Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Н. Сергеев, Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 1, 119–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7928>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:25:19

УДК 517.926

И. Н. Сергеев

Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем

Для решений систем дифференциальных уравнений определены ляпуновские характеристики колеблемости и блуждаемости, а именно средняя частота нулей проекции решения на какую-либо прямую и средняя угловая скорость вращения решения вокруг начала координат в каком-либо базисе. Получено связывающее их интегральное равенство. Доказано, что если перед усреднением минимизировать характеристики колеблемости по всевозможным прямым, а характеристики блуждаемости по всевозможным базисам, то они совпадут друг с другом.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: дифференциальная система, нули решений, колеблемость и блуждаемость, характеристические показатели.

DOI: 10.4213/sm7928

§ 1. Основные понятия и формулировки результатов

1.1. Исходные объекты и обозначения. Для заданного натурального $n > 1$ и области $G \subset \mathbb{R}^{1+n}$ рассмотрим дифференциальную систему вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in G, \quad (1.1)$$

с непрерывной функцией $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$, обеспечивающей:

- 1) локальную единственность решения, проходящего через произвольную точку $(t_0, x_0) \in G$;
- 2) продолжаемость любого решения на весь луч $\mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty)$; будем считать, что на нем с самого начала и определены все решения;
- 3) наличие нулевого решения, т.е. выполнение равенства

$$f(t, 0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

предполагающего включение $\{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}^+\} \subset G$.

Простой, но важный частный случай системы (1.1) с правой частью, удовлетворяющей перечисленным свойствам, представляет собой линейная однородная система

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (1.2)$$

с непрерывной оператор-функцией $A: \mathbb{R}^+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$.

Пусть $\mathbb{R}_*^n$ – множество всех ненулевых векторов пространства $\mathbb{R}^n$, $\text{Aut } \mathbb{R}^n$ – множество всех невырожденных линейных операторов, переводящих векторное пространство $\mathbb{R}^n$ в себя, $C_*^1(\mathbb{R}^+)$ – множество всех непрерывно дифференцируемых отображений $x: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_*^n$ (т.е. не принимающих нулевых значений,

каковым является, в частности, любое решение x системы (1.1), отличное от тождественно нулевого), а $\mathcal{S}_*(A)$ – множество всех ненулевых решений системы (1.2).

Фиксируем в пространстве $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ и определяемую им норму $|\cdot|$. Через I обозначим тождественный оператор в $\mathbb{R}^n$, а для заданного набора векторов $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{R}^n$ через $P_{m_1, \dots, m_k}$ и $P_{m_1, \dots, m_k}^\perp$ будем обозначать ортогональные проекторы на их линейную оболочку и на ортогональное дополнение $(m_1, \dots, m_k)^\perp$ к ней соответственно.

1.2. Показатели блуждания. Для ненулевых решений системы (1.1) определим характеристики блуждаемости (см. [1]) ляпуновского типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Каждой функции $x \in C_*^1(\mathbb{R}^+)$ поставим в соответствие ее *верхний и нижний показатели блуждания*

$$\hat{\eta}(x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \gamma(Lx, t), \quad \check{\eta}(x) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \gamma(Lx, t), \quad (1.3)$$

где

$$\gamma(x, t) \equiv \int_0^t |\dot{u}_x(\tau)| d\tau, \quad u_x(\tau) \equiv \frac{x(\tau)}{|x(\tau)|},$$

причем производную $\dot{u}_x$ назовем *угловой скоростью* функции x .

Величину $\gamma(x, t)$ можно геометрически интерпретировать как длину пути следа $u_x(\tau)$ на единичной сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, оставляемого вектором $x(\tau)$ (точнее, натянутым на него лучом) за время $\tau \in [0, t]$, а после деления этой величины на t – как среднюю угловую скорость вращения вокруг начала координат того же луча за то же время.

Показатели блуждаемости имеют определенное сходство с *показателями* Ляпунова и Перрона (см. [2; гл. 1, § 1]), вычисляемыми по формулам

$$\hat{\chi}(x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|x(t)|}{|x(0)|}, \quad \check{\chi}(x) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|x(t)|}{|x(0)|},$$

однако если последние отвечают за рост нормы вектора $x(t)$ при $t \rightarrow \infty$, то первые – за его вращение вокруг начала координат.

ТЕОРЕМА 1. *Показатели блуждания любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ системы (1.2) с ограниченной функцией A удовлетворяют оценкам (см. обозначение в конце п. 1.1)*

$$0 \leq \check{\eta}(x) \leq \hat{\eta}(x) \leq \|A\| \equiv \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \sup_{t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}_*^n} \frac{|P_x^\perp LA(t)L^{-1}x|}{|x|}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если оператор-функция A системы (1.2) ограничена и, например, для некоторого базиса в $\mathbb{R}^n$ записывается в виде треугольной матрицы, а оператор-функция D_A записывается диагональной матрицей с той же диагональю, то справедлива оценка $\|A\| \leq \|D_A\|$, поскольку с помощью специального преобразования L внедиагональная часть матрицы LAL^{-1} может быть сделана сколь угодно близкой к нулю без изменения диагонали. Если же, кроме того,

матрица оператора D_A имеет скалярный вид $a(\cdot)E$, то справедливы равенства $\|A\| = \|D_A\| = 0$, так как в этом случае имеем

$$P_x^\perp L D_A(t) L^{-1} x = a(t) P_x^\perp x = 0, \quad L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R}_*^n$$

(см. также результаты работ [3], [4]).

1.3. Векторные гиперчастоты. Для ненулевых решений системы (1.1) определим характеристики колеблемости (см. [5]) ляпуновского типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Каждой вектор-функции $x \in C_*^1(\mathbb{R}^+)$ поставим в соответствие ее *верхнюю и нижнюю векторные гиперчастоты* (или *частоты гиперкратных корней*)

$$\hat{\zeta}(x) \equiv \overline{\lim_{t \rightarrow \infty}} \frac{\pi}{t} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \nu^*(x, m, t), \quad \check{\zeta}(x) \equiv \underline{\lim_{t \rightarrow \infty}} \frac{\pi}{t} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \nu^*(x, m, t), \quad (1.4)$$

где для произвольного вектора $m \in \mathbb{R}_*^n$ через $\nu^*(x, m, t)$ обозначено количество гиперкратных корней скалярного произведения $(x(\tau), m)$, рассматриваемого как функция от $\tau \in [0, t]$, а в процессе подсчета этого количества:

- а) каждый некротный корень берется ровно один раз;
- б) любой кратный корень берется бесконечно много раз независимо от его фактической кратности; иными словами, как только хотя бы в одной точке $\tau_0 \in [0, t]$ выполнены одновременно два равенства

$$(x(\tau_0), m) = (\dot{x}(\tau_0), m) = 0, \quad (1.5)$$

так сразу считается выполненным

$$\nu^*(x, m, t) = \infty, \quad (1.6)$$

в противном случае величина $\nu^*(x, m, t)$ считается равной числу нулей функции $(x(\cdot), m)$ на отрезке $[0, t]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Величина $\nu^*(x, m, t)$ может принимать значения лишь из множества натуральных чисел, дополненного нулем и бесконечностью, поэтому точные нижние грани в формулах (1.4) непременно достигаются на конкретных векторах $m \in \mathbb{R}_*^n$ и могут быть заменены минимумами. Более того, сами эти минимумы можно брать не по всем ненулевым векторам m , а лишь по единичным, поскольку справедливо соотношение

$$\nu^*(x, m, t) = \nu^*\left(x, \frac{m}{|m|}, t\right), \quad m \in \mathbb{R}_*^n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть задана функция $x \in C_*^1(\mathbb{R}^+)$. Вектор $m \in \mathbb{R}_*^n$ назовем:

- а) *критической нормалью к функции x на отрезке $[0, t]$* , если для него хотя бы в один момент $\tau_0 \in [0, t]$ выполнены оба равенства (1.5); множество всех таких векторов обозначим через $C_x(t)$;
- б) *критической нормалью к функции x (на всей полупрямой $\mathbb{R}^+$)*, если для него хотя бы в один момент $\tau_0 \in \mathbb{R}^+$ выполнены оба равенства (1.5); множество всех таких векторов обозначим через C_x ;
- с) *концевой ортогональю к функции x на отрезке $[0, t]$* , если вектор m ортогонален хотя бы к одному из векторов $x(0)$ или $x(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Равенство (1.6) возможно только в одном случае: если вектор $m \in \mathbb{R}_*^n$ является критической нормалью к функции $x \in C_*^1(\mathbb{R}^+)$ на отрезке $[0, t]$. Действительно, в противном случае при выполнении равенства (1.6) функция $(x(\cdot), m)$ имеет на отрезке $[0, t]$ бесконечно много нулей, а значит, по теореме Вейерштрасса имеет на нем и предельную точку, служащую нулем этой функции; но тогда этот же нуль в силу теоремы Ролля является предельной точкой и для нулей производной $(\dot{x}(\cdot), m)$, поэтому и сам является нулем производной (из-за непрерывной дифференцируемости функции x), что не согласуется со сделанным предположением.

1.4. Существенная область определения гиперчастот. Будем рассматривать единичную сферу S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$ как самостоятельное топологическое пространство с индуцированной из $\mathbb{R}^n$ топологией и со стандартной мерой mes , являющейся $(n-1)$ -мерной площадью поверхности.

Рассмотрим множество

$$G_x(t) \equiv S^{n-1} \setminus (C_x(t) \cup x^\perp(0) \cup x^\perp(t)) \quad (1.7)$$

всех векторов $m \in S^{n-1}$, не являющихся для функции x на отрезке $[0, t]$ ни критическими нормальными, ни концевыми ортогоналями (определение 3).

ТЕОРЕМА 2. Для любой функции $x \in C_*^1(\mathbb{R}^+)$ и любого значения $t > 0$ множество $G_x(t)$ имеет на сфере S^{n-1} полную меру, открыто и всюду плотно, а на каждой его компоненте связности величина $\nu^*(x, m, t)$ принимает постоянное, причем конечное, значение.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теорема 2 утверждает, в частности, что для каждого значения $t > 0$ множество $C_x(t) \cap S^{n-1}$ единичных критических нормалей к функции $x \in C_*^1(\mathbb{R}^+)$ на отрезке $[0, t]$ имеет на сфере S^{n-1} меру нуль, замкнуто и нигде не плотно. Отсюда следует, что их счетное объединение

$$C_x \cap S^{n-1} = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} C_x(t) \cap S^{n-1},$$

т.е. множество единичных критических нормалей к этой функции на всей полупрямой $\mathbb{R}^+$, также имеет на единичной сфере меру нуль и является множеством первой категории Бэра (см. [6; § 10]).

1.5. Связь между колеблемостью и блуждаемостью. Любопытное равенство, связывающее частоту гиперкратных корней вектор-функции на отрезке с длиной пути ее следа на сфере, устанавливает

ТЕОРЕМА 3. Для любой функции $x \in C_*^1(\mathbb{R}^+)$ и любого значения $t > 0$ выполнено равенство

$$\int_{S^{n-1}} \nu^*(x, m, t) dm = \frac{\text{mes } S^{n-1}}{\pi} \cdot \gamma(x, t). \quad (1.8)$$

Существование интеграла Лебега, стоящего в левой части равенства (1.8), вытекает из теоремы 2, согласно которой прообраз бесконечного значения величины $\nu^*(x, m, t)$, рассматриваемой как функция аргумента $m \in S^{n-1}$, имеет

меру нуль, а прообразы всех ее конечных значений открыты, следовательно тоже измеримы.

И левая, и правая части равенства (1.8) имеют естественный геометрический смысл: они представляют собой полученную из разных соображений полную вариацию $(n - 1)$ -мерной площади, заметаемой на единичной сфере S^{n-1} гиперплоскостью $x^\perp(\tau)$, ортогональной к вектору $x(\tau)$, в процессе изменения переменной τ от 0 до t . Таким образом, равенство (1.8) фактически означает, что функция $\nu^*(x, m, t)$ играет роль индикатрисы Банаха (см. [7; гл. VIII]) для отображения $x/|x|: [0, t] \rightarrow S^{n-1}$.

Поистине замечательное совпадение определенных выше характеристик колеблемости и блуждаемости, имеющих, казалось бы, совершенно разную природу, выявляет основная для настоящей работы

ТЕОРЕМА 4. *Для любой функции $x \in C_*^1(\mathbb{R}^+)$ справедливы равенства*

$$\hat{\zeta}(x) = \hat{\eta}(x), \quad \check{\zeta}(x) = \check{\eta}(x). \quad (1.9)$$

Ранее было доказано, что векторные частоты (не гиперчастоты) лишь оцениваются сверху показателями блуждания (см. [8], [9]); в случае автономной линейной системы вида (1.2) и те, и другие совпадают с полными частотами (см. [10]), отличающимися от векторных порядком взятия предела и нижней грани в формулах (1.4), а также с модулями мнимых частей собственных значений оператора системы (см. [11], [12]); наконец, они совпадают друг с другом в случае, когда система (1.2) отвечает линейному уравнению второго порядка (см. [13]). Теоремы 3 и 4 анонсированы в докладе [14].

1.6. Различные вариации и модификации. Установим корректность определений 1 и 2 с точки зрения инвариантности введенных в них характеристик относительно выбора евклидовой структуры в $\mathbb{R}^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Показатели блуждания и векторные гиперчастоты не зависят от выбора базиса в $\mathbb{R}^n$, или, что то же, от выбора скалярного произведения:

а) в процессе вычисления показателей блуждания точная нижняя грань от величины $\gamma(Lx, t)$ берется по всевозможным невырожденным преобразованиям L , каждое из которых можно интерпретировать как переход к новому базису, или к новому скалярному произведению (ведь новый базис автоматически принимается за ортонормированный), от выбора которого, таким образом, полученная точная нижняя грань уже не зависит;

б) величина $\nu^*(x, m, t)$ равна числу моментов $\tau \in [0, t]$ попадания кривой $x(\tau)$ в гиперплоскость $m^\perp$ в $\mathbb{R}^n$, задаваемую нормалью m , а в случае касания (в смысле (1.5)) кривой с гиперплоскостью $m^\perp$ эта величина бесконечна, изменение же скалярного произведения может привести лишь к тому, что та же гиперплоскость будет задаваться другой нормалью m , по которой в итоге все равно берется точная нижняя грань.

Далее, некоторое упрощение формул (1.3) и (1.4) обеспечивает следующая

ТЕОРЕМА 5. *Для любой функции $x \in C_*^1(\mathbb{R}^+)$:*

1) значения показателей блуждания $\hat{\eta}(x)$ и $\check{\eta}(x)$ не изменятся, если в определяющих их формулах (1.3) множество $\text{Aut } \mathbb{R}^n$ заменить его подмножеством, состоящим из преобразований вида (см. обозначения в конце п. 1.1)

$$L_{m,K} = K \cdot P_m + P_m^\perp, \quad K > 1, \quad m \in \mathbb{R}_*^n; \quad (1.10)$$

2) значения векторных гиперчастот $\hat{\zeta}(x)$ и $\check{\zeta}(x)$ не изменятся, если в определяющих их формулах (1.4) множество $\mathbb{R}_*^n$ заменить подмножеством $G_x(t)$ (1.7).

Рассмотрим другие варианты определения частот (см. [15], [16]) и сравним их с гиперчастотами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для каждой функции $x \in C_*^1(\mathbb{R}^+)$ дополнительно введем еще и частоту нулей $\nu^0(x)$, частоту знаков $\nu^-(x)$ и частоту корней $\nu^+(x)$, получаемые по тем же формулам (1.4), но с заменой в них величины $\nu^*(x, m, t)$ соответственно величиной:

- а) $\nu^0(x, m, t)$ – числом нулей функции $(x(\tau), m)$ на отрезке $[0, t]$, считаемых по одному разу;
- б) $\nu^-(x, m, t)$ – числом смен знака функции $(x(\tau), m)$ на интервале $(0, t)$;
- с) $\nu^+(x, m, t)$ – числом корней функции $(x(\tau), m)$ на отрезке $[0, t]$, каждый из которых считается столько раз, какова его фактическая кратность, определяемая как максимальное число обнуляющихся в этом корне подряд идущих производных этой функции (в предположении ее достаточной гладкости), начиная с производной нулевого порядка.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Ни одно из неравенств

$$0 \leq \nu^-(x) \leq \nu^0(x) \leq \nu^+(x) \leq \nu^*(x), \quad x \in C_*^1,$$

вытекающих из определений 2 и 4, вообще говоря, не обращается в равенство. Тем не менее теорема 3 сохранит свою силу и после замены в ней величины $\nu^*(x, m, t)$ любой из величин $\nu^0(x, m, t)$, $\nu^-(x, m, t)$ или $\nu^+(x, m, t)$, поскольку все они совпадают друг с другом при каждом $m \in G_x(t)$ (см. (1.7)).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Если величину $\nu^*(x, m, t)$ в формулах (1.4) заменить величиной $\nu^0(x, m, t)$ (с тем же успехом эту роль могла бы сыграть любая из величин $\nu^-(x, m, t)$ или $\nu^+(x, m, t)$), то после этого в силу теоремы 2 и замечания 6 можно изменить (подправить) сами эти формулы так, чтобы теорема 4 осталась верной.

1) Один из вариантов таких изменений получается при замене величины $\nu^0(x, m, t)$ ее верхним пределом в точке m

$$\bar{\nu}^0(x, m, t) \equiv \overline{\lim_{\mu \rightarrow m}} \nu^0(x, \mu, t),$$

который в случае $m \in G_x(t)$ (см. (1.7)) совпадает со значением величины $\nu^*(x, \mu, t)$ в точке $\mu = m$, а в противном случае окажется не меньшим одного из ее же значений в некоторой точке $\mu \in G_x(t)$.

2) Другим вариантом таких изменений является сужение множества $\mathbb{R}_*^n$ при взятии точной нижней грани по m в формулах (1.4) до множества $G_x(t)$ (см. п. 2) теоремы 5).

3) Еще один вариант таких изменений состоит в замене точной нижней грани в формулах (1.4) существенной точной нижней гранью по единичной сфере

$$\operatorname{ess\,inf}_{m \in S^{n-1}} \nu^0(x, m, t) \equiv \sup_{C \subset S^{n-1}, \operatorname{mes} C=0} \inf_{m \in S^{n-1} \setminus C} \nu^0(x, m, t) = \inf_{m \in G_x(t)} \nu^*(x, m, t),$$

поскольку любая компонента связности открытого множества $G_x(t) \subset S^{n-1}$ имеет положительную меру.

§ 2. Доказательства теорем

2.1. Леммы. Предварительно сформулируем и докажем две леммы, первая из которых, в частности, представляет способ вычисления угловой скорости вектор-функции.

ЛЕММА 1. Для любой функции $x \in C_*^1(\mathbb{R}^+)$ справедливы равенства

$$\dot{u}_x(\tau) = \frac{(x(\tau), x(\tau)) \cdot \dot{x}(\tau) - (\dot{x}(\tau), x(\tau)) \cdot x(\tau)}{(x(\tau), x(\tau))^{3/2}} = P_{x(\tau)}^\perp \left(\frac{\dot{x}(\tau)}{|x(\tau)|} \right), \quad \tau \in \mathbb{R}^+.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} \dot{u}_x(\tau) &= \frac{d}{d\tau} \frac{x(\tau)}{\sqrt{(x(\tau), x(\tau))}} = \frac{\dot{x}(\tau)}{\sqrt{(x(\tau), x(\tau))}} - \frac{(\dot{x}(\tau), x(\tau)) \cdot x(\tau)}{(x(\tau), x(\tau)) \cdot \sqrt{(x(\tau), x(\tau))}} \\ &= \frac{\dot{x}(\tau)}{|x(\tau)|} - \left(\frac{\dot{x}(\tau)}{|x(\tau)|}, u_x(\tau) \right) \cdot u_x(\tau) = (I - P_{u_x(\tau)}) \frac{\dot{x}(\tau)}{|x(\tau)|} = P_{x(\tau)}^\perp \frac{\dot{x}(\tau)}{|x(\tau)|}. \end{aligned}$$

Для данного вектора $m \in S^{n-1}$ и функции $x \in C_*^1(\mathbb{R}^+)$ можно определить ориентированный угол

$$\varphi(\tau) \equiv \frac{\pi}{2} - \angle(x(\tau), m) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \quad \tau \in \mathbb{R}^+,$$

образуемый значением вектор-функции $x(\cdot)$ в момент τ с гиперплоскостью $m^\perp$. Этот угол равен нулю, если вектор $x(\tau)$ лежит в гиперплоскости $m^\perp$, положителен, если он “смотрит” в то полупространство (в пространстве $\mathbb{R}^+$) относительно гиперплоскости $m^\perp$, которое содержит вектор m , и отрицателен, если наоборот.

ЛЕММА 2. Если вектор $m \in S^{n-1}$ не является критической нормалью к функции $x \in C_*^1(\mathbb{R}^+)$ на отрезке $[0, t]$, а функция $(x(\tau), m)$ от аргумента $\tau \in [0, t]$ имеет ровно $k \geq 0$ нулей

$$t_1, \dots, t_k \in [0, t], \quad t_1 < \dots < t_k, \quad (2.1)$$

то найдутся такие числа $\alpha_0, \beta_0 > 0$, что:

1) в случае выполнения двух неравенств $t_1 \neq 0$ и $t_k \neq t$ для любого вектора $m' \in S^{n-1}$, удовлетворяющего оценке

$$\angle(m', m) < \alpha_0, \quad (2.2)$$

функция $(x(\tau), m')$ от $\tau \in [0, t]$ также имеет ровно k нулей;

2) для любого положительного $\alpha \leq \alpha_0$ существует разбиение отрезка $[0, t]$ на непересекающиеся промежутки вида

$$\begin{aligned} V_0 &\equiv [0, t_1^-], & U_1 &\equiv (t_1^-, t_1^+), & V_1 &\equiv [t_1^+, t_2^-], & \dots, \\ V_{k-1} &\equiv [t_{k-1}^+, t_k^-], & U_k &\equiv (t_k^-, t_k^+), & V_k &\equiv [t_k^+, t], \end{aligned} \quad (2.3)$$

обладающее при каждом $i = 1, \dots, k$ следующими тремя свойствами:

(i) функция

$$\varphi(\tau) = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{(x(\tau), m)}{|x(\tau)| \cdot |m|}, \quad \tau \in U_i, \quad (2.4)$$

непрерывна и строго монотонна, причем числа $\varphi(t_i^-)$ и $\varphi(t_i^+)$ имеют разные знаки и $\varphi(t_i) = 0$;

(ii) имеет место цепочка равенств

$$\alpha = |\varphi(t_i^-)| = |\varphi(t_i^+)| = \sup_{\tau \in U_i} |\varphi(\tau)| = \inf_{\tau \in V_i} |\varphi(\tau)| = \inf_{\tau \in V_{i-1}} |\varphi(\tau)|; \quad (2.5)$$

(iii) для каждого $\tau \in U_i$ площадь параллелограмма, построенного на векторах $x(\tau)$ и $P_{x(\tau), m} \dot{x}(\tau)$ как на сторонах, больше числа β_0 .

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Необходимо отметить, что в формулировке леммы 2 допустимы значительные вырождения (которые, отражаясь естественным образом на содержании утверждений леммы, не будут оговариваться нами всякий раз в дальнейшем), а именно:

1) в случае $t_1 = 0$ промежутков U_1 в списке (2.3) на самом деле представляет собой полуинтервал $[t_1, t_1^+)$, а отрезка V_0 просто нет, как и последнего выражения в цепочке (2.5) при $i = 0$;

2) в случае $t_k = t$ промежутков U_k есть полуинтервал $(t_k^-, t_k]$, а отрезок V_k отсутствует, вместе с предпоследним выражением в цепочке (2.5) при $i = k$;

3) в случае $k = 0$ разбиение (2.3) превращается в один отрезок $V_0 \equiv [0, t]$, а вся серия цепочек равенств (2.5) – в одно неравенство

$$\alpha \leq \inf_{\tau \in V_0} |\varphi(\tau)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Пусть заданы функция $x \in C_*^1(\mathbb{R}^+)$, число $t > 0$ и вектор $m \in S^{n-1} \setminus G_x(t)$, а числа (2.1) – все k нулей функции $(x(\cdot), m)$ на отрезке $[0, t]$.

1. Тогда кривая $x(\tau)$ при $\tau \in [0, t]$ попадает в гиперплоскость $m^\perp$ ровно k раз, причем в моменты (2.1), в которые согласно определению 3 она пересекается с гиперплоскостью *трансверсально*. Это означает, что при каждом значении $i = 1, \dots, k$:

а) вектор $x(t_i)$ ортогонален вектору m ;

б) вектор $\dot{x}(t_i)$ не ортогонален вектору m (не являющемуся критической нормалью к функции x на отрезке $[0, t]$);

с) проекция $P_{x(t_i), m} \dot{x}(t_i)$ вектора $\dot{x}(t_i)$ на линейную оболочку пары векторов $x(t_i)$, m не коллинеарна вектору $x(t_i)$ (иначе вектор $\dot{x}(t_i)$ был бы ортогонален вектору m);

d) проекция $P_{x(t_i),m}\dot{u}(t_i)$ вектора угловой скорости (лемма 1)

$$\dot{u}(t_i) = P_{x(t_i)}^\perp \frac{\dot{x}(t_i)}{|x(t_i)|}$$

на линейную оболочку векторов $x(t_i)$, m совпадает с его проекцией $P_m\dot{u}(t_i)$ на линейную оболочку одного лишь вектора m , поскольку вектор $\dot{u}(t_i)$ ортогонален вектору $x(t_i)$;

e) проекция $P_m\dot{u}(t_i)$ не равна нулю (иначе вектор $\dot{u}(t_i)$, а с ним и вектор $\dot{x}(t_i)$ были бы ортогональны вектору m , что противоречило бы выводу, сделанному в п. b).

2. Для начала разобьем как-нибудь отрезок $[0, t]$ на непересекающиеся промежутки вида (2.3), где для каждого $i = 1, \dots, k$ интервал U_i , содержащий точку t_i , будем последовательно сужать, исходя из следующих соображений.

2.i. Функция $\varphi(\tau)$ со значениями, равными ориентированному углу, образуемому кривой $x(\tau)$ с гиперплоскостью $m^\perp$, и задаваемыми формулой (2.4), судя по самой этой формуле, непрерывна; но за счет уменьшения интервала U_i она может быть сделана еще и строго монотонной благодаря непрерывной дифференцируемости функции x и неравенству $\dot{\varphi}(\tau) \neq 0$, которое выполнено в точке $\tau = t_i$, так как

$$\dot{\varphi}(t_i) \equiv P_m\dot{u}(t_i) \neq 0 \quad (2.6)$$

(в силу пп. d), e) настоящего доказательства), а значит, и в достаточно малой ее окрестности. Поэтому функция φ осуществляет биекцию нового интервала U_i в интервал с концами $\varphi(t_i^-)$ и $\varphi(t_i^+)$, между которыми расположена точка $\varphi(t_i) = 0$ (см. п. a)).

2.ii. Если взять число α_0 , удовлетворяющее неравенству

$$\alpha_0 \leq \min_{\tau \in V_0 \cup \dots \cup V_k} |\varphi(\tau)|,$$

а с ним и неравенствам

$$\alpha_0 \leq \min\{|\varphi(t_i^-)|, |\varphi(t_i^+)|\}, \quad i = 1, \dots, k,$$

поскольку

$$t_i^-, t_i^+ \in V_0 \cup \dots \cup V_k, \quad i = 1, \dots, k,$$

то при любом $\alpha \leq \alpha_0$ все новые промежутки (2.3), подчиненные равенствам (2.5), однозначно определяются автоматически.

2.iii. Уменьшим в случае необходимости первоначально выбранное α_0 так, чтобы для промежутков (2.3), подчиненных при $\alpha = \alpha_0$ равенствам (2.5), сразу для всех $\tau \in U_i$ площадь параллелограмма, построенного на векторах $x(\tau)$ и $P_{x(\tau),m}\dot{x}(\tau)$ как на сторонах, оказалась больше некоторого положительного числа β_0 . Возможность обеспечить это свойство гарантируется непрерывностью по τ площади упомянутого параллелограмма и тем фактом, что в момент $\tau = t_i$ эта площадь отлична от нуля (вытекающим из п. c) настоящего доказательства). Заметим, что тем же свойством (с тем же числом β_0) будет обладать также и любое разбиение (2.3), определяемое равенствами (2.5) при

$\alpha < \alpha_0$, поскольку при сужении окрестности U_i прежняя оценка площади заведомо сохранится.

Таким образом, утверждение 2) леммы 2 полностью доказано.

3. Рассмотрим непрерывную функцию (ориентированный угол, образуемый угловой скоростью $\dot{u}(\tau)$ с гиперплоскостью $m^\perp$)

$$\chi(\tau) \equiv \frac{\pi}{2} - \angle(\dot{u}(\tau), m), \quad \tau \in [0, t],$$

и заметим, что в силу неравенств (2.6) число

$$\min_{i=1, \dots, k} |\chi(t_i)| \equiv 2\delta$$

непрерывно положительно. Уменьшим при необходимости значение α_0 (задающее промежутки (2.3), подчиненные при $\alpha = \alpha_0$ равенствам (2.5)) так, чтобы выполнялись еще и неравенства

$$\alpha_0 < \delta < \min_{\tau \in U_1 \cup \dots \cup U_k} |\chi(\tau)|. \quad (2.7)$$

Тогда если для смещенного вектора $m' \in S^{n-1}$ выполнено условие (2.2), то кривая $x(\tau)$ при $\tau \in [0, t]$ попадает в гиперплоскость $(m')^\perp$ ровно k раз, поскольку функция (ориентированный угол, образуемый кривой $x(\tau)$ со смещенной гиперплоскостью $(m')^\perp$)

$$\varphi'(\tau) \equiv \frac{\pi}{2} - \angle(x(\tau), m'), \quad \tau \in U_i,$$

удовлетворяет оценке

$$|\varphi'(\tau) - \varphi(\tau)| = |\angle(u(\tau), m') - \angle(u(\tau), m)| \leq \angle(m', m) < \alpha_0, \quad \tau \in [0, t],$$

из которой получаем следующее.

1) При $\tau \in V_0 \cup \dots \cup V_k$ кривая $x(\tau)$ не попадает в гиперплоскость $(m')^\perp$, так как при таких τ имеем

$$\varphi'(\tau) \begin{cases} > \varphi(\tau) - \alpha_0 \geq 0, & \varphi(\tau) \geq \alpha_0, \\ < \varphi(\tau) + \alpha_0 \leq 0, & \varphi(\tau) \leq -\alpha_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

(поскольку $|\varphi(\tau)| \geq \alpha_0$).

2) Для каждого значения $i = 1, \dots, k$ при $\tau \in U_i$ кривая $x(\tau)$ хотя бы один раз попадает в гиперплоскость $(m')^\perp$. Действительно, функция $\varphi'(\tau)$ непрерывна, а величины $\varphi'(t_i^-)$, $\varphi'(t_i^+)$, как и величины $\varphi(t_i^-)$, $\varphi(t_i^+)$, имеют разные знаки (в силу тех же соотношений (2.8), выполненных при $\tau = t_i^-, t_i^+$), поэтому в некоторой точке $\tau \in [t_i^-, t_i^+]$ выполнено равенство $\varphi'(\tau) = 0$.

3) Для каждого значения $i = 1, \dots, k$ при $\tau \in U_i$ кривая $x(\tau)$ не более одного раза попадает в гиперплоскость $(m')^\perp$. В самом деле, непрерывная функция (ориентированный угол, образуемый угловой скоростью $\dot{u}(\tau)$ со смещенной гиперплоскостью $(m')^\perp$)

$$\chi'(\tau) \equiv \frac{\pi}{2} - \angle(\dot{u}(\tau), m'), \quad \tau \in U_i,$$

как и функция $\chi(\tau)$, принимает значения строго определенного знака в силу оценок

$$|\chi'(\tau) - \chi(\tau)| = |\angle(\dot{u}(\tau), m') - \angle(\dot{u}(\tau), m)| \leq \angle(m', m) < \alpha_0, \\ \operatorname{sgn} \chi'(\tau) = \operatorname{sgn}(\chi(\tau) \pm \alpha_0) = \operatorname{sgn} \chi(\tau)$$

(см. неравенства (2.2) и (2.7)), поэтому в любой момент $\tau \in U_i$ пересечения кривой $x(\tau)$ с гиперплоскостью $(m')^\perp$ вектор угловой скорости $\dot{u}(\tau)$ “смотрит” строго в определенное полупространство (из тех двух полупространств, на которые эта гиперплоскость делит пространство $\mathbb{R}^n$), а значит, кривая $x(\tau)$ может пересекать гиперплоскость $(m')^\perp$ со стороны строго определенного полупространства и второй раз ту же гиперплоскость уже не пересечет.

Таким образом, утверждение 1) леммы 2 также справедливо.

Лемма 2 доказана.

Теперь перейдем к доказательству сформулированных выше теорем.

2.2. Доказательство теоремы 1. Используя лемму 1, для любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ системы (1.2) с ограниченной функцией A получаем следующую оценку ее угловой скорости:

$$|\dot{u}_{Lx}(\tau)| = \left| P_{Lx(\tau)}^\perp \frac{L\dot{x}(\tau)}{|Lx(\tau)|} \right| \leq \frac{|P_{Lx(\tau)}^\perp LA(\tau)L^{-1}Lx(\tau)|}{|Lx(\tau)|}, \quad \tau \in \mathbb{R}^+.$$

Из нее выводим цепочку соотношений

$$0 \leq \check{\eta}(x) \leq \hat{\eta}(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \inf_{L \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^n} \int_0^t |\dot{u}_{Lx}(\tau)| d\tau \\ \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \inf_{L \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^n} t \sup_{\tau \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}_*^n} \frac{|P_y^\perp LA(\tau)L^{-1}y|}{|y|} = \|A\|,$$

завершая тем самым доказательство теоремы 1.

2.3. Доказательство теоремы 2. Пусть заданы функция $x \in C_*^1(\mathbb{R}^+)$ и число $t > 0$.

1. Докажем, что множество $C_x(t) \cap S^{n-1}$ единичных критических нормалей к функции x на отрезке $[0, t]$ имеет на сфере S^{n-1} меру нуль. Для этого мы применим рассуждение, близкое к доказательству леммы Сарда (см. [17; гл. XI, § 5]).

По произвольному положительному $\varepsilon < 1$ выберем такое большое значение $l \in \mathbb{N}$, чтобы при разбиении отрезка $[0, t]$ на l равных отрезков

$$\Delta_i \equiv [\alpha_{i-1}, \alpha_i] = \left[\frac{(i-1)t}{l}, \frac{it}{l} \right], \quad i = 1, \dots, l,$$

колебание производной $\dot{u}_x$ на каждом из них не превосходило числа ε^2 , что возможно благодаря непрерывной дифференцируемости функции u_x . Обозначив через C_i множество векторов $m \in S^{n-1}$, для каждого из которых хотя

бы в один момент $\tau_0 \in \Delta_i$ оба вектора $x(\tau_0)$ и $\dot{x}(\tau_0)$ ортогональны вектору m , получаем представление

$$C_x(t) \cap S^{n-1} = \bigcup_{i=1, \dots, l} C_i.$$

Через s_k обозначим k -мерную площадь поверхности k -мерной единичной сферы, считая

$$s_k \equiv \begin{cases} 2, & k = 0, \\ 0, & k < 0, \end{cases}$$

а кроме того обозначим

$$v \equiv \max_{\tau \in [0, t]} |\dot{u}_x(\tau)| + 1.$$

При каждом $i = 1, \dots, l$ возможен один из двух рассматриваемых ниже случаев.

Случай А. Пусть

$$\max_{\tau \in \Delta_i} |\dot{u}_x(\tau)| < 2\varepsilon.$$

Тогда множество

$$C_i \subset \bigcup_{\tau \in \Delta_i} x^\perp(\tau) \cap S^{n-1}$$

лежит в открытой полосе $\Pi_i \subset S^{n-1}$, являющейся $(2\varepsilon t/l)$ -окрестностью множества $x^\perp(\alpha_i) \cap S^{n-1}$ в силу оценки

$$\angle(u_x(\tau), u_x(\alpha_i)) \leq \max_{\tau \in [0, t]} |\dot{u}_x(\tau)| \cdot |\Delta_i| < 2\varepsilon \cdot \frac{t}{l}$$

(так как при $\tau \in \Delta_i$ гиперплоскость $x^\perp(\tau) \equiv u_x^\perp(\tau)$, поворачиваясь с угловой скоростью, меньшей 2ε , заканчивает свое движение в положении $u_x^\perp(\alpha_i)$ за период времени продолжительностью $|\Delta_i| = t/l$), а мера множества Π_i удовлетворяет оценке

$$\text{mes } \Pi_i \leq s_{n-2} \cdot \frac{2 \cdot 2\varepsilon t}{l}.$$

Случай В. Пусть

$$\max_{\tau \in \Delta_i} |\dot{u}_x(\tau)| \geq 2\varepsilon.$$

Тогда имеем

$$\dot{u}_x(\tau) \perp u_x(\tau), \quad |\dot{u}_x(\tau)| \geq 2\varepsilon - \varepsilon^2 > \varepsilon, \quad \tau \in \Delta_i.$$

Поэтому множества $\dot{u}_x^\perp(\alpha_i)$ и $u_x^\perp(\alpha_i)$ представляют собой гиперплоскости, пересекающиеся под прямым углом, а значит, множество

$$C_i \subset \left(\bigcup_{\tau \in \Delta_i} \dot{x}^\perp(\tau) \right) \cap \left(\bigcup_{\tau \in \Delta_i} x^\perp(\tau) \right)$$

лежит в открытом множестве $\Pi_i \subset S^{n-1}$, являющемся пересечением двух полос $\Pi'_i, \Pi''_i \subset S^{n-1}$, где:

1) полоса Π'_i представляет собой (vt/l) -окрестность множества $u_x^\perp(\alpha_i)$ на сфере S^{n-1} в силу оценки

$$\angle(u_x(\tau), u_x(\alpha_i)) \leq \max_{\tau \in [0, t]} |\dot{u}_x(\tau)| \cdot |\Delta_i| < \frac{vt}{l}$$

(так как при $\tau \in \Delta_i$ гиперплоскость $u_x^\perp(\tau)$, поворачиваясь с угловой скоростью, меньшей v , заканчивает свое движение в положении $u_x^\perp(\alpha_i)$ за время $|\Delta_i| = t/l$);

2) полоса Π''_i представляет собой 4ε -окрестность множества $\dot{u}_x^\perp(\alpha_i) \cap S^{n-1}$ в силу последовательно получаемых при всех $\tau, \tau_1, \tau_2 \in \Delta_i$ оценок

$$\begin{aligned} |\dot{u}_x(\tau_1) - \dot{u}_x(\tau_2)| &< \varepsilon^2, \\ \left| u_{\dot{u}_x}(\tau_1) - \frac{\dot{u}_x(\tau_2)}{|\dot{u}_x(\tau_1)|} \right| &= \frac{|\dot{u}_x(\tau_1) - \dot{u}_x(\tau_2)|}{|\dot{u}_x(\tau_1)|} < \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon, \\ |u_{\dot{u}_x}(\tau) - u_{\dot{u}_x}(\alpha_i)| &< \left| u_{\dot{u}_x}(\tau) - \frac{\dot{u}_x(\tau)}{|\dot{u}_x(\alpha_i)|} \right| + \left| \frac{\dot{u}_x(\tau)}{|\dot{u}_x(\alpha_i)|} - u_{\dot{u}_x}(\alpha_i) \right| < 2\varepsilon, \\ \angle(u_{\dot{u}_x}(\tau), u_{\dot{u}_x}(\alpha_i)) &= 2 \arcsin \frac{|u_{\dot{u}_x}(\tau) - u_{\dot{u}_x}(\alpha_i)|}{2} < 2 \arcsin \frac{2\varepsilon}{2} < 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, мера пересечения $\Pi_i = \Pi'_i \cap \Pi''_i$ удовлетворяет оценке

$$\text{mes } \Pi_i \leq s_{n-3} \cdot \frac{2vt}{N} \cdot 8\varepsilon.$$

Таким образом, для произвольного $\varepsilon > 0$ множество $C_x(t) \cap S^{n-1}$ покрывается конечным объединением открытых множеств Π_i суммарной мерой

$$\sum_{i=1}^l \text{mes } \Pi_i < \left(s_{n-2} \cdot \frac{4\varepsilon t}{l} + s_{n-3} \cdot \frac{2vt}{l} \cdot 8\varepsilon \right) \cdot l \leq \varepsilon \cdot 4t(s_{n-2} + 4s_{n-3}v),$$

а значит имеет меру нуль.

2. Множество $C_x(t) \cap S^{n-1}$ замкнуто. Действительно, если последовательность критических нормалей $m_i \in C_x(t) \cap S^{n-1}$ функции x на отрезке $[0, t]$ стремится к вектору $m_0 \in S^{n-1}$ при $i \rightarrow \infty$, то соответствующая последовательность моментов $\tau_i \in [0, t]$, $i \in \mathbb{N}$, в которые выполнены равенства

$$(x(\tau_i), m_i) = (\dot{x}(\tau_i), m_i) = 0, \quad (2.9)$$

имеет предельную точку $\tau_0 \in [0, t]$, удовлетворяющую равенствам (2.9) при $i = 0$, а значит, вектор m_0 также является критической нормалью функции x на отрезке $[0, t]$, т.е. $m_0 \in C_x(t) \cap S^{n-1}$.

3. На сфере S^{n-1} множество $C_x(t) \cap S^{n-1}$ нигде не плотно, поскольку дополнение к нему пересекается с любым открытым множеством хотя бы по одной точке (иначе дополнение не имело бы полную меру) и даже по целой ее окрестности (в силу открытости дополнения).

4. Множество

$$(x^\perp(0) \cap S^{n-1}) \cup (x^\perp(t) \cap S^{n-1})$$

единичных концевых ортогоналей составлено из двух $(n-2)$ -мерных сфер, а значит, так же, как и множество $C_x(t) \cap S^{n-1}$, имеет на $(n-1)$ -мерной сфере

S^{n-1} меру нуль, замкнуто и нигде не плотно. Поэтому теми же свойствами обладает и объединение всех этих множеств, а множество $G_x(t)$, являющееся дополнением к этому объединению, наоборот, имеет полную меру, открыто и всюду плотно.

5. Непрерывность функции

$$\nu^*(x, \cdot, t): G_x(t) \rightarrow \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (2.10)$$

(согласно замечанию 3 она не принимает бесконечных значений) вытекает непосредственно из утверждения 1) леммы 2.

6. Из непрерывности функции (2.10) с дискретной областью значений вытекает ее постоянство на каждой компоненте связности открытого множества $G_x(t) \subset S^{n-1}$. Действительно, фиксируем в произвольной его компоненте связности U (обладающей еще и линейной связностью вследствие открытости множества $G_x(t)$) какую-либо точку a , заметим, что для любой точки $b \in U$ вдоль непрерывной кривой

$$g: [0, 1] \rightarrow U, \quad g(0) = a, \quad g(1) = b$$

(соединяющей точки a и b), сложная функция

$$h(\cdot) \equiv \nu^*(x, g(\cdot), t): [0, 1] \rightarrow \mathbb{N}_0$$

непрерывна, а значит, принимает постоянное значение, откуда имеем

$$\nu^*(x, b, t) = h(1) = h(0) = \nu^*(x, a, t) = \text{const}, \quad b \in U.$$

Теорема 2 доказана.

2.4. Доказательство теоремы 3. Пусть заданы функция $x \in C_*^1(\mathbb{R}^+)$ и число $t > 0$. Найдем два разных выражения для полной вариации $s|_0^t$ площади s , заматаемой на единичной сфере S^{n-1} гиперплоскостью $x^\perp(\tau)$ с нормалью $x(\tau)$ за время от 0 до t .

1) С одной стороны, искомая вариация получается как интегральная сумма элементарных площадей Δs , заматаемых за время от τ до $\tau + \Delta\tau$ и равных величине

$$\Delta s \equiv \frac{\text{mes } S^{n-1}}{\pi} \cdot |\dot{x}_x(\tau)| \cdot \Delta\tau$$

(в первом приближении, при $\Delta\tau \rightarrow 0$; нормирующий множитель впереди обусловлен тем соображением, что если нормаль $x(\tau)$ за время $\Delta\tau = \pi$ с единичной угловой скоростью делает полуоборот в какой-нибудь фиксированной двумерной плоскости, то соответствующая гиперплоскость $x^\perp(\tau)$ заматает в точности всю сферу S^{n-1}). Поэтому для искомой вариации получаем первую формулу

$$s|_0^t = \frac{\text{mes } S^{n-1}}{\pi} \int_0^t |\dot{x}_x(\tau)| d\tau = \frac{\text{mes } S^{n-1}}{\pi} \cdot \gamma(x, t). \quad (2.11)$$

2) С другой стороны, если за время от 0 до t какой-либо вектор $m \in S^{n-1}$, не являющийся критической нормалью к функции x , был замечен гиперплоскостью $x^\perp(\tau)$ ровно k раз, то ровно в k моментов $\tau \in [0, t]$ вектор m был ортогонален вектору $x(\tau)$ (т.е. выполнялось равенство $(x(\tau), m) = 0$). Отсюда

$k = \nu^*(x, m, t) < \infty$, а с учетом того факта, что множество критических нормалей к функции x имеет на сфере меру нуль (см. замечание 4), получаем для искомой вариации вторую формулу

$$s|_0^t = \int_{S^{n-1}} \nu^*(x, m, t) dm. \quad (2.12)$$

Приравнивая друг к другу правые части формул (2.11) и (2.12), получаем требуемое равенство (1.8).

Теорема 3 доказана.

2.5. Доказательство теоремы 4. Для заданной функции $x \in C_*^1(\mathbb{R}^+)$ и произвольного числа $t > 0$ докажем справедливость равенства

$$\pi \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \nu^*(x, m, t) = \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \gamma(Lx, t), \quad (2.13)$$

позволяющего получить оба равенства (1.9): для этого достаточно взять от обеих частей равенства (2.13) верхнее или нижнее среднее по $t \rightarrow \infty$ в соответствии с формулами (1.3) и (1.4). Доказательство равенства (2.13) проведем в два этапа, установив поочередно два взаимно обратных нестрогих неравенства.

I. Докажем, что левая часть равенства (2.13) не превосходит правой (откуда, кстати, сразу следует, что левая часть конечна). В самом деле, с учетом теорем 2 и 3 имеем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \pi \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \nu^*(x, m, t) &\leq \pi \inf_{m \in G_x(t)} \nu^*(x, m, t) \leq \frac{\pi}{\text{mes } G_x(t)} \int_{G_x(t)} \nu^*(x, m, t) dm \\ &= \frac{\pi}{\text{mes } S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \nu^*(x, m, t) dm = \gamma(x, t), \end{aligned}$$

из которой получаем (см. замечание 5) требуемое:

$$\begin{aligned} \pi \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \nu^*(x, m, t) &\leq \pi \inf_{m \in G_x(t)} \nu^*(x, m, t) \\ &= \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \pi \inf_{m \in G_x(t)} \nu^*(Lx, m, t) \leq \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \gamma(Lx, t). \end{aligned} \quad (2.14)$$

II. Докажем, что правая часть равенства (2.13) не превосходит левой.

1. Фиксируем какой-либо вектор $m \in S^{n-1}$, на котором в левой части равенства (2.13) достигается точная нижняя грань (см. замечание 2), обозначим ее через

$$k \equiv \nu^*(x, m, t) < \infty.$$

Согласно определениям 2 и 3 вектор $m \in S^{n-1}$ не является критической нормалью к функции $x \in C_*^1(\mathbb{R}^+)$ на отрезке $[0, t]$, а кривая $x(\tau)$ при $\tau \in [0, t]$ попадает в гиперплоскость $m^\perp$ ровно k раз; упорядочим соответствующие моменты τ по возрастанию:

$$t_1 < \dots < t_k.$$

2. Мы находимся в условиях леммы 2. В соответствии с ней выберем числа $\alpha_0, \beta_0 > 0$, для которых выполнено утверждение 2) этой леммы.

3. Для произвольного положительного числа $\varepsilon < 1$ и чисел M, N, K , определяемых равенствами

$$M \equiv \max \left\{ \frac{1}{\beta_0}, \sup_{\tau \in [0, t]} |x(\tau)|, \sup_{\tau \in [0, t]} \frac{1}{|x(\tau)|}, \sup_{\tau \in [0, t]} |\dot{x}(\tau)| \right\}, \quad N \equiv \frac{2M^4}{\varepsilon^2},$$

$$K \equiv \frac{N}{\operatorname{tg} \alpha} + N, \quad \alpha < \alpha_0, \quad (2.15)$$

без ограничения общности выполняется неравенство

$$K \geq \max \left\{ 1, \frac{M^3 N^{1/2}}{\varepsilon} \right\}$$

(необходимое для этого увеличение числа K достигается уменьшением числа α в формуле (2.15)).

4. Для произвольного момента $\tau \in [0, t]$ выберем такой ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, что:

- 1) первый вектор базиса совпадает с вектором m ;
- 2) линейная оболочка первого и второго векторов базиса содержит векторы m и $x(\tau)$;
- 3) линейная оболочка первого, второго и третьего векторов базиса содержит векторы m , $x(\tau)$ и $\dot{x}(\tau)$ (в случае $n = 2$ третьего базисного вектора нет, в этом случае во всех приведенных ниже выкладках третью координату считаем равной нулю).

5. Для определенных выше вектора m и числа K рассмотрим линейное преобразование $L \equiv L_{m, K}$ вида (1.10). В выбранном базисе в $\mathbb{R}^n$ значения функций $x(\tau)$, $\dot{x}(\tau)$, $y(\tau) \equiv Lx(\tau)$ и $\dot{y}(\tau)$ (ниже аргумент τ у них местами для краткости опущен, равно как и все заведомо нулевые их координаты, начиная с четвертой) запишутся в виде

$$x = (x_1, x_2, 0), \quad \dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3), \quad y = (Kx_1, x_2, 0), \quad \dot{y} = (K\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3),$$

а значение угловой скорости $\dot{z}(\tau) \equiv \dot{y}_y(\tau)$ – в виде (лемма 1)

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{(y, y) \cdot \dot{y} - (\dot{y}, y) \cdot y}{(y, y)^{3/2}} \\ &= \frac{(K^2 x_1^2 + x_2^2) \cdot (K\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) - (K^2 \dot{x}_1 x_1 + \dot{x}_2 x_2) \cdot (Kx_1, x_2, 0)}{(K^2 x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \\ &= \frac{((\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1)Kx_2, -(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1)K^2 x_1, \dot{x}_3(K^2 x_1^2 + x_2^2))}{(K^2 x_1^2 + x_2^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

причем пара первых двух координат вектора $\dot{z}(\tau)$ есть

$$\begin{aligned} (\dot{z}_1, \dot{z}_2) &= \frac{(K^2 x_1^2 + x_2^2) \cdot (K\dot{x}_1, \dot{x}_2) - (K^2 \dot{x}_1 x_1 + \dot{x}_2 x_2) \cdot (Kx_1, x_2)}{(K^2 x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \\ &= \frac{(K\dot{x}_1 x_2^2 - Kx_1 \dot{x}_2 x_2, \dot{x}_2 K^2 x_1^2 - x_2 K^2 \dot{x}_1 x_1)}{(K^2 x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \\ &= \frac{K(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1) \cdot (x_2, -Kx_1)}{(K^2 x_1^2 + x_2^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

а третья координата вектора $\dot{z}(\tau)$ есть

$$\dot{z}_3 = \frac{\dot{x}_3(K^2x_1^2 + x_2^2)}{(K^2x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} = \frac{\dot{x}_3}{(K^2x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}.$$

6. Рассмотрим те значения τ , для которых выполнено неравенство

$$(K - N)x_1^2(\tau) < Nx_2^2(\tau).$$

Для них:

а) имеем

$$\begin{aligned} \frac{|\dot{z}_3|}{|(\dot{z}_1\dot{z}_2)|} &= \frac{|\dot{x}_3|}{(K^2x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} : \frac{K|\dot{x}_1x_2 - \dot{x}_2x_1| \cdot (x_2^2 + K^2x_1^2)^{1/2}}{(K^2x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \\ &= \frac{|\dot{x}_3| \cdot (K^2x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}{K|\dot{x}_1x_2 - \dot{x}_2x_1|} \leq \frac{M \cdot (Kx_1^2)^{1/2}}{K \cdot \beta_0} \\ &\leq \frac{M^2 \cdot (N(x_1^2 + x_2^2))^{1/2}}{K} \leq \frac{M^3 \cdot N^{1/2}}{K} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

(см. п. 3 настоящего доказательства и свойство (iii) леммы 2, из которого следует оценка $|\dot{x}_1x_2 - \dot{x}_2x_1| \geq \beta_0$);

б) функция (2.4) удовлетворяет цепочке соотношений

$$|\varphi(\tau)| = \operatorname{arctg} \frac{|x_1(\tau)|}{|x_2(\tau)|} < \operatorname{arctg} \frac{N}{K - N} = \alpha,$$

единственное неравенство которой равносильно условию

$$\tau \in U \equiv U_1 \cup \dots \cup U_k$$

(см. свойство (ii) леммы 2 и формулу (2.15));

с) при каждом $i = 1, \dots, k$ функция

$$\psi(\tau) \equiv \frac{\pi}{2} - \angle(y(\tau), m) = \operatorname{arctg} \frac{Kx_1(\tau)}{x_2(\tau)} = \operatorname{arctg}(K \operatorname{tg} \varphi(\tau)), \quad \tau \in U_i = (t_i^-, t_i^+),$$

монотонна из-за монотонности функции $\varphi(\tau)$, $\tau \in U_i$ (см. свойство (i) леммы 2), причем

$$E(\psi) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

д) получаем

$$\begin{aligned} \int_U |\dot{z}(\tau)| d\tau &= \int_U \sqrt{|\dot{z}_1(\tau), \dot{z}_2(\tau)|^2 + |\dot{z}_3(\tau)|^2} d\tau \\ &\leq \int_U |(\dot{z}_1(\tau), \dot{z}_2(\tau))| \cdot \sqrt{1 + \varepsilon^2} d\tau = \int_U |P_{y(\tau), m} \dot{z}(\tau)| d\tau \cdot \sqrt{1 + \varepsilon^2} \\ &= \sum_{i=1}^k \left| \int_{U_i} \dot{\psi}(\tau) d\tau \right| \cdot \sqrt{1 + \varepsilon^2} = \sum_{i=1}^k \left| \psi(\tau) \Big|_{t_i^-}^{t_i^+} \right| \cdot \sqrt{1 + \varepsilon^2} \leq \pi k \cdot (1 + \varepsilon). \end{aligned}$$

7. Для значений τ , удовлетворяющих неравенству

$$(K - N)x_1^2(\tau) \geq Nx_2^2(\tau),$$

или, что то же, условию

$$\tau \in V \equiv V_0 \cup \dots \cup V_k$$

(см. п. б) настоящего доказательства), имеем оценки

$$\begin{aligned} |(\dot{z}_1, \dot{z}_2)| &= \frac{K|\dot{x}_1x_2 - \dot{x}_2x_1| \cdot (K^2x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}{(K^2x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} = \frac{K|\dot{x}_1x_2 - \dot{x}_2x_1|}{K^2x_1^2 + x_2^2} \leq \frac{2M^2}{Kx_1^2} \\ &\leq \frac{2M^2}{N(x_1^2 + x_2^2)} \leq \frac{2M^4}{N} \leq \varepsilon^2 < \varepsilon, \\ |\dot{z}_3| &= \frac{|\dot{x}_3|}{(K^2x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} \leq \frac{M}{(Kx_1^2)^{1/2}} \leq \left(\frac{M^2}{N(x_1^2 + x_2^2)} \right)^{1/2} \leq \left(\frac{M^4}{N} \right)^{1/2} \\ &< \left(\frac{2M^4}{N} \right)^{1/2} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

(см. п. 3 настоящего доказательства), из которых получаем

$$\int_V |\dot{z}(\tau)| d\tau = \int_V \sqrt{|\dot{z}_1(\tau), \dot{z}_2(\tau)|^2 + |\dot{z}_3(\tau)|^2} d\tau \leq \int_0^t \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2} d\tau \leq 2\varepsilon t.$$

8. Подытоживая изложенное в пп. 6 и 7, имеем

$$\begin{aligned} \gamma(Lx, t) &= \gamma(z, t) = \int_0^t |\dot{z}(\tau)| d\tau = \int_U |\dot{z}(\tau)| d\tau + \int_V |\dot{z}(\tau)| d\tau \\ &\leq \pi k \cdot (1 + \varepsilon) + 2\varepsilon t \leq \pi \nu^*(x, m, t) + \varepsilon(\pi k + 2t), \end{aligned}$$

откуда в силу выбора вектора m (на котором как раз реализуется точная нижняя грань величины $\nu^*(x, m, t)$ по $m \in \mathbb{R}_*^n$) и произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем требуемое неравенство

$$\inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \gamma(Lx, t) \leq \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n, K > 1} \gamma(L_{m,K}x, t) \leq \pi \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \nu^*(x, m, t). \quad (2.16)$$

Теорема 4 доказана.

2.6. Доказательство теоремы 5. Фактически справедливость теоремы 5 установлена в процессе доказательства теоремы 4. Из двух выведенных в нем цепочек соотношений (2.14) и (2.16) вытекает, что абсолютно все они обращаются в равенства, среди которых содержатся, в частности, следующие два:

$$\begin{aligned} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \gamma(Lx, t) &= \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n, K > 1} \gamma(L_{m,K}x, t), \\ \pi \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \nu^*(x, m, t) &= \pi \inf_{m \in G_x(t)} \nu^*(x, m, t). \end{aligned}$$

А взятием от левых и правых частей этих равенств верхнего или нижнего среднего по $t \rightarrow \infty$ в соответствии с формулами (1.3) и (1.4) получаем оба равенства, дающие утверждения 1) и 2) теоремы 5.

Список литературы

- [1] И. Н. Сергеев, “Определение характеристик блуждаемости решений линейной системы”, *Дифференц. уравнения*, **46:6** (2010), 902; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Determining the wandering characteristics of solutions of a linear system”, *Differ. Equ.*, **46:6** (2010), 1639–1640.
- [2] Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий, *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости*, Наука, М., 1966.
- [3] М. Д. Лысак, “Точные оценки скорости блуждания решений линейных систем”, *Дифференц. уравнения*, **46:11** (2010), 1670–1671; англ. пер.: M. D. Lysak, “Sharp estimates for the wandering rate of solutions of linear systems”, *Differ. Equ.*, **46:11** (2010), 1673.
- [4] В. В. Миценко, “Блуждаемость решений двумерных треугольных и диагональных дифференциальных систем”, *Дифференц. уравнения*, **48:6** (2012), 907–908.
- [5] И. Н. Сергеев, “Определение полных частот решений линейной системы”, *Дифференц. уравнения*, **45:6** (2009), 908; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Determination of complete frequencies of solutions of a linear system”, *Differ. Equ.*, **45:6** (2009), 927–928.
- [6] К. Куратовский, *Топология*, т. 1, Мир, М., 1966; пер. с англ.: K. Kuratowski, *Topology*, v. 1, Academic Press, New York–London, 1968.
- [7] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Лань, СПб., 1999; англ. пер. 1-го изд.: I. P. Natanson, *Theory of functions of a real variable*, Frederick Ungar Publ. Co., New York, 1955.
- [8] И. Н. Сергеев, “Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76:1** (2012), 149–172; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential system”, *Izv. Math.*, **76:1** (2012), 139–162.
- [9] И. Н. Сергеев, “Характеристики колеблемости ляпуновского типа”, *Международная математическая конференция “Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям”*, Ин-т математики НАН Беларуси, Минск, 2010, 73–74.
- [10] Д. С. Бурлаков, С. В. Цой, “Равенство полной и векторной частот решений линейной автономной системы”, *Дифференц. уравнения*, **47:11** (2011), 1662–1663; англ. пер.: D. S. Burlakov, S. V. Tsoi, “Equality of the complete and vector frequencies of solutions of a linear autonomous system”, *Differ. Equ.*, **47:11** (2011), 1685.
- [11] И. Н. Сергеев, “Сравнение полных частот и показателей блуждаемости решений линейной системы”, *Дифференц. уравнения*, **46:11** (2010), 1667–1668; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Comparison of complete frequencies and wandering exponents of solutions of a linear system”, *Differ. Equ.*, **46:11** (2010), 1669–1670.
- [12] И. Н. Сергеев, “Распределение полных частот и показателей блуждаемости в пространстве решений линейной автономной системы”, *Международная конференция, посвященная 110-й годовщине И. Г. Петровского (XXIII совместное заседание ММО и семинара им. И. Г. Петровского)*, Изд-во МГУ, М., 2011, 342–343.
- [13] И. Н. Сергеев, “Колеблемость и блуждаемость решений линейных дифференциальных уравнений малого порядка”, *Дифференц. уравнения*, **47:6** (2011), 906–907; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Oscillation and wandering of solutions of linear differential equations of small order”, *Differ. Equ.*, **47:6** (2011), 915–916.
- [14] Д. С. Бурлаков, И. Н. Сергеев, “Замечательные равенства, связывающие колеблемость и блуждаемость решений дифференциальных систем”, *Дифференц. уравнения*, **48:6** (2012), 899.
- [15] И. Н. Сергеев, “Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **25**, Изд-во Моск. ун-та, М., 2006, 249–294; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **135:1** (2006), 2764–2793.

- [16] И. Н. Сергеев, “О различной зависимости от параметра главных частот нулей, знаков и корней линейного уравнения”, *Дифференц. уравнения*, **43:6** (2007), 853; англ. пер.: I. N. Sergeev, “On the different dependence of the leading frequencies of zeros, signs, and roots of a linear equation on a parameter”, *Differ. Equ.*, **43:6** (2007), 874–875.
- [17] В. А. Зорич, *Математический анализ*, т. II, Наука, М., 1984; англ. пер.: V. A. Zorich, *Mathematical analysis*, v. II, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

И. Н. Сергеев (I. N. Sergeev)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: igniserg@gmail.com

Поступила в редакцию

02.09.2011 и 06.11.2012