Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Золотарёв, Прямая и обратная задачи для оператора с нелокальным потенциалом, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 12, 105–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7929>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 11:45:01

УДК 517.983.248

В. А. Золотарёв

Прямая и обратная задачи для оператора с нелокальным потенциалом

Для самосопряженного оператора, который является одномерным возмущением оператора второй производной на конечном отрезке, проведен спектральный анализ. Показано, что по двум спектрам можно с точностью до комплексного сопряжения восстановить все элементы одномерного возмущения.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, одномерное возмущение оператора второй производной.

Спектральный анализ самосопряженного оператора Штурма–Лиувилля на конечном отрезке хорошо изучен и имеет многочисленные применения [1]–[4]. Помимо прямого спектрального анализа этого оператора, важную роль играют обратные задачи, состоящие в восстановлении потенциала по спектру. Оператор Штурма–Лиувилля представляет собой сумму оператора второй производной и оператора умножения на функцию (потенциал). Настоящая работа посвящена спектральному анализу самосопряженного оператора, который является одномерным возмущением второй производной на конечном отрезке,

$$(Ly)(x) = -y''(x) + \alpha \int_0^l y(t) \overline{v(t)} dt v(x), \quad (0.1)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, а $v(x)$ – комплекснозначная функция из $L^2(0, l)$, $0 < l < \infty$, такая, что $\|v(x)\| = 1$. Областью определения оператора L (0.1) являются дважды дифференцируемые функции $y(x)$, удовлетворяющие краевым условиям

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0. \quad (0.2)$$

Второе слагаемое в выражении (0.1) следует называть нелокальным (сепарабельным) потенциалом [5]. Отметим, что операторы вида (0.1) возникают в задаче изучения поведения частиц на кристаллической поверхности [6].

Целью настоящей работы является описание спектра оператора L (0.1), (0.2), а также решение обратной задачи, касающейся восстановления параметра α и функции $v(x)$ по спектру $\sigma(L)$ оператора L . Кроме того, будет дано описание тех множеств σ из $\mathbb{R}$, которые могут быть спектром операторов L (0.1), (0.2).

Работа состоит из четырех параграфов. В § 1 найдены собственные функции оператора L (0.1), (0.2) и показано, что спектр оператора L совпадает с нулями целой функции экспоненциального типа, которая строится по $v(x)$ и α . В § 2 изучается абстрактная спектральная задача об одномерном возмущении самосопряженного оператора с простым спектром в гильбертовом пространстве.

Получено описание спектра такого оператора. Установлено, что спектр возмущенного оператора является объединением множества точек однократного спектра и конечного множества точек двукратного спектра. В § 3 доказана теорема единственности, утверждающая, что если спектры операторов L и L_1 вида (0.1), (0.2) совпадают, то тогда совпадают числа $\alpha = \alpha_1$, а функции $v(x)$ и $v_1(x)$ совпадают с точностью до сопряжения ($v(x) = v_1(x)$ либо $v(x) = \overline{v_1(x)}$). Параграф 4 посвящен решению обратной задачи, позволяющей по двум спектрам восстановить функцию $v(x)$. В том же параграфе в терминах необходимых и достаточных условий приведено описание тех множеств $\sigma \subset \mathbb{R}$, которые являются спектром оператора L вида (0.1), (0.2).

Автор выражает искреннюю признательность В. А. Марченко за стимулирующие обсуждения.

§ 1. Собственные функции и характеристическое уравнение

1.1. Рассмотрим на конечном отрезке $[0, l]$, $0 < l < \infty$, краевую задачу, порождаемую самосопряженным интегро-дифференциальным оператором

$$\begin{cases} -u''(x, z) + \alpha \int_0^l u(t, z) \overline{v(t)} dt v(x) = z^2 u(x, z), \\ u(0, z) = 0, \quad u(l, z) = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, а $v(x)$ – комплекснозначная функция на $[0, l]$ такая, что

$$\int_0^l |v(x)|^2 dx = 1. \quad (1.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Оператор L , задающий уравнение (1.1),

$$Ly(x) \stackrel{\text{def}}{=} -y''(x) + \alpha \int_0^l y(t) \overline{v(t)} dt v(x), \quad (1.3)$$

с областью определения

$$\mathfrak{D}(L) = \{y(x) \in W_2^2(0, l) : y(0) = 0, y(l) = 0\} \quad (1.4)$$

инвариантен относительно преобразования $v(x) \rightarrow \xi v(x)$, где ξ – произвольное комплексное число, по модулю равное единице, $|\xi| = 1$.

Решение уравнения (1.1) будем искать в виде

$$u(x, z) = a(z) \sin zx + b(z) \alpha \int_0^x \frac{\sin z(x-t)}{z} v(t) dt, \quad (1.5)$$

где $a(z)$ – некоторая функция от z , а $b(z)$ равна

$$b(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^l u(x, z) \overline{v(x)} dx. \quad (1.6)$$

Легко проверить, что при таком выборе $b(z)$ (1.6) функция $u(x, z)$ (1.5) удовлетворяет уравнению (1.1) и краевому условию $u(0, z) = 0$. Умножим равенство (1.5) на $\bar{v}(x)$ и проинтегрируем от 0 до l , тогда мы получим, что

$$b(z)(1 - \alpha\varphi(z)) = a(z) \frac{\tilde{v}^*(z) - \tilde{v}^*(-z)}{2i}, \quad (1.7)$$

где $\tilde{v}(z)$ – преобразование Фурье функции $v(x)$,

$$\tilde{v}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^l e^{-izx} v(x) dx, \quad (1.8)$$

причем

$$\tilde{v}^*(z) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\tilde{v}(\bar{z})}. \quad (1.9)$$

Функция $\varphi(z)$ равна

$$\begin{aligned} \varphi(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^l \int_0^x \frac{\sin z(x-t)}{z} v(t) dt \overline{v(x)} dx = \int_0^l v(t) dt \int_t^l \frac{\sin z(x-t)}{z} \overline{v(x)} dx \\ &= \int_0^l v(t) dt \int_0^{l-t} \frac{\sin zy}{z} \overline{v(t+y)} dy = \int_0^l \frac{\sin zy}{z} \int_0^{l-y} v(t) \overline{v(t+y)} dt dy. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Очевидно, что $\varphi(z)$ является четной функцией, $\varphi(-z) = \varphi(z)$. Определим функцию

$$g(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{l-y} \overline{v(t)} v(t+y) dt, \quad (1.11)$$

тогда из неравенства Коши–Буняковского следует, что $g(y)$ ограничена, а именно $|g(y)| \leq \|v\|^2$, поэтому $g(y) \in L^2(0, l)$. По $g(y)$ построим функцию

$$\phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^l e^{-izy} g(y) dy, \quad (1.12)$$

учитывая (1.10), мы получим, что

$$\varphi(z) = \frac{1}{2iz} (\phi^*(z) - \phi^*(-z)). \quad (1.13)$$

ЛЕММА 1. Для функций $\tilde{v}(z)$ (1.8) и $\phi(z)$ (1.12) при всех $z \in \mathbb{C}$ справедливо соотношение

$$\phi(z) + \phi^*(z) = \tilde{v}(z) \tilde{v}^*(z). \quad (1.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем функцию $\phi(z)$ (1.12) в виде

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \int_0^l e^{-izy} \int_0^{l-y} \overline{v(t)} v(t+y) dt dy = \int_0^l dy \int_0^{l-y} e^{izt} \overline{v(t)} e^{-iz(y+t)} v(y+t) dt \\ &= \int_0^l e^{izt} \overline{v(t)} dt \int_0^{l-t} e^{-iz(y+t)} v(y+t) dy = \int_0^l e^{izt} \overline{v(t)} dt \int_t^l e^{-iz\xi} v(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Интегрируя по частям последнее выражение в (1.15), мы получим, что

$$\begin{aligned}\phi(z) &= - \int_0^l \int_t^l e^{-iz\xi} v(\xi) d\xi d\left(\int_t^l e^{izs} \overline{v(s)} ds\right) \\ &= \tilde{v}(z) \tilde{v}^*(z) - \int_0^l \int_t^l e^{izs} \overline{v(s)} ds e^{-izt} v(t) dt = \tilde{v}(z) \tilde{v}^*(z) - \phi^*(z)\end{aligned}$$

в силу (1.8) и (1.15).

Второе краевое условие $u(l, z) = 0$ для функции $u(x, z)$ (1.5) и соотношение (1.7) приводят к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a(z) \sin zl + b(z) \alpha \int_0^l \frac{\sin z(l-t)}{z} v(t) dt = 0, \\ a(z) \frac{\tilde{v}^*(z) - \tilde{v}^*(-z)}{2i} - b(z)(1 - \alpha\varphi(z)) = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

относительно неизвестных $a(z)$ и $b(z)$. Так как нас интересует нетривиальное решение $u(x, z)$ (1.5) краевой задачи (1.1), то определитель системы (1.16) должен равняться нулю, $\Delta(z) = 0$, где

$$\Delta(z) \stackrel{\text{def}}{=} (1 - \alpha\varphi(z)) \sin zl + \alpha \int_0^l \sin z(l-t) v(t) dt \frac{\tilde{v}^*(z) - \tilde{v}^*(-z)}{2iz}. \quad (1.17)$$

Используя (1.13), упростим выражение $\Delta(z)$:

$$\begin{aligned}\Delta(z) &= \frac{e^{izl} - e^{-izl}}{2i} - \alpha \frac{e^{izl} - e^{-izl}}{2i} \frac{\phi^*(z) - \phi^*(-z)}{2iz} \\ &\quad + \alpha \int_0^l \frac{e^{iz(l-t)} - e^{-iz(l-t)}}{2i} v(t) dt \frac{\tilde{v}^*(z) - \tilde{v}^*(-z)}{2iz} \\ &= -\frac{1}{4z} \{ e^{izl} [2iz - \alpha(\phi^*(z) - \phi^*(-z)) + \alpha\tilde{v}(z)(\tilde{v}^*(z) - \tilde{v}^*(-z))] \\ &\quad - e^{-izl} [2iz - \alpha(\phi^*(z) - \phi^*(-z)) + \alpha\tilde{v}(-z)(\tilde{v}^*(z) - \tilde{v}^*(-z))] \}.\end{aligned}$$

Учитывая (1.14), мы получим, что

$$\begin{aligned}\Delta(z) &= -\frac{1}{4z} \{ e^{izl} [2iz + \alpha(\phi(z) + \phi^*(-z) - \tilde{v}(z)\tilde{v}^*(-z))] \\ &\quad - e^{-izl} [2iz + \alpha(\tilde{v}(-z)\tilde{v}^*(z) - \phi(-z) - \phi^*(z))] \}.\end{aligned}$$

Итак, нами доказано утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Спектр краевой задачи (1.1) совпадает с нулями характеристического уравнения $R(z) = 0$, где*

$$\begin{aligned}R(z) &\stackrel{\text{def}}{=} e^{izl} [2iz + \alpha(\phi(z) + \phi(-z) - \tilde{v}(z)\tilde{v}^*(-z))] \\ &\quad - e^{-izl} [2iz + \alpha(\tilde{v}(-z)\tilde{v}^*(z) - \phi(-z) - \phi^*(z))],\end{aligned} \quad (1.18)$$

причем функции $\tilde{v}(z)$ и $\phi(z)$ соответственно равны (1.8) и (1.12). Функция $R(z)$ обладает свойствами

$$R(z) = R(-z), \quad R'(0) = 0. \quad (1.19)$$

Условие $R'(0) = 0$ следует из четности функции $R(z)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} -u_1''(x, z) + \alpha \int_0^l u_1(t, z)v(t) dt \overline{v(x)} = z^2 u_1(x, z), \\ u_1(0, z) = 0, \quad u_1(l, z) = 0, \end{cases} \quad (1.20)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, а $v(x)$ удовлетворяет условию (1.2). Очевидно, что оператор

$$\overline{L}y(x) \stackrel{\text{def}}{=} -y''(x) + \alpha \int_0^l y(t)v(t) dt \overline{v(x)}, \quad (1.21)$$

область определения которого также имеет вид (1.4), самосопряжен в $L^2(0, l)$. Легко видеть, что $u_1(x, z) = u^*(x, z)$, где $u(x, z)$ – решение краевой задачи (1.1). Заметим, что в этом случае функции $\overline{v(x)}$ по формулам (1.8), (1.11), (1.12) будут отвечать $\tilde{v}^*(-z)$, $\bar{g}(y)$, $\phi^*(-z)$. Отсюда следует, что функция $R_1(z)$, нули которой задают спектр краевой задачи (1.20), совпадает с $R(z)$ (1.18). Таким образом, спектры краевых задач (1.1) и (1.20) совпадают и являются нулями одной и той же целой функции $R(z)$ (1.18).

Найдем вид собственных функций $u(x, z)$ краевой задачи (1.1).

ТЕОРЕМА 2. Пусть z – корень уравнения $R(z) = 0$, где $R(z)$ задана формулой (1.18), тогда собственная функция $u(x, z)$ краевой задачи (1.1) имеет вид (1.5), причем:

1) если $\tilde{v}^*(z) \neq \tilde{v}^*(-z)$, то

$$u(x, z) = (1 - \alpha\varphi(z)) \sin zx + \alpha \int_0^x \sin z(x-t)v(t) dt \frac{\tilde{v}^*(z) - \tilde{v}^*(-z)}{2iz}; \quad (1.22)$$

2) если $\tilde{v}^*(z) = \tilde{v}^*(-z)$ и $z = \pi n/l$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$u(x, z) = a(z) \sin zx + b(z) \int_0^x \sin z(x-t)v(t) dt, \quad (1.23)$$

где $a(z)$ и $b(z)$ – произвольные функции от z , не обращающиеся в нуль одновременно;

3) если $\tilde{v}^*(z) = \tilde{v}^*(-z)$ и $1 = \alpha\varphi(z)$, то

$$u(x, z) = -\tilde{v}^*(z) \frac{\sin zx}{x} + \int_0^x \frac{\sin z(x-t)}{z} v(t) dt, \quad (1.24)$$

при этом функции $\tilde{v}^*(z)$ и $\varphi(z)$ заданы формулами (1.8), (1.9) и (1.10) соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае 1) мы можем из (1.7) найти $a(z)$ и подставить в (1.5), тогда мы получим представление (1.22). Если $\tilde{v}^*(z) = \tilde{v}^*(-z)$, то из (1.7) следует, что возможны два случая: а) $b(z) = 0$ либо б) $1 = \alpha\varphi(z)$. Когда имеет место а), из (1.5) вытекает, что $u(x, z) = a(z) \sin zx$ и $z = \pi n/l$, $n \in \mathbb{N}$, и, значит, справедливо (1.23) при $b(z) = 0$. Если выполняется б), то из краевого условия $u(l, z) = 0$ для $u(x, z)$ (1.5) мы получим, что

$$\sin zl \left\{ a(z) + \alpha b(z) \frac{\tilde{v}^*(z)}{z} \right\} = 0.$$

Когда $\sin zl = 0$, мы имеем случай 2), в противном случае будем иметь, что

$$a(z) = -\alpha b(z) \frac{\widetilde{v}^*(z)}{z}.$$

Подставляя данное выражение $a(z)$ в (1.5), мы и получим представление (1.24) для собственной функции $u(x, z)$.

1.2. Обозначим через L_0 самосопряженный дифференциальный оператор в $L^2(0, l)$

$$L_0 y(x) \stackrel{\text{def}}{=} -y''(x), \quad (1.25)$$

область определения которого равна

$$\mathfrak{D}(L_0) = \{y(x) \in W_2^2(0, l) : y(0) = 0, y(l) = 0\}. \quad (1.26)$$

Тогда оператор L (1.3), (1.4) можно записать в виде

$$Ly = L_0 y + \alpha \langle y, v \rangle v. \quad (1.27)$$

Вычислим резольвенту

$$R_L(\lambda) = (L - \lambda I)^{-1}$$

оператора L (1.27). Пусть $R_L(\lambda)g = f$, тогда $Lf - \lambda f = g$, или

$$(L_0 - \lambda)f + \alpha \langle f, v \rangle v = g,$$

следовательно,

$$f + \alpha \langle f, v \rangle R_0(\lambda)v = R_0(\lambda)g, \quad (1.28)$$

где $R_0(\lambda) = (L_0 - \lambda I)^{-1}$. Умножив скалярно равенство (1.28) на v , получим

$$\langle f, v \rangle (1 + \alpha \langle R_0(\lambda)v, v \rangle) = \langle R_0(\lambda)g, v \rangle.$$

Находя из данного равенства $\langle f, g \rangle$ и подставляя его в (1.28), мы и получим резольвенту оператора L .

ЛЕММА 2. Резольвента $R_L(\lambda) = (L - \lambda I)^{-1}$ оператора L (1.27) задается формулой

$$R_L(\lambda)f = R_0(\lambda)f - \alpha \frac{\langle R_0(\lambda)f, v \rangle}{1 + \alpha \langle R_0(\lambda)v, v \rangle} R_0(\lambda)v, \quad (1.29)$$

где $R_0(\lambda) = (L_0 - \lambda I)^{-1}$ – резольвента оператора L_0 (1.25), (1.26).

Стандартные вычисления [1]–[3] позволяют найти резольвенту $R_0(\lambda)$ оператора L_0 (1.25), (1.26),

$$\begin{aligned} (R_0(\lambda)f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l} \\ &\times \left\{ \sin \sqrt{\lambda}(l-x) \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} t f(t) dt + \sin \sqrt{\lambda} x \int_x^l \sin \sqrt{\lambda}(l-t) f(t) dt \right\}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Отсюда следует, что спектр оператора L_0 образует множество $\sigma(L_0) = \{\lambda_n\}$, где

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.31)$$

Вычислим выражение $1 + \alpha \langle R_0(\lambda)v, v \rangle$, присутствующее в формуле (1.29). Для этого найдем

$$\begin{aligned} B(\lambda) &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l (1 + \alpha \langle R_0(\lambda)v, v \rangle) \\ &= \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l + \alpha \int_0^l \sin \sqrt{\lambda}(l-x) \bar{v}(x) \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} t v(t) dt dx \\ &\quad + \alpha \int_0^l \sin \sqrt{\lambda} x \bar{v}(x) \int_x^l \sin \sqrt{\lambda}(l-t) v(t) dt dx \\ &= \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l + \frac{\alpha}{2} \int_0^l v(t) dt \int_t^l [\cos \sqrt{\lambda}(l-x-t) - \cos \sqrt{\lambda}(l-x+t)] \bar{v}(x) dx \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \int_0^l \bar{v}(x) dx \int_x^l [\cos \sqrt{\lambda}(l-t-x) - \cos \sqrt{\lambda}(l-t+x)] v(t) dt \\ &= \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l + \psi(\sqrt{\lambda}) + \psi^*(\sqrt{\lambda}), \end{aligned}$$

где

$$\psi(\sqrt{\lambda}) = \frac{\alpha}{2} \int_0^l v(t) dt \int_t^l [\cos \sqrt{\lambda}(l-x-t) - \cos \sqrt{\lambda}(l-x+t)] \bar{v}(x) dx. \quad (1.32)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \psi(\sqrt{\lambda}) &= \frac{\alpha}{4} e^{i\sqrt{\lambda}l} \left\{ \int_0^l e^{-i\sqrt{\lambda}t} v(t) dt \int_t^l e^{-i\sqrt{\lambda}x} \bar{v}(x) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_0^l e^{i\sqrt{\lambda}t} v(t) dt \int_t^l e^{-i\sqrt{\lambda}x} \bar{v}(x) dx \right\} \\ &\quad + \frac{\alpha}{4} e^{-i\sqrt{\lambda}l} \left\{ \int_0^l e^{i\sqrt{\lambda}t} v(t) dt \int_t^l e^{i\sqrt{\lambda}x} \overline{v(x)} dx \right. \\ &\quad \left. - \int_0^l e^{-i\sqrt{\lambda}t} v(t) dt \int_t^l e^{i\sqrt{\lambda}x} \overline{v(x)} dx \right\} \\ &= \frac{\alpha}{4} e^{i\sqrt{\lambda}l} [F_1(\sqrt{\lambda}) - F_2(\sqrt{\lambda})] + \frac{\alpha}{4} e^{-i\sqrt{\lambda}l} [F_1(-\sqrt{\lambda}) - F_2(-\sqrt{\lambda})], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_1(\sqrt{\lambda}) &= \int_0^l e^{-i\sqrt{\lambda}t} v(t) dt \int_t^l e^{-i\sqrt{\lambda}x} \overline{v(x)} dx dt, \\ F_2(\sqrt{\lambda}) &= \int_0^l e^{i\sqrt{\lambda}t} v(t) dt \int_t^l e^{-i\sqrt{\lambda}x} \overline{v(x)} dx dt. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Из (1.15) следует, что

$$F_2(\sqrt{\lambda}) = \phi^*(-\sqrt{\lambda}), \quad (1.34)$$

где $\phi(z)$ имеет вид (1.12). Легко видеть, что

$$\begin{aligned} F_1(\sqrt{\lambda}) &= - \int_0^l \int_t^l e^{-i\sqrt{\lambda}x} \bar{v}(x) dx d\left(\int_t^l e^{-i\sqrt{\lambda}\xi} v(\xi) d\xi \right) \\ &= \tilde{v}(\sqrt{\lambda}) \tilde{v}^*(-\sqrt{\lambda}) - \int_0^l \int_t^l e^{-i\sqrt{\lambda}\xi} v(\xi) d\xi e^{-i\sqrt{\lambda}t} \overline{v(t)} dt \\ &= \tilde{v}(\sqrt{\lambda}) \tilde{v}^*(-\sqrt{\lambda}) - F_1^*(-\sqrt{\lambda}) \end{aligned}$$

в силу (1.8) и (1.33), поэтому

$$F_1(\sqrt{\lambda}) + F_1^*(-\sqrt{\lambda}) = \tilde{v}(\sqrt{\lambda}) \tilde{v}^*(-\sqrt{\lambda}). \quad (1.35)$$

Итак, функция $\psi(\sqrt{\lambda})$ (1.32) равна

$$\psi(\sqrt{\lambda}) = \frac{\alpha}{4} e^{i\sqrt{\lambda}l} [F_1(\sqrt{\lambda}) - \phi^*(-\sqrt{\lambda})] + \frac{\alpha}{4} e^{-i\sqrt{\lambda}l} [F_1(-\sqrt{\lambda}) - \phi^*(\sqrt{\lambda})].$$

Подставляя данное выражение в формулу для $B(\lambda)$, мы получим, что

$$\begin{aligned} B(\lambda) &= \sqrt{\lambda} \sin \lambda l + \frac{\alpha}{4} e^{i\sqrt{\lambda}l} [F_1(\lambda) - \phi^*(-\sqrt{\lambda})] + \frac{\alpha}{4} e^{-i\sqrt{\lambda}l} [F_1(-\sqrt{\lambda}) - \phi(\sqrt{\lambda})] \\ &\quad + \frac{\alpha}{4} e^{-i\sqrt{\lambda}l} [F_1^*(\sqrt{\lambda}) - \phi(-\sqrt{\lambda})] + \frac{\alpha}{4} e^{i\sqrt{\lambda}l} [F_1^*(-\sqrt{\lambda}) - \phi(\sqrt{\lambda})] \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2i} (e^{i\sqrt{\lambda}l} - e^{-i\sqrt{\lambda}l}) + \frac{\alpha}{4} e^{i\sqrt{\lambda}l} [\tilde{v}(\sqrt{\lambda}) \tilde{v}^*(-\sqrt{\lambda}) - \phi(\sqrt{\lambda}) - \phi(-\sqrt{\lambda})] \\ &\quad + \frac{\alpha}{4} e^{-i\sqrt{\lambda}l} [\tilde{v}(-\sqrt{\lambda}) \tilde{v}^*(\sqrt{\lambda}) - \phi^*(\sqrt{\lambda}) - \phi(-\sqrt{\lambda})] \end{aligned}$$

в силу (1.35). Итак, мы окончательно приходим к выражению

$$\begin{aligned} B(\lambda) &= -\frac{1}{4} \left\{ e^{i\sqrt{\lambda}l} [2i\sqrt{\lambda} + \alpha(\phi(\sqrt{\lambda}) + \phi^*(-\sqrt{\lambda}) - \tilde{v}(\sqrt{\lambda}) \tilde{v}^*(-\sqrt{\lambda}))] \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\sqrt{\lambda}l} [2i\sqrt{\lambda} + \alpha[\tilde{v}(-\sqrt{\lambda}) \tilde{v}^*(\sqrt{\lambda}) - \phi^*(\sqrt{\lambda}) - \phi(-\sqrt{\lambda})]] \right\}. \end{aligned}$$

Сравнивая правую часть данного равенства с формулой (1.18), мы приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 3. Если L_0 имеет вид (1.25), (1.26), то для всех $\lambda \notin \sigma(L_0)$ справедливо равенство

$$1 + \alpha \langle R_0(\lambda) v, v \rangle = - \frac{R(\sqrt{\lambda})}{4\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l}, \quad (1.36)$$

где $R(z)$ имеет вид (1.18).

§ 2. Спектр оператора L

2.1. Обратим внимание на то, что самосопряженный оператор L_0 (1.25), (1.26) имеет простой дискретный спектр $\sigma(L_0) = \{\lambda_n\}$, где λ_n имеет вид (1.31), а его ортонормированные собственные функции $u_n(x) = \sqrt{2/l} \sin \lambda_n x$ полны

в $L^2(0, l)$. Рассмотрим абстрактную постановку задачи об одномерном возмущении оператора с простым спектром. А именно пусть в гильбертовом пространстве H задан линейный самосопряженный оператор L_0 с простым дискретным спектром $\sigma(L_0) = \{\lambda_n\}$, причем его собственные векторы u_n , отвечающие собственным числам λ_n , ортонормированы и полны в H . Тогда резольвента $R_0(\lambda) = (L_0 - \lambda I)^{-1}$ оператора L_0 имеет вид

$$R_0(\lambda)f = \sum_n \frac{f_n u_n}{\lambda_n - \lambda}, \quad (2.1)$$

где $f_n = \langle f, u_n \rangle$ – коэффициенты Фурье вектора $f \in H$.

Зададим самосопряженный оператор L в H (ср. с (1.27)), являющийся одномерным возмущением L ,

$$Lf \stackrel{\text{def}}{=} L_0 f + \alpha \langle f, v \rangle v, \quad (2.2)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, а v – фиксированный элемент из H такой, что $\|v\| = 1$. Так как

$$R_L(\lambda)f = R_0(\lambda)f - \alpha \frac{\langle R_0(\lambda)f, v \rangle}{1 + \alpha \langle R_0(\lambda)v, v \rangle} R_0(\lambda)v \quad (2.3)$$

в силу (1.29), где $R_L(\lambda) = (L - \lambda I)^{-1}$, то, учитывая (2.1), мы получим, что

$$R_L(\lambda)f = \sum_n \frac{f_n u_n}{\lambda_n - \lambda} - \alpha \frac{\sum_k f_k \bar{v}_k / (\lambda_k - \lambda)}{1 + \alpha \sum_k |v_k|^2 / (\lambda_k - \lambda)} \sum_n \frac{v_n u_n}{\lambda_n - \lambda}, \quad (2.4)$$

где $v_n = \langle v, u_n \rangle$ – коэффициенты Фурье вектора v , а $f \in H$.

ЛЕММА 3. Если $v_p \neq 0$, то точка $\lambda = \lambda_p$ не принадлежит спектру $\sigma(L)$ оператора L (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы вытекает из того, что резольвента $R_L(\lambda)$ (2.4) в этом случае не имеет особенностей в точке $\lambda = \lambda_p$, так как

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_p} (\lambda_p - \lambda) R_L(\lambda)f = f_p u_p - \alpha \frac{f_p \bar{v}_p}{\alpha v_p \bar{v}_p} v_p u_p = 0.$$

Поэтому множество $\sigma(L_0) = \{\lambda_n\}$ естественно разбить на два непересекающихся множества $\sigma(L_0) = \sigma_0 \cup \sigma_1$, где

$$\sigma_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda_n^0 = \lambda_n \in \sigma(L_0) : v_n = 0\}, \quad \sigma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda_n^1 = \lambda_n \in \sigma(L_0) : v_n \neq 0\}. \quad (2.5)$$

Мы будем полагать, что все множества $\sigma(L_0)$, σ_0 , σ_1 занумерованы в порядке возрастания. Данному разбиению отвечает разложение пространства H в ортогональную сумму подпространств $H = H_0 \oplus H_1$, при этом

$$H_0 \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}\{u_n : \lambda_n^0 \in \sigma_0\}, \quad H_1 \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}\{u_n : \lambda_n^1 \in \sigma_1\}. \quad (2.6)$$

Очевидно, что H_0 и H_1 (2.6) приводят оператор L (2.2), причем

$$L|_{H_0} = L_0, \quad L|_{H_1} \stackrel{\text{def}}{=} L_1. \quad (2.7)$$

Отсюда следует, что

$$R_\lambda(L) = R_\lambda(L_0) \oplus R_\lambda(L_1),$$

где

$$\begin{aligned} R_0(\lambda)f &= \sum_{\lambda_n^0 \in \sigma_0} \frac{f_n u_n}{\lambda_n - \lambda}, \\ R_{L_1}(\lambda)f &= \frac{1}{Q(\lambda)} \sum_{\lambda_n^1 \in \sigma_1} \left\{ \frac{f_n Q(\lambda)}{\lambda_n^1 - \lambda} - \alpha \frac{v_n P(\lambda, f)}{\lambda_n^1 - \lambda} \right\} u_n, \end{aligned} \quad (2.8)$$

при этом

$$Q(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \alpha \sum_{\lambda_k^1 \in \sigma_1} \frac{|v_k|^2}{\lambda_k^1 - \lambda}, \quad P(\lambda, f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_k^1 \in \sigma_1} \frac{f_k \bar{v}_k}{\lambda_k^1 - \lambda}. \quad (2.9)$$

Из леммы 3 следует, что резольвента $R_\lambda(L_1)$ (2.8) не имеет особенностей в точках $\lambda_n^1 \in \sigma_1$, но может иметь особенности в корнях функции $Q(\lambda)$ (2.9). Очевидно, что функция

$$F(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_n^1 \in \sigma_1} \frac{|v_k|^2}{\lambda_n^1 - \lambda} \quad (2.10)$$

является строго возрастающей на множестве $\mathbb{R} \setminus \sigma_1$, так как в каждой точке этого множества $F'(\lambda) > 0$. Поэтому уравнение $1 + \alpha F(\lambda) = 0$, эквивалентное $Q(\lambda) = 0$, имеет лишь простые корни.

ЛЕММА 4. Нули функции $Q(\lambda)$ (2.9) вещественные, простые и перемежаются с точками $\lambda_k^1 \in \sigma_1$ (2.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если оператор L_0 полуограничен снизу, то при $\alpha < 0$ помимо корней уравнения $Q(\lambda) = 0$, лежащих между $\lambda_k^1 \in \sigma_1$, также существует корень, расположенный левее точки $\min_{\lambda_k^1 \in \sigma_1} \lambda_k^1$.

Обозначим через $\sigma(L_1)$ множество

$$\sigma(L_1) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu_k \in \mathbb{R} : Q(\mu_k) = 0\}, \quad (2.11)$$

где $Q(\lambda)$ имеет вид (2.9), а числа $\mu_k = \mu_k(\alpha)$ зависят от параметра α . Отметим, что резольвента $R_\lambda(L_1)$ (2.8) не может иметь устранимых особенностей в точках $\mu_k \in \sigma(L_1)$ (2.11) при всех $f \in H$. Если бы это было не так, то, выбрав $f = v$, мы получим, что $P(\lambda, v) = F(\lambda) = 0$ и $Q(\lambda) = 0$, что невозможно в силу вида $Q(\lambda)$ (2.9) и $F(\lambda)$ (2.10). Таким образом, особенности резольвенты $R_\lambda(L_1)$ (2.8) являются простыми полосами, которые расположены в точках $\mu_k \in \sigma(L_1)$.

Для того чтобы найти собственные векторы, отвечающие собственным числам $\mu_k \in \sigma(L_1)$, вычислим выражение

$$C_p(f) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow \mu_p} (\mu_p - \lambda) R_\lambda(L_1) f = \frac{\alpha}{Q'(\mu_p)} \sum_{\lambda_n^1 \in \sigma_1} \frac{v_n}{\lambda_n^1 - \mu_p} \left(\sum_{\lambda_k^1 \in \sigma_1} \frac{f_k \bar{v}_k}{\lambda_k^1 - \mu_p} \right) u_n. \quad (2.12)$$

Так как

$$Q'(\mu_p) = \alpha \sum_{\lambda_k^1 \in \sigma_1} \frac{|v_k|^2}{(\lambda_k^1 - \mu_p)^2} = \alpha F'(\mu_p) \quad (\neq 0),$$

где $F(\lambda)$ имеет вид (2.10), то мы можем определить вектор

$$\tilde{u}_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{F'(\mu_p)}} \sum_{\lambda_k^1 \in \sigma_1} \frac{v_k}{\lambda_k^1 - \mu_p} u_k. \quad (2.13)$$

Очевидно, что данный ряд сходится и $\|\tilde{u}_p\| = 1$, кроме того, выражение $C_p(f)$ (2.12) равно $C_p(f) = \langle f, \tilde{u}_p \rangle \tilde{u}_p$. В результате мы приходим к тому, что резольвента $R_\lambda(L_1)$ (2.8) представляется в следующем виде:

$$R_\lambda(L_1)f = \sum_{\mu_p \in \sigma(L_1)} \frac{\tilde{f}_p \tilde{u}_p}{\mu_p - \lambda}, \quad (2.14)$$

где $\tilde{f}_p = \langle f, \tilde{u}_p \rangle$ – коэффициенты Фурье вектора f в базисе $\{\tilde{u}_p\}$.

ЛЕММА 5. *Спектр оператора L_1 (2.7) простой и совпадает с множеством $\sigma(L_1)$ (2.11), а его резольвента имеет вид (2.14), где $\tilde{u}_p$ заданы формулами (2.13) и являются собственными векторами оператора L_1 , которые отвечают собственным значениям $\mu_p \in \sigma(L_1)$.*

Проверим, что для $\tilde{u}_p$ (2.13) имеет место $L_1 \tilde{u}_p = \mu_p \tilde{u}_p$. Действительно, из (2.2) следует, что

$$\begin{aligned} L \tilde{u}_p &= \frac{1}{\sqrt{F'(\mu_p)}} \sum_{\lambda_k^1 \in \sigma_1} \frac{\lambda_k^1 v_k}{\lambda_k^1 - \mu_p} u_k + \alpha \frac{1}{\sqrt{F'(\mu_p)}} \sum_{\lambda_k^1 \in \sigma_1} \frac{|v_k|^2}{\lambda_k^1 - \mu_p} \sum_{\lambda_n^1 \in \sigma_1} v_n u_n \\ &= \mu_p \tilde{u}_p + \frac{Q(\mu_p)}{\sqrt{F'(\mu_p)}} \sum_{\lambda_n^1 \in \sigma_1} v_n u_n = \mu_p \tilde{u}_p, \end{aligned}$$

так как $Q(\mu_p) = 0$.

Может оказаться, что при некотором значении α собственное число $\mu_p = \mu_p(\alpha) \in \sigma(L_1)$ совпало с $\lambda_n^0 \in \sigma_0$ (2.5), тогда собственное подпространство оператора L (2.2) двумерно и его порождают векторы $\{u_n, \tilde{u}_p\}$. Двумерность этого подпространства, которое отвечает собственному значению $\lambda_n^0 (= \mu_p)$, следует из того, что $u_n \perp \tilde{u}_p$, так как подпространства H_0 и H_1 (2.5) ортогональны.

ТЕОРЕМА 4. *Спектр оператора L (2.2) совпадает с объединением множеств*

$$\sigma(L) = \sigma_0 \cup \sigma(L_1), \quad (2.15)$$

где σ_0 и $\sigma(L_1)$ имеют соответственно вид (2.5) и (2.11). Спектр оператора L простой, за исключением точек, принадлежащих $\sigma_0 \cap \sigma(L_1)$, где он двукратен.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Вне счетного числа значений параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ спектр оператора L (2.2) простой.

Не исключена возможность, что при некотором значении α произошло совпадение нескольких собственных чисел λ_n^0 из σ_0 (2.5) и μ_k из $\sigma(L_1)$ (2.11). Пусть, например, для одного и того же α совпали $\lambda_n^0 = \mu_p$ и $\lambda_m^0 = \mu_q$, тогда имеют место равенства

$$1 + \alpha \sum_{\lambda_k^1 \in \sigma_1} \frac{|v_k|^2}{\lambda_k^1 - \lambda_n^0} = 0, \quad 1 + \alpha \sum_{\lambda_k^1 \in \sigma_1} \frac{|v_k|^2}{\lambda_k^1 - \lambda_m^0} = 0.$$

После вычитания этих равенств мы получим, что

$$\sum_{\lambda_k^1 \in \sigma_1} \frac{|v_k|^2}{(\lambda_k^1 - \lambda_n^0)(\lambda_k^1 - \lambda_m^0)} = 0, \quad (2.16)$$

так как $\lambda_k^0 \neq \lambda_m^0$. Собственному числу $\lambda_n^0 (= \mu_p)$ в этом случае отвечает двумерное подпространство, порождаемое векторами $\{u_n, \tilde{u}_p\}$, где $\tilde{u}_p$ имеет вид (2.13), а значению $\lambda_m^0 (= \mu_q)$ соответствует подпространство, которое образуют векторы $\{u_m, \tilde{u}_q\}$, при этом $\tilde{u}_q$ также имеет вид (2.13). Векторы $\tilde{u}_p$ и $\tilde{u}_q$ должны быть ортогональными как собственные векторы самосопряженного оператора L (2.2), отвечающее различным собственным значениям λ_n^0 и λ_m^0 , т.е. $\langle \tilde{u}_p, \tilde{u}_q \rangle = 0$. Данное равенство эквивалентно соотношению (2.16) в силу вида векторов $\tilde{u}_p$ (2.13). Следовательно, из того что при некотором α нули функции $Q(\lambda)$ (2.9) совпадают с несколькими значениями λ_n^0 из σ_0 (2.5), автоматически следует, что соответствующие векторы $\tilde{u}_p$ (2.13) ортогональны.

Естественно возникает вопрос о том, когда пересечение множеств σ_0 (2.5) и $\sigma(L_1)$ (2.11) конечно.

ЛЕММА 6. *Предположим, что точки спектра λ_k оператора L_0 таковы, что*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty, \quad (2.17)$$

и, кроме того, пусть вектор $v \in H$, задающий одномерное возмущение L (2.2) оператора L_0 , обладает свойством

$$d = \text{dist}(\sigma_0, \sigma_1) > 0, \quad (2.18)$$

где σ_0 и σ_1 имеют вид (2.5). Тогда пересечение $\sigma_0 \cap \sigma(L_1)$ ($\sigma(L_1)$ имеет вид (2.11)) состоит лишь из конечного числа элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая противное, предположим, что при некотором значении α множество $\sigma_0 \cap \sigma(L_1)$ содержит бесконечное число точек $\{\hat{\lambda}_k^0\}_1^\infty$. Эти точки $\hat{\lambda}_s^0$ удовлетворяют уравнениям

$$1 + \alpha \sum_{\lambda_k^1 \in \sigma_1} \frac{|v_k|^2}{\lambda_k^1 - \hat{\lambda}_s^0} = 0 \quad \forall s.$$

Из условия (2.18) следует, что данный ряд сходится равномерно (по s), так как $\sum_k |v_k|^2 = 1$. Поэтому мы в приведенных выше равенствах можем перейти к пределу по s , когда $s \rightarrow \infty$. Учитывая, что каждое из слагаемых в сумме стремится к нулю в силу (2.17), то мы после предельного перехода получим абсурдное равенство $1 = 0$, что невозможно.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Условие (2.18) будет заведомо выполняться, если

$$\min_{k, s, k \neq s} |\lambda_k - \lambda_s| = d > 0. \quad (2.19)$$

Данное требование не зависит от вектора v из H и формулируется лишь в терминах спектра оператора L_0 .

Так как для оператора L_0 (1.25), (1.26) выполняются условия (2.17), (2.19) в силу вида λ_n (1.31), то оператор L (1.3), (1.4) может иметь лишь конечное число точек двукратного спектра.

§ 3. Свойства функции $Q(\lambda)$. Теорема единственности

3.1. В этом пункте мы изучим мультипликативную структуру функций $R(z)$ (1.18) и $Q(\lambda)$ (2.9).

Напомним [7], что функция $f(z)$ принадлежит классу C , если:

- а) $f(z)$ является целой функцией экспоненциального типа;
- б) сходится интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\ln^+ |f(x)|}{1+x^2} dx < \infty. \quad (3.1)$$

Покажем, что функция

$$f(z) = \frac{R(z)}{z^2}, \quad (3.2)$$

где $R(z)$ имеет вид (1.18), принадлежит классу C . Из теоремы 1 следует, что $f(z)$ не имеет особенностей в нуле и $f(0) \neq 0$. Так как $\tilde{v}(z)$ (1.8) и $\phi(z)$ (1.12) являются целыми функциями экспоненциального типа в силу теоремы Винера–Пэли [8], [9], то для функции $f(z)$ (3.2) условие а) принадлежности классу C будет выполняться.

Так как функции $v(z)$ и $\phi(z)$ непрерывны и ограничены на вещественной оси $z \in \mathbb{R}$ и стремятся к нулю на бесконечности (лемма Римана–Лебега), то функция $f(z)$ также ограничена на $\mathbb{R}$ в силу формулы (1.18). Итак, $f(z)$ (3.2) принадлежит классу C .

Индикаторная диаграмма [7] функции $f(z)$ (3.2) совпадает с отрезком мнимой оси $[-ih_f(-\pi/2), ih_f(\pi/2)]$, причем $h_f(\pi/2) = h_f(-\pi/2)$, что вытекает из равенства $|f(iy)| = |f(-iy)|$ в силу $R(z) = R(-z)$ (1.19).

Следующее утверждение является следствием более общей теоремы Картер–Левинсона [7].

ТЕОРЕМА 5. *Для каждой функции из класса C такой, что $f(0) \neq 0$ и $h_f(-\pi/2) = h_f(\pi/2)$, имеет место представление*

$$f(z) = f(0) \lim_{R \rightarrow \infty} \prod_{|a_k| < R} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right), \quad (3.3)$$

где a_k – корни функции $f(z)$.

Функция $f(z)$ (3.2) является четной и ее нули лежат на вещественной оси ($a_k \in \mathbb{R}$), поэтому, используя теорему 5, мы получим, что

$$f(z) = f(0) \prod_k \left(1 - \frac{z^2}{a_k^2}\right). \quad (3.4)$$

Вычислим значение функции $R(z)$ (1.18) в точках $z = \sqrt{\lambda_n}$, где λ_n имеют вид (1.31),

$$\begin{aligned} R(\sqrt{\lambda_n}) &= (-1)^n \alpha \left\{ \phi(\sqrt{\lambda_n}) + \phi^*(-\sqrt{\lambda_n}) - \tilde{v}(\sqrt{\lambda_n})\tilde{v}^*(-\sqrt{\lambda_n}) \right. \\ &\quad \left. + \phi(-\sqrt{\lambda_n}) + \phi^*(\sqrt{\lambda_n}) - \tilde{v}(-\sqrt{\lambda_n})\tilde{v}^*(\sqrt{\lambda_n}) \right\} \\ &= (-1)^n \alpha [\tilde{v}(\sqrt{\lambda_n}) - \tilde{v}(-\sqrt{\lambda_n})] [\tilde{v}^*(\sqrt{\lambda_n}) - \tilde{v}^*(-\sqrt{\lambda_n})] \end{aligned}$$

в силу (1.14). Учитывая, что коэффициент Фурье $v_n = \langle v, u_n \rangle$ функции $v(x)$ в ортонормированном базисе собственных функций $u_n(x) = \sqrt{2/l} \sin \sqrt{\lambda_n} x$ оператора L_0 (1.25), (1.26) равен

$$v_n = \frac{1}{i\sqrt{2l}} (\tilde{v}(-\sqrt{\lambda_n}) - \tilde{v}(\sqrt{\lambda_n}))$$

и $\lambda_n \in \mathbb{R}$, мы получим

$$R(\sqrt{\lambda_n}) = (-1)^n 2\alpha l |v_n|^2. \quad (3.5)$$

Отсюда вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 7. Пусть функция $R(z)$ имеет вид (1.18) и λ_n заданы формулами (1.31). Тогда число $\sqrt{\lambda_n}$ является корнем функции $R(z)$, $R(\sqrt{\lambda_n}) = 0$, в том и только в том случае, если коэффициент Фурье $v_n = \langle v, u_n \rangle$ функции $v(x)$ равен нулю, $v_n = 0$, где $\sqrt{2/l} \sin \sqrt{\lambda_n} x$ – собственная функция оператора L_0 (1.25), (1.26), отвечающая собственному значению λ_n .

Используя известное [7], [10], [11] разложение функции $\sin z$ в бесконечное произведение

$$\sin z = z \prod_n \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right),$$

запишем формулу (1.36) в следующем виде:

$$1 + \alpha \langle R_\lambda(L_0)v, v \rangle = -\frac{R(\sqrt{\lambda})}{4\lambda l \prod_n (1 - \lambda/\lambda_n)} = -\frac{f(\sqrt{\lambda})}{4l \prod_n (1 - \lambda/\lambda_n)}, \quad (3.6)$$

где $f(z)$ имеет вид (3.2). Учитывая лемму 7, разобьем бесконечное произведение (3.4) функции $f(\sqrt{\lambda})$ на две части, первая из которых отвечает случаю $a_n^2 = \lambda_n \in \sigma_0$ (2.5), а вторая соответствует случаю $a_n^2 \notin \sigma_0$. Левая часть равенства (3.6) совпадает с $Q(\lambda)$ (2.9), поэтому, используя леммы 4, 5, мы получим, что

$$Q(\lambda) = -\frac{f(0)}{4l} \frac{\prod_{\mu_n \in \sigma(L_1)} (1 - \lambda/\mu_n)}{\prod_{\lambda_n \in \sigma_1} (1 - \lambda/\lambda_n)}, \quad (3.7)$$

где σ_1 и $\sigma(L_1)$ имеют вид (2.5) и (2.11). Так как ряд в представлении (2.9) функции $Q(\lambda)$ сходится равномерно, то

$$\lim_{y \rightarrow \infty} Q(iy) = 1, \quad (3.8)$$

а учитывая (3.7), мы находим, что

$$f(0) = -4l \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\prod_{\lambda_n \in \sigma_1} (1 - iy/\lambda_n)}{\prod_{\mu_n \in \sigma(L_1)} (1 - iy/\mu_n)}. \quad (3.9)$$

В связи с тем, что $\sum_k |v_k|^2 = 1$ в силу (1.2),

$$\lim_{y \rightarrow \infty} iy(1 - Q(iy)) = \alpha. \quad (3.10)$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\sigma(L)$ (2.15) – спектр краевой задачи (1.1), причем для $v(x)$ справедливо (1.2), а λ_n имеют вид (1.31). Тогда для функции

$$Q(\lambda) = 1 + \alpha \langle R_0(\lambda)v, v \rangle, \quad (3.11)$$

где L_0 – дифференциальный оператор (1.25), (1.26), справедливо представление (3.7), где $f(0)$ выражается через спектр $\sigma(L)$ формулой (3.9), при этом справедлива асимптотика

$$Q(iy) = 1 - \frac{\alpha}{iy} + o\left(\frac{1}{y}\right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Собственные функции $u(x, z)$ краевой задачи (1.1) в случае $z = \lambda_n^0 \in \sigma_0$ (2.5) имеют вид

$$u(x, \lambda_n^0) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \sqrt{\lambda_n^0} x,$$

а когда $z = \mu_n \in \sigma(L_1)$ (2.11), то в силу (2.13)

$$u(x, \mu_n) = i \sqrt{\frac{\alpha}{2lQ'(\mu_p)}} \sum_{\lambda_k^1 \in \sigma_1} \frac{\tilde{v}(\sqrt{\lambda_k}) - \tilde{v}(-\sqrt{\lambda_k})}{\lambda_k^1 - \mu_p} \sin \sqrt{\lambda_k^1} x, \quad (3.12)$$

где $\lambda_k^1 \in \sigma_1$ (2.5), а функции $\tilde{v}(z)$ и $Q(\lambda)$ заданы соответственно формулами (1.8) и (3.7).

3.2. Выясним, какова степень неоднозначности восстановления функции $v(x)$ по спектру $\sigma(L)$ оператора L (1.3), (1.4).

Пусть задан спектр $\sigma(L)$ краевой задачи (1.1), тогда в силу теоремы 6 мы по $\sigma(L)$ можем однозначно построить функцию $Q(\lambda)$ (3.7) и найти параметр α (3.10). Затем, используя формулу (1.36), вычислим $R(z)$. Таким образом, функция $R(z)$ (1.18) строится по спектру $\sigma(L)$ единственным образом.

Запишем $R(z)$ (1.18) в следующем виде:

$$R(z) = -4z \sin zl - \alpha e^{izl} c(-z) - \alpha e^{-izl} c(z), \quad (3.13)$$

где $c(z)$ равна

$$c(z) = \tilde{v}(-z) \tilde{v}^*(z) - \phi(-z) - \phi^*(z). \quad (3.14)$$

Из (1.14) следует, что

$$c(z) + c(-z) = -(\tilde{v}(z) - \tilde{v}(-z))(\tilde{v}^*(z) - \tilde{v}^*(-z)). \quad (3.15)$$

Отметим, что функция $e^{-izl} c(z)$ является целой функцией экспоненциального типа, которая при $z = x$ принадлежит $L_{\mathbb{R}}^2$ в силу теоремы Планшереля [9]. Из (3.13) вытекает, что

$$\alpha 2 \operatorname{Re} e^{-ixl} c(x) = -R(x) - 4x \sin xl \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (3.16)$$

так как при вещественных x имеет место $\overline{c(x)} = c(-x)$.

Следующее утверждение принадлежит Е. Титчмаршу [8], [12].

ТЕОРЕМА 7. Пусть функция $F(x) \in L^2_{\mathbb{R}}$, тогда следующие утверждения эквивалентны.

1) Функция $F(x)$ голоморфно продолжаема в верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+$ и принадлежит классу Харди H^2_+ .

2) Справедлива первая формула Сохоцкого

$$\operatorname{Re} F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{Im} F(t)}{t - x} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3) Справедлива вторая формула Сохоцкого

$$\operatorname{Im} F(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{Re} F(t)}{t - x} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Соответствующие интегралы в пп. 2), 3) понимаются в смысле главного значения.

Соотношения пп. 2), 3) принято называть дисперсионными соотношениями [12]. Так как

$$e^{-ixl}c(x) = \operatorname{Re} e^{-ixl}c(x) + i \operatorname{Im} e^{-ixl}c(x),$$

то, учитывая (3.16) и п. 3) теоремы 7, мы получим, что

$$e^{-ixl}c(x) = -\frac{1}{2\alpha}(R(x) + 4x \sin l) - \frac{1}{2\pi\alpha i} \int_{\mathbb{R}} \frac{R(t) + 4t \sin tl}{t - x} dt. \quad (3.17)$$

Правая часть равенства (3.17) представляет собой граничное значение на вещественной оси $\mathbb{R}$ из верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ интеграла типа Коши [13], поэтому

$$e^{-izl}c(z) = -\frac{1}{2\pi\alpha i} \int_{\mathbb{R}} \frac{R(t) + 4t \sin tl}{t - z} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (3.18)$$

Итак, функция $c(z)$ (3.14) выражается через $R(z)$ (1.18) формулой

$$c(z) = \frac{ie^{izl}}{2\pi\alpha} \int_{\mathbb{R}} \frac{R(t) + 4t \sin tl}{t - z} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (3.19)$$

После замены $t \rightarrow -t$ под знаком интеграла в силу четности (1.19) $R(z)$ мы получим, что

$$c(-z) = -\frac{ie^{-izt}}{2\pi\alpha} \int_{\mathbb{R}} \frac{R(t) + 4t \sin tl}{t - z} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

следовательно,

$$c(z) + c(-z) = -\frac{\sin zl}{\pi\alpha} \int_{\mathbb{R}} \frac{R(t) + 4t \sin tl}{t - z} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Учитывая (3.15), мы будем иметь, что

$$\psi(v, z)\psi^*(v, z) = \frac{\sin zl}{4\pi\alpha} \int_{\mathbb{R}} \frac{R(t) + 4t \sin tl}{t - z} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad (3.20)$$

где

$$\psi(v, z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2i}(\tilde{v}(z) - \tilde{v}(-z)) = - \int_0^l \sin zx v(x) dx \quad (3.21)$$

в силу (1.8). Итак, по функции $R(z)$ (1.18) при помощи формулы (3.20) однозначно находится выражение $\psi(v, z)\psi^*(v, z)$. Пусть $\psi(v_1, z)$ имеет вид (3.21), где $v_1(x) \in L^2(0, l)$, и предположим, что

$$\psi(v, z)\psi^*(v, z) = \psi(v_1, z)\psi^*(v_1, z) \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (3.22)$$

Выясним, как связаны при этом функции $v(x)$ и $v_1(x)$. Функция $\psi(v, z)$ (3.21) является нечетной целой функцией из класса C (см. § 3), так как $\psi(v, x) \in L^2_{\mathbb{R}}$. Поэтому в силу теоремы 5 функция $\psi(v, z)$ имеет мультипликативное представление

$$\psi(v, z) = Dz^p \prod_k \left(1 - \frac{z^2}{a_k^2}\right), \quad (3.23)$$

где a_k – корни $\psi(v, z)$, $p = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $D \in \mathbb{C}$. Из равенства (3.22) следует, что если $\psi(v, a_k) = 0$, то либо $\psi(v_1, a_k) = 0$, либо $\psi^*(v_1, a_k) = 0$. Таким образом, при вещественных a_k нули функций $\psi(v, z)$ и $\psi(v_1, z)$ совпадают (и их кратности тоже), а при комплексных a_k первую серию образуют корни уравнения $\psi(v_1, a_k) = 0$, а вторую серию – комплексно сопряженные с a_k (случай $\psi^*(v_1, a_k) = 0$). Заметим, что константа D_1 в представлении (3.23) для $\psi(v_1, z)$ такова, что $|D_1| = |D|$ ввиду того, что $|\psi(v, x)| = |\psi(v_1, x)|$ (3.22) при $x \in \mathbb{R}$. Итак, функция $\psi(v_1, z)$ выражается через $\psi(v, z)$ (3.21) формулой

$$\psi(v_1, z) = \psi(v, z)\theta B(z), \quad (3.24)$$

где число θ равно по модулю единице, $|\theta| = 1$, а $B(z)$ является произведением множителей Бляшке,

$$B(z) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k \in M} \left(\frac{a_k}{\bar{a}_k}\right)^2 \frac{z^2 - \bar{a}_k^2}{z^2 - a_k^2}, \quad (3.25)$$

которое отвечает комплексно сопряженным корням $\bar{a}_k$ функции $\psi(v_1, z)$, $k \in M \subset \mathbb{N}$.

Используя представления (3.21) для функций $\psi(v, z)$ и $\psi(v_1, z)$, мы получим, что

$$\int_0^l \sin zx v_1(x) dx = \theta \int_0^l \sin zx v(x) dx B(z). \quad (3.26)$$

Откуда следует, что коэффициенты Фурье функций $v_1(x)$ и $v(x)$ в базисе $\sqrt{2/l} \sin \sqrt{\lambda_n} x$ собственных функций оператора L_0 (1.25), (1.26) удовлетворяют соотношениям

$$v_n^1 = v_n \theta B(\sqrt{\lambda_n}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.27)$$

где λ_n имеют вид (1.31). Очевидно, что $|v_n^1| = |v_n|$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что

$$v_1(x) = \int_0^l v(t) K(t, x) dt, \quad (3.28)$$

где

$$K(t, x) = \frac{2\theta}{l} \sum_n \sin \sqrt{\lambda_n} t \sin \sqrt{\lambda_n} x B(\sqrt{\lambda_n}). \quad (3.29)$$

Естественно возникает вопрос о сходимости ряда (3.29) и, соответственно, о сходимости интеграла в формуле (3.28). Нетрудно видеть, что последовательность функций

$$v_1(m, x) = \int_0^l v(t) \frac{2\theta}{l} \sum_{n=1}^m \sin \sqrt{\lambda_n} t \sin \sqrt{\lambda_n} x B(\sqrt{\lambda_n}) dt, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (3.30)$$

фундаментальна в $L^2(0, l)$, так как

$$\|v_1(m+p, x) - v_1(m, x)\|^2 = \sum_{n=m+1}^{m+p} |v_n|^2$$

в силу сходимости ряда $\sum_n |v_k|^2 < \infty$. Поэтому последовательность $v_1(m, x)$ (3.30) сходится в метрике пространства $L^2(0, l)$ к некоторой функции $v_1(x)$, которую мы будем представлять в виде (3.28).

ТЕОРЕМА 8 (единственности). Пусть на конечном отрезке $[0, l]$ заданы две краевые задачи (1.1), порождаемые операторами L_1 и L_2 вида (1.3), (1.4), которым отвечают функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$, удовлетворяющие условию (1.2), и соответственно параметры $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Тогда если спектры краевых задач, задаваемых L_1 и L_2 , совпадают, $\sigma(L_1) = \sigma(L_2)$, то совпадают числа $\alpha_1 = \alpha_2$, а функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ связаны соотношением

$$v_2(x) = \int_0^l v_1(t) K(t, x) dt, \quad (3.31)$$

где $K(t, x)$ имеет вид (3.29), $|\theta| = 1$, а $B(z)$ – произведение множителей Бляшке (3.25), составленное по подмножеству $\{a_k\}_{k \in M}$ нулей целой функции $\psi(v_1, z)$ (3.21), при этом λ_n заданы формулами (1.31). Сходимость интеграла (3.31) имеет место в метрике пространства $L^2(0, l)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Если функция $v(x)$ вещественна, то при $x \in \mathbb{R}$ равенство (3.22) означает, что $\psi^2(v, x) = \psi^2(v_1, x)$. Так как $\psi(v, z)$ и $\psi(v_1, z)$ – целые функции, то из последнего равенства следует, что $\psi(v_1, z) = \pm \psi(v, z)$ и, значит, $v_1(x) = \pm v(x)$. Таким образом, в случае вещественности $v(x)$, мы по спектру $\sigma(L)$ краевой задачи (1.1) функцию $v(x)$ восстанавливаем с точностью до знака.

§ 4. Восстановление $v(x)$ по двум спектрам. Описание множества $\sigma(L)$

4.1. В этом пункте мы приведем способ “нахождения” функции $v(x)$ по двум спектрам краевой задачи (1.1).

Как следует из рассмотрений п. 3.2, зная спектр оператора L (1.3), (1.4) краевой задачи (1.1), мы однозначным образом можем построить функцию

$R(z)$ (3.7), (3.9), а затем, используя формулу (3.20), единственным способом вычислить выражение $\psi(v, z)\psi^*(v, z)$, где $\psi(v, z)$ имеет вид (3.21).

Рассмотрим вторую краевую задачу (1.1), порождаемую оператором L_1 вида (1.3), (1.4), причем параметр α у L_1 такой же, как и у L , а функция $v_1(x)$ равна

$$v_1(x) = v(x) + x. \quad (4.1)$$

Аналогично предыдущему, мы по спектру $\sigma(L_1)$ данного оператора L_1 можем найти $\psi(v_1, z)\psi^*(v_1, z)$. Легко видеть, что

$$\psi(v_1, z) = \psi(v, z) + \frac{\sin zl - zl \cos zl}{z^2}. \quad (4.2)$$

Так как

$$\begin{aligned} \psi(v_1, z)\psi^*(v_1, z) &= \psi(v, z)\psi^*(v, z) + \frac{\sin zl - zl \cos zl}{z^2} [\psi(v, z) + \psi^*(v, z)] \\ &\quad + \left(\frac{\sin zl - zl \cos zl}{z^2} \right)^2, \end{aligned}$$

то при вещественных $z = x \in \mathbb{R}$, зная $\psi(v, x)\psi^*(v, x)$ и $\psi(v_1, x)\psi^*(v_1, x)$, можно вычислить $|\psi(v, x)|$ и $\operatorname{Re} \psi(v, x)$. Отсюда следует, что мы по $|\psi(v, x)|$ и $\operatorname{Re} \psi(v, x)$ можем с точностью до знака найти мнимую часть $\pm \operatorname{Im} \psi(v, x)$ функции $\psi(v, x)$. Следовательно, мы находим $\psi(v, x)$ либо $\overline{\psi(v, x)}$. Применяя обратное синус-преобразование Фурье к функции $\psi(v, x)$ (3.21), получим $v(x)$ либо $\overline{v(x)}$. Данное утверждение вполне естественно в силу замечания 2.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\sigma(L)$ и $\sigma(L_1)$ – спектры краевых задач (1.1), порождаемых операторами L и L_1 (1.3), (1.4) соответственно, причем $\alpha = \alpha_1$, а функции $v(x)$ и $v_1(x)$ удовлетворяют соотношению (4.1). Тогда по двум спектрам $\sigma(L)$ и $\sigma(L_1)$ функция $v(x)$ восстанавливается с точностью до комплексного сопряжения.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Функцию $v_1(x)$ (4.1) можно взять равной $v_1(x) = v(x) + q(x)$, где $q(x)$ – известная вещественная (или чисто мнимая) функция из $L^2(0, l)$.

4.2. Займемся описанием тех подмножеств σ из $\mathbb{R}$, которые являются спектрами операторов L (1.3), (1.4), порождающих краевые задачи (1.1).

Обозначим через $\sigma(L_0)$ следующее множество из $\mathbb{R}$:

$$\sigma(L_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad (4.3)$$

и пусть σ_1 является подмножеством $\sigma(L_0)$,

$$\sigma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{ \lambda_n^1 \in \sigma(L_0) \}, \quad (4.4)$$

где числа λ_n^1 занумерованы в порядке возрастания, причем случай $\sigma_1 = \sigma(L_0)$ не исключается. Обозначим через σ_0 дополнение к σ_1 (4.4) в $\sigma(L_0)$ (4.3),

$$\sigma_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(L_0) \setminus \sigma_1 = \{ \lambda_n^0 \in \sigma(L_0) \}. \quad (4.5)$$

Рассмотрим множество точек

$$\sigma(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu_k \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{N}\}, \quad (4.6)$$

перемежающихся с σ_1 (4.4), занумерованных в порядке возрастания, при этом $\mu_k \neq \mu_s$ при $k \neq s$ и $\mu_1 \neq 0$ ($\sigma(\mu) \cap \sigma_1 = \emptyset$). Относительно $\sigma(\mu)$ будем полагать, что выполнено

УСЛОВИЕ 1. Пересечение $\sigma(\mu) \cap \sigma_0$ состоит не более чем из конечного числа элементов.

Образует бесконечное произведение

$$b_{\sigma_1}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\lambda_n^1 \in \sigma_1} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n^1}\right), \quad (4.7)$$

которое, очевидно, сходится в любом круге $C_R = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < R\}$ в силу вида λ_n . Аналогичным образом, для множества $\sigma(\mu)$ (4.6) также составим бесконечное произведение

$$b_{\sigma(\mu)}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\mu_k \in \sigma(\mu)} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_k}\right), \quad (4.8)$$

которое также сходится по аналогичным причинам.

Зададим мероморфную функцию

$$Q(\lambda) = k \frac{b_{\sigma(\mu)}(\lambda)}{b_{\sigma_1}(\lambda)}, \quad (4.9)$$

где $k \in \mathbb{R}$. Легко видеть, что вычет функции $Q(\lambda)$ (4.9) в точке $\lambda = \lambda_n^1$ равен

$$C_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n^1} (\lambda_n^1 - \lambda) Q(\lambda) = k \lambda_n^1 \frac{b_{\sigma(\mu)}(\lambda_n^1)}{\prod_{s \neq n} (1 - \lambda_n^1 / \lambda_s^1)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.10)$$

ЛЕММА 8. Все числа C_n (4.10) имеют один и тот же знак, $\text{sign } C_n = \text{sign } C_1$ для любого n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим тот случай, когда

$$\lambda_1^1 < \mu_1 < \lambda_2^1 < \mu_2 < \lambda_3^1 < \dots.$$

Запишем правую часть равенства (4.10) в виде

$$C_n = k \lambda_n^1 \frac{\prod_{\mu_k < \lambda_n^1} (1 - \lambda_n^1 / \mu_k) \prod_{\mu_k > \lambda_n^1} (1 - \lambda_n^1 / \mu_k)}{\prod_{s < n} (1 - \lambda_n^1 / \lambda_s^1) \prod_{s > n} (1 - \lambda_n^1 / \lambda_s^1)}.$$

Отсюда следует, что знак числа C_n определяется выражением

$$k \frac{\prod_{\mu_k < \lambda_n^1} (1 - \lambda_n^1 / \mu_k)}{\prod_{s < n} (1 - \lambda_n^1 / \lambda_s^1)} = k \frac{\prod_{\mu_k < \lambda_n^1} (\lambda_n^1 / \mu_k - 1) (-1)^{n-1}}{\prod_{s < n} (\lambda_n^1 / \lambda_s^1 - 1) (-1)^{n-1}},$$

и, значит, знак C_n не зависит от n , т.е. $\text{sign } C_n = \text{sign } C_1$.

Аналогичным образом, если

$$\mu_1 < \lambda_1^1 < \mu_2 < \lambda_2^1 < \mu_3 < \dots,$$

то нетрудно показать, что $\text{sign } C_n = \text{sign } C_1$.

В связи с тем что в прямой задаче имеет место (3.8), мы наложим на множество $\sigma(\mu)$ (4.6) следующее требование.

УСЛОВИЕ 2. Множество точек $\sigma(\mu)$ (4.6) таково, что существует конечный предел

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{b_{\sigma_1}(iy)}{b_{\sigma(\mu)}(iy)} = d \neq 0, \quad (4.11)$$

где $b_{\sigma_1}(\lambda)$ и $b_{\sigma(\mu)}(\lambda)$ имеют вид (4.7) и (4.8).

Как известно [10], [11], сходимость бесконечного произведения (4.7) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{\lambda_n^1 \in \sigma_1} \ln \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n^1} \right),$$

конечно, эта функция мероморфна при надлежащем выборе ветвей. Поэтому выражение (4.11) будет иметь конечный предел тогда и только тогда, когда будет сходиться ряд

$$\sum_n \ln \frac{1 + y/(i\lambda_n^1)}{1 + y/(i\mu_n)} \quad (4.12)$$

при $y \rightarrow \infty$. Сходимость ряда (4.12) в бесконечно удаленной точке эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_n \ln \frac{1 + 1/(iy\lambda_n^1)}{1 + 1/(iy)\mu_n} \quad (4.13)$$

в окрестности нуля. Так как

$$\frac{1 + 1/(iy\lambda_n^1)}{1 + 1/(iy)\mu_n} = 1 + \frac{\mu_n - \lambda_n^1}{\lambda_n^1} \frac{1}{1 + iy\mu_n},$$

то ряд (4.13) можно записать в следующем виде:

$$\sum_n \ln \left(1 + \frac{\mu_n - \lambda_n^1}{\lambda_n^1} \frac{1}{1 + iy\mu_n} \right). \quad (4.14)$$

Учитывая, что существование предела (4.11) соответствует сходимости ряда (4.14) при $y = 0$, мы получим

$$\sum_n \ln \left(1 + \frac{\mu_n - \lambda_n^1}{\lambda_n^1} \right) < \infty.$$

ЛЕММА 9. *Сходимость ряда*

$$\sum_n \ln \frac{\mu_n}{\lambda_n^1} < \infty \quad (4.15)$$

эквивалентна существованию ненулевого конечного предела (4.11), причем

$$d = \prod_n \frac{\mu_n}{\lambda_n^1}. \quad (4.16)$$

Пусть d (4.16) совпадает с числом k из (4.9), тогда c_n (4.10) будут равны

$$c_n = \prod_k \frac{\mu_k}{\lambda_k^1} \lambda_n^1 \frac{\prod_s (1 - \lambda_n^1 / \mu_s)}{\prod_{s \neq n} (1 - \lambda_n^1 / \lambda_s^1)} = (\mu_n - \lambda_n^1) \prod_{s \neq n} \left(\frac{\mu_s - \lambda_n^1}{\lambda_s^1 - \lambda_n^1} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.17)$$

Так как в представлении функции $Q(\lambda)$ (2.9) числа v_n таковы, что $\sum_n |v_n|^2 = 1$, то естественным является следующее требование.

УСЛОВИЕ 3. Предположим, что сходится ряд

$$\sum_n (\mu_n - \lambda_n^1) \prod_{s \neq n} \left(\frac{\mu_s - \lambda_n^1}{\lambda_s^1 - \lambda_n^1} \right) < \infty. \quad (4.18)$$

Достаточные условия сходимости ряда (4.18) состоят в следующем.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Если выполняются условия

1) сходится ряд $\sum_n (\mu_n - \lambda_n^1) < \infty$,

2) величины $\prod_{s \neq n} ((\mu_s - \lambda_n^1) / (\lambda_s^1 - \lambda_n^1))$ равномерно (по n) ограничены, то ряд (4.18) сходится.

Данное утверждение следует из знакопостоянства (в силу перемежаемости) числа $\mu_n - \lambda_n^1$ при всех n .

При выполнении условия 3 мы можем задать число α ,

$$\alpha^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n (\mu_n - \lambda_n^1) \prod_{s \neq n} \left(\frac{\mu_s - \lambda_n^1}{\lambda_s^1 - \lambda_n^1} \right), \quad (4.19)$$

тогда числа

$$|v_n|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_n}{\alpha} \quad (4.20)$$

будут положительны в силу леммы 8 и, кроме того,

$$\sum_n |v_n|^2 = 1. \quad (4.21)$$

Зададим мероморфную функцию

$$F(\lambda) = 1 + \alpha \sum_n \frac{|v_n|^2}{\lambda_n^1 - \lambda}, \quad (4.22)$$

где α имеет вид (4.19), а $|v_n|^2$ — (4.20). Рассмотрим разность двух функций $Q(\lambda)$ (4.9) и $F(\lambda)$ (4.22)

$$G(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} Q(\lambda) - F(\lambda). \quad (4.23)$$

Очевидно, что функция $G(\lambda)$ (4.23) является целой, причем

$$\lim_{y \rightarrow \infty} G(iy) = 0 \quad (4.24)$$

в силу условия 2 (4.11) и выбора $k = d$. Так как $G(\lambda)$ (4.24) ограничена на бесконечности, то, учитывая (4.25), мы получим, что $G(\lambda) = 0$. Таким образом, $Q(\lambda) = F(\lambda)$, где $F(\lambda)$ имеет вид (4.22). Теперь мы можем задать функцию

$$v(x) = \sum_n v_n u_n(x), \quad (4.25)$$

где v_n находятся (неоднозначно) из (4.20), а $u_n(x) = \sqrt{2/l} \sin \sqrt{\lambda_n} x$ (λ_n имеют вид (4.3)). Итак, нам известны параметр α (4.19) и функция $v(x)$ (4.25) из $L^2_{(0,l)}$, которые определяют оператор L (1.3), (1.4) краевой задачи (1.1).

ТЕОРЕМА 10. Пусть задано счетное множество точек σ на вещественной оси $\mathbb{R}$ такое, что $\sigma = \sigma_0 \cup \sigma(\mu)$, где $\sigma_0 \subset \sigma(L_0)$ (4.3), а $\sigma(\mu)$ (4.5) состоит из попарно различных точек μ_k ($\mu_1 \neq 0$), $k \in \mathbb{N}$, занумерованных в порядке возрастания, перемежающихся с $\lambda_n^1 \in \sigma_1 = \sigma(L_0) \setminus \sigma_0$, причем $\sigma_1 \cap \sigma(\mu) = \emptyset$.

Для того чтобы σ было спектром краевой задачи (1.1), необходимо и достаточно, чтобы:

- а) $\sigma(\mu) \cap \sigma_0$ состояло не более чем из конечного числа элементов;
- б) сходились ряды

$$\sum_n \ln \frac{\mu_n}{\lambda_n^1} < \infty, \quad \sum_n (\mu_n - \lambda_n^1) \prod_{s \neq n} \left(\frac{\mu_s - \lambda_n^1}{\lambda_s^1 - \lambda_n} \right) < \infty.$$

Используя рассуждения §§ 2, 3, нетрудно показать, что точки спектра $\{\mu_k\}$ оператора L будут удовлетворять условиям а) и б) теоремы 10.

Список литературы

- [1] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1970; англ. пер.: B. M. Levitan, I. S. Sargsjan, *Introduction to spectral theory: selfadjoint ordinary differential operators*, Translations of Mathematical Monographs, **39**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.
- [2] Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма–Лиувилля*, Наука, М., 1984; англ. пер.: B. M. Levitan, *Inverse Sturm–Liouville problems*, VNU Science Press, Utrecht, 1987.
- [3] Э. Ч. Титчмарш, *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка*, т. I, ИЛ, М., 1960; пер. с англ.: E. C. Titchmarsh, *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations*, v. I, Clarendon Press, Oxford, 1946.
- [4] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977.
- [5] К. Шадан, П. Сабатье, *Обратные задачи в квантовой теории рассеяния*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: K. Chadani, P. C. Sabatier, *Inverse problems in quantum scattering theory*, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1977.
- [6] В. Хейне, М. Коэн, Д. Уэйр, *Теория псевдопотенциала*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: V. Heine, M. L. Cohen, D. Weaire, *Solid state physics*, Academic Press, New York, 1970.
- [7] В. Я. Левин, *Lectures on entire functions*, Transl. Math. Monogr., **150**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [8] Э. Ч. Титчмарш, *Введение в теорию интегралов Фурье*, ОГИЗ, М.–Л., 1948; пер. с англ.: E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Clarendon Press, Oxford, 1937.
- [9] Н. И. Ахиезер, *Лекции об интегральных преобразованиях*, Изд-во Харьк. ун-та, Харьков, 1984; англ. пер.: N. I. Akhiezer, *Lectures on integral transforms*, Transl. Math. Monogr., **70**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

- [10] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, М., 1973.
- [11] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, Наука, М., 1969; фр. пер.: B. V. Shabat, *Introduction à l'analyse complexe*, Mir, Moscow, 1990.
- [12] Х. М. Нуссенцвейг, *Причинность и дисперсионные соотношения*, Мир, М., 1976; пер. с англ.: H. M. Nussenzweig, *Causality and dispersion relations*, Academic Press, Hardcover, 1970.
- [13] Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, 3-е изд., Наука, М., 1977; англ. пер. 2-го изд.: F. D. Gakhov, *Boundary value problems*, Pergamon, London–Paris–Frankfurt; Addison-Wesley, Reading, MA, 1966.

В. А. Золотарёв (V. A. Zolotarev)

Физико-технический институт низких температур

им. Б. И. Веркина НАН Украины, г. Харьков;

Харьковский национальный университет

им. В. Н. Каразина

E-mail: vazolotarev@gmail.com;

Vladimir.A.Zolotarev@univer.kharkov.ua

Поступила в редакцию

09.09.2011 и 19.04.2012