Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Тимофеева, О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности. IV: Неприведенная схема модулей, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 1, 139–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7927>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:54:22

УДК 512.722+512.723

Н. В. Тимофеева

О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности. IV: Неприведенная схема модулей

Проведено построение неприведенной проективной схемы модулей полустабильных допустимых пар. Установлена связь этой схемы модулей с приведенной схемой модулей, построенной в предыдущей статье автора. Доказано, что неприведенная схема модулей содержит открытую подсхему, изоморфную схеме модулей полустабильных векторных расслоений.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: пространство модулей, полустабильные когерентные пучки, функтор модулей, алгебраическая поверхность.

DOI: 10.4213/sm7927

Введение

Проводится построение схемы модулей для функтора допустимых полустабильных пар $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$, введенного в предшествующих работах автора [1]–[5]. В них осуществлялся переход к редукции некоторой промежуточной подсхемы, используемой в конструкции. Это приводит к приведенной схеме $\tilde{M}$ безотносительно к приведенности (неприведенности) функтора модулей. Цель настоящей статьи – придать точный смысл указанной ситуации и построить (возможно) неприведенную схему модулей, если функтор семейств является неприведенным.

Исходными данными являются:

- гладкая неприводимая проективная алгебраическая поверхность S над алгебраически замкнутым полем k нулевой характеристики;
- обильный обратимый $\mathcal{O}_S$ -пучок L , который фиксирован и называется *поляризацией* поверхности S ;
- целое положительное число r и полином $rp_E(n)$ с рациональными коэффициентами, интерпретируемые как *ранг* и *полином Гильберта* когерентных пучков на поверхности S . Полином Гильберта вычисляется относительно поляризации L .

Изучаются *допустимые полустабильные пары* $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$. Каждая такая пара состоит из следующих данных.

Работа выполнена при частичной поддержке Института математики “Simion Stoilow” Румынской академии (IMAR) во время пребывания автора в качестве приглашенного профессора (июнь–июль 2012).

- Допустимая схема вида $\tilde{S} = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$, где $I \subset \mathcal{O}_S$ – пучок идеалов кодлины, равной $l \leq C$. При этом C – натуральное число, зависящее от коэффициентов полинома Гильберта $rp_E(n)$ (см. §3, доказательство утверждения). Случай $\tilde{S} \cong S$ также включен в рассмотрение. Структурный морфизм $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$ называется *каноническим морфизмом* схемы $\tilde{S}$. Если $\tilde{S} \cong S$, то он является тождественным изоморфизмом.
- Обильный обратимый $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$ -пучок $\tilde{L} = L^m \otimes \sigma^{-1}I \cdot \mathcal{O}_{\tilde{S}}$. Он называется *выделенной поляризацией* схемы $\tilde{S}$. Число m можно выбрать общим для всех $\tilde{S}$ (утверждение в §3). Зафиксируем m и переобозначим L^m символом L , так что $\tilde{L} = L \otimes \sigma^{-1}I \cdot \mathcal{O}_{\tilde{S}}$.
- Полустаби́льный локальный свободный $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$ -пучок $\tilde{E}$ ранга r и с полиномом Гильберта $rp_E(n)$, если последний вычисляется относительно выделенной поляризации $\tilde{L}$. Пучок $\tilde{E}$ должен удовлетворять условию квази-идеальности (см. (1.4) ниже).

Как показано в [2], схема $\tilde{S} = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$ может быть неприведенной. Разложение допустимой схемы $\tilde{S}$ в объединение неприводимых компонент $\tilde{S} = \bigcup_{i \geq 0} \tilde{S}_i$ понимается в следующем смысле.

Основная компонента $\tilde{S}_0$ всегда является приведенной схемой и соответствует алгебраическому многообразию. Она получается как раздутие исходной поверхности S в пучке идеалов $I \subset \mathcal{O}_S$: $\tilde{S}_0 = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} I^s$. Ограничение $\sigma_0 = \sigma|_{\tilde{S}_0}: \tilde{S}_0 \rightarrow S$ канонического морфизма σ на основную компоненту $\tilde{S}_0$ является морфизмом раздутия. Дополнительные компоненты $\tilde{S}_i$ (а они и могут оказаться неприведенными) определяются следующим образом. Пучок идеалов I определяет подсхему $Z \subset S$ с нульмерным носителем. Пусть $\text{Supp } Z$ состоит из m различных точек $p_1, \dots, p_m$ на поверхности S . Локализация артиновой алгебры $\mathcal{O}_Z$ в каждой из этих точек приводит к представлению $\mathcal{O}_Z = \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{Z_i}$, в котором прямые слагаемые нумеруются точками носителя и определяются как $\mathcal{O}_{Z_i} = (\mathcal{O}_Z)_{p_i}$, $i = 1, \dots, m$. Нульмерные подсхемы Z_i можно интерпретировать как подсхемы в Z . Обратившись к структурному морфизму $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$, определим $\tilde{S}_i$, $i = 1, \dots, m$, как расслоенные произведения $\tilde{S}_i = \tilde{S} \times_S Z_i$. Символом σ_i обозначается морфизм $\sigma|_{\tilde{S}_i}$, по построению разлагающийся в композицию: $\sigma|_{\tilde{S}_i} = \sigma_i: \tilde{S}_i \rightarrow Z_i \hookrightarrow S$.

Очевидно, допустимая схема состоит из единственной компоненты $\tilde{S} = \tilde{S}_0$ тогда и только тогда, когда она изоморфна исходной поверхности S .

Следуя [6; гл. 2, п. 2.2], напомним некоторые определения. Пусть $\mathcal{C}$ – категория, $\mathcal{C}^o$ – двойственная к ней, $\mathcal{C}' = \mathcal{Funct}(\mathcal{C}^o, \text{Sets})$ – категория функторов в категорию множеств. Согласно лемме Йонеды функтор

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}': F \mapsto (\underline{F}: X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F))$$

вкладывает категорию $\mathcal{C}$ как полную подкатеорию в $\mathcal{C}'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [6; гл. 2, определение 2.2.1]). Функтор $f \in \text{Ob } \mathcal{C}'$ *копредставлен объектом* $F \in \text{Ob } \mathcal{C}$, если существует $\mathcal{C}'$ -морфизм $\psi: f \rightarrow \underline{F}$ такой, что любой морфизм $\psi': f \rightarrow \underline{F}'$ пропускается через единственный морфизм $\omega: \underline{F} \rightarrow \underline{F}'$.

Пусть T – схема над полем k . Рассмотрим семейства полустабильных пар

$$\mathfrak{F}_T = \left\{ \begin{array}{l} \pi: \mathbb{F} \rightarrow T, \quad \tilde{\mathbb{L}} \in \text{Pic } \mathbb{F} \text{ плоский над } T; \\ \text{при } m \gg 0 \quad \tilde{\mathbb{L}}^m \text{ очень обилен относительно } T; \\ \forall t \in T \quad \tilde{L}_t = \tilde{\mathbb{L}}|_{\pi^{-1}(t)} \text{ обилен}; \\ (\pi^{-1}(t), \tilde{L}_t) - \text{допустимая схема с выделенной поляризацией}; \\ \chi(\tilde{L}_t^m) \text{ не зависит от } t; \\ \tilde{\mathbb{E}} - \text{локально свободный } \mathcal{O}_{\mathbb{F}}\text{-пучок, плоский над } T; \\ \chi(\tilde{\mathbb{E}} \otimes \tilde{\mathbb{L}}^m)|_{\pi^{-1}(t)} = rp_E(m); \\ ((\pi^{-1}(t), \tilde{L}_t), \tilde{\mathbb{E}}|_{\pi^{-1}(t)}) - \text{стабильная (полустабильная) пара} \end{array} \right\} \quad (0.1)$$

и функтор $f: (\text{Schemes}_k)^o \rightarrow (\text{Sets})$ из категории k -схем в категорию множеств. Этот функтор ставит в соответствие всякой схеме T множество классов эквивалентности $(\mathfrak{F}_T / \sim)$.

Отношение эквивалентности $\sim$ определяется следующим образом. Семейства $((\pi: \mathbb{F} \rightarrow T, \tilde{\mathbb{L}}), \tilde{\mathbb{E}})$ и $((\pi': \mathbb{F}' \rightarrow T, \tilde{\mathbb{L}}'), \tilde{\mathbb{E}}')$ из класса $\mathfrak{F}$ считаются *эквивалентными* (обозначение: $((\pi: \mathbb{F} \rightarrow T, \tilde{\mathbb{L}}), \tilde{\mathbb{E}}) \sim ((\pi': \mathbb{F}' \rightarrow T, \tilde{\mathbb{L}}'), \tilde{\mathbb{E}}')$), если:

1) существует изоморфизм $\iota: \mathbb{F} \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}'$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F} & \xrightarrow[\sim]{\iota} & \mathbb{F}' \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & T & \end{array}$$

коммутативна;

2) существуют линейные расслоения L', L'' на схеме T такие, что $\iota^* \tilde{\mathbb{E}}' = \tilde{\mathbb{E}} \otimes \pi^* L', \iota^* \tilde{\mathbb{L}}' = \tilde{\mathbb{L}} \otimes \pi^* L''$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В [3] рассматривались только приведенные базисные схемы; поэтому для плоскости семейств схем (соответственно локально свободных пучков) над такой базой было достаточно контролировать полиномы Гильберта их слоев (соответственно ограничений на слои; см. [7; гл. III, теорема 9.9]). В ситуации настоящей статьи приходится требовать отдельно, чтобы эти семейства были плоскими над базой T , поскольку базы семейств могут быть неприведенными схемами. В силу той же причины недостаточно послонной обильности пучка $\tilde{\mathbb{L}}$: приходится требовать также, чтобы его подходящая степень $\tilde{\mathbb{L}}^m$ была очень обильна относительно базы T .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Схема $\tilde{M}$ является *грубым пространством модулей* для функтора f , если f копредставлен схемой $\tilde{M}$.

Результат настоящей статьи заключен в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Функтор f обладает грубым пространством модулей $\tilde{M}$, которое является проективной нётеровою алгебраической схемой конечного типа. Схема $\tilde{M}$ содержит открытую подсхему $\tilde{M}_0$, изоморфную открытой подсхеме $\tilde{M}_0$ в схеме Гизекера–Маруямы $\tilde{M}$, соответствующей тем же данным $r, rp_E(n)$.

Все рассуждения настоящей работы применимы для любых полиномов Гильберта безотносительно к величине дискриминанта, а также к количеству и геометрии неприводимых компонент соответствующей схемы Гизекера–Маруямы. В приводимом случае теорема гарантирует существование грубого пространства модулей у любого максимального по включению неприводимого подстека в $\coprod(\mathfrak{F}_T/\sim)$, содержащего пары $((\pi^{-1}(t), \tilde{L}_t), \tilde{E}|_{\pi^{-1}(t)})$ такие, что $(\pi^{-1}(t), \tilde{L}_t) \cong (S, L)$. Такие пары называются *S-парами*. В указанный подстек входят семейства (с возможно неприведенными базисными схемами), состоящие из тех и только тех полустабильных пар $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$, которые удовлетворяют требованию:

существует семейство полустабильных пар $((\tilde{\Sigma}_T, \tilde{\mathbb{L}}_T), \tilde{\mathbb{E}}_T)$ с приведенной неприводимой базой T , содержащее пару $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$ и хотя бы одну *S*-пару.

Под $\tilde{M}$ понимается пространство модулей указанного подстека.

Статья построена следующим образом. В § 1 содержатся необходимые добавления и исправления по тексту статьи [3]. В § 2 мы напомним известные определения и результаты о приведенности (неприведенности) с функториальной точки зрения. Также будет доказано предложение о связи редукции функтора и редукции его схемы модулей. Построению схемы модулей M в категории всех k -схем посвящен § 3. В построении имеются два важных момента: ограниченность семейств объектов параметризации (предложение 4) и квазипроективность соответствующей схемы (предложение 5). В § 4 содержатся необходимые общие сведения о подфункторах и подпространствах модулей и завершается доказательство теоремы 1.

§ 1. Комментарии к работе [3]

В этом параграфе рассмотрены исправления и дополнения к конструкции схемы модулей M , данной в [3]. Все результаты остаются в силе, изменения касаются некоторых доказательств. Все рассуждения и результаты статьи [3] получены для функтора $\mathfrak{f}$ на полной подкатегории приведенных схем $(RSch_k)^o$ в $(Schemes_k)^o$, хотя явное указание в тексте на эту подкатегорию пропущено автором. Соответственно, под $\bar{M}$ понимается приведенная схема, соответствующая схеме Гизекера–Маруямы.

Также в определении эквивалентности семейств $((\pi: \mathbb{F} \rightarrow T, \tilde{\mathbb{L}}), \tilde{\mathbb{E}})$ и $((\pi': \mathbb{F}' \rightarrow T, \tilde{\mathbb{L}}'), \tilde{\mathbb{E}}')$ (после диаграммы (0.1)) требование 2) должно выглядеть так, как указано во введении настоящей статьи.

В формулах для пучка L_E в § 2 (предшествующих диаграмме (2.2)) имеются опечатки; должно быть $L_E = \bigwedge^r(E \otimes L^m) = L^m \otimes \det E$ и (далее) $L_E = L^m \otimes c_1$.

Далее содержится исправление требования квазиидеальности для пучков $\tilde{E}$, оказавшегося ошибочным, и исправления к § 7.

Однако прежде мы напомним построение подпучка tors , которое было введено в [3] и будет использоваться в вычислениях. Пусть U – открытое по Зарискому подмножество одной из компонент $\tilde{S}_i$, $i \geq 0$, и $\sigma^*E|_{\tilde{S}_i}(U)$ – соответствующая группа сечений, являющаяся $\mathcal{O}_{\tilde{S}_i}(U)$ -модулем. Сечения $s \in \sigma^*E|_{\tilde{S}_i}(U)$, аннулируемые простыми идеалами положительной коразмерности в $\mathcal{O}_{\tilde{S}_i}(U)$,

образуют подмодуль в $\sigma^*E|_{\tilde{S}_i}(U)$, который будем обозначать $\text{tors}_i(U)$. Соответствие $U \mapsto \text{tors}_i(U)$ определяет подпучок $\text{tors}_i \subset \sigma^*E|_{\tilde{S}_i}$. Заметим, что ассоциированные простые идеалы положительной коразмерности, аннулирующие сечения $s \in \sigma^*E|_{\tilde{S}_i}(U)$, соответствуют подсхемам с носителями в прообразе $\sigma^{-1}(\text{Supp } E^{\vee\vee}/E) = \bigcup_{i \geq 0} \tilde{S}_i$. Поскольку по построению схема $\tilde{S} = \bigcup_{i \geq 0} \tilde{S}_i$ связна, то подпучки tors_i , $i \geq 0$, позволяют построить подпучок $\text{tors} \subset \sigma^*E$. Последний определяется следующим образом. Сечение $s \in \sigma^*E|_{\tilde{S}_i}(U)$ удовлетворяет условию $s \in \text{tors}|_{\tilde{S}_i}(U)$ тогда и только тогда, когда:

- существует сечение $y \in \mathcal{O}_{\tilde{S}_i}(U)$ такое, что $ys = 0$;
- выполнено хотя бы одно из двух условий: либо $y \in \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ – простой идеал положительной коразмерности; либо существуют открытое по Зарискому подмножество $V \subset \tilde{S}$ и сечение $s' \in \sigma^*E(V)$ такие, что $V \supset U$, $s'|_U = s$ и $s'|_{V \cap \tilde{S}_0} \in \text{tors}(\sigma^*E|_{\tilde{S}_0})(V \cap \tilde{S}_0)$. В последнем выражении подпучок кручения $\text{tors}(\sigma^*E|_{\tilde{S}_0})$ понимается в обычном смысле.

Подпучок $\text{tors} \subset \sigma^*E$ играет в рассматриваемой конструкции роль, аналогичную роли подпучка кручения в случае приведенной и неприводимой базисной схемы. Поскольку путаница исключена, то обозначение tors всюду понимается в указанном смысле, а подпучок tors называется *подпучком кручения*.

Окончание § 1 должно быть следующим.

Поведение векторных расслоений $\tilde{E}$ на дополнительных компонентах $\tilde{S}_i \subset \tilde{S}$, $i > 0$, дается следующим простым вычислением. Стандартная точная тройка

$$0 \rightarrow E \rightarrow E^{\vee\vee} \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow 0 \quad (1.1)$$

переводится функтором обратного образа σ_i^* в точную последовательность

$$\cdots \rightarrow \mathcal{T}or_1^{\sigma_i^{-1}\mathcal{O}_S}(\sigma^{-1}\mathcal{K}, \mathcal{O}_{\tilde{S}_i}) \rightarrow \sigma_i^*E \rightarrow \sigma_i^*E^{\vee\vee} \rightarrow \sigma_i^*\mathcal{K} \rightarrow 0. \quad (1.2)$$

В подходящей окрестности $U \subset S$ носителя $\text{Supp } \mathcal{K}$ локально свободный пучок $E^{\vee\vee}|_U$ может быть заменен локальной тривиализацией $\mathcal{O}_U^{\oplus r}$. Тогда точная последовательность (1.2) примет вид

$$\cdots \rightarrow \mathcal{T}or_1^{\sigma_i^{-1}\mathcal{O}_S}(\sigma^{-1}\mathcal{K}, \mathcal{O}_{\tilde{S}_i}) \rightarrow \sigma_i^*E \rightarrow \sigma_i^*\mathcal{O}_U^{\oplus r} \rightarrow \sigma_i^*\mathcal{K} \rightarrow 0.$$

Таким образом, для $\tilde{E}_i = \sigma^*E/\text{tors}|_{\tilde{S}_i} = \sigma_i^*E/\text{tors}_i$ имеем

$$\cdots \rightarrow \sigma_i^*E/\text{tors}_i \rightarrow \sigma_i^*\mathcal{O}_U^{\oplus r} \rightarrow \sigma_i^*\mathcal{K} \rightarrow 0, \quad (1.3)$$

где подпучок кручения tors на (возможно, неприведенной) схеме $\tilde{S}$ определен, как ранее в [3], и $\text{tors}_i = \text{tors}|_{\tilde{S}_i}$. Многоточие слева подразумевает нарушающие точность члены, которые не обязаны иметь положительную коразмерность в $\tilde{S}_i$.

ПРИМЕР 1. Пусть $\mathcal{K} = k_x$; тогда $\tilde{S}$ состоит из двух приведенных компонент: $\tilde{S}_0$ – поверхность, полученная раздутием S в приведенной точке x ; $\tilde{S}_1 \cong \mathbb{P}^2$. Морфизм σ_1 – это постоянный морфизм $\sigma_1: \mathbb{P}^2 \rightarrow x$. Таким образом, $\sigma_1^*\mathcal{K} = \sigma_1^*k_x = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ и простой подсчет рангов дает $\text{rank } \ker(\sigma_1^*E/\text{tors}_1 \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{S}_1}^{\oplus r}) = 1$.

Поскольку пучок $\varkappa$ имеет носитель в конечном наборе точек, то морфизм $\mathcal{O}_U^{\oplus r} \rightarrow \varkappa$ можно заменить морфизмом $\mathcal{O}_S^{\oplus r} \rightarrow \varkappa$.

Пусть $q_0: \mathcal{O}_S^{\oplus r} \rightarrow \varkappa$ – морфизм, индуцированный точной тройкой (1.1). Тогда имеем

$$\tilde{E}_i = \sigma_i^* \ker q_0 / \text{tors}. \quad (1.4)$$

Согласно предложению 1 для всевозможных полустабильных когерентных пучков E с фиксированным многочленом Гильберта $rp_E(m)$ все пучки $\tilde{E}_i$ на дополнительных компонентах $\tilde{S}_i$ могут быть описаны соотношениями вида (1.4) для подходящих $q_0 \in \coprod_{l \leq c_2} \text{Quot}^l \mathcal{O}_S^{\oplus r}$.

Точная последовательность (1.3) и соотношение (1.4) поставляют правильное требование квазиидеальности, которое должно использоваться вместо (1.5) и (1.6) в [3] всюду, где используются эти формулы: в определении S -стабильности и S -полустабильности (определение 6, § 5), в доказательствах предложения 10 (§ 6) и леммы 3 (§ 8).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. S -стабильной (соответственно S -полустабильной) парой $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$ называются следующие данные:

- $\tilde{S} = \bigcup_{i \geq 0} \tilde{S}_i$ – допустимая схема, $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$ – канонический морфизм,
- $\sigma_i: \tilde{S}_i \rightarrow S$ – его ограничения на компоненты $\tilde{S}_i$, $i \geq 0$;
- $\tilde{E}$ – векторное расслоение на схеме $\tilde{S}$;
- $\tilde{L} \in \text{Pic } \tilde{S}$ – выделенная поляризация;

такие, что:

- $\chi(\tilde{E} \otimes \tilde{L}^n) = rp_E(n)$;
- пучок $\tilde{E}$ на схеме $\tilde{S}$ стабилен (соответственно полустабильен) по Гизе-кери, т.е. для любого собственного подпучка $\tilde{F} \subset \tilde{E}$ при $n \gg 0$

$$\frac{h^0(\tilde{F} \otimes \tilde{L}^n)}{\text{rank } \tilde{F}} < \frac{h^0(\tilde{E} \otimes \tilde{L}^n)}{\text{rank } \tilde{E}}$$

$$\left(\text{соответственно } \frac{h^0(\tilde{F} \otimes \tilde{L}^n)}{\text{rank } \tilde{F}} \leq \frac{h^0(\tilde{E} \otimes \tilde{L}^n)}{\text{rank } \tilde{E}} \right);$$

- на каждой из дополнительных компонент $\tilde{S}_i$, $i > 0$, пучок $\tilde{E}_i := \tilde{E}|_{\tilde{S}_i}$ квазиидеален, т.е. имеет описание вида (1.4) для некоторого

$$q_0 \in \bigsqcup_{l \leq c_2} \text{Quot}^l \bigoplus^r \mathcal{O}_S.$$

Окончание доказательства предложения 10 (после включения обратных образов тривиальных пучков) при указанной замене примет следующий вид.

Имеет место коммутативный треугольник

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus^r \mathcal{O}_U & \xrightarrow{q_0} & \varkappa \\ \uparrow & \nearrow q'_0 & \\ \bigoplus^{r'} \mathcal{O}_U & & \end{array}$$

в котором морфизм q'_0 определен с помощью композиции. Применив функтор обратного образа σ^* и ограничения на каждую из дополнительных компонент, получим

$$\widetilde{E}_i = \sigma_i^* \ker q_0 / \text{tors}_i, \quad \widetilde{F}_i = \sigma^* F / \text{tors} |_{\widetilde{S}_i} = \sigma_i^* \ker q'_0 / \text{tors}_i,$$

что завершает доказательство.

В доказательстве леммы 3 в [3] формула

$$\widetilde{E}'_i|_{\text{add}} = \ker \sigma^* \left(\bigoplus^r \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{K} \right) \Big|_{\text{add}}$$

должна быть заменена формулой

$$\widetilde{E}'_i|_{\text{add}} = \sigma^* \ker \left(\bigoplus^r \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{K} \right) \Big|_{\text{add}} / \text{tors}.$$

Доказательство предложения 13 из [3; § 7] ошибочно, поскольку множество классов эквивалентности морфизмов $\mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{K}$ при $\text{length } \mathcal{K} \leq l_0$ оказывается бесконечным. Например, пусть $\mathcal{K}$ – алгебра дуальных чисел, соответствующая неприведенной подсхеме длины 2 (“инфинитезимальный касательный вектор”). Выбор различных направлений этого вектора поставяет бесконечный набор неэквивалентных морфизмов $\mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{K}$.

Само предложение 13, как и определение 14 (вместе с замечаниями 6 и 7), в действительности могут быть исключены без ущерба для результатов статьи.

Предложение 14 должно предваряться предложением, имеющим в тексте номер 15, и должно быть сформулировано по отношению к $\diamond$ -произведению $\bar{S}_* = \tilde{S} \diamond \tilde{S}_{gr}$, т.е. иметь следующий вид.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если $\bar{\sigma}: \bar{S}_* \rightarrow S$ – $\diamond$ -произведение в моноиде $\diamond[E]$, то для любого $E \in [E]$ образы $\bar{F}_i := \bar{\sigma}^* F_i / \text{tors}$ пучков F_i фильтрации Жордана–Гёльдера локально свободны и $\bar{\sigma}^* gr_i(E) / \text{tors} = F_i / \bar{F}_{i-1}$.*

Доказательство сохраняется дословно.

В доказательстве предложения 27 в [3] минимальное разрешение должно быть заменено $\diamond$ -произведением $\bar{S}_* = \tilde{S} \diamond \tilde{S}_{gr}$.

При построении схемы $\widetilde{M}$ используется гладкое разрешение $\xi: Q' \rightarrow Q$ под-схемы $Q \subset \text{Quot}^{r_{PE}(t)}(V \otimes L^{-m})$, где $V = H^0(S, E \otimes L^m)$. Затем выполняется стандартное разрешение семейства полустабильных когерентных пучков на Q' , приводящее к бирациональному морфизму $\phi: \widetilde{Q} \rightarrow Q'$. Далее необходима эквивариантность морфизмов ξ и ϕ , которая используется для построения GIT-фактора $\mu(\widetilde{Q}) / \text{PGL}(V) = \widetilde{M}$.

Эквивариантность гладкого разрешения может быть достигнута заменой разрешения по Х. Хиронаке каноническим эквивариантным разрешением, построенным О. Вилламайором с соавторами (см., например, [8]). Конструкция, проводимая в [3], оперирует базисными схемами, снабженными приведенной схемной структурой. В частности, схема Q подразумевается приведенной схемой. Поэтому рассмотрим каждую компоненту схемы $\text{Quot}^{r_{PE}(t)}(V \otimes L^{-m})$ как

схему с приведенной структурой, а также для подходящего $l \gg 0$ рассмотрим замкнутое $\mathrm{GL}(V)$ -эquivариантное вложение

$$i_l: \mathrm{Quot}^{rp_E(t)}(V \otimes L^{-m}) \hookrightarrow G(V \otimes H^0(L^{l-m}), rp_E(l)).$$

Тогда имеет место индуцированное замкнутое equivариантное вложение в то же многообразие $G(V \otimes H^0(L^{l-m}), rp_E(l))$ каждой компоненты замыкания $\overline{Q}$ подсхемы Q в схеме $\mathrm{Quot}^{rp_E(t)}(V \otimes L^{-m})$. Поэтому можно считать, что $\overline{Q}$ – приведенная равноразмерная подсхема в $G(V \otimes H^0(L^{l-m}), rp_E(l))$.

Указанная ситуация позволяет применить результат из [8; теорема 2.4], что и поставляет требуемое $\mathrm{GL}(V)$ -equivариантное разрешение. Алгоритм equivариантного разрешения представляет собой последовательность раздутий в инвариантных замкнутых подсхемах. Пусть X – схема, снабженная действием алгебраической группы $\alpha: G \times X \rightarrow X$, $\xi: \hat{X} \rightarrow X$ – equivариантный морфизм. Убедимся в том, что действие α индуцирует действие $\hat{\alpha}: G \times \hat{X} \rightarrow \hat{X}$ в том смысле, что коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} G \times \hat{X} & \xrightarrow{\hat{\alpha}} & \hat{X} \\ (\mathrm{id}_G, \xi) \downarrow & & \downarrow \xi \\ G \times X & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array} \quad (1.5)$$

декартов.

Пусть T – схема, $f: T \rightarrow G \times X$ и $h: T \rightarrow \hat{X}$ – ее морфизмы такие, что $\xi \circ h = \alpha \circ f$. Обозначим через $\mathrm{inv}: G \rightarrow G$ морфизм, обращающий элементы группы G , через $p_G: G \times X \rightarrow G$ – проектирование на первый сомножитель. Тогда морфизм $\varphi: T \rightarrow G \times \hat{X}$ определен единственным образом по формуле $\varphi = (p_G \circ f, \hat{\alpha} \circ (\mathrm{inv} \circ p_G \circ f, h))$.

Затем выполняется стандартное разрешение семейства полустабильных когерентных пучков $\mathbb{E}$ на тривиальном семействе поверхностей $Q \times S$ с базой Q . Заметим, что выбор Q как гладкого разрешения подсхемы в схеме Quot Гротендика неоднозначен: если имеется $\mathrm{PGL}(V)$ -equivариантное разрешение Q , то для дальнейшего использования наряду с ним подойдет также любое раздутие схемы Q в $\mathrm{PGL}(V)$ -инвариантной гладкой подсхеме. При этом конструкция стандартного разрешения, описанная в [4], [5] и примененная к различным схемам Q , приведет к различным семействам $\tilde{Q}, \pi: \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{Q}, \tilde{\mathbb{E}}$. Однако неоднозначность определения схемы $\tilde{Q}$ не сказывается на окончательном результате построения.

В конструкции схемы модулей $\tilde{M}$ используются морфизм в схему Гильберта $\mu: \tilde{Q} \rightarrow \mathrm{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$ и $\mathrm{PGL}(V)$ -инвариантная подсхема $\mu(\tilde{Q})$, которая и образует GIT-фактор $\tilde{M} = \mu(\tilde{Q}) / \mathrm{PGL}(V)$. Подсхема $\mu(\tilde{Q})$ соответствует подмножеству замкнутых точек в $\mathrm{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$, которые согласно предложению 18 из [3] определяются объектами параметризации (допустимыми полустабильными парами). Поэтому подсхема $\mu(\tilde{Q})$ не зависит от выбора разрешения Q и конструируемой по нему схемы $\tilde{Q}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Набор $(\tilde{Q}, \pi: \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{Q}, \tilde{\mathbb{L}}, \tilde{\mathbb{E}})$, в котором π – плоский морфизм схем, $\tilde{\mathbb{E}}$ – локально свободный пучок, плоский над $\tilde{Q}$, $\tilde{\mathbb{L}}$ – обратимый

пучок, поставляющий выделенные поляризации на слоях морфизма π , называется *стандартным разрешением семейства* $(Q, p: Q \times S \rightarrow Q, \mathbb{L}, \mathbb{E})$ когерентных полустабильных пучков, если:

- имеются бирациональные морфизмы $\phi: \tilde{Q} \rightarrow Q$ и $\Phi: \tilde{\Sigma} \rightarrow Q \times S$, включаемые в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Sigma} & \xrightarrow{\Phi} & Q \times S \\ \pi \downarrow & & \downarrow p \\ \tilde{Q} & \xrightarrow{\phi} & Q \end{array} \quad (1.6)$$

- после ограничения на открытые подсхемы S -пар $\tilde{Q}_0 = \phi^{-1}Q_0$ и $\tilde{\Sigma}_0 = \Phi^{-1}(Q_0 \times S)$ морфизмы ϕ и Φ являются изоморфизмами (здесь Q_0 – открытая в Q подсхема, точки которой соответствуют локально свободным пучкам);
- для каждой замкнутой точки $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ член семейства $(\pi^{-1}(\tilde{q}), \tilde{\mathbb{L}}|_{\pi^{-1}(\tilde{q})}, \tilde{\mathbb{E}}|_{\pi^{-1}(\tilde{q})})$ – полустабильная допустимая пара;
- имеет место правило спуска: $(\Phi_*\tilde{\mathbb{E}})^{\vee\vee} = \mathbb{E}$.

Пусть схема Q снабжена действием $\beta: G \times Q \rightarrow Q$ алгебраической группы G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Стандартное разрешение $\phi: \tilde{Q} \rightarrow Q$ называется *эквивариантным*, если на $\tilde{Q}$ определено действие $\alpha: G \times \tilde{Q} \rightarrow \tilde{Q}$ алгебраической группы G такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G \times \tilde{Q} & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{Q} \\ (\text{id}_G, \phi) \downarrow & & \downarrow \phi \\ G \times Q & \xrightarrow{\beta} & Q \end{array} \quad (1.7)$$

коммутативна.

Для анализа GIT-стабильности точек подсхемы $\mu(\tilde{Q})$ и применения результатов [3, § 9] нужно заменить (произвольное) стандартное разрешение $\tilde{Q} \rightarrow \text{PGL}(V)$ -эквивариантным стандартным разрешением.

Мы укажем такое эквивариантное стандартное разрешение $\tilde{Q}'$, что действия $\text{PGL}(V)$ на схемах Q и $\mu(\tilde{Q})$ окажутся $\tilde{Q}'$ -согласованными в смысле [3, § 9]. Для его построения сформируем произведение действий α и β следующим образом:

$$\alpha \times \beta: G \times \mu(\tilde{Q}) \times Q \rightarrow \mu(\tilde{Q}) \times Q: (g, \tilde{q}, q) \mapsto (\alpha(g, \tilde{q}), \beta(g, q)).$$

Это настоящее действие группы G на произведении схем $\mu(\tilde{Q}) \times Q$. Теперь рассмотрим в этом произведении локально замкнутую подсхему (“диагональ”) $(\mu(\phi^{-1}), i): Q_0 \hookrightarrow \mu(\tilde{Q}) \times Q$, на замкнутых точках определяемую соответствием $q \mapsto (\mu(\phi^{-1}(q)), q)$. Здесь $i: Q_0 \hookrightarrow Q$ – открытое вложение и использовано то обстоятельство, что $\phi|_{\phi^{-1}(Q_0)}: \tilde{Q}_0 \rightarrow Q_0$ – изоморфизм. Заметим, что образ $(\mu(\phi^{-1}), i)(Q_0)$ – G -инвариантная подсхема относительно действия $\alpha \times \beta$. Определим подсхему $\tilde{Q}'$ как замыкание $\tilde{Q}' := \overline{(\mu(\phi^{-1}), i)(Q_0)}$. Оно также G -инвариантно относительно действия $\alpha \times \beta$. Тогда можно определить

действие $\tilde{\alpha}: G \times \tilde{Q}' \rightarrow \tilde{Q}'$ с помощью ограничения произведения $\alpha \times \beta$ на инвариантную подсхему $\tilde{Q}'$: $\tilde{\alpha} := \alpha \times \beta|_{G \times \tilde{Q}'}$. Заметим, что схема $\tilde{Q}'$ обладает двумя сюръективными морфизмами проектирования на сомножители, определенными диаграммой

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{Q}' & & \\ & \swarrow p_1 & \downarrow & \searrow p_2 & \\ \mu(\tilde{Q}) & \xleftarrow{\text{pr}_1} & \mu(\tilde{Q}) \times Q & \xrightarrow{\text{pr}_2} & Q \end{array}$$

Для $\tilde{Q}'$ -согласованности действий α и β достаточно проверить, что левый и правый квадраты коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} G \times \mu(\tilde{Q}) & \xleftarrow{(\text{id}_G, p_1)} & G \times \tilde{Q}' & \xrightarrow{(\text{id}_G, p_2)} & G \times Q \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \tilde{\alpha} & & \downarrow \beta \\ \mu(\tilde{Q}) & \xleftarrow{p_1} & \tilde{Q}' & \xrightarrow{p_2} & Q \end{array} \quad (1.8)$$

декартовы.

Мы приведем доказательство универсальности для левого квадрата, поскольку для правого действия аналогичны. Пусть T – схема, $f: T \rightarrow G \times \mu(\tilde{Q})$ и $h: T \rightarrow \tilde{Q}'$ – морфизмы, делающие квадрат

$$\begin{array}{ccc} G \times \mu(\tilde{Q}) & \xleftarrow{f} & T \\ \alpha \downarrow & & \downarrow h \\ \mu(\tilde{Q}) & \xleftarrow{p_1} & \tilde{Q}' \end{array}$$

коммутативным, $t \in T$ – замкнутая точка, $f(t) = (g, \tilde{q}) \in G \times \mu(\tilde{Q})$ и $h(t) = \tilde{q}'$ – ее образы относительно морфизмов f и h соответственно, а также $\alpha(g, \tilde{q}) = g\tilde{q}$. По коммутативности левого квадрата в (1.8) $p_1(\tilde{q}') = g\tilde{q}$. Тогда $(\text{id}_G, p_1)(g, \tilde{q}) = (g, p_1(\tilde{q})) = (g, g^{-1}\tilde{q})$. Зададим отображение $\varphi: T \rightarrow G \times \tilde{Q}'$ соответствием $t \mapsto (g, g^{-1}\tilde{q}')$. Понятно, что отображение φ определено единственным образом. Обозначив через $\text{inv}: G \rightarrow G$ морфизм, обращающий элементы группы G , а через $p_G: G \times \mu(\tilde{Q}) \rightarrow G$ морфизм проектирования на сомножитель, зададим морфизм φ по формуле

$$\varphi = (p_G \circ f, \tilde{\alpha} \circ (\text{inv} \circ p_G \circ f, h)).$$

В [3; §9] в рассуждении, следующем за доказательством предложения 20, схема $\mu(\tilde{Q})$ может не быть собственной, однако морфизм $\alpha(\lambda)$ единственным образом продолжается до морфизма $\bar{\alpha}(\lambda): \mathbb{A}^1 \rightarrow \mu(\tilde{Q})$. Обоснование продолжаемости дословно соответствует рассуждению в §3 настоящей работы, следующему за предложением 8. Дальнейшие рассуждения в [3; §9] верны и применимы в силу следующего замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для применений в [3] достаточно, чтобы ограничения $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ действий α и β на любую однопараметрическую подгруппу $\lambda: \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow G$ обладали единственными продолжениями до морфизмов $\overline{\alpha(\lambda)}: \mathbb{A}^1 \rightarrow Y$ и $\overline{\beta(\lambda)}: \mathbb{A}^1 \rightarrow Z$. Тогда собственность схем X, Y, Z не требуется.

Автор приносит свои глубочайшие извинения за ошибки и пропуски, допущенные в тексте работы [3].

§ 2. Редукция функтора модулей и его схемы модулей

Вначале напомним некоторые определения (см. [9; гл. 1, п. 4.5]).

Пусть $X = (X, \mathcal{O}_X)$ – схема и $\mathcal{N}il_X \subset \mathcal{O}_X$ – нильрадикал ее структурного пучка $\mathcal{O}_X$. Тогда факторпучок $\mathcal{O}_X/\mathcal{N}il_X$ обозначается $\mathcal{O}_{X_{\text{red}}}$. Схему $X_{\text{red}} := (X, \mathcal{O}_{X_{\text{red}}})$ будем называть *редукцией схемы* $(X, \mathcal{O}_X)$. Понятно, что редукция схемы $(X, \mathcal{O}_X)$ гомеоморфна схеме X как топологическое пространство Зариского и что она является канонически вложенной подсхемой в X (см. [9; гл. 1, следствие 4.5.2]). Если $\rho: X_{\text{red}} \hookrightarrow X$ – морфизм вложения, то соответствующий морфизм пучков является морфизмом на факторпучок: $\rho^\sharp: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{X_{\text{red}}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (см. [9; предложение 4.5.10]). *Для любого морфизма схем $f: X \rightarrow Y$ существует канонически определенный морфизм соответствующих приведенных схем $f_{\text{red}}: X_{\text{red}} \rightarrow Y_{\text{red}}$ такой, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ X_{\text{red}} & \xrightarrow{f_{\text{red}}} & Y_{\text{red}} \end{array}$$

коммутативна.

Этот морфизм будем называть *редукцией морфизма f* .

Теперь рассмотрим любой функтор вида

$$f: (\text{Schemes}_k)^o \rightarrow \text{Sets}$$

из категории схем над полем k в категорию множеств. Этот функтор ставит в соответствие каждой схеме $T \in \text{Ob } \text{Schemes}_k$ множество $\mathfrak{F}_T$ семейств с базой T , состоящих из объектов предписанного типа. Пусть $(\text{RSch}_k)^o$ – подкатегория, образованная в $(\text{Schemes}_k)^o$ приведенными схемами и их морфизмами. Тогда имеется естественное вложение (как полной подкатегории) $i: (\text{RSch}_k)^o \hookrightarrow (\text{Schemes}_k)^o$ и функтор редукции $\text{red}: (\text{Schemes}_k)^o \rightarrow (\text{RSch}_k)^o$ такой, что композиция $\text{red} \circ i$ является тождественным функтором на $(\text{RSch}_k)^o$.

Назовем ограничение $f_{\text{red}} := f|_{(\text{RSch}_k)^o}$ функтора f на подкатегорию $(\text{RSch}_k)^o$ *редукцией функтора f* . Естественно говорить, что функтор f *приведен*, если он факторизуется как $f = f_{\text{red}} \circ \text{red}$.

То же самое может быть сделано для соответствующего функтора модулей

$$f/\sim: (\text{Schemes}_k)^o \rightarrow \text{Sets}.$$

Это означает, что функтор модулей ставит в соответствие любой схеме T множество классов $\mathfrak{F}_T / \sim$ семейств с базой T по отношению к подходящей эквивалентности $\sim$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть функтор f копредставлен схемой M . Тогда его редукция f_{red} копредставлена редукцией M_{red} схемы M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функтор f копредставлен схемой M , то существует морфизм $\psi: f \rightarrow (X \mapsto \text{Hom}(X, M))$ такой, что любой морфизм $\psi': f \rightarrow (X \mapsto \text{Hom}(X, F'))$ пропускается через единственный морфизм $\omega: (X \mapsto \text{Hom}(X, M)) \rightarrow (X \mapsto \text{Hom}(X, F'))$. Переход к редукциям функтора f и схем X, F', M завершает доказательство.

§ 3. Неприведенная схема модулей для f

В этом параграфе будет построена (возможно) неприведенная схема модулей допустимых S -полустабильных пар. После этого мы докажем, что эта схема квазипроективна. В рассматриваемой ситуации этого достаточно, чтобы заключить, что неприведенная схема модулей проективна.

При построении пространств модулей возникают две проблемы: проверка ограниченности исследуемых семейств и применение геометрической теории инвариантов в интересующей ситуации. В нашем случае ввиду специального выбора выделенной поляризации $\tilde{L}$ полиномы Гильберта как для допустимых схем $\tilde{S}$, так и для полустабильных векторных расслоений $\tilde{E}$ остаются постоянными по базе.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Существует (общее для всех допустимых полустабильных пар) целое число $m \gg 0$ такое, что обратимый пучок $\tilde{L} = L^m \otimes \sigma^{-1}I \cdot \mathcal{O}_{\tilde{S}}$ очень обилен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь мы покажем, почему некоторого конечного (возможно, достаточно большого) m может быть достаточно для всех схем $\tilde{S}$. Классы изоморфизма схем $\tilde{S} = \text{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s / (t)^{s+1}$ перечисляются нульмерными подсхемами на поверхности S , соответствующими идеалам I .

Покажем, каким образом из конструкции стандартного разрешения следует ограниченность семейств схем $\tilde{S}$, входящих в объекты параметризации (полустабильные пары). Для этого убедимся в том, что кодлины идеалов Фиттинга $\mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S)$ для данных $S, L, r, p_E(t)$ и всевозможных полустабильных когерентных пучков без кручения E ограничены сверху.

Во-первых, всякий такой пучок E может быть включен в точную тройку $\mathcal{O}_S$ -модулей $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_0 \rightarrow E \rightarrow 0$, в которой E_0 и E_1 зависят от E и локально свободны. При фиксированных r и $p_E(t)$ ранги пучков E_0 и E_1 можно выбрать общими для всех пучков E . Пусть $\text{rank } E_1 = N$ и $\text{rank } E_0 = N + r$.

Во-вторых, формирование двойственных пучков приводит к точной последовательности

$$0 \rightarrow E^\vee \rightarrow E_0^\vee \xrightarrow{\varphi} E_1^\vee \rightarrow \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S) \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

Гомоморфизм φ локально свободных $\mathcal{O}_S$ -модулей локально (в окрестности каждой точки p_i носителя $\text{Supp } \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S) = \{p_1, \dots, p_m\}$ пучка $\mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S)$)

представлен матрицей размеров $N \times (N + r)$, элементы $\varphi_{\alpha\beta}$ которой являются полиномами от локальных параметров x, y на поверхности S в окрестности точки носителя p_i . Поскольку $\text{length } \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S) \leq c_2$, то степени полиномов $\varphi_{\alpha\beta}$ ограничены сверху, скажем константой $C_1 \leq c_2$.

Для доказательства этого положения можно ограничиться рассмотрением артиновой факторалгебры $\mathcal{K}$ алгебры $k[x, y]^{\oplus N}$. Пусть $h: k[x, y]^{\oplus N} \rightarrow \mathcal{K}$ — соответствующий гомоморфизм k -алгебр и $K = \ker h$. Обозначим символом j_α гомоморфизм вложения α -го прямого слагаемого $j_\alpha: k[x, y] \hookrightarrow k[x, y]^{\oplus N}: f \mapsto (0, \dots, 0, f, 0, \dots, 0)$ (компонента f помещена на место с номером α). Каждая образующая $k[x, y]$ -подмодуля $K \subset k[x, y]^{\oplus N}$ имеет вид $f = (f_1, \dots, f_N)$, где $f_\alpha \in j_\alpha(k[x, y])$. Композиция $h \circ j_\alpha: k[x, y] \hookrightarrow k[x, y]^{\oplus N} \rightarrow \mathcal{K}$ обладает образом $\text{im } h \circ j_\alpha = \mathcal{O}_{Z_\alpha}$ и ядром $\ker h \circ j_\alpha = I_\alpha \subset k[x, y]$. Образующие идеала I_α получаются из образующих идеала $K \subset k[x, y]^{\oplus N}$ по следующему правилу (проектирования на прямое слагаемое): если $f = (f_1, \dots, f_\alpha, \dots, f_N)$ — образующая идеала K , то f_α — соответствующая ей образующая идеала I_α . Остается заметить, что степени полиномов f_α не превосходят длины подсхемы Z_α : пересечение подсхемы Z_α с любой прямой $x = ay$ имеет длину не более чем $\text{length } Z_\alpha$.

В свою очередь, справедливо $\text{length } Z_\alpha = \text{length } \mathcal{O}_{Z_\alpha} \leq \text{length } \mathcal{K}$. Полиномы f_α для различных образующих идеала K и являются элементами матрицы $\varphi_{\alpha\beta}$ (β — номер образующей f).

В-третьих, нулевой идеал Фиттинга $\mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S)$ определяется формулой

$$\mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S) = \text{im} \left(\bigwedge^N E_0^\vee \otimes \bigwedge^N E_1 \xrightarrow{\varphi'} \mathcal{O}_X \right)$$

и задает нульмерную подсхему Z_E на поверхности S , характеризующую особенности пучка E . Гомоморфизм φ' индуцирован N -й внешней степенью

$$\bigwedge^N \varphi: \bigwedge^N E_0^\vee \rightarrow \bigwedge^N E_1^\vee$$

гомоморфизма φ . Таким образом, гомоморфизм φ' локально представлен матрицей-строкой, элементы которой φ'_γ , $\gamma = 1, \dots, \binom{N+r}{N}$, выражаются как полиномы N -й степени от переменных $\varphi_{\alpha\beta}$, $\alpha = 1, \dots, N$, $\beta = 1, \dots, N + r$. Тем самым, степени φ'_γ как полиномов от локальных параметров x, y ограничены сверху константой, равной $NC_1 \leq Nc_2$. Наконец, отсюда мы можем заключить, что длина подсхемы Z_E ограничена, например, константой $C = (Nc_2)^2$.

Тогда все классы изоморфизма схем $\tilde{S} \not\cong S$ изображаются точками следующей схемы конечного типа: $\coprod_{l=1}^C \text{Hilb}^l S$.

СОГЛАШЕНИЕ. Зафиксируем такое m и переобозначим L^m символом L , так что $\tilde{L} = L \otimes \sigma^{-1} I \cdot \mathcal{O}_{\tilde{S}}$, как было указано во введении. Также для любого плоского семейства схем из класса схем $\tilde{S}$ с выделенными поляризациями $\tilde{L}$ пусть $\tilde{\mathbb{L}}$ — обратимый пучок, который очень обилен относительно T . Мы будем по умолчанию считать, что он приводит к выделенной поляризации на каждом слое семейства при ограничении на этот слой.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Итак, для построения (основных компонент) схемы модулей $\tilde{M}$ нужно задать константу C , которая должна быть достаточно велика и

зависеть от данных $r, p_E(t)$. Она может быть оценена исходя из данных $S, L, r, p_E(t)$ и потому не является независимым параметром построения. Знание точной оценки константы C не является необходимым для построения основных компонент схемы $\widetilde{M}$, и согласно приведенному доказательству утверждения результат не зависит от этой оценки, если только значение оценки выбрано достаточно большим. Константа C ограничивает сверху кодлины пучков идеалов $I \subset \mathcal{O}_S$, участвующих в конструкции схем $\widetilde{S}$. Однако даже если константа C выбрана так, что при данных $S, L, r, p_E(t)$ ее невозможно уменьшить, нельзя утверждать, что все $l \leq C$ могут быть реализованы как кодлины идеалов Фиттинга $\mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S)$ для подходящих полустабильных когерентных пучков E . На это обстоятельство, в частности, указывалось в [2]. Также для данного l невозможно утверждать, что все пучки идеалов I с кодлиной, равной l , могут быть реализованы как пучки вида $\mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S)$. Однако те значения l и те виды идеалов I , которые не получаются в процессе стандартных разрешений, либо не приводят к полустабильным парам $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$, либо приводят к таким полустабильным парам, которые не являются деформационно эквивалентными S -парам. Иными словами, они приводят к парам, не принадлежащим основным компонентам схемы $\widetilde{M}$.

Пусть X – проективная схема над полем k и $\mathcal{O}(1)$ – очень обильное линейное расслоение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 (см. [6; определение 1.7.5]). Семейство классов изоморфизма когерентных пучков на схеме X *ограниченно*, если существуют k -схема S конечного типа и когерентный $\mathcal{O}_{S \times X}$ -пучок F такой, что данное семейство содержится в множестве $\{F|_{\text{Spec } k_s \times X} | s \text{ – замкнутая точка в } S\}$.

ТЕОРЕМА 2 (см. [6; теорема 3.3.7]). Пусть $f: X \rightarrow S$ – проективный морфизм схем конечного типа над полем k и $\mathcal{O}_X(1)$ – f -обильное линейное расслоение. Пусть P – полином степени d , а μ_0 – рациональное число. Тогда семейство чисто d -мерных пучков на слоях морфизма f с полиномом Гильберта P и максимальным наклоном $\hat{\mu}_{\max} \leq \mu_0$ ограничено. В частности, семейство полустабильных пучков с полиномом Гильберта P ограничено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Семейство допустимых полустабильных пар с фиксированным рангом r и полиномом Гильберта $gr_E(n)$ ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно рассматривать любое фиксированное целое число $n \geq 1$ так, что все допустимые схемы $\widetilde{S}$ вложены в проективное пространство $\mathbb{P} = P(H^0(\widetilde{S}, \widetilde{L}^n))$ как замкнутые подсхемы и все проективные пространства $\mathbb{P} = P(H^0(\widetilde{S}, \widetilde{L}^n))$ изоморфны по построению. Определим $\chi(n)$ как полином Гильберта любой подсхемы $j: \widetilde{S} \hookrightarrow \mathbb{P}$, т.е. $\chi(n) := \chi(j^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n))$. Теперь рассмотрим соответствующую схему Гильберта $\mathbb{H} := \text{Hilb}^{\chi(n)} \mathbb{P}$ и универсальную подсхему $\mathbb{U} := \text{Univ}^{\chi(n)} \mathbb{P}$. Схема Гильберта $\mathbb{H}$ является проективной схемой конечного типа над полем k и структурный морфизм $\pi: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{H}$ – (плоский) морфизм конечного типа. Следовательно, схема $\mathbb{U}$ имеет конечный тип над k .

Теперь можно рассматривать семейства полустабильных (не обязательно локально свободных) когерентных пучков на слоях морфизма π . Полустабильность понимается как обычная полустабильность по Гизекеру, без требования

квазиидеальности. Предполагается, что пучки имеют полином Гильберта, равный $rp_E(n)$ и вычисляемый относительно поляризации $\tilde{L}$. Согласно теореме 2 множество полустабильных когерентных пучков с фиксированным полиномом Гильберта на слоях морфизма π ограничено. Это множество равно множеству всех пар $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$, где $(\tilde{S}, \tilde{L})$ – двумерная проективная поляризованная схема, причем поляризация $\tilde{L}$ индуцирует замкнутое вложение $j: \tilde{S} \hookrightarrow \mathbb{P}$ схемы $\tilde{S}$ как подсхемы с полиномом Гильберта $\chi(n)$; $\tilde{E}$ – полустабильный по Гизекеру когерентный пучок с полиномом Гильберта, равным $rp_E(n)$.

Поскольку допустимые полустабильные пары образуют подмножество во множестве всех пар с полустабильными по Гизекеру когерентными пучками $\tilde{E}$, это завершает доказательство ограниченности семейств допустимых полустабильных пар.

В силу предложения 4 существует (общее для всех полустабильных пучков без кручения $\tilde{E}$) целое число $m \gg 0$ такое, что пучки $\tilde{E} \otimes \tilde{L}^m$ порождены глобальными сечениями и для всех $\tilde{E}$ векторные пространства глобальных сечений $H^0(\tilde{S}, \tilde{E} \otimes \tilde{L}^m)$ изоморфны k -векторному пространству V размерности $rp_E(m)$. Это пространство V далее фиксировано.

Теперь обратимся к многообразию Грассмана $G(V, r)$, чтобы провести построения, выполненные для приведенного в [3] случая. Каждая пара $((\tilde{S}, \tilde{L}), \tilde{E})$ с полустабильным локально свободным пучком $\tilde{E}$ поставляет замкнутое вложение $j: \tilde{S} \hookrightarrow G(V, r)$. Пусть $\mathcal{O}_{G(V, r)}(1)$ – положительная образующая группы $\text{Pic } G(V, r)$, $P(n) := \chi(j^* \mathcal{O}_{G(V, r)}(n))$ – полином Гильберта замкнутой подсхемы $j(\tilde{S})$. Образует схему Гильберта $\text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)$ и подсхему H , составленную всеми допустимыми полустабильными парами. Эта подсхема определяется теоретико-схемными образами всевозможных баз T семейств S -полустабильных допустимых пар относительно индуцированных морфизмов в схему Гильберта $\text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)$. Поскольку мы не требуем, чтобы схемы T были приведенными, то понятно, что H может быть неприведенной.

Теперь рассмотрим связную компоненту H_0 схемы H , содержащую подсхему $\mu(\tilde{Q})$, построенную в [3], и состоящую из пар, принадлежащих подстеку, указанному во введении. Действительно, $\mu(\tilde{Q})$ является редукцией схемы H_0 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. H_0 – квазипроективная подсхема в $\text{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства квазипроективности схемы H_0 необходимо топологический результат из [9; гл. 1, предложение 4.5.14]. В частности, это предложение утверждает, что морфизм схем $f: X \rightarrow Y$ открыт (соответственно замкнут, гомеоморфен на свой образ) тогда и только тогда, когда то же самое верно для его редукции f_{red} .

Возьмем локально замкнутое вложение $\mu(\tilde{Q}) \hookrightarrow \text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)$. Схема Гильберта $\text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)$ является проективной k -схемой конечного типа и $\mu(\tilde{Q})$ – квазипроективная подсхема в ней. Схема H_0 – другая подсхема в $\text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)$ такая, что $(H_0)_{\text{red}} = \mu(\tilde{Q})$. Чтобы убедиться в том, что H_0 квазипроективна, образуем теоретико-схемные замыкания $\overline{\mu(\tilde{Q})}$ и $\overline{H_0}$ для $\mu(\tilde{Q})$ и H_0 соответственно. Оба замыкания берутся в схеме $\text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)$. Поскольку $\overline{\mu(\tilde{Q})}$ и $\overline{H_0}$ замкнуты в проективной схеме, то они проективны.

По построению $(\overline{H}_0)_{\text{red}} = \overline{\mu(\tilde{Q})}$. Теперь рассмотрим вложения $i: H_0 \hookrightarrow \overline{H}_0$ и $i_{\text{red}}: \mu(\tilde{Q}) \hookrightarrow \overline{\mu(\tilde{Q})}$. В силу [9; гл. 1, предложение 4.5.14], поскольку i_{red} открыт, то i также открыт. Отсюда следует, что H_0 – квазипроективная схема.

Группа $\text{PGL}(V)$ действует на многообразии Грассмана $G(V, r)$ линейными преобразованиями векторного пространства V и индуцированным образом на произведении $\text{Hilb}^{P(n)} G(V, r) \times G(V, r)$. Подсхема $H_0 \subset \text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)$ является $\text{PGL}(V)$ -инвариантной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Существует GIT-фактор $\widetilde{M} = H_0 // \text{PGL}(V)$, который является схемой модулей для функтора $\mathfrak{f}$. Схема $\widetilde{M}$ – проективная алгебраическая нётерова схема конечного типа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Схема H_0 снабжена действием той же алгебраической группы $\text{PGL}(V)$, что и ее редукция $\mu(\tilde{Q})$, и геометрическая теория инвариантов также применима.

Пусть $\mathcal{S}$ – универсальное факторрасслоение на грассманиане $G(V, r)$, а $\mathcal{O}_{G(V, r)}(1)$ – по-прежнему положительная образующая его группы Пикара. Для проекций универсальной подсхемы $\text{Univ}^{P(n)} G(V, r)$ будем использовать обозначения

$$\text{Hilb}^{P(n)} G(V, r) \xleftarrow{\pi} \text{Univ}^{P(n)} G(V, r) \xrightarrow{\pi'} G(V, r).$$

Образуем на схеме Гильберта пучки $\tilde{L}_l^h = \det \pi_* \pi'^* \mathcal{S}(l)$. Поскольку проекция $\pi: \text{Univ}^{P(n)} G(V, r) \rightarrow \text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)$ – плоский морфизм и пучки $\mathcal{S}(l)$ локально свободны, то и пучки $\tilde{L}_l^h$ обратимы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 (см. [3; предложение 19]). *Пучки $\tilde{L}_l^h$ очень обильны при $l \gg 0$.*

Зафиксируем обозначение $\tilde{L}_l := \tilde{L}_l^h|_{H_0}$. Напомним следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7 (см. [6; определение 4.2.5]). Пусть Y – k -схема конечно-го типа, G – алгебраическая k -группа и $\alpha: Y \times G \rightarrow Y$ – действие группы. G -линеаризацией квазикогерентного $\mathcal{O}_Y$ -пучка F называется изоморфизм $\mathcal{O}_{Y \times G}$ -пучков $\Lambda: \alpha^* F \rightarrow p_1^* F$, где $p_1: Y \times G \rightarrow Y$ – проекция, причем выполняется следующее условие коцикла:

$$(\text{id}_Y, \text{mult})^* \Lambda = p_{12}^* \Lambda \circ (\alpha, \text{id}_G)^* \Lambda. \quad (3.2)$$

Здесь $p_{12}: Y \times G \times G \rightarrow Y \times G$ – проекция на первые два сомножителя, $\text{mult}: G \times G \rightarrow G$ – морфизм умножения в группе G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8 (см. [3; предложение 20]). *Пучки $\tilde{L}_l$ несут $\text{GL}(V)$ -линеаризацию.*

Теперь рассмотрим (см. [6; гл. 4, п. 4.2]) произвольную однопараметрическую подгруппу $\lambda: \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow \text{GL}(V)$. Будем обозначать образ точки $t \in \mathbb{A}^1 \setminus 0$ при морфизме λ как $\lambda(t)$. Морфизм λ в композиции с действием α приводит для всякой замкнутой точки $\tilde{x} \in H_0$ к морфизму $\alpha(\lambda): \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow H_0$, задаваемому соответствием $t \mapsto \tilde{x}_t = \alpha(\lambda(t), \tilde{x})$.

Утверждается, что морфизм $\alpha(\lambda): \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow H_0$ может быть единственным образом продолжен до морфизма $\overline{\alpha(\lambda)}: \mathbb{A}^1 \rightarrow H_0$.

Действительно, существование и единственность продолжения до морфизма $\overline{\alpha(\lambda)}: \mathbb{A}^1 \rightarrow \text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)$ обеспечиваются собственностью схемы Гильберта. Остается убедиться в том, что добавляемая при формировании замыкания образа точка $\overline{\alpha(\lambda)}(0)$ принадлежит подсхеме H_0 .

Обратимся к $G = \text{PGL}(V)$ -эquivariantным сюръективным морфизмам

$$\mu(\tilde{Q}) \xleftarrow{\mu'} \tilde{Q}' \xrightarrow{\phi'} Q,$$

где ϕ' – equivariantное стандартное разрешение и μ' – морфизм в схему Гильберта $\text{Hilb}^{P(n)} G(V, r)$.

Пусть $\tilde{x}'$ – любая из точек в прообразе $\mu'^{-1}(\tilde{x}) \subset \tilde{Q}'$; $x = \phi'(\tilde{x}')$. Согласно [6; лемма 4.3.8] определяемый точкой x морфизм $\beta(\lambda): \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow Q$ продолжается до морфизма $\overline{\beta(\lambda)}: \mathbb{A}^1 \rightarrow Q$. Рассмотрим действие $\hat{\alpha}: G \times \tilde{Q}' \rightarrow \tilde{Q}'$ и индуцированный морфизм $\hat{\alpha}_\lambda: (\mathbb{A}^1 \setminus 0) \times \mu'^{-1}(\tilde{x}) \rightarrow \tilde{Q}'$. Он включается в диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{A}^1 \setminus 0) \times \mu'^{-1}(\tilde{x}) & \xrightarrow{\hat{\alpha}_\lambda} & \tilde{Q}' \\ \downarrow & & \downarrow \phi' \\ (\mathbb{A}^1 \setminus 0) \times \phi' \mu'^{-1}(\tilde{x}) & \xrightarrow{\beta_\lambda} & Q \end{array}$$

в которой нижний морфизм индуцирован действием $\beta: G \times Q \rightarrow Q$. При этом морфизм β_λ продолжается до морфизма $\overline{\beta_\lambda}: \mathbb{A}^1 \times \phi' \mu'^{-1}(\tilde{x}) \rightarrow Q$.

Образует декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1 \times \phi'^{-1}(\phi'(\mu'^{-1}(\tilde{x}))) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_\lambda} & \tilde{Q}' \\ (\text{id}_G, \phi') \downarrow & & \downarrow \phi' \\ \mathbb{A}^1 \times \phi'(\mu'^{-1}(\tilde{x})) & \xrightarrow{\overline{\beta}_\lambda} & Q \end{array}$$

где $\tilde{\alpha}_\lambda$ – новый морфизм, определенный по equivariantности морфизма ϕ' и включаемый в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{A}^1 \setminus 0) \times \mu'^{-1}(\tilde{x}) & \xrightarrow{\hat{\alpha}_\lambda} & \tilde{Q}' \\ \downarrow & & \parallel \\ \mathbb{A}^1 \times \phi'^{-1}(\phi'(\mu'^{-1}(\tilde{x}))) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_\lambda} & \tilde{Q}' \end{array}$$

в которой вложение индуцировано вложениями сомножителей.

Существование морфизма $\tilde{\alpha}_\lambda$ указывает на то, что, в частности, морфизм $\hat{\alpha}(\lambda): \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow \tilde{Q}'$, определяемый любой точкой $\tilde{x}' \in \mu'^{-1}(\tilde{x})$, может быть продолжен до морфизма $\overline{\hat{\alpha}(\lambda)}: \mathbb{A}^1 \rightarrow \tilde{Q}'$. Выполняя спуск относительно сюръективного морфизма μ' , получаем существование продолжения $\overline{\alpha(\lambda)}: \mathbb{A}^1 \rightarrow$

$\mu(\tilde{Q})$ для морфизма $\alpha(\lambda): \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow \mu(\tilde{Q})$, определяемого произвольной точкой $\tilde{x} \in \mu(\tilde{Q})$.

Поскольку $(H_0)_{\text{red}} = \mu(\tilde{Q})$, то морфизм $\alpha(\lambda): \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow H_0$ обладает единственным продолжением $\overline{\alpha(\lambda)}: \mathbb{A}^1 \rightarrow H_0$.

Тогда точка $\tilde{x}_0 = \overline{\alpha(\lambda)}(0)$ является неподвижной точкой действия подгруппы λ . Обозначение: $\tilde{x}_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)(\tilde{x})$. Подгруппа λ действует на слое $L_{\tilde{x}_0}$ G -линеаризованного линейного расслоения L с некоторым весом w : если Λ – линеаризация на L , то $\Lambda(\tilde{x}_0, g) = g^w \cdot \text{id}_{L_{\tilde{x}_0}}$. Определим вес соответствующего одномерного представления группы λ как $w^{\tilde{L}_i}(\tilde{x}, \lambda) = -w$.

Основным инструментом для анализа существования фактора является численный критерий Гильберта–Мамфорда. Напомним

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8 (см. [6; определение 4.2.9]). Точка $x \in X$ схемы X полустабильна относительно G -линеаризованного обильного линейного расслоения L , если существуют целое число n и инвариантное глобальное сечение $s \in H^0(X, L^n)$ такое, что $s(x) \neq 0$. Точка x стабильна, если к тому же стабилизатор $\text{Stab}(x)$ конечен и G -орбита точки x замкнута в открытом множестве всех полустабильных точек в X .

ТЕОРЕМА 3 (критерий Гильберта–Мамфорда; см. [6; теорема 4.2.11]). Точка $x \in X$ полустабильна тогда и только тогда, когда для всех нетривиальных однопараметрических подгрупп $\lambda: \mathbb{A}^1 \setminus 0 \rightarrow G$ имеет место неравенство

$$w(x, \lambda) \geq 0.$$

Точка x стабильна тогда и только тогда, когда для всех λ выполнено строгое неравенство.

Критерий Гильберта–Мамфорда оперирует с множеством замкнутых точек исследуемой схемы. Множество замкнутых точек схемы H_0 то же самое, что и множество замкнутых точек схемы $\mu(\tilde{Q})$. Поэтому можно перенести результат из [3; § 9] в ситуацию настоящей статьи.

Для дальнейшего необходима известная из геометрической теории инвариантов

ТЕОРЕМА 4 (см. [6; теорема 4.2.10]). Пусть G – редуктивная группа, действующая на проективной схеме Y , снабженной G -линеаризованным обильным линейным расслоением L . Тогда существуют проективная схема X и морфизм $f: Y^{ss}(L) \rightarrow X$ такой, что f – универсальный хороший фактор для данного G -действия. Более того, существует открытое подмножество $X^s \subset X$ такое, что $Y^s(L) = f^{-1}(X^s)$ и $f: Y^s \rightarrow X^s$ – универсальный геометрический фактор.

Применим эту теорему в следующей ситуации: $Y = \overline{H_0}$, $G = \text{PGL}(V)$, $L = \tilde{L}_l$, $l \gg 0$. Поскольку не известно, имеет ли место равенство $(\overline{H_0})^{ss} = H_0$, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Существует квазипроективная алгебраическая схема $\tilde{M}$ вместе с морфизмом $f: H_0^{ss} \rightarrow \tilde{M}$, причем f – универсальный хороший

$\mathrm{PGL}(V)$ -фактор. Схема $\widetilde{M}$ содержит открытую подсхему $\widetilde{M}^s \subset \widetilde{M}$ такую, что ограничение $f|_{H_0^s}: H_0^s \rightarrow \widetilde{M}^s$ – универсальный геометрический фактор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, граница $\partial\overline{H}_0 = \overline{H}_0 \setminus H_0$ – $\mathrm{PGL}(V)$ -инвариантная подсхема, замкнутая в проективной схеме $\overline{H}_0$. Поэтому $\partial\overline{H}_0$ проективна. Формирование $\mathrm{PGL}(V)$ -факторов приводит к вложению проективных схем $(\partial\overline{H}_0)^{ss}/\mathrm{PGL}(V) \hookrightarrow (\overline{H}_0)^{ss}/\mathrm{PGL}(V)$. Тогда

$$\widetilde{M} = ((\overline{H}_0)^{ss}/\mathrm{PGL}(V)) \setminus ((\partial\overline{H}_0)^{ss}/\mathrm{PGL}(V)),$$

откуда следует квазипроективность схемы $\widetilde{M}$. Остальные результаты немедленно поставляются теоремой 4.

То же самое верно для доказательства того, что GIT-фактор является требуемым пространством модулей: рассуждения из [3; § 12] переносятся в нашу ситуацию дословно.

GIT-фактор $\widetilde{M} = H_0//\mathrm{PGL}(V)$ – квазипроективная нётерова схема конечного типа над полем k . Это означает, что существует локально замкнутое вложение схемы $\widetilde{M}$ в некоторое подходящее проективное k -пространство $\mathbb{P}$. Пусть $j: \widetilde{M} \hookrightarrow \mathbb{P}$ – соответствующий морфизм схем. Согласно [9; гл. 1, предложение 4.5.15], если $f: X \rightarrow Y$ – открытое (соответственно замкнутое) вложение, то такое же свойство выполняется для f_{red} . Тогда редукция $j_{\mathrm{red}}: \widetilde{M}_{\mathrm{red}} \rightarrow \mathbb{P}$ также является локально замкнутым вложением. Теперь необходима следующая очевидная лемма.

ЛЕММА. Пусть X – проективная схема и $j: X \hookrightarrow \mathbb{P}$ – ее локально замкнутое вложение в некоторое проективное пространство. Тогда j – замкнутое вложение.

Применение этой леммы приводит к заключению, что $\widetilde{M}$ – проективная схема. Конечность типа и свойство нётеровости наследуются с соответствующих свойств схемы H_0 (см. [10; гл. 1, § 2, теорема 1.1]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Поскольку X – проективная схема, то существует проективное пространство $\mathbb{P}'$ вместе с замкнутым вложением $j': X \hookrightarrow \mathbb{P}'$. Два морфизма вложения j, j' индуцируют морфизм $(j', j): X \hookrightarrow \mathbb{P}' \times \mathbb{P}$ локально замкнутого вложения. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & \mathbb{P} \\ j' \downarrow & \searrow (j', j) & \uparrow p_2 \\ \mathbb{P}' & \xleftarrow{p_1} & \mathbb{P}' \times \mathbb{P} \end{array}$$

где p_1, p_2 – проекции на первый и второй сомножитель соответственно. Представление $j' = p_1 \circ (j', j)$ гарантирует, что (j', j) – замкнутое вложение (см. [9; гл. 1, замечание 5.2.7, (iii)]). Тогда из представления $j = p_2 \circ (j', j)$ заключаем, что j – замкнутое вложение.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Принимая во внимание результат из [3; § 10], приходим к следующему заключению. Морфизм компактификаций, построенный в [3], существует, если схемы $\widetilde{M}$ и $\overline{M}$ приведены, а также если неприведенные схемы модулей $\overline{M}$ и $\widetilde{M}$ заменены своими редукциями. Вопрос о существовании такого морфизма для неприведенных схем в настоящее время открыт.

§ 4. Подфункторы и подсхемы модулей

Пусть $f: (Schemes_k)^o \rightarrow (Sets)$ – функтор, ставящий в соответствие схеме T множество семейств $\mathfrak{F}_T$ с базой T , состоящих из объектов некоторого предписанного класса $\mathfrak{F}$. Пусть P – некоторое свойство, $\mathfrak{F}^P$ – подкласс объектов в $\mathfrak{F}$, обладающих свойством P . Оно называется *открытым*, если для любого семейства $\mathfrak{F}_T$ точки $t \in T$, которым соответствуют объекты со свойством P , составляют открытую подсхему T_0 в T . Тогда имеет смысл назвать функтор $f^P: (Schemes_k)^o \rightarrow (Sets)$, ставящий в соответствие схеме T множество семейств $\mathfrak{F}_T^P$ объектов из класса $\mathfrak{F}^P$, *открытым P -подфунктором* функтора f .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Если f копредставлен схемой M , то открытый подфунктор f^P копредставлен открытой подсхемой M_0 в M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Копредставленность функтора f схемой M означает, в частности, коммутативность всех диаграмм вида

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & \{\mathfrak{F}_T\} \\ \downarrow M & \searrow \psi_T & \downarrow \psi'_T \\ \text{Hom}(T, M) & \xrightarrow{\omega_T} & \text{Hom}(T, F') \end{array}$$

Пусть M_0 – объединение в схеме M образов

$$\bigcup_{\substack{f \in \psi_T(\{\mathfrak{F}_T^P\}) \\ T \in \text{Ob}(Schemes_k)}} f(T).$$

Далее при работе с подклассом $\mathfrak{F}^P$ и подфунктором f^P в обозначениях естественных преобразований и индуцированных ими морфизмов в категории множеств будем писать P в верхнем индексе: ψ^P , ψ_T^P и т.п.

Из конструкции следует, что подфунктор f^P копредставлен подсхемой M_0 . Чтобы доказать это, достаточно построить естественное преобразование ω^P . Для вложения схем $M_0 \hookrightarrow M$, каждой схеме T и индуцированного вложения множеств $\text{Hom}(T, M_0) \hookrightarrow \text{Hom}(T, M)$ рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \{\mathfrak{F}_T^P\} & & & & \\ & \searrow \psi_T^P & & \searrow \psi'_T = \psi'^P_T & \\ & & \text{Hom}(T, M_0) & \xrightarrow{\omega_T^P} & \text{Hom}(T, F') \\ & \searrow \psi_T & \downarrow & \nearrow \omega_T & \\ & & \text{Hom}(T, M) & & \end{array}$$

Эта диаграмма показывает, что отображение ω_T^P однозначно определяется композицией из нижнего треугольника. Соответственно, для искомого естественного преобразования также имеем определение с помощью композиции:

$$\omega^P: \operatorname{Hom}(-, M_0) \rightarrow \operatorname{Hom}(-, M) \xrightarrow{\omega} \operatorname{Hom}(-, F').$$

Осталось убедиться в том, что M_0 – открытая подсхема в M . Для этого рассмотрим покрытие $M = \bigcup_{U \in \operatorname{Ob} \operatorname{Open}(M)} U$ схемы M всевозможными открытыми подсхемами и множества $\{\mathfrak{F}_U\}$. Пусть $U_0 \subset U$ – максимальная открытая подсхема в U , при ограничении на которую семейство $\mathfrak{F}_U$ состоит из объектов со свойством P . Такая подсхема зависит от выбора семейства во множестве $\{\mathfrak{F}_U\}$. Рассматриваются все такие подсхемы U_0 для каждой из U . Понятно, что $\bigcup U_0 \subset M_0$ и $\bigcup U_0$ – открытая подсхема в M .

Пусть теперь T_0 – произвольная схема, являющаяся базой семейства $\mathfrak{F}_{T_0}^P$. Естественное преобразование ψ ставит ему в соответствие морфизм $f: T_0 \rightarrow M$, пропускаемый через подсхему M_0 . Тогда образуем открытое покрытие схемы $f(T_0)$ подсхемами $U \times_M T_0$. Образы этих подсхем в M принадлежат $\bigcup U_0$. Рассматривая различные T_0 , приходим к равенству $M_0 = \bigcup U_0$.

Теперь обратимся к классу объектов, описанному в (0.1), и свойству $P = \{\pi^{-1}(t) \cong S\}$. Понятно, что это открытое свойство и, тем самым, определен открытый подфунктор f^P . Предложение 10 приводит к существованию открытой подсхемы $\widetilde{M}_0$, являющейся грубым пространством модулей для подфунктора f^P , т.е. *схемой модулей S -пар*.

Аналогично рассмотрим функтор Гизекера–Маруямы $\bar{f}: (\operatorname{Schemes}_k)^o \rightarrow \operatorname{Sets}$, ставящий в соответствие каждой схеме T множество плоских семейств $\mathbb{E}$ с базой T полустабильных когерентных $\mathcal{O}_S$ -пучков $E = \mathbb{E}|_{t \times S}$, без кручения и с полиномом Гильберта $\chi(E \otimes L^n) = rp_E(n)$. Свойство $P' = \{E \text{ локально свободен}\}$ поставляет подсхему $\overline{M}_0$ модулей полустабильных векторных расслоений. Эта подсхема копредставляет подфунктор $\bar{f}^{P'}$.

По определению подфункторов f^P и $\bar{f}^{P'}$ они изоморфны: соответствующие классы объектов параметризации совпадают. Отсюда следует изоморфизм схем модулей $\widetilde{M}_0 \cong \overline{M}_0$, завершающий доказательство теоремы 1.

Автор выражает глубокую и искреннюю признательность Василию Бринцанеску (IMAR, Бухарест, Румыния) за интерес к работе и плодотворные обсуждения. Также автор благодарит Институт математики Румынской академии (IMAR), где была выполнена большая часть работы, за гостеприимство и поддержку.

Список литературы

- [1] Н. В. Тимофеева, “Компактификация в схеме Гильберта многообразия модулей стабильных 2-векторных расслоений на поверхности”, *Матем. заметки*, **82:5** (2007), 756–769; англ. пер.: N. V. Timofeeva, “A compactification of the moduli variety of stable vector 2-bundles on a surface in the Hilbert scheme”, *Math. Notes*, **82:5** (2007), 677–690.

- [2] Н. В. Тимофеева, “О вырождении поверхности в компактификации Фиттинга модулей стабильных векторных расслоений”, *Матем. заметки*, **90**:1 (2011), 143–150; англ. пер.: N. V. Timofeeva, “On degeneration of the surface in the Fitting compactification of moduli of stable vector bundles”, *Math. Notes*, **90**:1 (2011), 142–148.
- [3] Н. В. Тимофеева, “О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности. III: Функториальный подход”, *Матем. сб.*, **202**:3 (2011), 107–160; англ. пер.: N. V. Timofeeva, “On a new compactification of moduli of vector bundles on a surface. III: Functorial approach”, *Sb. Math.*, **202**:3 (2011), 413–465.
- [4] Н. В. Тимофеева, “О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности”, *Матем. сб.*, **199**:7 (2008), 103–122; англ. пер.: N. V. Timofeeva, “On a new compactification of the moduli of vector bundles on a surface”, *Sb. Math.*, **199**:7 (2008), 1051–1070.
- [5] Н. В. Тимофеева, “О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности. II”, *Матем. сб.*, **200**:3 (2009), 95–118; англ. пер.: N. V. Timofeeva, “On the new compactification of moduli of vector bundles on a surface. II”, *Sb. Math.*, **200**:3 (2009), 405–427.
- [6] D. Huybrechts, M. Lehn, *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Aspects Math., **E31**, Vieweg, Braunschweig, 1997.
- [7] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **52**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1977.
- [8] A. M. Bravo, S. Encinas, O. U. Villamayor, “A simplified proof of desingularization and applications”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **21**:2 (2005), 349–458.
- [9] A. Grothendieck, J. A. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique*. I, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1971.
- [10] D. Mumford, J. Fogarty, *Geometric invariant theory*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **34**, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

Н. В. Тимофеева (N. V. Timofeeva)
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
E-mail: ntimofeeva@list.ru

Поступила в редакцию
27.08.2011 и 15.07.2012