Общероссийский математический портал

В. М. Миклюков, Изотермические координаты на поверхностях с особенностями,
Матем. сб., 2004, том 195, номер 1, 69–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm793>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:58:57

УДК 514.752.44+514.772

В. М. Миклюков

Изотермические координаты на поверхностях с особенностями

В работе доказывается существование изотермических координат на нерегулярных поверхностях специальных классов. Исследуются свойства гладкости изотермических представлений.

Библиография: 28 названий.

§ 1. Основная теорема

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область, и пусть $\mathcal{S}$ – двумерная поверхность в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 3$, заданная посредством непрерывной вектор-функции

$$y = f(x) = (f_1(x_1, x_2), \dots, f_m(x_1, x_2)): D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

реализующей гомеоморфное отображение области D на множество $f(D)$ с метрикой (и, тем самым, топологией), индуцированной из $\mathbb{R}^m$.

Ниже, если не оговорено противное, мы предполагаем, что отображение f имеет полный дифференциал df почти всюду в D , причем почти всюду в D выполнено

$$\text{rank}(df) = 2. \quad (2)$$

Символом $f'(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) \right)$ мы обозначаем производную f в точке $x \in D$. Пользуясь стандартными обозначениями

$$E = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|^2, \quad F = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\rangle, \quad G = \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|^2,$$

определяем метрику в области D с элементом длины

$$ds^2 = E dx_1^2 + 2F dx_1 dx_2 + G dx_2^2$$

и измеримыми коэффициентами E , F и G .

Условие (2) равносильно тому, что $EG - F^2 > 0$ почти всюду в D .

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS (грант № 10170).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ А. Пусть $\mathcal{S}$ – поверхность, заданная над областью $D \subset \mathbb{R}^2$ посредством вектор-функции (1), подчиненной условию (2). Переменные (x_1, x_2) называются *изотермическими координатами на поверхности $\mathcal{S}$* , если

$$E(x) = G(x), \quad F(x) = 0 \quad \text{почти всюду в } D. \quad (3)$$

В случае, когда (x_1, x_2) – изотермические координаты на поверхности $\mathcal{S}$, мы имеем

$$ds^2 = \lambda^2(x)(dx_1^2 + dx_2^2), \quad \lambda^2(x) = E(x) = G(x).$$

Первое из условий (3) означает, что растяжения f вдоль линий $x_i = \text{const}$, $i = 1, 2$, совпадают в точках, где df существует. Второе условие влечет взаимную ортогональность образов этих линий в соответствующих точках $y = f(x)$. Так что в каждой точке $x \in D$, где существует полный дифференциал df и одновременно выполняются соотношения (2) и (3), отображение $f: D \rightarrow \mathcal{S}$ конформно (сохраняет углы между кривыми).

Нам потребуется также понятие $W^{1,2}$ -мажорируемой функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ В. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область. Будем говорить, что *функция $P: D \rightarrow \mathbb{R}$ является $W^{1,2}$ -мажорируемой в D* , если найдется функция $K \in W^{1,2}(D)$ такая, что

$$P(x) \leq K(x) \quad \text{для почти всех } x \in D. \quad (4)$$

Простейшие примеры $W^{1,2}$ -мажорируемых функций доставляют ограниченные функции. Пусть $P: D \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная ограниченная функция, определенная в области D конечной площади. Здесь мы можем положить $K = \sup_{x \in D} P(x)$. Ясно, что $K \in W^{1,2}(D)$ и соотношение (4) выполнено всюду в D .

В общем случае объем класса $W^{1,2}$ -мажорируемых функций не вполне понятен. Обсуждение вопроса см. в конце статьи в § 6.

Пусть D – односвязная область в $\mathbb{R}^2$ и $\mathcal{S}$ – поверхность, заданная над D посредством вектор-функции (1), удовлетворяющей условию (2). Пусть $x = (x_1, x_2) \in D$ – точка, где вектор-функция f имеет полный дифференциал и выполняется (2). Предположение (2) влечет, что $df \neq 0$ в этой точке, метрика ds^2 невырождена и бесконечно малый круг в метрике ds^2 с центром в x является бесконечно малым эллипсом в евклидовой метрике. Обозначим через $p(x) \geq 1$ и $0 \leq \theta(x) < \pi$ характеристики этого эллипса, т.е. отношение большей оси эллипса к меньшей и угол между большей осью и направлением $\vec{0x_1}$.

Легко видеть, что

$$p(x) = \frac{E(x) + G(x)}{2\sqrt{E(x)G(x) - F^2(x)}} + \left(\frac{(E(x) + G(x))^2}{4(E(x)G(x) - F^2(x))} - 1 \right)^{1/2}.$$

Характеристика θ определена в каждой точке, где $p > 1$.

Фиксируем числовую последовательность $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ со следующими свойствами: $Q_n \geq 1$ для всех $n = 1, 2, \dots$ и $Q_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Для произвольного $n = 1, 2, \dots$ полагаем

$$p_n(x) = \begin{cases} p(x) & \text{при } p(x) \leq Q_n; \\ 1 & \text{при } p(x) > Q_n. \end{cases}$$

Согласно известным результатам теории квазиконформных отображений (см., например, [1; теорема 8]) существует квазиконформное отображение $\xi = w_n(x)$ области D на подходящую область $\Delta_n \subset \mathbb{R}^2$ с характеристиками, совпадающими с (p_n, θ) почти всюду в D . Эта область Δ_n может совпадать с $\mathbb{R}^2$, если $D = \mathbb{R}^2$, или быть произвольной односвязной собственной подобластью $\mathbb{R}^2$.

Здесь и ниже символом $B(a, r)$ будем обозначать круг радиуса $r > 0$ с центром в точке $a \in \mathbb{R}^2$, символом $S(a, r)$ – его границу.

Зафиксируем точки $x_0, x_1 \in D$. Посредством вспомогательных конформных преобразований в плоскости переменной $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ добиваемся того, чтобы области Δ_n являлись кругами $B_n = B(0, R_n)$, где $1 < R_n < \infty$, а отображения w_n обладали свойствами:

$$w_n(x_0) = (0, 0), \quad w_n(x_1) = (1, 0), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Последовательность отображений $F_n = f \circ w_n^{-1}: B_n \rightarrow \mathbb{R}^m$, где $w_n: D \rightarrow B_n$ удовлетворяют (5), назовем *канонической последовательностью представлений* поверхности $\mathcal{S}$, соответствующей последовательности $\{Q_n\}$.

Фиксируем произвольно последовательность канонических представлений $F_n: B_n \rightarrow \mathbb{R}^m$ поверхности $\mathcal{S}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ С. Будем говорить, что последовательность $\{F_n\}$ *сходится локально равномерно к каноническому гомеоморфизму* $F: B(0, R) \rightarrow \mathbb{R}^m$, если

- (i) области B_n сходятся при $n \rightarrow \infty$ к области $B = B(0, R)$ как к ядру относительно точки $\xi = 0$ (другими словами, существует $R = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$, $1 \leq R \leq \infty$);
- (ii) последовательность $\{F_n\}$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к отображению $F: B(0, R) \rightarrow \mathbb{R}^m$ равномерно на всякой подобласти $U \Subset B(0, R)$;
- (iii) последовательность обратных отображений $F_n^{-1}: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^2$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к отображению $F^{-1}: \mathcal{S} \rightarrow B(0, R)$ равномерно на всякой подобласти $\mathcal{S}_1 \Subset \mathcal{S}$.

Центральный результат настоящей статьи доставляет следующая теорема существования.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{S}$ – двумерная поверхность, заданная вектор-функцией (1) над односвязной ограниченной областью $D \subset \mathbb{R}^2$ и удовлетворяющая условию (2). Предположим, что функция P , определяемая соотношением

$$P(x) = \frac{E(x) + G(x)}{\sqrt{E(x)G(x) - F^2(x)}}, \quad (6)$$

является $W^{1,2}$ -мажорируемой в области D .

Тогда на $\mathcal{S}$ существуют изотермические координаты $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, вводимые каноническим гомеоморфизмом $y = F(\xi): B(0, R) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S}$, предельным

для канонической последовательности представлений $F_n(\xi): B(0, R_n) \rightarrow \mathcal{S}$ поверхности $\mathcal{S}$, соответствующей произвольной, наперед заданной числовой последовательности $\{Q_n\}$. При этом существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = R$, $1 < R < \infty$, и последовательность $\{F_n\}$ локально равномерно в круге $B = B(0, R)$ сходится к $F(\xi)$.

Канонический гомеоморфизм $F: B \rightarrow \mathcal{S}$ является единственным.

В процессе доказательства теоремы 1 получены также вполне конкретные двусторонние оценки радиуса R через расстояние $|x_1 - x_0|$, интеграл

$$\int_D K(x) dx_1 dx_2$$

и точную нижнюю грань диаметров дуг с концами на ∂D , отделяющих точку x_1 от точки x_0 (неравенства (24) и (27) в §5).

Дифференциальные свойства канонического гомеоморфизма $F: B(0, R) \rightarrow \mathbb{R}^m$ а также обратного к нему определяются свойствами f и f^{-1} и изучаются отдельно. Частично данная взаимосвязь будет описана далее в §2 в теореме 2.

В §3 мы приводим некоторые утверждения о существовании изотермических координат для негладких непараметрических поверхностей в $\mathbb{R}^m$.

Параграфы 4, 5 посвящены доказательствам основных результатов.

В §6 приводятся некоторые замечания о $W^{1,2}$ -мажорируемых функциях.

Частично результаты статьи докладывались на научных семинарах механико-математического факультета Московского государственного университета (руководители – И. Х. Сабитов и А. Т. Фоменко). Автор благодарен руководителям и участникам этих семинаров за конструктивную критику.

§2. Свойства канонического гомеоморфизма

Напомним некоторые необходимые сведения о $W^{1,2}$ -функциях. Пусть D – область в $\mathbb{R}^2$. Функция $f \in L^p(D)$, $p \geq 1$, принадлежит классу $W^{1,p}(D)$, если f абсолютно непрерывна на почти всех вертикальных и горизонтальных сечениях D , а ее частные производные принадлежат классу $L^p(D)$; функция $f \in W_{\text{loc}}^{1,p}(D)$, если $f \in W^{1,p}(D_1)$ на всяком открытом подмножестве $D_1 \Subset D$ (см., например, [2; гл. 2, 5.6]).

Отметим также (см. [3]), что функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет полный дифференциал почти всюду в D , если $f \in W_{\text{loc}}^{1,p}(D)$ при $p > 2$ или $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}(D)$ и монотонна в смысле Лебега, т.е. $\text{osc}(D_1, f) \leq \text{osc}(\partial D_1, f)$ для всякой подобласти $D_1 \Subset D$. Здесь и ниже $\text{osc}(E, \varphi)$ означает колебание функции φ на множестве E .

Пусть $\mathcal{S}$ – произвольная поверхность вида (1). Так как метрика на $f(D)$ индуцирована из $\mathbb{R}^m$, то на $\mathcal{S}$ определена 2-мерная мера Хаусдорфа $\mathcal{H}^2(E)$, $E \subset f(D)$. Если $\mathcal{S}_1 \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{S}_2 \subset \mathbb{R}^m$ суть двумерные поверхности и $h: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ – гомеоморфизм, то мы говорим, что отображение h обладает N -свойством Лузина, если для произвольного множества $E \subset \mathcal{S}_1$, $\mathcal{H}^2(E) = 0$, выполнено $\mathcal{H}^2(h(E)) = 0$ (см. [4; гл. VII, §6]).

Предположим, что $\mathcal{S}$ – поверхность вида (1), удовлетворяющая условию (2). Предположим также дополнительно, что вектор-функция $f \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$. Поскольку отображение $f: D \rightarrow f(D)$ гомеоморфно, то для произвольного множества

$E \subset D$ выполнено

$$\mathcal{H}^2(f(E)) = \int_E \sqrt{EG - F^2} dx_1 dx_2 \quad (7)$$

(см. [5; теорема 12]).

Из (2) и (7) следует, что

$$\mathcal{H}^2(f(E)) = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } \mathcal{H}^2(E) = 0 \quad (8)$$

и отображения f, f^{-1} обладают N -свойством Лузина.

Так как f имеет почти всюду полный дифференциал, то в силу (8) почти всюду на $\mathcal{S}$ существует касательная плоскость $T_y(\mathcal{S})$. Таким образом, почти всюду на $\mathcal{S}$ мы можем определить градиент (связность) $\nabla_{\mathcal{S}}$.

Действительно, пусть $\phi: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция и $y \in \mathcal{S}$ – фиксированная точка, в которой касательная плоскость T_y существует. Следуя стандартной схеме введения связности на поверхности, продолжим ϕ в некоторую окрестность точки y в $\mathbb{R}^m$. Символом $\tilde{\phi}$ обозначим новую функцию. По определению полагаем

$$\nabla_{\mathcal{S}}\phi(y) = (\bar{\nabla}\tilde{\phi}(y))^T.$$

Здесь $\bar{\nabla} = \nabla_{\mathbb{R}^m}$ – стандартное дифференцирование в $\mathbb{R}^m$, символ u^T означает ортогональную проекцию вектора u на касательную плоскость $T_y(\mathcal{S})$.

Пусть $U \Subset \mathcal{S}$ – ограниченное открытое множество. Символом $W^{1,p}(U)$, $p \geq 1$, мы обозначаем множество всевозможных функций $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}$, обладающих следующим свойством: для произвольной точки $x \in U$ найдутся окрестность $V \subset \mathbb{R}^m$ и последовательность C^1 -функций $\phi_k: V \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что сужения $\tilde{\phi}_k = \phi_k|_{V \cap U}$ равномерно сходятся к ϕ , причем

$$\sup_{k \geq 1} \int_{V \cap U} |\nabla_{\mathcal{S}} \tilde{\phi}_k|^p d\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^2 \leq q < \infty$$

для некоторого $q = \text{const} < \infty$. Символом $W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathcal{S})$ обозначаем множество функций $\phi: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, принадлежащих классу $W^{1,p}(U)$ на всяком открытом подмножестве $U \Subset \mathcal{S}$.

В соответствии с теоремой 1 канонический гомеоморфизм $F: B(0, R) \rightarrow \mathcal{S}$ дифференцируем почти всюду в области $B(0, R)$. Если вектор-функция $f \in C^k(D)$, $k \geq 1$, то отображение F определяет изотермические координаты класса C^k на поверхности $\mathcal{S}$ и является конформным отображением плоской области D на поверхность $\mathcal{S}$, понимаемым в традиционном смысле.

С другой стороны, конформные отображения нерегулярных поверхностей изучены лишь в весьма специальных случаях. Х. А. Шварцем показано, что всякий тетраэдр и куб могут быть отображены конформно на сферу [6; гл. VII]. Относительно конформных отображений общих многогранных поверхностей как примере отображений общего объекта – многообразий ограниченной кривизны – см. [7], а также [8], [9]. Обобщенная формула Кристоффеля–Шварца для кусочно-конформных изоморфизмов и близкие вопросы рассматривались в [10], [11].

В рассматриваемом в работе случае $W^{1,p}$ -поверхностей мы вправе говорить только лишь о конформности в точках дифференцируемости отображения f или

о конформности отображения $f: D \rightarrow \mathcal{S}$ почти всюду. Что именно следует понимать под конформным отображением поверхности “в целом”, здесь не вполне ясно — определение конформного отображения нерегулярной поверхности встречается с существенными трудностями, связанными, в частности, с хорошо известной в теории плоских отображений проблемой устранимости особых множеств. Как и в плоском случае, мы можем исследовать здесь различные классы отображений, конформных вне множества сингулярностей и обладающих тем либо иным свойством “в целом” (см., например, [12]–[15] и др.).

Формулируемое ниже утверждение устанавливает некоторые связи между свойствами вектор-функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ и свойствами канонического гомеоморфизма F .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{S}$ — поверхность, заданная вектор-функцией (1) над односвязной ограниченной областью $D \subset \mathbb{R}^2$ и подчиненная условию (2). Предположим, что функция P , определяемая соотношением (6), является $W^{1,2}$ -мажорируемой в D . Тогда

- (i) канонический гомеоморфизм $F: B(0, R) \rightarrow \mathcal{S}$ (и обратный к нему $F^{-1}: \mathcal{S} \rightarrow B(0, R)$) обладает N -свойством Лузина тогда и только тогда, когда $f: D \rightarrow \mathcal{S}$ (соответственно $f^{-1}: \mathcal{S} \rightarrow D$) обладает N -свойством;
- (ii) если $f \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$, то канонический гомеоморфизм $F: B(0, R) \rightarrow \mathcal{S}$ принадлежит классу $W_{\text{loc}}^{1,1}(B(0, R))$;
- (iii) если $f^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathcal{S})$ для некоторого $2 \leq \alpha \leq \infty$ и существует β , $1/\alpha + 1/\beta = 1/2$, такое, что

$$\int_{D_1} (EG - F^2)^{\beta/2} dx_1 dx_2 < \infty \text{ для всякой подобласти } D_1 \Subset D, \quad (9)$$

то обратное отображение $F^{-1}: \mathcal{S} \rightarrow B(0, R)$ принадлежит классу $W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathcal{S})$.

§ 3. Непараметрические поверхности

Доказательства сформулированных утверждений будут даны ниже. Отметим предварительно некоторые их следствия для непараметрических поверхностей.

Пусть D — односвязная ограниченная подобласть $\mathbb{R}^2$, и пусть $\mathcal{S}$ — двумерная поверхность в $\mathbb{R}^m$, задаваемая системой функций

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= x_2, \\ y_3 &= g_1(x_1, x_2), \\ &\dots\dots\dots \\ y_m &= g_{m-2}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (10)$$

Система (10) – специальный случай (1). Здесь мы имеем

$$\begin{aligned} E(x) &= 1 + \sum_{i=1}^{m-2} \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(x) \right|^2, \\ F(x) &= \sum_{i=1}^{m-2} \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(x) \frac{\partial g_i}{\partial x_2}(x), \\ G(x) &= 1 + \sum_{i=1}^{m-2} \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_2}(x) \right|^2. \end{aligned}$$

Далее находим

$$\begin{aligned} E(x)G(x) - F^2(x) &= 1 + \sum_{i=1}^{m-2} |\nabla g_i(x)|^2 + \sum_{i=1}^{m-2} \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(x) \right|^2 \sum_{i=1}^{m-2} \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_2}(x) \right|^2 - \left(\sum_{i=1}^{m-2} \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(x) \frac{\partial g_i}{\partial x_2}(x) \right)^2 \\ &\geq 1 + \sum_{i=1}^{m-2} |\nabla g_i(x)|^2. \end{aligned}$$

Предположим, что функции g_i , $i = 1, \dots, m-2$, суть липшицевы в D . Тогда существует постоянная $0 < M < \infty$ такая, что

$$|\nabla g| = \left(\sum_{i=1}^{m-2} |\nabla g_i(x)|^2 \right)^{1/2} \leq M \text{ почти всюду в } D.$$

Для функции P , определяемой равенством (6), почти всюду в D выполнено

$$P(x) \leq \left(2 + \sum_{i=1}^{m-2} |\nabla g_i(x)|^2 \right)^{1/2}. \quad (11)$$

Тем самым P ограничена и обладает свойством (4).

Формулируемые ниже утверждения о существовании изотермических координат на непараметрических поверхностях в $\mathbb{R}^m$ являются простыми комбинациями теорем 1 и 2.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – односвязная ограниченная область. Если непараметрическая поверхность (10) липшицева, то существуют изотермические координаты $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, задаваемые некоторым каноническим гомеоморфизмом $y = F(\xi): B(0, R) \rightarrow \mathcal{S}$.

При этом круг $B(0, R)$ имеет радиус $1 < R < \infty$, а отображения $F, F^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,2}$ и обладают N -свойством Лузина.

Канонический гомеоморфизм F единственен.

Для поверхностей класса $W^{l,p}$, где $l \geq 3$ и $p > 2$, данное утверждение может быть получено из известных результатов Боярского и Векуа (см. [16; гл. 2, §6]). Близкое утверждение для липшицевых графиков принадлежит Ч.Б. Морри [17], а для локально липшицевых графиков легко следует из результатов Л. Берса [18], П.П. Белинского [1; теорема 9], О. Мартио и В.М. Миклюкова [19].

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\mathcal{S}$ – двумерная непараметрическая поверхность, заданная вектор-функцией (10) над односвязной ограниченной областью $D \subset \mathbb{R}^2$, где $g_i \in W^{1,2}(D)$, $i = 1, \dots, m-2$. Тогда если функция $|\nabla g|$ является $W^{1,2}$ -мажорируемой в D , то существуют изотермические координаты $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, определяемые некоторым каноническим гомеоморфизмом $y = F(\xi): B(0, R) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S}$.

При этом круг $B(0, R)$ имеет радиус $1 < R < \infty$, отображения F, F^{-1} обладают N -свойством Лузина и таковы, что $F \in W^{1,2}(B(0, R))$, $F^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathcal{S})$.

Канонический гомеоморфизм F единственен.

Если непараметрическая поверхность $\mathcal{S}$ задана над областью D посредством вектор-функции (10), где каждая из функций g_i , $i = 1, 2, \dots, m-2$, принадлежит классу $W^{2,2}(D)$, то, очевидно, функция $|\nabla g|$ является $W^{1,2}$ -мажорируемой. Так что на всякой двумерной непараметрической поверхности в $\mathbb{R}^m$ класса $W^{2,2}(D)$ можно ввести изотермические координаты.

Мы проиллюстрируем сказанное простым примером, показывающим применимость наших результатов к поверхностям, имеющим точки заострения. Рассмотрим график функции

$$y_3 = \int_0^r \ln^\varepsilon \frac{1}{s} ds, \quad r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \quad (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

При $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ эта функция принадлежит классу $W^{2,2}(B)$ в круге $B = B(0, 1)$. Ее график имеет точку заострения в начале координат $\mathbb{R}^3$.

Используя данную функцию, несложно сконструировать также и примеры поверхностей, удовлетворяющих условиям следствия 2 и имеющих достаточно массивные (в смысле хаусдорфовой меры) множества точек заострения.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Фиксируем произвольно канонический гомеоморфизм $F: B(0, R) \rightarrow \mathcal{S}$ и каноническую последовательность представлений $F_n: B_n \rightarrow \mathcal{S}$, $F_n = f \circ w_n^{-1}$, описываемых в определении С. Каждое из отображений $w_n: D \rightarrow B_n$ является Q_n -квазиконформным, и в силу ограниченности областей D и B_n прямое отображение w_n и обратное к нему w_n^{-1} принадлежат классам $W^{1,2}$ в соответствующих областях.

Здесь и ниже для произвольного отображения $u(x) = (u_1, u_2): D \rightarrow \mathbb{R}^2$ класса $W_{\text{loc}}^{1,1}(D)$ в каждой точке $x = (x_1, x_2) \in D$ дифференцируемости $u(x)$ полагаем

$$\Lambda(x, u) = |\nabla u_1(x)|^2 + |\nabla u_2(x)|^2.$$

Символом $J(x, u)$ обозначаем якобиан

$$J(x, u) = (u_1(x))'_{x_1} (u_2(x))'_{x_2} - (u_1(x))'_{x_2} (u_2(x))'_{x_1}.$$

Ключевую роль в доказательстве играет следующая априорная оценка интеграла Дирихле для Q_n -квазиконформных отображений $w_n: D \rightarrow \mathbb{R}^2$.

ЛЕММА 1. Пусть $U \Subset D$ – подобласть области D . Предположим, что функция $P(x)$, определяемая соотношением (6), является $W^{1,2}$ -мажорируемой в D так, что для некоторой функции $K \in W^{1,2}(D)$ почти всюду в D выполнено $P(x) \leq K(x)$.

Тогда справедлива оценка

$$\int_U \Lambda(x, w_n) dx_1 dx_2 \leq c_1 \int_D |w_n|^2 (K^2 + |\nabla K|^2) dx_1 dx_2, \quad (12)$$

где c_1 – постоянная, зависящая только от U и D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идея доказательства восходит к работе В. М. Миклюкова и Г. Д. Суворова [20]. Как будет видно из дальнейших рассуждений, мы можем предполагать, что каждое из квазиконформных отображений $w_n: D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $n = 1, 2, \dots$, принадлежит классу $C^2(D)$. Этого всегда можно добиться за счет подходящей аппроксимации этих отображений гладкими.

Пусть η , ζ и h суть C^2 -функции, определенные в области $V \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей. По формуле Грина мы имеем

$$\int_{\partial V} \eta \zeta dh = \int_V d(\eta \zeta) \wedge dh = \int_V \eta d\zeta \wedge dh + \int_V \zeta d\eta \wedge dh,$$

где символом “ $\wedge$ ” обозначено внешнее произведение дифференциальных 1-форм.

Если функция η обращается в нуль на границе ∂V , то мы приходим к следующей формуле “интегрирования по частям”:

$$\int_V \eta d\zeta \wedge dh = - \int_V \zeta d\eta \wedge dh. \quad (13)$$

Фиксируем теперь последовательность $\{K_l\}$, $l = 1, 2, \dots$, функций класса C^1 , обладающую свойством

$$\|K_l - K\|_{W^{1,2}(D)} \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Выберем произвольно неотрицательную C^1 -функцию $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем $\text{supp } \phi \subset D$ так, чтобы $\phi \equiv 1$ на U .

Положим в (13) в качестве функций $\eta = \phi^2 K_l$, $\zeta = u_{1n}$, $h = u_{2n}$ и области V – внутренность компакта $\text{supp } \phi$. Не умаляя общности, можно считать V связной областью с гладкой границей. По формуле интегрирования по частям (13) имеем

$$\begin{aligned} \int_V \phi^2 K_l J(x, w_n) dx_1 dx_2 &= - \int_V u_{1n} d(\phi^2 K_l) \wedge du_{2n} \\ &= -2 \int_V \phi u_{1n} K_l d\phi \wedge du_{2n} - \int_V \phi^2 u_{1n} dK_l \wedge du_{2n}. \end{aligned}$$

Таким образом, при всяком $l = 1, 2, \dots$ находим

$$\begin{aligned} \int_V \phi^2 K_l J(x, w_n) dx_1 dx_2 &= -2 \int_V \phi u_{1n} K_l (\phi'_{x_1}(u_{2n})'_{x_2} - \phi'_{x_2}(u_{2n})'_{x_1}) dx_1 dx_2 \\ &\quad - \int_V \phi^2 u_{1n} ((K_l)'_{x_1}(u_{2n})'_{x_2} - (K_l)'_{x_2}(u_{2n})'_{x_1}) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Это приводит в свою очередь к оценке

$$\begin{aligned} & \int_D \phi^2 K_l J(x, w_n) dx_1 dx_2 \\ & \leq 2 \int_D \phi |u_{1n}| |K_l| |\phi'_{x_1} (u_{2n})'_{x_2} - \phi'_{x_2} (u_{2n})'_{x_1}| dx_1 dx_2 \\ & \quad + \int_D \phi^2 |u_{1n}| |(K_l)'_{x_1} (u_{2n})'_{x_2} - (K_l)'_{x_2} (u_{2n})'_{x_1}| dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \int_D \phi^2 K_l J(x, w_n) dx_1 dx_2 & \leq 2 \int_D \phi |u_{1n}| |K_l| |\nabla \phi| |\nabla u_{2n}| dx_1 dx_2 \\ & \quad + \int_D \phi^2 |u_{1n}| |\nabla K_l| |\nabla u_{2n}| dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Полагая теперь $l \rightarrow \infty$ и пользуясь соотношением (14), мы получаем

$$\begin{aligned} \int_D \phi^2 K J(x, w_n) dx_1 dx_2 & \leq 2 \int_D \phi |u_{1n}| K |\nabla \phi| |\nabla u_{2n}| dx_1 dx_2 \\ & \quad + \int_D \phi^2 |u_{1n}| |\nabla K| |\nabla u_{2n}| dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Далее, мы замечаем, что из определения квазиконформности следует

$$\begin{aligned} |\nabla u_{1n}|^2 + |\nabla u_{2n}|^2 & = \left(p_n + \frac{1}{p_n} \right) J(x, w_n) \\ & \leq 2p_n J(x, w_n) \leq 2K(x) J(x, w_n). \end{aligned} \quad (16)$$

Объединяя (15) с “неравенством Коши с $\varepsilon > 0$ ”

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon^2}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} b^2,$$

мы находим

$$\begin{aligned} & \int_D \phi^2 (|\nabla u_{1n}|^2 + |\nabla u_{2n}|^2) dx_1 dx_2 \\ & \leq 2 \int_D \phi^2 K(x) J(x, w_n) dx_1 dx_2 \\ & \leq 4 \int_D \phi |u_{1n}| K |\nabla \phi| |\nabla u_{2n}| dx_1 dx_2 + 2 \int_D \phi^2 |u_{1n}| |\nabla K| |\nabla u_{2n}| dx_1 dx_2 \\ & \leq 3\varepsilon^2 \int_D \phi^2 |\nabla u_{2n}|^2 dx_1 dx_2 + \frac{2}{\varepsilon^2} \int_D |u_{1n}|^2 K^2 |\nabla \phi|^2 dx_1 dx_2 \\ & \quad + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_D \phi^2 |u_{1n}|^2 |\nabla K|^2 dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $3\varepsilon^2 < 1$. К примеру, $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_D \phi^2 (|\nabla u_{1n}|^2 + |\nabla u_{2n}|^2) dx_1 dx_2 \\ & \leq c_2 \left(\int_D |u_{1n}|^2 K^2 |\nabla \phi|^2 dx_1 dx_2 + \int_D \phi^2 |u_{1n}|^2 |\nabla K|^2 dx_1 dx_2 \right), \end{aligned}$$

где c_2 — абсолютная постоянная.

Поскольку $\phi \equiv 1$ на U , находим

$$\begin{aligned} & \int_U \Lambda(x, w_n) dx_1 dx_2 \\ & \leq c_2 \left(M_1(\phi) \int_D |w_n|^2 K^2 dx_1 dx_2 + M_2(\phi) \int_D |w_n|^2 |\nabla K|^2 dx_1 dx_2 \right). \end{aligned}$$

При этом постоянные

$$M_1(\phi) = \sup_{x \in D} |\nabla \phi(x)|^2, \quad M_2(\phi) = \sup_{x \in D} \phi^2(x)$$

могут быть сделаны зависимыми только от областей U и D . Данное замечание завершает доказательство леммы 1.

Нам потребуется также оценка интеграла Дирихле для обратных отображений $w_n^{-1}: B_n \rightarrow D$, выполняющаяся при каждом фиксированном $n = 1, 2, \dots$.

ЛЕММА 2. Пусть $U \subset D$ и $V \subset B_n$ — подобласти, причем $w_n(U) \supset V$. Если $p(x)$ является $W^{1,2}$ -мажорируемой в D , то

$$\int_V \Lambda(\xi, w_n^{-1}) d\xi_1 d\xi_2 \leq \int_U K(x) dx_1 dx_2. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО весьма просто. Напомним предварительно формулу замены переменных для $W^{1,2}$ -гомеоморфизмов $w_n: D \rightarrow B_n$ (см., например, [2; теорема 2.4]). Для произвольной измеримой по Лебегу в круге B_n функции $h(\xi)$ при всяком $n = 1, 2, \dots$ имеем

$$\int_{B_n} h(\xi) d\xi_1 d\xi_2 = \int_D h \circ w_n J(x, w_n) dx_1 dx_2. \quad (18)$$

Пусть $\xi \in B_n$ — точка дифференцируемости обратного отображения w_n^{-1} , где $dw_n^{-1}(\xi) \neq 0$. Бесконечно малый круг с центром в точке $w_n^{-1}(\xi)$ имеет своим прообразом при отображении dw_n^{-1} бесконечно малый эллипс. Обозначим через $p(\xi, w_n^{-1})$ отношение большей оси этого эллипса к меньшей. Если $\xi = w_n(x)$, то, очевидно,

$$p(\xi, w_n^{-1}) = p_n(x) \leq K(x). \quad (19)$$

Так как отображения w_n и w_n^{-1} являются квазиконформными, то они обладают N -свойством Лузина, а потому соотношения (19) выполняются для почти всех $x \in D$ и почти всех $\xi \in B_n$.

Пользуясь (16), имеем

$$\int_V \Lambda(\xi, w_n^{-1}) d\xi_1 d\xi_2 \leq 2 \int_V p(\xi, w_n^{-1}) J(\xi, w_n^{-1}) d\xi_1 d\xi_2.$$

На основании формулы замены переменных (18), учитывая (19), находим

$$\int_V p(\xi, w_n^{-1}) J(\xi, w_n^{-1}) d\xi_1 d\xi_2 = \int_{w_n^{-1}(V)} p_n(x) dx_1 dx_2.$$

Условие $w_n(U) \supset V$ совместно с соотношением (19) приводят к нужной оценке.

Вернемся к доказательству теоремы. В соответствии с п. (iii) определения С последовательность $F_n^{-1}: \mathcal{S} \rightarrow B_n$, $n = 1, 2, \dots$, сходится к гомеоморфизму $F^{-1}: \mathcal{S} \rightarrow B(0, R)$ равномерно на всякой подобласти $\mathcal{S}_1 \in \mathcal{S}$. Так как $F_n^{-1} = w_n \circ f^{-1}$, то последовательность Q_n -квазиконформных отображений $w_n = F_n^{-1} \circ f$ обладает свойствами (5) и сходится равномерно внутри D к гомеоморфизму $w: D \rightarrow B(0, R)$.

Зафиксируем подобласти U и D_1 области D так, чтобы $U \Subset D_1 \Subset D$. В силу вышесказанного

$$\sup_{x \in D_1} |w_n(x)| \leq C(D_1) \quad \text{для всех } n = 1, 2, \dots$$

с некоторой постоянной $C(D_1) < \infty$. Тем самым из неравенства (12) вытекает

$$\int_U \Lambda(x, w_n) dx_1 dx_2 \leq C_1(U, D) \int_{D_1} (K^2 + |\nabla K|^2) dx_1 dx_2,$$

где $C_1(U, D) = c_1 C^2(D_1)$ – постоянная.

Другими словами, последовательность $W^{1,2}$ -гомеоморфизмов w_n имеет равномерно ограниченные интегралы Дирихле по подобласти U . В силу замкнутости класса отображений с ограниченным интегралом Дирихле относительно равномерной сходимости (см., например, [21; гл. I, § 1, теорема 1]) заключаем, что предельное отображение $w: D \rightarrow B(0, R)$ принадлежит классу $W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$.

Предположим теперь, что вектор-функция $f^{-1}: \mathcal{S} \rightarrow D$ принадлежит классу $W_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathcal{S})$ для некоторого $2 \leq \alpha \leq \infty$. Тогда для произвольной подобласти $\mathcal{S}_1 \in \mathcal{S}$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{S}_1} \Lambda^{1/2}(y, F^{-1}) d\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^2 \\ & \leq \int_{\mathcal{S}_1} \Lambda^{1/2}(x, w) \Lambda^{1/2}(y, f^{-1}) d\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^2 \\ & = \int_U \Lambda^{1/2}(x, w) \Lambda^{1/2}(y, f^{-1}) \sqrt{EG - F^2} dx_1 dx_2 \\ & \leq \left(\int_U \Lambda(x, w) dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \left(\int_U \Lambda^{\alpha/2}(y, f^{-1}) \sqrt{EG - F^2} dx_1 dx_2 \right)^{1/\alpha} \\ & \quad \times \left(\int_U (EG - F^2)^{\beta/2} dx_1 dx_2 \right)^{1/\beta}. \end{aligned}$$

Здесь обозначено $U = f^{-1}(\mathcal{S}_1)$, причем ясно, что $U \Subset D$. Таким образом, предположение (9) влечет принадлежность F^{-1} классу $W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathcal{S})$, что доказывает утверждение (iii) теоремы.

Далее, как и выше, замечаем, что последовательность отображений $F_n: B_n \rightarrow \mathcal{S}$, $n = 1, 2, \dots$, сходится к гомеоморфизму $F: B(0, R) \rightarrow \mathcal{S}$ равномерно на всякой подобласти $\Delta' \Subset B(0, R)$. Так как $F_n = f \circ w_n^{-1}$, то последовательность Q_n -квазиконформных отображений $w_n^{-1} = f^{-1} \circ F_n$ сходится равномерно внутри ядра $B(0, R)$ к гомеоморфизму $w^{-1}: B(0, R) \rightarrow D$. Пользуясь оценкой (17) и замкнутостью класса отображений с равностепенно ограниченным интегралом Дирихле относительно равномерной сходимости, как и в предыдущем случае, выводим, что $w^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(B(0, R))$.

Таким образом, каждое из отображений w и w^{-1} принадлежит классу $W_{\text{loc}}^{1,2}$ в соответствующей области и, следовательно, обладает N -свойством Лузина (см., например, [22; теорема В]). Выполнение свойства (i) теоремы теперь очевидно.

Нам осталось доказать свойство (ii). Полагая $w(U) = \Delta'$, мы имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta'} \Lambda^{1/2}(\xi, F) d\xi_1 d\xi_2 \\ & \leq \int_{\Delta'} \Lambda^{1/2}(x, f) \Lambda^{1/2}(\xi, w^{-1}) d\xi_1 d\xi_2 \\ & \leq \left(\int_{\Delta'} \Lambda(x, f) J(\xi, w^{-1}) d\xi_1 d\xi_2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Delta'} \frac{\Lambda(\xi, w^{-1})}{J(\xi, w^{-1})} d\xi_1 d\xi_2 \right)^{1/2} \\ & \leq \left(\int_U \Lambda(x, f) dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Delta'} \frac{\Lambda(\xi, w^{-1})}{J(\xi, w^{-1})} d\xi_1 d\xi_2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались также формулой замены переменных (18), что возможно, поскольку $w^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(B(0, R))$ (см., например, [23; теорема 6.1]).

Заметим теперь, что

$$\frac{\Lambda(\xi, w^{-1})}{J(\xi, w^{-1})} \leq 2p(\xi, w^{-1})$$

и при $\xi = w(x)$ выполнено $p(\xi, w^{-1}) = p(x)$. Отсюда в силу леммы 1 заключаем, что

$$\begin{aligned} \int_{\Delta'} \frac{\Lambda(\xi, w^{-1})}{J(\xi, w^{-1})} d\xi_1 d\xi_2 & \leq 2 \int_U p(x) J(x, w) dx_1 dx_2 \\ & \leq 2 \int_U \Lambda(x, w) dx_1 dx_2 < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, $F \in W_{\text{loc}}^{1,1}(B(0, R))$. Теорема доказана полностью.

§ 5. Доказательство теоремы 1

Пусть $\xi_0 \in \mathbb{R}^2$ — точка, $0 < t' < t'' < \infty$ — пара фиксированных чисел. Обозначим через

$$S(\xi_0, r) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi - \xi_0| = r\}$$

окружность с центром ξ_0 и радиусом $t' < r < t''$.

Пусть V – область в $\mathbb{R}^2$. Для произвольного r , $t' < r < t''$, пусть $S_V(\xi_0, r)$ – какая-либо из компонент связности множества $S(\xi_0, r) \cap V$. При этом мы предполагаем, что данные компоненты связности выбраны таким образом, что семейство дуг $\{S_V(\xi_0, r)\}$ замечает при $t' < r < t''$ некоторое связное подмножество

$$K_V(\xi_0, t', t'') = \bigcup_{t' < r < t''} S_V(\xi_0, r)$$

области V .

Нам будет необходим принцип длины и площади (см. [21; ч. I, гл. III, § 6]).

ЛЕММА 3. Пусть $g: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ – вектор-функция класса $W^{1,2}(V)$. Справедлива оценка

$$\int_{t'}^{t''} \text{osc}^2(g, S_V(\xi_0, r)) \frac{dr}{r} \leq c_3 I(g), \quad (20)$$

где c_3 – абсолютная постоянная и

$$I(g) = \int_{K_V} \Lambda^2(\xi, w_n^{-1}) d\xi_1 d\xi_2, \quad K_V = K_V(\xi_0, t', t'').$$

Пусть $\{F_n: B_n \rightarrow \mathcal{S}\}$ – произвольная последовательность канонических представлений поверхности $\mathcal{S}$, соответствующая последовательности $\{Q_n\}$, $n = 1, 2, \dots$. Пусть $F_n = f \circ w_n^{-1}$, где $w_n: D \rightarrow B_n$ суть Q_n -квазиконформные отображения, нормированные условиями (5). Здесь $B_n = B(0, R_n)$ и $1 < R_n \leq \infty$. Покажем сначала, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} R_n = R < \infty. \quad (21)$$

Предположим, что соотношение (21) не выполнено. Выберем в лемме 3 точку $\xi = 0$, числа $t' = 1$, $t'' = R_n > 1$ и $g = w_n^{-1}$. Неравенство (20) влечет

$$\inf_{1 < r < R_n} \text{osc}(w_n^{-1}, S(0, r)) \leq c_3^{1/2} I^{1/2}(w_n^{-1}) \ln^{-1/2} R_n.$$

Отображения w_n^{-1} гомеоморфны, а потому при всяком $r \in (t', t'')$ выполнено

$$\text{osc}(w_n^{-1}, B(0, r)) \leq \text{osc}(w_n^{-1}, S(0, r)).$$

Выбирая в лемме 2 подобласти $U = D$ и $V = B_n$, имеем

$$I(w_n^{-1}) \leq \int_D K(x) dx_1 dx_2 \equiv A(D). \quad (22)$$

В силу нормировки (5) $\forall r > 1$ точки x_0, x_1 лежат в областях $w_n^{-1}(B(0, r))$, а потому

$$|x_1 - x_0| \leq \text{osc}(w_n^{-1}, B(0, r)), \quad 1 < r < R_n.$$

Объединяя (20) и (22), находим

$$|x_1 - x_0| \leq c_3^{1/2} A(D) \ln^{-1/2} R_n. \quad (23)$$

При достаточно больших $R_n > 1$ неравенство (23) неверно. Тем самым соотношение (21) доказано. Более того, неравенство (23) может служить источником для нетривиальной оценки сверху радиусов R_n . А именно, из (23) следует, что

$$\ln R_n \leq \frac{c_3^2 A^2(D)}{|x_1 - x_0|^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, находим

$$\ln R \leq \frac{c_3 A(D)}{|x_1 - x_0|^2}. \quad (24)$$

Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n > 1. \quad (25)$$

Воспользуемся леммой 3. Зафиксируем $n = 1, 2, \dots$. Выберем $V = B(0, R_n)$ и $g = w_n^{-1}$. Рассмотрим семейство окружностей с центром в точке $a_n = (R_n, 0)$ и радиусами $t' < r < t''$, где $t' = R_n - 1$, $t'' = R_n$. В силу соотношения (20) можно записать

$$\inf_{t' < r < t''} \text{osc}(w_n^{-1}, S_V(a_n, r)) \leq c_3^{1/2} I^{1/2}(w_n^{-1}) \ln^{-1/2} \frac{R_n}{R_n - 1}.$$

Учитывая оценку (22), заключаем о существовании $\bar{r}$, $R_n - 1 < \bar{r} < R_n$, такого, что

$$\text{osc}(w_n^{-1}, S_V(a_n, \bar{r})) \leq c_3^{1/2} A^{1/2}(D) \ln^{-1/2} \frac{R_n}{R_n - 1}.$$

Таким образом, в области D найдется дуга

$$\gamma = w_n^{-1}(S_V(a_n, \bar{r})),$$

диаметр $d(\gamma)$ которой удовлетворяет неравенству

$$d(\gamma) \leq c_3^{1/2} A^{1/2}(D) \ln^{-1/2} \frac{R_n}{R_n - 1}. \quad (26)$$

Дуга γ отделяет в области D точку x_1 от точки x_0 и имеет своими концами точки на границе ∂D . Пусть $\delta(x_0, x_1)$ есть точная нижняя грань диаметров таких дуг γ . Тем самым из (26) вытекает, что

$$\ln \frac{R_n}{R_n - 1} \leq \frac{c_3 A(D)}{\delta^2(x_0, x_1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Переходя здесь к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\frac{\lambda}{\lambda - 1} \leq R, \quad \lambda = \exp \left\{ \frac{c_3 A(D)}{\delta^2(x_0, x_1)} \right\}. \quad (27)$$

Это доказывает (25).

Докажем равностепенную равномерную непрерывность внутри областей B_n отображений w_n^{-1} , $n = 1, 2, \dots$. Пусть $V \Subset B_n$ — подобласть круга B_n , содержащая точки $\xi = (0, 0)$ и $\xi = (1, 0)$. Выберем произвольную пару точек $\xi_1, \xi_2 \in V$ так, чтобы

$$|\xi_2 - \xi_1| < \min\{1, \text{dist}^2(V, \partial B_n)\}. \quad (28)$$

Рассмотрим семейство окружностей $\{S(\xi_1, r)\}$ с центром ξ_1 и радиусом $r \in (t', t'')$, где

$$t' = |\xi_2 - \xi_1|, \quad t'' = |\xi_2 - \xi_1|^{1/2}.$$

Оценка (20), примененная к вектор-функции w_n^{-1} и области $B_n = B(0, R_n)$, влечет

$$\inf_{t' < r < t''} \text{osc}(w_n^{-1}, S(\xi_1, r)) \leq c_3^{1/2} I^{1/2}(w_n^{-1}) \ln^{-1/2} \frac{1}{|\xi_2 - \xi_1|^{1/2}}.$$

Как и выше, пользуясь (22), отсюда легко заключаем о справедливости следующего утверждения.

ЛЕММА 4. *Если характеристика $P(x)$ является $W^{1,2}$ -мажорируемой в D , то для произвольной пары точек $\xi_1, \xi_2 \in V$, подчиненной условию (28), выполнено*

$$|w_n^{-1}(\xi_2) - w_n^{-1}(\xi_1)| \leq c_3^{1/2} A^{1/2}(D) \ln^{-1/2} \frac{1}{|\xi_2 - \xi_1|^{1/2}}. \quad (29)$$

Докажем равностепенную равномерную непрерывность внутри D отображений w_n , $n = 1, 2, \dots$. По наперед заданной подобласти $U \Subset D$ фиксируем подобласть D_1 так, чтобы

$$U \Subset D_1 \Subset D.$$

В силу (21) существует номер N такой, что для всех $n > N$ имеем $R_n \leq 2R$. Согласно лемме 1 для $n > N$ находим

$$\int_{D_1} \Lambda(x, w_n) dx_1 dx_2 \leq 2c_1 R \int_D (K^2 + |\nabla K|^2) dx_1 dx_2 \equiv B(D_1, D),$$

где $B(D_1, D)$ — постоянная, зависящая только от $\|K\|_{W^{1,2}(D)}$ и подобластей D_1, D .

Пусть $x_1, x_2 \in U$ — произвольная пара точек, для которой

$$|x_2 - x_1| \leq \min\{1, \text{dist}^2(U, \partial D_1)\}. \quad (30)$$

В точности так же, как и выше, устанавливается

ЛЕММА 5. *Предположим, что функция $P(x)$ является $W^{1,2}$ -мажорируемой в области D . Тогда если точки $x_1, x_2 \in U$ подчинены условию (30), то при всяком $n > N$ выполнено*

$$|w_n(x_2) - w_n(x_1)| \leq c_3^{1/2} B^{1/2}(D_1, D) \ln^{-1/2} \frac{1}{|x_2 - x_1|}. \quad (31)$$

Выберем подпоследовательность $\{R_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому пределу R , $1 < R < \infty$. Ясно, что соответствующая подпоследовательность кругов $\{B(0, R_{n_k})\}$ сходится к ядру $B(0, R)$ относительно точки $\xi = (0, 0)$ (определение сходимости к ядру и свойства ядра последовательности областей см., например, в [21; гл. II, §3]). Подпоследовательность отображений $F_{n_k} = f \circ w_{n_k}^{-1}: B(0, R_{n_k}) \rightarrow D$ будет являться канонической последовательностью представлений поверхности $\mathcal{S}$, соответствующей последовательности чисел Q_{n_k} .

Оценка (31) означает, что последовательность $\{w_{n_k}\}$ равномерно непрерывна на всяком компактном подмножестве области D . Посредством стандартного диагонального процесса мы можем выбрать подпоследовательность $\{w_{n'_k}\}$, сходящуюся локально равномерно к некоторому непрерывному отображению $w: D \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Соотношение (29) утверждает, что семейство $\{w_{n'_k}^{-1}\}$ обратных отображений равномерно непрерывно на любом компактном подмножестве круга $B(0, R)$, а потому предельное для $w_{n'_k}$ отображение w есть гомеоморфизм. Ясно, что w также удовлетворяет условиям нормировки (5). При этом в силу замкнутости класса $W^{1,2}$ -функций с ограниченным интегралом Дирихле, пользуясь (12) и (17), заключаем, что $w \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$ и $w^{-1} \in W^{1,2}(B(0, R))$.

ЛЕММА 6. Пусть $g_k(x): D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $k = 1, 2, \dots$, — последовательность Q_k -квазиконформных гомеоморфизмов с распределениями характеристик $(p_k(x), \theta_k(x))$, локально равномерно в области D сходящаяся к некоторому гомеоморфизму класса $W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$ с распределением характеристик $(p(x), \theta(x))$.

Если для всякой подобласти $U \Subset D$ существует такая постоянная $M(U)$, $0 < M(U) < \infty$, что

$$\int_U \Lambda(x, g_k) dx_1 dx_2 \leq M(U), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (32)$$

и почти всюду в D при $k \rightarrow \infty$ выполнено

$$(p_k(x), \theta_k(x)) \rightarrow (p_\infty(x), \theta_\infty(x)),$$

то $(p_\infty(x), \theta_\infty(x)) = (p(x), \theta(x))$ почти всюду в D .

Для доказательства см. [24; теорема 2] или [25; предложение 3.1].

Последовательность $W^{1,2}$ -гомеоморфизмов $w_{n'_k}(x)$ локально равномерно в D сходится при $n'_k \rightarrow \infty$ к гомеоморфизму $w(x): D \rightarrow B(0, R)$, обладает согласно лемме 1 свойством (32) и по построению удовлетворяет другим предположениям леммы 6. Таким образом, предельный гомеоморфизм $w(x): D \rightarrow B(0, R)$ имеет почти всюду в D характеристики $(p(x), \theta(x))$.

Нетрудно видеть, что вектор-функция $F = f \circ w^{-1}$ определяет изотермические координаты на поверхности $\mathcal{S}$. Действительно, вектор-функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируема почти всюду в D и удовлетворяет (2). Отображения w , w^{-1} дифференцируемы почти всюду в областях D и $B(0, R)$ соответственно, а также обладают N -свойством Лузина. Тем самым, очевидно, композиция $F = f \circ w^{-1}$ является

дифференцируемой почти везде и почти везде в $B(0, R)$ удовлетворяет (2). При этом почти в каждой точке ее дифференцируемости она преобразует бесконечно малые круги в $B(0, R)$ в бесконечно малые круги на поверхности $\mathcal{S}$. Это означает, что почти всюду в D вектор-функция F удовлетворяет (3).

Докажем единственность найденного изотермического представления поверхности $\mathcal{S}$. Предположим, что существуют два различных таких канонических гомеоморфизма F_1 и F_2 . Это означает, что существуют два различных квазиконформных отображения $g: D \rightarrow B(0, R')$ и $h: D \rightarrow B(0, R'')$, удовлетворяющих условиям (5) нормировки и имеющих одно и то же распределение характеристик (p, θ) . Мы можем записать

$$F_1 = f \circ g^{-1}: B(0, R') \rightarrow \mathcal{S}, \quad F_2 = f \circ h^{-1}: B(0, R'') \rightarrow \mathcal{S}.$$

Необходимо доказать, что отображение $\phi = F_1^{-1} \circ F_2$ является тождественным. Мы имеем

$$\phi = (g \circ f^{-1}) \circ (f \circ h^{-1}) = g \circ h^{-1}.$$

Так как g, h^{-1} — отображения классов $W_{\text{loc}}^{1,2}$, то $\phi \in W_{\text{loc}}^{1,1}(B(0, R''))$. С другой стороны, отображение ϕ почти всюду преобразует бесконечно малые круги в бесконечно малые круги. Тем самым данное отображение является отображением с ограниченным искажением и, следовательно, конформным в традиционном смысле этого слова (см. [26; теорема 1.1] или [27; разд. 5.3, следствие 5.3.1] и определение отображений с ограниченным искажением при минимальных аналитических предположениях — там же). Конформное преобразование ϕ отображает круг $B(0, R'')$ на круг $B(0, R')$, оставляя неподвижными точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$. Это возможно лишь тогда, когда $R' = R''$ и $\phi \equiv \xi$. То есть $\phi = F_1^{-1} \circ F_2$ есть тождественное преобразование, а $F_1 \equiv F_2$.

Единственность канонического гомеоморфизма $F = f \circ w^{-1}: B(0, R) \rightarrow \mathcal{S}$ влечет в свою очередь, что всякая подпоследовательность $\{F_{n_k}: B(0, R_{n_k}) \rightarrow D\}$ последовательности гомеоморфизмов $F_n = f \circ w_n^{-1}: B(0, R_n) \rightarrow D$ имеет своим пределом одно и то же отображение F . Это означает, в частности, что

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} R_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} R_n$$

и что последовательность областей B_n сходится к ядру $B = B(0, R)$. Теорема полностью доказана.

§6. Замечания о $W^{1,2}$ -мажорируемых функциях

Мы не имеем полного описания $W^{1,2}$ -мажорируемых функций. Мы отметим здесь только два их простых свойства, непосредственно вытекающих из теории функций с обобщенными соболевскими производными.

Непосредственно из определения функций класса $W^{1,2}$ следует, что *сужения $W^{1,2}$ -мажорируемых функций P на почти все горизонтальные и вертикальные сечения локально ограничены.*

Далее, предположим, что область D есть круг и функция $P(x)$, определяемая равенством (6), является $W^{1,2}$ -мажорируемой в D . Другими словами, существует функция $K(x) \in W^{1,2}(D)$ такая, что

$$P(x) \leq K(x) \quad \text{для почти всех } x \in D.$$

Обозначим через $L_1^2(\mathbb{R}^2)$ множество функций $\phi(x)$, представимых в виде бесслева потенциала

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^2} G_1(|x-y|)u(y) dy_1 dy_2,$$

где $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ — некоторая функция и $G_1(t)$ — бесселево ядро порядка 1 (см. [28; разд. 1.2.3]). Так как D — круг, то согласно [28; теорема 1.2.3] для всякой функции $\phi(x) \in W^{1,2}(D)$ существует функция $\phi^*(x) \in L_1^2(\mathbb{R}^2)$ такая, что почти всюду в круге $\phi^*(x) = \phi(x)$.

Таким образом, поскольку $K \in W^{1,2}(D)$, то найдется функция $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ такая, что

$$K(x) = \int_{\mathbb{R}^2} G_1(|x-y|)u(y) dy_1 dy_2 \quad \text{почти всюду в круге } D.$$

По теореме 6.2.1 [28] множество

$$\left\{x \in D : \lim_{\zeta \rightarrow x} K(\zeta) = \infty\right\}$$

имеет нулевую конформную емкость, а потому *множество*

$$P_\infty = \left\{x \in D : \lim_{\zeta \rightarrow x} P(\zeta) = \infty\right\}$$

также имеет нулевую емкость.

Легко видеть, что данное утверждение остается верным для $W^{1,2}$ -мажорируемых функций P , заданных в произвольной области $D \subset \mathbb{R}^2$, отличной от круга.

Тем самым множество P_∞ является достаточно редким для произвольной $W^{1,2}$ -мажорируемой функции $P: D \rightarrow \mathbb{R}$. Из равенства нулю емкости этого множества, в частности, следует, что α -мера Хаусдорфа множества P_∞ равна нулю для всякого $\alpha > 0$ (см. [2; § 5.3]).

Список литературы

1. *Белинский П. П.* Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск: Наука, 1974.
2. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.
3. *Gehring F. W., Lehto O.* On the total differentiability of functions of a complex variable // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Ser. A I. 1959. V. 272. P. 1–9.
4. *Сакс С.* Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.
5. *Hajlasz P.* Sobolev mappings, co-area formula and related topics // Труды по анализу и геометрии. Новосибирск: Изд-во Инст. матем., 2000. С. 227–254.
6. *Каратеодори К.* Конформное отображение. Современная математика. Книга пятая. М.–Л.: ОНТИ, Гостехтеориздат, 1934.

7. Решетняк Ю. Г. Двумерные многообразия ограниченной кривизны // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Т. 70. М.: ВИНТИ, 1989. С. 8–189.
8. Toro T. Surfaces with generalized second fundamental form in L^2 are Lipschitz manifolds // J. Differential Geom. 1994. V. 39. P. 65–101.
9. Müller S., Sverák V. On surfaces of finite total curvature // J. Differential Geom. 1995. V. 42. P. 229–258.
10. Грудский И. М. Построение внутренних координат на составных римановых поверхностях // Дифференциальные, интегральные уравнения и комплексный анализ. Элиста: Изд-во Калмыцкого ун-та, 1986. С. 30–45.
11. Грудский И. М. Формула Кристоффеля–Шварца для полиэдральных поверхностей // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307. № 1. С. 15–17.
12. Трохимчук Ю. Ю. Непрерывные отображения и условия моногенности. М.: ГИФМЛ, 1963.
13. Долженко Е. П. О “стирании” особенностей аналитических функций // УМН. 1963. Т. 18. № 4. С. 135–142.
14. Хавинсон С. Я. О стирании особенностей // Литовский матем. сб. 1963. Т. III. № 1. С. 271–287.
15. David G., Mattila P. Removable sets for Lipschitz harmonic functions in the plane // Revista Mat. Iberoamericana. 2000. V. 16. № 1. P. 137–215.
16. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: ГИФМЛ, 1959.
17. Morrey C. B. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1938. V. 43. P. 126–186.
18. Bers L. Uniformization by Beltrami equation // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 215–228.
19. Martio O., Miklyukov V. On existence and uniqueness of degenerate Beltrami equation. Reports of the Department of Mathematics, University of Helsinki // Preprint № 347. Helsinki: Univ. Helsinki, 2003.
20. Миклюков В. М., Суворов Г. Д. О существовании и единственности квазиконформных отображений с неограниченными характеристиками // Исследования по современной теории функций и ее применениям. Киев: Наукова Думка, 1972. С. 45–53.
21. Суворов Г. Д. Обобщенный “принцип длины и площади” в теории отображений. Киев: Наукова Думка, 1985.
22. Maly J. Sufficient conditions for change of variables in integral // Труды по анализу и геометрии. Новосибирск: Изд-во Инст. матем., 2000. С. 370–386.
23. Heinonen J., Koskela P. Sobolev mappings with integrable dilatations // Arch. Ration. Mech. Anal. 1993. V. 125. P. 81–97.
24. Кругликов В. И. О существовании и единственности отображений, квазиконформных в среднем // Метрические вопросы теории функций и отображений. Вып. IV. Киев: Наукова Думка, 1973. С. 123–147.
25. Gutlyanskii V., Martio O., Sugawa T., Vuorinen M. On the degenerate Beltrami equation. Reports of the Department of Mathematics, University of Helsinki // Preprint № 282. Helsinki: Univ. Helsinki, 2001.
26. Koskela P., Malý J. Mappings of finite distortion: The zero set of the Jacobian // Preprint № 241. Jyväskylä: Univ. Jyväskylä, 2001.
27. Iwaniec T., Martin G. Geometric function theory and nonlinear analysis. Oxford: Oxford Univ. Press, 2001.
28. Adams A. R., Hedberg L. I. Function spaces and potential theory. Berlin: Springer-Verlag, 1994.