ не смежные, } u \neq v \text{ и } \rho_{0,w}(u, v) = 0 \}.$$

Таким образом, (5.9) эквивалентно равенству $\text{WCh} = \text{TM}$. В силу того, что $\rho_{0,w} \preceq \rho_w$, мы имеем включение $\text{TM} \supseteq \text{WCh}$. Следовательно, (5.9) эквивалентно обратному включению $\text{TM} \subseteq \text{WCh}$.

ПРИМЕР 5. Пусть G – дерево, а $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ – строго положительный вес (напомним, что в этом случае w автоматически является ультраметризуемым).

Вес w имеет единственное продолжение до псевдоультраметрики на $V(G)$ тогда и только тогда, когда $\text{TM} = \emptyset$.

Действительно, любые две вершины дерева G соединяются единственным путем. Из этой единственности, строгой положительности w , формулы (5.11) и определения ρ_w следует, что $\text{WCh} = \emptyset$. В силу теоремы 7 из этого равенства вытекает, что единственность продолжения w эквивалентна пустоте множества TM .

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Равенство $TM = \emptyset$ эквивалентно единственности решения задачи продолжения строго положительного псевдоультраметризуемого веса w до псевдоультраметрики для любого G , удовлетворяющего условию (ii) теоремы 5. Для деревьев это равенство эквивалентно следующему.

Если e_1 и e_2 – два различных ребра дерева G такие, что $w(e_1) = w(e_2)$, то для любого пути $P \subseteq G$, включающего e_1 и e_2 , существует ребро $e_3 \in E(P)$ такое, что $w(e_3) > w(e_1)$.

Список литературы

- [1] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph Theory*, Grad. Texts in Math., **244**, Springer-Verlag, New York, 2008.
- [2] O. Dovgoshey, O. Martio, M. Vuorinen, *Metrization of weighted graphs*, Reports in Math. University of Helsinki, **516**, 2011.
- [3] O. Dovgoshey, O. Martio, “Blow up of balls and coverings in metric spaces”, *Manuscripta Math.*, **127**:1 (2008), 89–120.
- [4] N. Jardine, R. Sibson, *Mathematical taxonomy. Part II*, Wiley, London, 1971.
- [5] J. M. Bayod, J. Martinier-Maurica, “Subdominant ultrametrics”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **109**:3 (1990), 829–834.
- [6] J. P. J. Jardine, N. Jardine, R. Sibson, “The structure and construction of taxonomic hierarchies”, *Math. Biosciences*, **1**:2 (1967), 173–179.
- [7] R. Rammal, J. C. Angles d’Auriac, B. Doucot, “On the degree of ultrametricity”, *J. Physique*, **46** (1985), 945–952.
- [8] R. Rammal, G. Toulouse, M. A. Virasoro, “Ultrametricity for physicist”, *Rev. Modern Phys.*, **58**:3 (1986), 765–788.
- [9] D. Marcu, “A study on metrics and statistical analysis”, *Studia Univ. Babes-Bolyai Math.*, **49**:3 (2004), 43–74.
- [10] O. Dovgoshey, D. Dordovskyi, “Ultrametricity and metric betweenness in tangent spaces to metric spaces”, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **2**:2 (2010), 100–113.
- [11] A. J. Lemin, “On ultrametrization of general metric spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131**:3 (2003), 979–989.
- [12] D. Dordovskyi, O. Dovgoshey, E. Petrov, “Diameter and diametrical pairs of points in ultrametric spaces”, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **3**:4 (2011), 253–262.
- [13] S. B. Nadler, jr., *Continuum theory. An introduction*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **158**, Marcel Dekker, New York, 1992.
- [14] A. G. O’Farrel, “When uniformly-continuous implies bounded”, *Irish Math. Soc. Bull.*, **53** (2004), 53–56.

А. А. Довгошей (А. А. Dovgoshey)

Институт прикладной математики и механики НАН
Украины, г. Донецк

E-mail: aleksdov@mail.ru

Поступила в редакцию

19.08.2011 и 27.02.2013

Е. А. Петров (Е. А. Petrov)

Институт прикладной математики и механики НАН
Украины, г. Донецк

E-mail: eugeniy.petrov@gmail.com