Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Ильин, Оценки снизу для сумм собственных значений эллиптических операторов и систем, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 4, 103–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7931>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 13:51:05

УДК 517.984.56

А. А. Ильин

Оценки снизу для сумм собственных значений эллиптических операторов и систем

Для сумм собственных значений эллиптических операторов и систем с постоянными коэффициентами и условиями Дирихле получены двучленные оценки снизу типа Березина–Ли–Яу. Рассматриваются полигармонический оператор, система Стокса и ее обобщения, двумерная задача об изгибе пластины, а также оператор Клейна–Гордона.

Библиография: 32 названия.

Ключевые слова: неравенства Березина–Ли–Яу, оператор Стокса, полигармонический оператор, задача об изгибе пластины.

DOI: 10.4213/sm7931

§ 1. Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – произвольное открытое множество с конечным n -мерным объемом $|\Omega| < \infty$. Для дискретного спектра $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ задачи Дирихле для оператора Лапласа $-\Delta\varphi_k = \mu_k\varphi_k$, $\varphi_k|_{\partial\Omega} = 0$ в работе [1] получены следующие оценки снизу для сумм собственных значений:

$$\sum_{k=1}^m \mu_k \geq \frac{n}{n+2} \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n |\Omega|} \right)^{2/n} m^{1+2/n}. \quad (1.1)$$

Ввиду классической асимптотической формулы Вейля

$$\mu_k \sim \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n |\Omega|} \right)^{2/n} k^{2/n} \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

оценка (1.1) точная. В работе [2] была получена оценка для средних Рисса собственных значений

$$\sum_k (\Lambda - \mu_k)_+^\sigma \leq L_{\sigma,n}^{\text{cl}} |\Omega| \Lambda^{\sigma+n/2}, \quad (1.2)$$

где $\sigma \geq 1$, $\Lambda \geq 0$, $f_\pm = (|f| \pm f)/2$ и

$$L_{\sigma,n}^{\text{cl}} := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 - |\xi|^2)_+^\sigma d\xi = \frac{\Gamma(\sigma+1)}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(\sigma+n/2+1)},$$

а в [3] было показано, что оценки (1.1) и (1.2) (при $\sigma = 1$) эквивалентны и переходят в друг друга с помощью преобразования Лежандра. Поэтому оценки типа (1.1) принято называть оценками Березина–Ли–Яу.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 12-01-00203 и № 11-01-00339) и Министерства образования и науки РФ (соглашение № 8502).

Оценки (1.1) и (1.2) связаны с неравенствами Либа–Тирринга для отрицательного спектра оператора Шрёдингера

$$-\Delta + V,$$

где действительный потенциал V достаточно быстро убывает на бесконечности. А именно для отрицательных собственных значений $\mu_j \leq 0$ этого оператора справедлива оценка [4]

$$\sum_{\mu_i \leq 0} |\mu_i|^\gamma \leq L_{\gamma,n} \int V_-(x)^{\gamma+n/2} dx, \quad (1.3)$$

где для константы $L_{\gamma,n}$ всегда выполнено $L_{\gamma,n} \geq L_{\gamma,n}^{\text{cl}}$. Для всех n и $\gamma \geq 3/2$ в [5] получен точный результат $L_{\gamma,n} = L_{\gamma,n}^{\text{cl}}$, а для $1 \leq \gamma < 3/2$ наилучшая оценка константы $L_{\gamma,n}$ получена в [6]: $L_{\gamma,n} \leq R \cdot L_{\gamma,n}^{\text{cl}}$, $R = \pi/\sqrt{3} = 1.8138\dots$

Теперь оценку (1.2) (с константой $L_{\gamma,n}$ вместо $L_{\gamma,n}^{\text{cl}}$) можно вывести из оценки Либа–Тирринга для барьерного потенциала

$$V_\Lambda(x) = \begin{cases} -\Lambda, & x \in \Omega, \\ +\infty, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

Вывод (1.1) сводится к следующей задаче минимизации. Для ортонормированной системы собственных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ составим функцию $F(\xi)$:

$$F(\xi) = \sum_{k=1}^m |\hat{\varphi}_k(\xi)|^2, \quad \hat{\varphi}_k(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\Omega} \varphi_k(x) e^{-i\xi x} dx. \quad (1.4)$$

Тогда $F(\xi)$ удовлетворяет равномерной по m и ξ оценке [1]

$$F(\xi) \leq M := (2\pi)^{-n} |\Omega|. \quad (1.5)$$

Кроме того, в силу ортонормированности

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(\xi) d\xi = m.$$

Пользуясь возможностью продолжения нулем с сохранением нормы функции $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, имеем $\|\nabla \varphi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 \hat{\varphi}(\xi) d\xi$. Поэтому для интересующей нас суммы $\sum_{k=1}^m \mu_k$ выполняется

$$\sum_{k=1}^m \mu_k = \sum_{k=1}^m \|\nabla \varphi_k\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 F(\xi) d\xi \geq \Sigma_M(m),$$

где $\Sigma_M(m)$ – решение следующей задачи минимизации:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 F(\xi) d\xi \rightarrow \inf =: \Sigma_M(m) \quad \text{при условиях} \quad (1.6)$$

$$1) 0 \leq F(\xi) \leq M, \quad 2) \int_{\mathbb{R}^n} F(\xi) d\xi = m.$$

Ее решение в несколько иных терминах получено в [1]:

$$\Sigma_M(m) = \frac{n}{n+2} \left(\frac{1}{\omega_n M} \right)^{2/n} m^{1+2/n},$$

и дает оценку (1.1) при $M = (2\pi)^{-n}|\Omega|$.

В работе [7] были получены оценки Березина–Ли–Яу для собственных значений оператора Стокса

$$\begin{aligned} -\Delta v_k + \nabla p_k &= \lambda_k v_k, \\ \operatorname{div} v_k &= 0, \quad v_k|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned}$$

которые играют важную роль в теории аттракторов системы Навье–Стокса (см. [8]–[11] и цитированную там литературу). Собственные вектор-функции $\{v_k\}_{k=1}^\infty \in \{u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \operatorname{div} u = 0\}$ и ортонормированы в $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Основным моментом является доказательство равномерной оценки [7]

$$H(\xi) \leq M := (2\pi)^{-n}(n-1)|\Omega|$$

для соответствующей функции $H(\xi) = \sum_{k=1}^m |\widehat{v}_k(\xi)|^2$. Отсюда получаем

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \geq \Sigma_{M=(2\pi)^{-n}(n-1)|\Omega|}(m) = \frac{n}{n+2} \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n(n-1)|\Omega|} \right)^{2/n} m^{1+2/n}. \quad (1.7)$$

Коэффициент при $m^{1+2/n}$ точный ввиду асимптотической формулы ([12], [13], см. также § 4):

$$\lambda_k \sim \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n(n-1)|\Omega|} \right)^{2/n} k^{2/n} \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (1.8)$$

Несмотря на то что коэффициент при $m^{1+2/n}$ в (1.1) точный, эту оценку удалось улучшить за счет добавления в правой части слагаемого с меньшим ростом по m . Это было сделано в [14]. Там было сделано ключевое наблюдение, что функция $F(\xi)$ в (1.4) обладает дополнительным свойством регулярности:

$$|\nabla F(\xi)| \leq L := 2(2\pi)^{-n}(|\Omega|I)^{1/2}, \quad \text{где } I = \int_{\Omega} x^2 dx. \quad (1.9)$$

В дальнейшем будет считать, что область Ω такова, что $I < \infty$; разумеется, это всегда так, если Ω ограничена. Кроме того, конечно, I можно заменить на $I = \min_{a \in \mathbb{R}^n} \int_{\Omega} (x-a)^2 dx$.

Для естественным образом возникающей здесь задачи минимизации

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 F(\xi) d\xi \rightarrow \inf =: \Sigma_{M,L}(m)$$

при условиях

$$1) 0 \leq F(\xi) \leq M, \quad 2) \int_{\mathbb{R}^n} F(\xi) d\xi = m, \quad 3) |\nabla F(\xi)| \leq L,$$

в [14] получена оценка снизу, которая в наших обозначениях выглядит так:

$$\Sigma_{M,L}(m) \geq \frac{n}{n+2} \left(\frac{1}{\omega_n M} \right)^{2/n} m^{1+2/n} + \frac{1}{6(n+2)} \frac{M^2}{L^2} m. \quad (1.11)$$

Отсюда с учетом (1.5), (1.9) и следует основная оценка работы [14]:

$$\sum_{k=1}^m \mu_k \geq \frac{n}{n+2} \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n |\Omega|} \right)^{2/n} m^{1+2/n} + \frac{1}{24(n+2)} \frac{|\Omega|}{I} m. \quad (1.12)$$

В работе [15] было найдено точное решение задачи (1.10):

$$\Sigma_{M,L}(m) = \frac{n}{n+2} \left(\frac{1}{\omega_n M} \right)^{2/n} m^{1+2/n} + \frac{n}{12} \frac{M^2}{L^2} m + O(m^{1-2/n}), \quad (1.13)$$

где остаточный член можно оценить в явном виде. В двумерном случае $n = 2$ имеем точное решение

$$\Sigma_{M,L}(m) = \frac{1}{2\pi M} m^2 + \frac{M^2}{6L^2} m - \frac{\pi M^5}{90L^4}, \quad (1.14)$$

что дает следующие двучленные оценки для сумм собственных значений лапласиана Дирихле и оператора Стокса в двумерном случае:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \mu_k &\geq \frac{2\pi}{|\Omega|} m^2 + \frac{1}{24} \frac{119}{120} \frac{|\Omega|}{I} m, \\ \sum_{k=1}^m \lambda_k &\geq \frac{2\pi}{|\Omega|} m^2 + \frac{1}{48} \frac{239}{240} \frac{|\Omega|}{I} m. \end{aligned} \quad (1.15)$$

В настоящей работе рассматриваются эллиптические операторы и системы порядка γ с постоянными коэффициентами и условиями Дирихле. Соответствующая задача минимизации состоит в нахождении $\Sigma_{M,L}^\gamma(m)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^\gamma F(\xi) d\xi \rightarrow \inf =: \Sigma_{M,L}^\gamma(m) \\ \text{при условиях} \\ 1) 0 \leq F(\xi) \leq M, \quad 2) \int_{\mathbb{R}^n} F(\xi) d\xi = m, \quad 3) |\nabla F(\xi)| \leq L. \end{aligned} \quad (1.16)$$

В § 2 мы находим точное решение этой задачи и его асимптотическое разложение. Особенно простые формулы получаются в двумерном случае, и в дополнение к $\gamma = 2$ (1.14) имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_{M,L}^4(m) &= \frac{1}{3\pi^2 M^2} m^3 + \frac{M}{3\pi L^2} m^2 - \frac{\pi M^7}{7 \cdot 3^4 L^6}, \\ \Sigma_{M,L}^6(m) &= \frac{1}{4\pi^3 M^3} m^4 + \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{L^2} m^3 + \frac{1}{12\pi} \frac{M^3}{L^4} m^2 - \frac{1}{108} \frac{M^6}{L^6} m. \end{aligned} \quad (1.17)$$

В § 3 рассматриваются примеры эллиптических операторов и систем: полигармонический оператор, система Стокса и ее обобщения. Рассматривается также задача об изгибе пластины (buckling problem). В последнее время эта задача привлекает внимание с точки зрения получения универсальных (не зависящих от области) неравенств между собственными значениями [16]. В нашей работе доказано, что в двумерной односвязной области ее спектр совпадает со спектром задачи Стокса. Наконец, рассматривается псевдодифференциальный оператор первого порядка $\gamma = 1$ (оператор Клейна–Гордона). Для всех этих задач доказываются двучленные оценки для сумм собственных значений с точным коэффициентом при главном члене.

Сам подход работы [14], который развивается в настоящей работе, замечателен тем, что добавочный член в правой части оценок снизу получается без каких-либо дополнительных предположений относительно гладкости границы области Ω и, как уже отмечалось, $I < \infty$ для любой ограниченной Ω , см. (1.9). К сожалению, порядок по m добавочного слагаемого в правой части двучленных оценок неоптимален, и его улучшение связано с дополнительными предположениями о геометрических свойствах границы $\partial\Omega$. При определенных предположениях о геометрии границы оптимальные (с точностью до логарифмической поправки) неравенства Березина–Ли–Яу для сумм собственных значений лапласиана Дирихле в двумерном случае получены в [17], а в [18] получены оптимальные оценки для средних Рисса порядка $\sigma \geq 3/2$.

В заключение, в § 4 доказывается асимптотика спектра оператора Стокса. В литературе можно найти несколько работ, посвященных доказательству этой асимптотики. В заметке [13] разобран трехмерный случай, в [19] есть некоторые пробелы, как указывается в [20]. Также есть некоторые проблемы с доказательством работы [21]. Поэтому мы решили привести подробное доказательство, следуя работе [12], где разобран более общий случай, восполняя все детали доказательства применительно к случаю оператора Стокса. Еще раз подчеркнем, что здесь мы преследовали лишь методологические цели, желая получить доказательство асимптотики спектра оператора Стокса в наиболее замкнутом и подробном виде.

§ 2. Задача минимизации

Найдем для $m \geq 1$ решение $\Sigma_{M,L}^\gamma(m)$ задачи минимизации (1.16).

ТЕОРЕМА 1. *Решение задачи (1.16) дается следующей формулой:*

$$\Sigma_{M,L}^\gamma(m) = \frac{\sigma_n M^{n+1+\gamma}}{(n+\gamma)(n+1+\gamma)L^{n+\gamma}} ((t(m_*)+1)^{n+1+\gamma} - t(m_*)^{n+1+\gamma}), \quad (2.1)$$

где $t(m_*)$ – единственный положительный корень уравнения

$$(t+1)^{n+1} - t^{n+1} = m \frac{(n+1)L^n}{\omega_n M^{n+1}} =: m_*. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F^*(\xi)$ – симметрично невозрастающая перестановка функции $F(\xi)$, удовлетворяющей трем условиям в (1.16). Тогда (см., например, [22]) $F^*(\xi)$ также удовлетворяет трем условиям в (1.16) и, кроме того,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^\gamma F(\xi) d\xi \geq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^\gamma F^*(\xi) d\xi. \quad (2.3)$$

Действительно, полагая в неравенстве Харди–Литтлвуда [22], [23]

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(\xi) F(\xi) d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} G^*(\xi) F^*(\xi) d\xi \quad (2.4)$$

$G(\xi) = G^*(\xi) = (R^\gamma - |\xi|^\gamma)_+$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \leq R} |\xi|^\gamma F^*(\xi) d\xi &\leq \int_{|\xi| \leq R} |\xi|^\gamma F(\xi) d\xi \\ &+ R^\gamma \left(\int_{|\xi| \leq R} F^*(\xi) d\xi - \int_{|\xi| \leq R} F(\xi) d\xi \right) \leq \int_{|\xi| \leq R} |\xi|^\gamma F(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

откуда при $R \rightarrow \infty$ следует (2.3). Здесь мы также воспользовались неравенством $\int_{|\xi| \leq R} F^*(\xi) d\xi \geq \int_{|\xi| \leq R} F(\xi) d\xi$, которое следует из (2.4) при $G(\xi) = G^*(\xi) = \chi_{B(0,R)}(\xi)$.

Таким образом, получаем эквивалентную одномерную задачу минимизации

$$\sigma_n \int_0^\infty r^{n-1+\gamma} F(r) dr \rightarrow \inf =: \Sigma_{M,L}^\gamma(m) \quad \text{при условиях} \quad (2.5)$$

$$1) 0 \leq F(r) \leq M, \quad 2) \sigma_n \int_0^\infty r^{n-1} F(r) dr = m, \quad 3) -F'(r) \leq L.$$

Рис. 1. Экстремальная функция $\Phi_s(r)$ и подходящая функция $F(r)$

Рассмотрим кусочно линейную функцию $\Phi_s(r)$ (см. рис.1), которая, как будет показано, при надлежащем выборе параметра s является экстремальной:

$$\Phi_s(r) = \begin{cases} M & \text{при } 0 \leq r \leq s, \\ M - Lr, & \text{при } s \leq r \leq s + M/L, \\ 0, & \text{при } s + M/L \leq r. \end{cases} \quad (2.6)$$

Зафиксируем $s > 0$. Пусть $\beta \geq \alpha$. Тогда для любой невозрастающей абсолютно непрерывной функции F , удовлетворяющей

$$0 \leq F \leq M, \quad \int_0^\infty r^\alpha F(r) dr = \int_0^\infty r^\alpha \Phi_s(r) dr, \quad -F'(r) \leq L, \quad (2.7)$$

выполняется

$$\int_0^\infty r^\beta F(r) dr \geq \int_0^\infty r^\beta \Phi_s(r) dr. \quad (2.8)$$

Действительно, если F удовлетворяет (2.7) и в точке s выполняется $F(s) = \Phi_s(s)$ ($= M$), то тогда в силу монотонности и второго и третьего условий $F \equiv \Phi_s$. Поэтому для любой допустимой функции F такой, что $F \neq \Phi_s$ (и, стало быть, $F(r_0) < M = \Phi_s(r_0)$ для некоторого r_0 , $0 \leq r_0 < s$), график F пересекает график Φ_s справа от r_0 ровно в одной точке с r -координатой a , где $s < a < s + M/L$. Другими словами, $F(r) \leq \Phi_s(r)$ при $0 \leq r \leq a$ и $F(r) \geq \Phi_s(r)$ при $a \leq r < \infty$. Отсюда

$$\begin{aligned} \int_0^a r^\beta (\Phi_s(r) - F(r)) dr &\leq a^{\beta-\alpha} \int_0^a r^\alpha (\Phi_s(r) - F(r)) dr \\ &= a^{\beta-\alpha} \int_a^\infty r^\alpha (F(r) - \Phi_s(r)) dr \leq \int_a^\infty r^\beta (F(r) - \Phi_s(r)) dr, \end{aligned} \quad (2.9)$$

что и доказывает (2.8). Итак, осталось найти такое $s = s_*$, для которого выполняется

$$\sigma_n \int_0^\infty r^{n-1} \Phi_s(r) dr = m. \quad (2.10)$$

Тогда $\Phi_{s_*}(r)$ и будет экстремальной функцией в (2.5). Нахождение такого s обеспечивается следующей формулой, которая проверяется непосредственным вычислением. Для любого $\delta > -1$ выполняется

$$\int_0^\infty r^\delta \Phi_s(r) dr = \frac{M^{\delta+2}}{(\delta+1)(\delta+2)L^{\delta+1}} ((t+1)^{\delta+2} - t^{\delta+2}), \quad \text{где } t = s \frac{L}{M}. \quad (2.11)$$

Условие (2.10) тогда дает уравнение (2.2) для t (и s). Во всех приложениях при $m \geq 1$ правая часть (2.2) всегда больше 1. Левая часть (2.2) есть многочлен степени n с положительными коэффициентами, который монотонно возрастает от 1 до ∞ на $\mathbb{R}^+$. Поэтому уравнение (2.2) имеет единственный положительный корень $t = t(m_*) > 0$. Используя (2.11) для вычисления $\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^\gamma \Phi_s(\xi) d\xi$ на этот раз с $\delta = n - 1 + \gamma$, находим $\Sigma_{M,L}^\gamma(m)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $m \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} \Sigma_{M,L}^\gamma(m) &= \frac{n}{n+\gamma} \left(\frac{1}{\omega_n M} \right)^{\gamma/n} m^{1+\gamma/n} \\ &\quad + \frac{n\gamma}{24\omega_n^{(\gamma-2)/n}} \frac{M^{2+(2-\gamma)/n}}{L^2} m^{1+(\gamma-2)/n} + O(m^{1+(\gamma-4)/n}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала найдем единственный положительный корень уравнения (2.2), которое, заметим, не зависит от γ . При этом удобно перейти от t к η : $\eta = t + 1/2$. Тогда (2.2) дает

$$\eta^n + \frac{n(n-1)}{24} \eta^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1920} \eta^{n-4} + \dots = \frac{m_*}{n+1} =: a. \quad (2.13)$$

Отсюда

$$\eta(m_*) = a^{1/n} - \frac{n-1}{24} a^{-1/n} + \frac{(n-1)(n-3)(2n+1)}{5760} a^{-3/n} + O(a^{-5/n})$$

и после некоторых вычислений получаем

$$\begin{aligned} (t(m_*) + 1)^{n+\gamma+1} - t(m_*)^{n+\gamma+1} &= \left(\eta(m_*) + \frac{1}{2}\right)^{n+\gamma+1} - \left(\eta(m_*) - \frac{1}{2}\right)^{n+\gamma+1} \\ &= (n + \gamma + 1) \left(a^{1+\gamma/n} + \frac{(n + \gamma)\gamma}{24} a^{1+(\gamma-2)/n} + O(a^{1+(\gamma-4)/n}) \right), \end{aligned}$$

что вместе с (2.1) и дает (2.12).

СЛЕДСТВИЕ 2. В двумерном случае $n = 2$ при четном γ точное решение $\Sigma_{M,L}^\gamma(m)$ есть многочлен степени $1 + \gamma/2$. В частности, справедливы формулы (1.14), (1.17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (2.2) при $n = 2$ есть квадратное уравнение $(t + 1)^3 - t^3 = m_*$ и

$$t(m_*) = \sqrt{\frac{m_*}{3} - \frac{1}{12}} - \frac{1}{2}. \quad (2.14)$$

Поэтому для любого нечетного $n + 1 + \gamma = 3 + \gamma$ выражение

$$(t(m_*) + 1)^{3+\gamma} - t(m_*)^{3+\gamma} = \left(\sqrt{\frac{m_*}{3} - \frac{1}{12}} + \frac{1}{2}\right)^{3+\gamma} - \left(\sqrt{\frac{m_*}{3} - \frac{1}{12}} - \frac{1}{2}\right)^{3+\gamma}$$

в правой части (2.1) содержит только четные степени радикала. Формулы (1.17) получаются в результате соответствующих вычислений.

Задача минимизации без третьего условия в (1.16), а именно

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^\gamma F(\xi) d\xi \rightarrow \inf =: \Sigma_M^\gamma(m) \quad (2.15)$$

$$\text{при условиях } 1) 0 \leq F(\xi) \leq M, \quad 2) \int_{\mathbb{R}^n} F(\xi) d\xi = m,$$

решается совсем просто.

ТЕОРЕМА 2. Решение задачи (2.15) дается следующей формулой:

$$\Sigma_M^\gamma(m) = \frac{n}{n + \gamma} \left(\frac{1}{\omega_n M} \right)^{\gamma/n} m^{1+\gamma/n}. \quad (2.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $\gamma = 2$ содержится в [1], общий случай доказывается тем же методом. Для полноты изложения приведем доказательство [24], аналогичное теореме 1. Пусть $\Phi_*(\xi) = M \cdot \chi_{B(0,R)}(\xi)$, где $\chi_{B(0,R)}(\xi)$ — характеристическая функция шара $|\xi| \leq R$, а R выбрано так, что для $\Phi_*(\xi)$ выполнено второе условие в (2.15), т.е. $R = (m/(M\omega_n))^{1/n}$. Тогда для любой F , удовлетворяющей условиям в (2.15), аналогично (2.9) выполняется $\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^\gamma F(\xi) d\xi \geq$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^\gamma \Phi_*(\xi) d\xi. \text{ Действительно,}$$

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \leq R} |\xi|^\gamma (\Phi_*(\xi) - F(\xi)) d\xi &\leq R^\gamma \int_{|\xi| \leq R} (\Phi_*(\xi) - F(\xi)) d\xi \\ &= R^\gamma \int_{|\xi| \geq R} (F(\xi) - \Phi_*(\xi)) d\xi \leq \int_{|\xi| \geq R} |\xi|^\gamma (F(\xi) - \Phi_*(\xi)) d\xi, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\Phi_*(\xi)$ – экстремальная функция. Вычисляя на ней наш функционал, получаем (2.16).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Задача (1.16) по сравнению с (2.15) содержит дополнительное связанное с L условие, поэтому

$$\Sigma_{M,L}^\gamma(m) \geq \Sigma_M^\gamma(m). \quad (2.17)$$

§ 3. Примеры

Параметры M и L определяются свойствами преобразований Фурье ортонормированных семейств.

ЛЕММА 1. Пусть семейство скалярных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ ортонормировано в $L_2(\Omega)$. Тогда

$$F(\xi) := \sum_{k=1}^m |\widehat{\varphi}_k(\xi)|^2 \leq (2\pi)^{-n} |\Omega|. \quad (3.1)$$

Если семейство вектор-функций $\{u_k\}_{k=1}^m$ ортонормировано в $\mathbf{L}_2(\Omega)$, то

$$G(\xi) := \sum_{k=1}^m |\widehat{u}_k(\xi)|^2 \leq (2\pi)^{-n} n |\Omega|. \quad (3.2)$$

Если дополнительно $u_k \in H = \{u \in \mathbf{L}_2(\Omega), \operatorname{div} u = 0, u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\}$, то

$$H(\xi) := \sum_{k=1}^m |\widehat{u}_k(\xi)|^2 \leq (2\pi)^{-n} (n-1) |\Omega|. \quad (3.3)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} |\nabla F(\xi)| &\leq 2(2\pi)^{-n} (|\Omega|I)^{1/2}, & |\nabla G(\xi)| &\leq 2(2\pi)^{-n} n (|\Omega|I)^{1/2}, \\ |\nabla H(\xi)| &\leq 2(2\pi)^{-n} (n(n-1))^{1/2} (|\Omega|I)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\text{где } I = \int_{\Omega} x^2 dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (3.1) есть неравенство Бесселя для функции $f_\xi(x) = \chi_\Omega(x)(2\pi)^{-n/2}e^{-i\xi x}$ и ортонормированной системы $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$, поскольку $\widehat{\varphi}_k(\xi) = (f_\xi, \varphi_k)_{L_2(\Omega)}$ [1]:

$$F(\xi) = \sum_{k=1}^m |(f_\xi, \varphi_k)_{L_2(\Omega)}|^2 \leq \|f_\xi\|_{L_2(\Omega)}^2 = (2\pi)^{-n} |\Omega|.$$

Неравенства для вектор-функций, из которых наибольший интерес представляет (3.3), получены в [7]. Первое неравенство в (3.4) получено в [14], а второе и третье в [15].

Полигармонический оператор. В лемме 1 мы не накладывали никаких условий гладкости, кроме принадлежности $L_2(\Omega)$. Рассмотрим теперь ортонормированное в $L_2(\Omega)$ семейство скалярных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^m \in H_0^l(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^m \in H_0^{\gamma/2}(\Omega)$ и $\gamma > 0$ четное. Тогда

$$\sum_{j=1}^m \|(-\Delta)^{\gamma/4} \varphi_j\|^2 \geq \frac{n}{n+\gamma} \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n |\Omega|} \right)^{\gamma/n} m^{1+\gamma/n}, \quad (3.5)$$

где $(-\Delta)^{\gamma/2} \varphi = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^\gamma \widehat{\varphi}(\xi))$. Справедлива также двучленная асимптотическая оценка

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \|(-\Delta)^{\gamma/4} \varphi_j\|^2 &\geq \frac{n}{n+\gamma} \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n |\Omega|} \right)^{\gamma/n} m^{1+\gamma/n} \\ &+ \frac{n\gamma}{96} \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n} \right)^{(\gamma-2)/n} \frac{|\Omega|^{1+(2-\gamma)/n}}{I} m^{1+(\gamma-2)/n} + O(m^{1+(\gamma-4)/n}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

При $n = 2$ и $\gamma = 2, 4, 6$ имеем для всех $m \geq 1$ соответственно

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \|\nabla \varphi_j\|^2 &\geq \frac{2\pi}{|\Omega|} m^2 + \frac{1}{24} \frac{119}{120} \frac{|\Omega|}{I} m, \\ \sum_{j=1}^m \|\Delta \varphi_j\|^2 &\geq \frac{16\pi^2}{3|\Omega|^2} m^3 + \frac{\pi}{3I} \frac{12095}{12096} m^2, \\ \sum_{j=1}^m \|\nabla \Delta \varphi_j\|^2 &\geq \frac{16\pi^3}{|\Omega|^3} m^4 + \frac{2\pi^2}{|\Omega|I} m^3 + \frac{\pi}{48} \frac{71}{72} \frac{|\Omega|}{I^2} m^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $F(\xi)$ в (3.1). В силу леммы 1, а также ортонормированности и равенства Планшереля

$$0 \leq F(\xi) \leq M := (2\pi)^{-n} |\Omega|, \quad |\nabla F(\xi)| \leq L := 2(2\pi)^{-n} (|\Omega|I)^{1/2}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} F(\xi) d\xi = m.$$

Кроме того,

$$\sum_{j=1}^m \|(-\Delta)^{\gamma/4} \varphi_j\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^\gamma F(\xi) d\xi \geq \Sigma_{M,L}^\gamma(m).$$

Поэтому оценки (3.5) и (3.6) – это (2.16) и (2.12) с соответствующими M и L .

Подставляя $M = (2\pi)^{-2} |\Omega|$ и $L = 2(2\pi)^{-2} (|\Omega|I)^{1/2}$ для $n = 2$ в формулы (1.17) и пользуясь неравенством $|\Omega|^2/I \leq 2\pi$, получаем (3.7). Например, для $\gamma = 4$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \|\Delta \varphi_j\|^2 &\geq \Sigma_{M,L}^4(m) = \frac{16\pi^2}{3|\Omega|^2} m^3 + \frac{\pi}{3I} m^2 - \frac{|\Omega|^4}{\pi \cdot 7 \cdot 3^4 \cdot 2^8 I^3} \\ &\geq \frac{16\pi^2}{3|\Omega|^2} m^3 + \frac{\pi}{3I} m^2 \left(1 - \frac{1}{7 \cdot 27 \cdot 64 m^2} \right) \geq \frac{16\pi^2}{3|\Omega|^2} m^3 + \frac{\pi}{3I} \frac{12095}{12096} m^2. \end{aligned}$$

Оставшиеся два неравенства в (3.7) доказываются аналогично. Осталось доказать, что $|\Omega|^2/I \leq 2\pi$ при $n = 2$. Полагая в (2.4) $F = \chi_\Omega$, находим

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} x^2 F(x) dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} x^2 F^*(x) dx = \frac{n|\Omega|^{1+2/n}}{(n+2)\omega_n^{2/n}}. \quad (3.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Коэффициент при старшей степени m в оценках снизу в теореме 3 точный в том смысле, что его нельзя взять большим, чтобы соответствующие неравенства не нарушались бы при достаточно большом m . Действительно, рассмотрим спектр $\mu_k = \mu_k(\gamma)$ и соответствующие ортонормированные собственные функции ψ_k задачи Дирихле для полигармонического оператора

$$(-\Delta)^{\gamma/2} \psi_k = \mu_k \psi_k, \quad \psi_k \in H_0^{\gamma/2}(\Omega). \quad (3.9)$$

Положим $\varphi_k = \psi_k$. Тогда $\|(-\Delta)^{\gamma/4} \psi_k\|^2 = \mu_k$ и в силу асимптотической формулы Вейля

$$\mu_k \sim \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n |\Omega|} \right)^{\gamma/n} k^{\gamma/n} \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

откуда и следует, что коэффициент при $m^{1+\gamma/n}$ точный.

Оператор Стокса и его обобщения. Для ортонормированных систем бездивергентных вектор-функций справедливы следующие оценки, которые формулируются аналогично теореме 3.

ТЕОРЕМА 4. Пусть семейство вектор-функций $\{u_k\}_{k=1}^m \in \mathbf{H}_0^{\gamma/2}(\Omega)$ ортонормировано в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ и $\operatorname{div} u_k = 0$. Пусть $\gamma > 0$ четное. Тогда для $m \geq 1$

$$\sum_{j=1}^m \|(-\Delta)^{\gamma/4} u_j\|^2 \geq \frac{n}{n+\gamma} \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n (n-1) |\Omega|} \right)^{\gamma/n} m^{1+\gamma/n}. \quad (3.10)$$

Справедлива также двучленная асимптотическая оценка

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \|(-\Delta)^{\gamma/4} u_j\|^2 &\geq \frac{n}{n+\gamma} \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n (n-1) |\Omega|} \right)^{\gamma/n} m^{1+\gamma/n} \\ &+ \frac{\gamma(n-1)^{1+(2-\gamma)/n}}{96} \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n} \right)^{(\gamma-2)/n} \frac{|\Omega|^{1+(2-\gamma)/n}}{I} m^{1+(\gamma-2)/n} + O(m^{1+(\gamma-4)/n}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

При $n = 2$ и $\gamma = 2, 4, 6$ имеем для всех $m \geq 1$ соответственно

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \|\nabla u_j\|^2 &\geq \frac{2\pi}{|\Omega|} m^2 + \frac{1}{48} \frac{239}{240} \frac{|\Omega|}{I} m, \\ \sum_{j=1}^m \|\Delta u_j\|^2 &\geq \frac{16\pi^2}{3|\Omega|^2} m^3 + \frac{\pi}{6I} \frac{48383}{48384} m^2, \\ \sum_{j=1}^m \|\nabla \Delta u_j\|^2 &\geq \frac{16\pi^2}{|\Omega|^3} m^4 + \frac{\pi^2}{|\Omega|I} m^3 + \frac{\pi}{768} \frac{35}{36} \frac{|\Omega|}{I^2} m^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство сводится к вычислениям на этот раз с $M = (2\pi)^{-n} |\Omega|$ и $L = 2(2\pi)^{-n} (n(n-1))^{1/2} (|\Omega|I)^{1/2}$, которые аналогичны приведенным в доказательстве предыдущей теоремы.

Напомним определение оператора Стокса [9], [25], [26]. Пусть $\mathcal{V}$ есть множество гладких бездивергентных вектор-функций с компактным носителем в Ω :

$$\mathcal{V} = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega), \ \operatorname{div} u = 0\}.$$

Для целого $l = \gamma/2 \geq 1$ обозначим через H и V_l замыкание $\mathcal{V}$ в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ и $\mathbf{H}^l(\Omega)$ соответственно. Ортогональный проектор P отображает $\mathbf{L}_2(\Omega)$ на H , $P: \mathbf{L}_2(\Omega) \rightarrow H$, и (см., например, [25]) справедливо ортогональное разложение $\mathbf{L}_2(\Omega) = H \oplus H^\perp$, где

$$\begin{aligned} H &= \{u \in \mathbf{L}_2(\Omega), \operatorname{div} u = 0, u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\}, \\ H^\perp &= \{u \in \mathbf{L}_2(\Omega), u = \nabla p, p \in L_2^{\text{loc}}(\Omega)\}. \end{aligned}$$

Определим оператор $A_l: V_l \rightarrow V_l'$ следующим образом:

$$\langle A_l u, v \rangle_{V_l' \times V_l} = ((-\Delta)^{l/2} u, (-\Delta)^{l/2} v) \quad \text{для всех } u, v \in V_l. \quad (3.13)$$

Оператор A_l осуществляет изоморфизм между V_l и V_l' . Для достаточно гладкого u

$$A_l u = P(-\Delta)^l u.$$

Случай $l = 1$ соответствует классическому оператору Стокса $A := A_1$, отображающему V на V' , где $V := V_1$:

$$\langle Au, v \rangle_{V' \times V} = (\nabla u, \nabla v) \quad \text{для всех } u, v \in V. \quad (3.14)$$

Оператор A_l является положительным самосопряженным оператором с дискретным спектром $\lambda_k = \lambda_k(l)$, $\lambda_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$:

$$A_l v_k = \lambda_k v_k, \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad (3.15)$$

где $\{v_k\}_{k=1}^\infty \in V_l$ – ортонормированные собственные вектор-функции и

$$\lambda_k = \|(-\Delta)^{l/2} v_k\|^2. \quad (3.16)$$

В случае ограниченной области Ω с гладкой границей задача на собственные значения выглядит так:

$$(-\Delta)^l v_k + \nabla p_k = \lambda_k v_k, \quad \operatorname{div} v_k = 0, \quad v_k|_{\partial\Omega} = \dots = \frac{\partial^{l-1} v_k}{\partial n^{l-1}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.17)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для классического оператора Стокса ($l = 1$) известно асимптотическое поведение его собственных значений [12], [13] (см. также § 4)

$$\lambda_k \sim \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n(n-1)|\Omega|} \right)^{2/n} k^{2/n} \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (3.18)$$

Поэтому коэффициент при старшей степени m в теореме 4 точный (по крайней мере для $\gamma = 2$).

Задача об изгибе пластины. Соответствующая задача на собственные значения имеет вид (см., например, [27])

$$\begin{aligned} \Delta^2 \psi_k &= -\nu_k \Delta \psi_k, \\ \psi_k|_{\partial\Omega} &= \frac{\partial \psi_k}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Мы рассмотрим эту задачу для двумерной односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и покажем, что спектр этой задачи совпадает со спектром $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора Стокса, где временно векторный оператор Лапласа обозначен жирным шрифтом Δ :

$$-\Delta v_k + \nabla p_k = \lambda_k v_k, \quad \operatorname{div} v_k = 0, \quad v_k|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.20)$$

Используем известные формулы векторного анализа

$$\Delta u = \nabla \operatorname{div} u - \operatorname{rot} \operatorname{rot} u, \quad \Delta \psi = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \psi,$$

где в двумерном случае оператор rot переводит скаляры в векторы и векторы в скаляры.

Пусть v удовлетворяет (3.20) с некоторым λ и p . Вектор-функцию v можно представить в виде [24; лемма 2.5] $v = -\operatorname{rot} \varphi$, $\varphi|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$. Подставим это выражение в первое уравнение в (3.20) и применим оператор rot :

$$0 = \operatorname{rot}(-\Delta v + \nabla p - \lambda v) = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \varphi + \lambda \operatorname{rot} \operatorname{rot} \varphi = -\Delta^2 \varphi - \lambda \Delta \varphi.$$

Поэтому $\varphi = \psi_k$ и $\lambda = \nu_k$ для некоторого однозначно определенного k . В обратную сторону. Пусть ψ и ν есть собственная функция и собственное значение задачи (3.19). Положим $v = -\operatorname{rot} \psi$. Тогда $v|_{\partial\Omega} = 0$, $\operatorname{div} v = 0$ и

$$0 = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \psi - \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \psi = \operatorname{rot}(\Delta v + \nu v).$$

В силу односвязности Ω отсюда следует, что безвихревое поле $\Delta v + \nu v$ является градиентом:

$$\Delta v + \nu v = \nabla p$$

для некоторой однозначной функции p . Поэтому $\nu = \lambda_m$ для некоторого однозначно определенного m .

СЛЕДСТВИЕ 3. В двумерной односвязной области спектр задачи об изгибе пластины (3.19) удовлетворяет оценке (с точным коэффициентом при m^2)

$$\sum_{k=1}^m \nu_k \geq \frac{2\pi}{|\Omega|} m^2 + \frac{1}{48} \frac{239}{240} \frac{|\Omega|}{I} m. \quad (3.21)$$

Оператор Клейна–Гордона. До сих пор мы рассматривали случай четного γ и получали оценки для собственных значений дифференциальных операторов. В заключение этого раздела рассмотрим случай $\gamma = 1$, что соответствует так называемому оператору Клейна–Гордона. Это эллиптический псевдодифференциальный оператор первого порядка, который определяется с помощью расширения по Фридрихсу симметрического оператора, соответствующего квадратичной форме [28], [29]

$$\varphi \rightarrow \int_{\Omega} \varphi (-\Delta)^{1/2} \varphi \, dx, \quad \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega),$$

где Δ – оператор Лапласа во всем $\mathbb{R}^n$. Обозначим этот оператор через $H_{0,\Omega}$. Он имеет дискретный спектр $0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \rightarrow \infty$ и соответствующую ортонормированную систему собственных функций $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$, причем

$$\beta_j = (\varphi_j, H_{0,\Omega} \varphi_j) = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi| \widehat{\varphi}_j(\xi) \, d\xi.$$

В рассматриваемом случае справедлива асимптотическая оценка (3.6) с $\gamma = 1$, в частности, в двумерном случае

$$\sum_{j=1}^m \beta_j = \sum_{j=1}^m \|(-\Delta)^{1/4} \varphi_j\|^2 \geq \frac{4\pi^{1/2}}{3|\Omega|^{1/2}} m^{3/2} + \frac{1}{96\pi^{1/2}} \frac{|\Omega|^{3/2}}{I} m^{1/2} + O(m^{-1/2}). \quad (3.22)$$

Легко получить и оценку, верную для всех $m \geq 1$. В силу теоремы 1

$$\Sigma_{M,L}^1(m) = \frac{\pi M^4}{6L^3} ((t(m_*) + 1)^4 - t(m_*)^4),$$

где $t(m_*)$ дано в (2.14), $M = (2\pi)^{-2}|\Omega|$, $L = 2(2\pi)^{-2}(|\Omega|I)^{1/2}$, и поэтому в силу неравенства $|\Omega|^2/I \leq 2\pi$ имеем $m_* = m3L^2/(\pi M^3) \geq 24m$.

Прямая подстановка дает

$$\begin{aligned} \sigma(m_*) &:= ((t(m_*) + 1)^4 - t(m_*)^4) = \frac{1}{9}(2m_* + 1)\sqrt{12m_* - 3} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{9}(2m_* + 1)m_*^{1/2} \left(1 - \frac{1}{4m_*}\right)^{1/2} = \frac{4\sqrt{3}}{9}m_*^{3/2} + \frac{\sqrt{3}}{6}m_*^{1/2} + O(m_*^{-1/2}). \end{aligned}$$

С другой стороны, $m_* \geq 24$ и $(1 - 1/(4m_*))^{1/2} \geq 1 - \alpha \cdot 1/(4m_*)$, где $\alpha = 96 - \sqrt{95}\sqrt{96} = 0.5013\dots$, и

$$\begin{aligned} \sigma(m_*) &\geq \frac{2\sqrt{3}}{9} \left(2m_*^{3/2} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)m_*^{1/2} - \frac{\alpha}{4}m_*^{-1/2}\right) \\ &\geq \frac{2\sqrt{3}}{9} \left(2m_*^{3/2} + \left(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{96}\right)m_*^{1/2}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9}m_*^{3/2} + \beta \frac{\sqrt{3}}{6}m_*^{1/2}, \end{aligned}$$

где

$$\beta = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{96}\right) = 0.9922\dots,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^m \beta_j \geq \frac{4\pi^{1/2}}{3|\Omega|^{1/2}} m^{3/2} + \frac{\beta}{96\pi^{1/2}} \frac{|\Omega|^{3/2}}{I} m^{1/2}. \quad (3.23)$$

§ 4. Приложение. Асимптотика спектра оператора Стокса

Общая схема. Напомним известную абстрактную схему. Пусть H и V – гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)$ и $(\cdot, \cdot)_V$, и пусть V компактно и плотно вложено в H . Пусть a – непрерывная коэрцитивная квадратичная форма на V : $a(u, v) \leq c\|u\|_V\|v\|_V$, $a(u, u) \geq c\|u\|_V^2$. Тогда по лемме Вишика–Лакса–Мильграма для любого $l \in V'$ существует единственный элемент $u \in V$, для которого $a(u, v) = \langle l, v \rangle_{V' \times V}$ для любого $v \in V$, что определяет самосопряженный положительно определенный оператор A ,

$$\langle Au, v \rangle_{V' \times V} = \langle l, v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V.$$

Спектр оператора A дискретный: $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$, и λ_k определяются с помощью принципа минимакса [30; теорема 10.2]

$$\lambda_k = \max_{\Phi \subset V} \inf_{u \in \Phi, \|u\|=1} a(u, u),$$

где Φ замкнуто в V и $\text{codim } \Phi \leq k - 1$. Введем считающую функцию

$$N(\lambda, V, H, a) = N(\lambda, \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}) = \#\{k \in \mathbb{N}, \lambda_k \leq \lambda\} = \sum_{\lambda_k \leq \lambda} 1.$$

ЛЕММА 2. *Справедливо равенство*

$$N(\lambda, V, H, a) = \inf \text{codim } E,$$

где E – замкнутое подпространство в V и для $0 \neq u \in E$ $a(u, u) - \lambda \|u\|^2 > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если V неплотно в H , то вся изложенная выше схема остается в силе, если H заменить на замыкание V в H . Кроме того, если форма a задает скалярное произведение в V , вместо $N(\lambda, V, H, a)$ будем использовать обозначение $N(\lambda, V, H)$.

В рассматриваемой общей ситуации положим для $s > 0$

$$\begin{aligned} N_s^+(V, H, a) &= \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-s} N(\lambda, V, H, a), \\ N_s^-(V, H, a) &= \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-s} N(\lambda, V, H, a). \end{aligned}$$

Из вариационного принципа [30; теорема 10.4] легко следует

ЛЕММА 3. *Пусть на V заданы две формы a и a_1 и для любого $\varepsilon > 0$*

$$|a(u, u) - a_1(u, u)| \leq \varepsilon a(u, u) + c_0(\varepsilon) \|u\|^2 \quad \forall u \in V. \quad (4.1)$$

Тогда

$$N_s^\pm(V, H, a_1) = N_s^\pm(V, H, a). \quad (4.2)$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда форма a задана на двух в некотором смысле близких подпространствах. Пусть W вложено в H компактно и плотно, $\|u\|_H \leq c \|u\|_V$ и на W задана полуограниченная форма a :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \gamma_1 (\|u\|_W^2 + \|u\|_H^2)^{1/2} (\|v\|_W^2 + \|v\|_H^2)^{1/2}, \\ \|u\|_W^2 &\leq \gamma_1 (a(u, u) + \|u\|_H^2). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Далее пусть оператор B ограничен из W в некоторое гильбертово пространство X . Определим замкнутое подпространство V следующим образом:

$$V = \{u \in W, Bu = 0\}. \quad (4.4)$$

Пусть задано пространство $V_1 \subset W$, и пусть для $\tau > 0$ и всех $u \in V_1$

$$\|Bu\|_X \leq \tau \|u\|_H. \quad (4.5)$$

Пусть существует оператор $R: X \rightarrow W$ такой, что $BRf = f$ для всех $f \in X$ и

$$\|Rf\|_W \leq \gamma_0 \|f\|_X. \quad (4.6)$$

ЛЕММА 4. *Если $N_s^+(W, H) < \infty$ и выполняются (4.3)–(4.6), то*

$$N_s^\pm(V_1, H, a) \leq N_s^\pm(V, H, a). \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2 для любого $\delta > 0$ существует замкнутое подпространство $E \subset W$, $\text{codim } E = N(\delta^{-2}, W, H)$ такое, что для $u \in E$

$$\|u\|_H < \delta \|u\|_W. \quad (4.8)$$

Тогда замкнутое подпространство

$$V_2 = \{u \in V_1, RBu \in E\}$$

имеет коразмерность в V_1 не больше чем $N(\delta^{-2}, W, H)$: $\text{codim } E \leq N(\delta^{-2}, W, H)$. Действительно, пусть $V_1 = V_2 \oplus V_2'$, где $V_2' = V_2^{\perp W} \cap V_1$. Надо доказать, что $\dim V_2' \leq N = N(\delta^{-2}, W, H)$. Предположим, что $\dim V_2' > N$, и пусть $u_1, \dots, u_{N+1}$ линейно независимы в V_2' . Тогда $PRBu_1, \dots, PRBu_{N+1} \in E^{\perp W}$, где P – ортопроектор в W на $E^{\perp W}$, и $P(RB\alpha_1 u_1 + \dots + RB\alpha_{N+1} u_{N+1}) = 0$ для некоторых α_k , $|\alpha_k| > 0$, поскольку $\dim E^{\perp W} \leq N$. Значит, $RBu \in E$, где $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{N+1} u_{N+1} \neq 0$, поэтому $u \in V_2$. Итак, пришли к противоречию, что $u \in V_2$ и $u \in V_2'$ одновременно.

Для $u \in V_2$ обозначим $z = RBu$. По определению V_2 , $z \in E$. Тогда $u = u_0 + z$, где $u_0 = u - z \in V$ (см. (4.4)), поскольку $Bu_0 = Bu - BRBu = 0$.

Для $\gamma = \gamma(\gamma_0, \gamma_1, \tau)$ выполняются оценки

$$a(z, z) \leq \gamma \|u\|_H^2, \quad a(u, z) \leq \gamma(a(u, u) + \|u\|_H^2)^{1/2} \|u\|_H. \quad (4.9)$$

Во-первых, $\|z\|_W = \|RBu\|_W \leq \gamma \|u\|_H$. Далее, $|a(z, z)| \leq \gamma_1(\|z\|_W^2 + \|z\|_H^2) \leq \gamma_1(1 + c^2)\|z\|_W^2 \leq \gamma \|u\|_H^2$. Второе неравенство доказывается аналогично.

Сравним значения формы a на u и u_0 . Так как $u + u_0 = 2u + z$ и $u - u_0 = z$, то $a(u, u) - a(u_0, u_0) = 2a(u, z) - a(z, z)$, откуда, используя (4.9), получаем для любого $\varepsilon > 0$

$$|a(u, u) - a(u_0, u_0)| \leq \varepsilon a(u, u) + \tau_1 \|u\|_H^2, \quad \tau_1 = \frac{\gamma}{\varepsilon}. \quad (4.10)$$

Кроме того, поскольку $z \in E$,

$$\|u\|_H = \|u_0 + z\|_H \leq \|u_0\|_H + \delta \|z\|_W \leq \|u_0\|_H + \gamma \delta \|u\|_H. \quad (4.11)$$

Согласно лемме 2 для любого (сколь угодно большого) λ существует подпространство $G \subset V$, $\text{codim } G = N(\lambda, V, H, a) < \infty$ такое, что

$$\lambda \|v\|_H^2 < a(v, v) \quad \forall v \in G. \quad (4.12)$$

Пусть для $u \in V_2$ выполняется условие, что $u_0 = u - RBu \in G$, где соответствующее λ достаточно велико. Из (4.10)–(4.12) выводим

$$\|u\|_H - \gamma \delta \|u\|_H \leq \|u_0\|_H \leq \lambda^{-1/2} a(u_0, u_0) < \lambda^{-1/2} ((1 + \varepsilon) a(u, u) + \tau_1 \|u\|_H^2)^{1/2}.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $\delta := (\gamma \sqrt{\lambda \varepsilon})^{-1}$. Тогда имеем

$$\lambda^{1/2} \|u\|_H < (1 + \varepsilon)(a(u, u) + \tau_1 \|u\|_H^2)^{1/2} + \varepsilon^{-1/2} \|u\|_H,$$

откуда

$$\lambda \|u\|_H^2 < (1 + \varepsilon)^2 a(u, u) + \tau_2(\tau_1, \varepsilon) \|u\|_H^2.$$

Полагая $\mu = (\lambda - \tau_2)/(\varepsilon)^2$, получаем

$$\mu \|u\|_H^2 < a(u, u). \quad (4.13)$$

Неравенство (4.13) выполнено для всех $u \in F := \{u \in V_2, (I - RB)u \in G\}$. Как мы уже видели, первое условие $u \in V_2$ состоит в выполнении не более чем

$N(\delta^{-2}, W, H)$ соотношений ортогональности. Аналогично, второе условие состоит в выполнении не более чем $N(\lambda, V, H, a)$ соотношений ортогональности. Поэтому $\text{codim } F \leq N(\lambda, V, H, a) + N(\delta^{-2}, W, H)$, и из леммы 2 следует, что

$$N(\mu, V_1, H, a) \leq N(\lambda, V, H, a) + N(\delta^{-2}, W, H).$$

Вспоминая, что $\delta^{-2} = \gamma^2 \lambda \varepsilon$, и учитывая, что $\lambda/\mu \rightarrow (1+\varepsilon)^2$, $\delta^{-2}/\mu \rightarrow \gamma^2(1+\varepsilon)^2 \varepsilon$ при $\mu \rightarrow \infty$, окончательно получаем, переходя к пределу $\mu \rightarrow \infty$,

$$N_s^\pm(V_1, H, a) \leq (1+\varepsilon)^{2s} N_s^\pm(V, H, a) + (\gamma^2(1+\varepsilon)^2 \varepsilon)^s N_s^+(W, H).$$

Если $N_s^+(W, H) < \infty$, то можно перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, что дает (4.7).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из классических результатов об асимптотике спектра задачи Дирихле для оператора Лапласа следует, что для $W = H_0^1(\Omega)$, $H = L_2(\Omega)$

$$N_{n/2}^+(W, H) = N_{n/2}^-(W, H) = \frac{|\Omega| \omega_n}{(2\pi)^n}.$$

Оператор Стокса. Если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с липшицевой границей,

$$H = \{u \in \mathbf{L}_2(\Omega), \operatorname{div} u = 0, u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad V = \{u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \operatorname{div} u = 0\}, \quad (4.14)$$

то соответствующий оператор A есть оператор Стокса [25], [26].

ЛЕММА 5. Пусть Ω есть куб с ребром δ , и пусть $\{\lambda_k^{\text{per}}\}_{k=1}^\infty$ – спектр оператора Стокса в Ω с периодическими краевыми условиями. Тогда

$$N(\lambda, \{\lambda_k^{\text{per}}\}_{k=1}^\infty) \sim \lambda^{n/2} \delta^n \frac{(n-1)\omega_n}{(2\pi)^n} \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\delta = 2\pi$. Вектор-функции $u_k = \hat{u}_k e^{ikx}$ являются собственными функциями, отвечающими собственному значению $k^2 = k_1^2 + \dots + k_n^2$, причем $\operatorname{div} u_k = 0 \iff k \cdot \hat{u}_k = 0$. Число собственных значений, не превосходящих λ , равно числу точек целочисленной решетки, попадающих в шар радиуса $\lambda^{1/2}$, т.е. асимптотически равно $\lambda^{n/2} \omega_n$. Каждое такое собственное значение имеет кратность $n-1$, равную числу линейно независимых векторов $v \in \mathbb{R}^n$ таких, что $v \cdot k = 0$.

Следующий шаг состоит в локализации и разбиении единицы. Возьмем разбиение $\mathbb{R}^n$ на одинаковые кубы с ребром $\delta_0 \ll 1$ и раздвем каждый куб в δ' раз, где δ' чуть больше единицы. Обозначим $\delta = \delta_0 \delta'$. Открытые кубы с ребром δ образуют покрытие $\mathbb{R}^n$ и Ω . Пусть $m = m(\delta, \Omega)$ из них $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ целиком содержатся в Ω . Выберем открытое множество Ω_0 , содержащее $\bar{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$. Итак, $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^m \Omega_i$. Построим соответствующее разбиение единицы: $\{\varphi_i\}_{i=0}^m$, $0 \leq \varphi_i \leq 1$, $\varphi_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$ и

$$\sum_{i=0}^m \varphi_i(x)^2 = 1 \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (4.15)$$

Обозначим через

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{i=0}^m \mathbf{L}_2(\Omega_i)$$

гильбертово пространство с элементами $F = (F_0, \dots, F_m)$, где $F_i \in \mathbf{L}_2(\Omega_i)$.

Пусть оператор $T: \mathbf{L}_2(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}$ действует по правилу

$$Tu = \bigoplus_{i=0}^m \varphi_i u,$$

а оператор $S: \mathcal{L} \rightarrow \mathbf{L}_2(\Omega)$ действует по правилу

$$S\left(\bigoplus_{i=0}^m F_i\right) = \sum_{i=0}^m \widetilde{\varphi_i F_i},$$

где $\widetilde{\varphi_i F_i}$ обозначает продолжение нулем вне Ω_i . Из (4.15) вытекает, что

$$ST = \text{Id}_{\mathbf{L}_2(\Omega)}, \quad (4.16)$$

откуда в свою очередь следует, что $P = TS$ есть проектор из $\mathcal{L}$ на $T\mathbf{L}_2(\Omega)$ (для любого Tu , $PF = Tu$ для $F = Tu$), который на самом деле является ортопроектором, поскольку $(TSF, G)_{\mathcal{L}} = (F, TSG)_{\mathcal{L}}$.

Определим теперь гильбертово пространство $\mathcal{W}$

$$\mathcal{W} = \{F \in \mathcal{L}, F_i \in \mathbf{H}_{\text{per}}^1(\Omega_i), i = 1, \dots, m, \widetilde{F_0} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)\}$$

с нормой

$$\|F\|_{\mathcal{W}}^2 = \sum_{i=1}^m \|F_i\|_{\mathbf{H}_{\text{per}}^1(\Omega_i)}^2 + \|F_0\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega_0)}^2. \quad (4.17)$$

Условие $\widetilde{F_0} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ означает, что $F_0 = 0$ на $\partial\Omega$ и на внутренней компоненте границы $\partial\Omega_0$. Другими словами, $\text{supp } F_0 \subseteq \overline{\Omega} \cap \overline{\Omega_0}$ и $\|F_0\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega_0)} = \|\widetilde{F_0}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}$.

В силу очевидного включения $\mathbf{H}_0^1(\Omega_i) \subset \mathbf{H}_{\text{per}}^1(\Omega_i)$ оператор T действует из $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathcal{W}$. Поскольку $ST = \text{Id}_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}$, оператор S отображает $\mathcal{W}$ на $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, а проектор $P = TS$ отображает $\mathcal{W}$ на $T\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

ЛЕММА 6. *Выполняются следующие равенства и оценки:*

$$\begin{aligned} (Tu, F)_{\mathcal{L}} &= (u, SF)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}, \\ \|Tu\|_{\mathcal{L}} &= \|u\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}, \\ \|SF\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} &\leq \|F\|_{\mathcal{L}}, \\ \|Tu\|_{\mathcal{W}}^2 &\leq \|u\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}^2 + t\|u\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2, \\ \|SF\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} &\leq 2\|F\|_{\mathcal{W}} + t\|F\|_{\mathcal{L}}^2, \end{aligned} \quad (4.18)$$

в которых постоянная t зависит от $\{\Omega_i\}$ и $\{\varphi_i\}$.

Доказательство следует из (4.15) и того, что $u = 0$ и $F_0 = 0$ вне Ω .

Обозначим $a_i(u, v) = \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ для $u, v \in \mathbf{H}_{\text{per}}^1(\Omega_i)$ и $i = 1, \dots, m$, и пусть

$a_0(u, v) = \int_{\Omega_0} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$, где $u, v \in \mathbf{H}^1(\Omega_0)$. Определим две формы на $\mathcal{W}$

$$\widetilde{a}(F, G) = \sum_{i=0}^m a_i(F_i, G_i), \quad (4.19)$$

$$\widetilde{a}_1(F, G) = a(SF, SG) + \widetilde{a}((I - P)F, (I - P)G),$$

где $P = TS$ и $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$.

ЛЕММА 7. *Справедливы следующие оценки:*

$$\begin{aligned} |\tilde{a}(F, G)| &\leq \|F\|_{\mathcal{W}} \|G\|_{\mathcal{W}}, \\ |\tilde{a}(F, F) - \tilde{a}_1(F, F)| &\leq \varepsilon \|F\|_{\mathcal{W}}^2 + \frac{t}{\varepsilon} \|F\|_{\mathcal{L}}^2, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая оценка очевидна. Положим

$$u = SF = \sum_{i=0}^m \widetilde{\varphi_i F_i}.$$

Тогда $\tilde{a}_1(F, F) = a(u, u) + \tilde{a}(F, F) + \tilde{a}(Tu, Tu) - 2\tilde{a}(F, Tu)$ и

$$\tilde{a}(F, F) - \tilde{a}_1(F, F) = - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \sum_{i=0}^m \int_{\Omega} (-|\nabla(\varphi_i u)|^2 + 2\nabla F_i \nabla(\varphi_i u)) dx.$$

В каждой точке x имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m \nabla F_i \nabla(\varphi_i u) &= \sum_{i,j=0}^m \nabla F_i \nabla F_j \varphi_i \varphi_j + \sum_{i,j=0}^m \nabla F_i F_j \psi_{ij}, \\ |\nabla u|^2 &= \sum_{i,j=0}^m \nabla F_i \nabla F_j \varphi_i \varphi_j + \sum_{i,j=0}^m \nabla F_i F_j \chi_{ij} + \sum_{i,j=0}^m F_i F_j \eta_{ij} \end{aligned}$$

и, учитывая (4.15) и предыдущее равенство,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m |\nabla(\varphi_i u)|^2 &= |\nabla u|^2 + \sum_{i,j=0}^m F_i F_j \xi_{ij} + \sum_{i,j=0}^m \nabla F_i F_j \nu_{ij} \\ &= \sum_{i,j=0}^m \nabla F_i \nabla F_j \varphi_i \varphi_j + \sum_{i,j=0}^m \nabla F_i F_j \chi'_{ij} + \sum_{i,j=0}^m F_i F_j \eta'_{ij} \end{aligned}$$

для некоторых $\psi_{ij}, \chi_{ij}, \eta_{ij}, \xi_{ij}, \nu_{ij} \in C_0^\infty(\Omega_i \cap \Omega_j)$. Поэтому для $\varepsilon > 0$

$$|\tilde{a}(F, F) - \tilde{a}_1(F, F)| \leq c_{\{\varphi\}} \|F\|_{\mathcal{L}} \|\nabla F\|_{\mathcal{L}} + c'_{\{\varphi\}} \|F\|_{\mathcal{L}}^2 \leq \varepsilon \|F\|_{\mathcal{W}}^2 + \frac{t}{\varepsilon} \|F\|_{\mathcal{L}}^2.$$

ЛЕММА 8. *Форма $\tilde{a}$ полуограничена на $\mathcal{W}$, точнее, справедливо равенство*

$$\|F\|_{\mathcal{W}}^2 = \tilde{a}(F, F) + \|F\|_{\mathcal{L}}^2. \quad (4.21)$$

Перейдем к построению операторов типа B и R из леммы 4. Пусть

$$\mathcal{X} = \bigoplus_{i=1}^m L_2(\Omega_i) / \mathbb{R}.$$

Обозначим через $\mathcal{B}$ следующий оператор из $\mathcal{W}$ в $\mathcal{X}$ (игнорирующий F_0):

$$\mathcal{B} \left(\bigoplus_{i=0}^m F_i \right) = \bigoplus_{i=1}^m \operatorname{div} F_i. \quad (4.22)$$

Следующая лемма следует из равенства $\operatorname{div} \varphi u = \varphi \operatorname{div} u + u \cdot \nabla \varphi$.

ЛЕММА 9. Если $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, $\operatorname{div} u = 0$, то

$$\|\mathcal{B}Tu\|_{\mathcal{X}} \leq t\|u\|_{L_2(\Omega)}.$$

Если $F \in \mathcal{W}$, $F_0 = 0$ и $\mathcal{B}F = 0$, то

$$\|\operatorname{div} SF\|_{L_2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq t\|F\|_{\mathcal{L}}.$$

ЛЕММА 10. Оператор $\mathcal{B}$ ограничен из $\mathcal{W}$ на $\mathcal{X}$ и существует оператор $\mathcal{R}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{W}$ такой, что для любого $\vec{f} \in \mathcal{X}$ справедливо $\mathcal{B}\mathcal{R}\vec{f} = \vec{f}$ и

$$\|\mathcal{R}\vec{f}\|_{\mathcal{W}} \leq \gamma\|\vec{f}\|_{\mathcal{X}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathcal{B}$ игнорирует F_0 , то все сводится к периодическому случаю. Для $f \in L_2(\Omega_i)/\mathbb{R}$ положим $R_i f = \nabla \Delta^{-1} f$. Тогда $\mathcal{R} = \bigoplus_{i=1}^m R_i$.

ЛЕММА 11. Существует ограниченный оператор $R_0: L_2(\Omega)/\mathbb{R} \rightarrow \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ такой, что $\operatorname{div} R_0 f = f$ для любого $f \in L_2(\Omega)/\mathbb{R}$ и $\|R_0 f\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leq c'(\Omega)\|f\|_{L_2(\Omega)/\mathbb{R}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам надо лишь чуть больше, чем то, что дает [25; лемма I.2.4]. Ключевую роль играет неравенство Нечаса

$$\|p\|_{L_2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c(\Omega)\|\nabla p\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}, \quad (4.23)$$

доказательство которого приведем для полноты изложения. В теореме III.3.2 из [31] доказано неравенство

$$\|p\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1(\Omega)(\|p\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\nabla p\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}). \quad (4.24)$$

Неравенство (4.23) будет доказано, если мы докажем неравенство

$$\|p\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c_2(\Omega)\|\nabla p\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}, \quad p \in L_2(\Omega)/\mathbb{R}. \quad (4.25)$$

Предположим противное. Тогда существует последовательность $p_n \in L_2(\Omega)/\mathbb{R}$ такая, что $\|\nabla p_n\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \rightarrow 0$ и $\|p_n\|_{H^{-1}(\Omega)} = 1$. В силу (4.24) $\|p_n\|_{L_2(\Omega)} \leq 2c_1(\Omega)$ для всех достаточно больших n . Поэтому $p_{n_k} \rightarrow p^* \in L_2(\Omega)/\mathbb{R}$ слабо и $p_{n_k} \rightarrow p^*$ сильно в $H^{-1}(\Omega)$ и $\|p^*\|_{H^{-1}(\Omega)} = 1$. Отсюда

$$\|p^*\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla p^*\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} (\|p_{n_k}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla p_{n_k}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}^2) = \|p^*\|_{H^{-1}(\Omega)}^2.$$

Стало быть, $\|\nabla p^*\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} = 0$ и в силу $\int_{\Omega} p^*(x) dx = 0$ получаем $p^* = 0$. Полученное противоречие с тем, что $\|p^*\|_{H^{-1}(\Omega)} = 1$ доказывает (4.25) и (4.23).

Оператор $L = \operatorname{div}$ ограничен из $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)/\mathbb{R}$. Сопряженный оператор $L^* = -\nabla$ ограничен из $L_2(\Omega)/\mathbb{R}$ в $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, и $\|L^* p\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \geq c(\Omega)^{-1}\|p\|_{L_2(\Omega)/\mathbb{R}}$ в силу (4.23). Тогда [32; теорема 4.15] образ $L = \operatorname{div}$ есть все $L_2(\Omega)/\mathbb{R}$. Ядро L в $\mathbf{H}_0^1$ есть V , и L взаимно однозначно отображает $V^{\perp \mathbf{H}_0^1}$ на $L_2(\Omega)/\mathbb{R}$. По теореме Банаха о замкнутом графике обратный оператор $L^{-1}: L_2(\Omega)/\mathbb{R} \rightarrow V^{\perp \mathbf{H}_0^1}$ ограничен. Это и есть R_0 .

ТЕОРЕМА 5. Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограничена и $\partial\Omega \in \text{Lip}$. Пусть пространства H и V и форма a определены в (4.14). Тогда для спектра оператора Стокса, порожденного парой H, V и формой a , справедлива асимптотика

$$N(\lambda, V, H, a) = N(\lambda, \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty) \sim \lambda^{n/2} |\Omega| \frac{(n-1)\omega_n}{(2\pi)^n}. \quad (4.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Асимптотическое равенство (4.26) эквивалентно

$$N_{n/2}^+(V, H, a) \leq |\Omega| \frac{(n-1)\omega_n}{(2\pi)^n} \leq N_{n/2}^-(V, H, a). \quad (4.27)$$

1. Докажем левое неравенство. Поскольку V замкнуто в $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, то $\mathcal{V}_1 = TV$ замкнуто в $\mathcal{W}$. Действительно, (4.18) дает $\|u\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = \|STu\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leq t\|Tu\|_{\mathcal{W}}$, откуда и следует замкнутость TV . Из равенства $\tilde{a}_1(Tu, Tv) = a(u, v)$ следует

$$N(\lambda, V, H, a) = N(\lambda, TV, \mathcal{L}, \tilde{a}_1). \quad (4.28)$$

За счет близости форм $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}$ (лемма 7) в силу леммы 3

$$N_{n/2}^+(TV, \mathcal{L}, \tilde{a}_1) = N_{n/2}^+(TV, \mathcal{L}, \tilde{a}). \quad (4.29)$$

Для любого $F = Tu \in TV = \mathcal{V}_1$ в силу леммы 9 выполняется

$$\|\mathcal{B}F\|_{\mathcal{X}} = \|\mathcal{B}Tu\|_{\mathcal{X}} \leq t\|u\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = t\|STu\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leq t\|Tu\|_{\mathcal{L}} = t\|F\|_{\mathcal{L}}.$$

Рассмотрим также пространство

$$\mathcal{V} = \{F \in \mathcal{W}, \mathcal{B}F = 0\}.$$

Форма a непрерывна и полуограничена на $\mathcal{W}$ (леммы 7 и 8). В лемме 10 для оператора $\mathcal{B}$ построен соответствующий оператор $\mathcal{R}$. По лемме 4, где роль V , V_1 , B , R играют $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}_1 = TV$, $\mathcal{B} = \bigoplus_{i=1}^m \text{div}$, $\mathcal{R} = \bigoplus_{i=1}^m R_i$, имеем

$$N_{n/2}^+(TV, \mathcal{L}, \tilde{a}) \leq N_{n/2}^+(\mathcal{V}, \mathcal{L}, \tilde{a}).$$

Справа все $m+1$ компонент a расцепляются и в силу леммы 5 и замечания 5

$$N_{n/2}^+(\mathcal{V}, \mathcal{L}, \tilde{a}) = \sum_{i=1}^m \delta^n \frac{(n-1)\omega_n}{(2\pi)^n} + |\Omega \cap \Omega_0| \frac{n\omega_n}{(2\pi)^n},$$

и требуемое неравенство получается, если устремить $\delta \rightarrow 0$, так чтобы

$$\sum_{i=1}^m \delta^n \rightarrow |\Omega| \quad \text{и} \quad |\Omega \cap \Omega_0| \rightarrow 0.$$

2. Докажем правое неравенство. Пространство $\mathcal{V}$ теперь есть

$$\mathcal{V} = \{F \in \mathcal{W}, \text{div } SF = 0\},$$

а $\mathcal{V}_1$ определено в (4.33). Справедливо ортогональное разложение

$$\mathcal{V} = TV \oplus (I - P)\mathcal{W}, \quad (4.30)$$

причем сумма ортогональна и в $\mathcal{L}$, и относительно $\tilde{a}_1$. Действительно, для $F = Tu$ и $G = (I - P)E$, $E \in \mathcal{W}$, используя $S(I - P) = 0$ и $(I - P)T = 0$,

$$\tilde{a}_1(F, G) = a(STu, S(I - P)E) + \tilde{a}((I - P)Tu, (I - P)(I - P)E) = 0.$$

Аналогично в $\mathcal{L}$: $(Tu, (I - P)E)_{\mathcal{L}} = (u, S(I - P)E)_{L_2(\Omega)} = 0$. Наконец, пусть $F \in \mathcal{V} \iff SF =: u \in V$. Тогда $F = Tu \oplus (F - Tu) = Tu \oplus (I - TS)F$, что и доказывает (4.30). Из (4.30) вытекает

$$\begin{aligned} N(\lambda, \mathcal{V}, \mathcal{L}, \tilde{a}_1) &= N(\lambda, TV, \mathcal{L}, \tilde{a}_1) + N(\lambda, (I - P)\mathcal{W}, \mathcal{L}, \tilde{a}_1) \\ &= N(\lambda, V, H, a) + N(\lambda, (I - P)\mathcal{W}, \mathcal{L}, \tilde{a}_1), \end{aligned}$$

где мы учли, что $\tilde{a}_1(Tu, Tv) = a(u, v)$. Это дает

$$N_{n/2}^-(V, H, a) \geq N_{n/2}^-(\mathcal{V}, \mathcal{L}, \tilde{a}_1) - N_{n/2}^+((I - P)\mathcal{W}, \mathcal{L}, \tilde{a}_1). \quad (4.31)$$

Вновь за счет ε -близости форм $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}$, имеем

$$N_{n/2}^-(\mathcal{V}, \mathcal{L}, \tilde{a}_1) = N_{n/2}^-(\mathcal{V}, \mathcal{L}, \tilde{a}). \quad (4.32)$$

Далее пусть

$$\mathcal{V}_1 = \bigoplus_{i=1}^m \{F_i \in \mathbf{H}_{\text{per}}^1(\Omega_i), \operatorname{div} F_i = 0\} = \{F \in \mathcal{W}, F_0 = 0, \mathcal{B}F = 0\}. \quad (4.33)$$

Рассмотрим операторы TR_0 и $\operatorname{div} S$, где R_0 построен в лемме 11. Во-первых, $(\operatorname{div} S)(TR_0)f = f$ для $f \in X = L_2(\Omega)/\mathbb{R}$, во-вторых, $\|\operatorname{div} SF\|_X \leq t\|F\|_{\mathcal{L}}$ для $F \in \mathcal{V}_1$ в силу леммы 9, и, наконец, в силу (4.18) и леммы 11

$$\|TR_0f\|_{\mathcal{W}} \leq 2\|R_0f\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} + t\|R_0f\|_{L_2(\Omega)} \leq (2 + t)c'(\Omega)\|f\|_X.$$

Опять в силу леммы 4, где роль V , V_1 , B , R играют $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}_1$, $\operatorname{div} lS$, TR_0 , имеем

$$N_{n/2}^-(\mathcal{V}_1, \mathcal{L}, \tilde{a}) \leq N_{n/2}^-(\mathcal{V}, \mathcal{L}, \tilde{a}). \quad (4.34)$$

Левая часть вновь распадается на m частей:

$$N_{n/2}^-(\mathcal{V}_1, \mathcal{L}, \tilde{a}) = \sum_{i=1}^m \delta^n \frac{(n-1)\omega_n}{(2\pi)^n} \rightarrow |\Omega| \frac{(n-1)\omega_n}{(2\pi)^n} \quad (4.35)$$

при $\delta \rightarrow 0$. Осталось еще второе слагаемое справа в (4.31). Так как $S(I - P) = 0$, то имеем $\tilde{a}_1(F, G) = \tilde{a}(F, G)$ для $F, G \in (I - P)\mathcal{W}$, откуда

$$N(\lambda, (I - P)\mathcal{W}, \mathcal{L}, \tilde{a}_1) = N(\lambda, (I - P)\mathcal{W}, \mathcal{L}, \tilde{a}).$$

Если $F = (I - P)G$ для $G \in \mathcal{W}$, то $F_i = G_i - \varphi_i \sum_{j=0}^m \varphi_j G_j$. Если $x \in \operatorname{supp} \varphi_i$, но $x \notin \operatorname{supp} \varphi_j$ для $j \neq i$, то $\varphi_i(x) = 1$, а $\varphi_j(x) = 0$ для $j \neq i$, поэтому $F_i(x) = 0$. Итак, $\operatorname{supp} F_i \in \Omega_i \cap (\bigcup_{j \neq i} \Omega_j)$. Любая точка x принадлежит не более чем 2^n различным $\operatorname{supp} \varphi_{i_k}$, поэтому

$$N_{n/2}^+((I - P)\mathcal{W}, \mathcal{L}, \tilde{a}_1) = N_{n/2}^+((I - P)\mathcal{W}, \mathcal{L}, \tilde{a}) \leq \frac{n2^n \omega_n}{(2\pi)^n} \sum_{i \neq j} |\Omega_i \cap \Omega_j| \rightarrow 0$$

при $\delta \rightarrow 0$ и надлежащем выборе покрытия $\{\Omega_i\}$. Отсюда и из (4.31)–(4.35) получаем $N_{n/2}^-(V, H, a) \geq |\Omega|(n-1)\omega_n/(2\pi)^n$. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] P. Li, S. T. Yau, “On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem”, *Comm. Math. Phys.*, **88**:3 (1983), 309–318.
- [2] Ф. А. Березин, “Ковариантные и контравариантные символы операторов”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **36**:5 (1972), 1134–1167; англ. пер.: F. A. Berezin, “Covariant and contravariant symbols of operators”, *Math. USSR-Izv.*, **6**:5 (1972), 1117–1151.
- [3] A. Laptev, T. Weidl, “Recent results on Lieb–Thirring inequalities”, *Journées Équations aux Dérivées Partielles*, Exp. XX (La Chapelle sur Erdre, 2000), Univ. Nantes, Nantes, 2000.
- [4] E. Lieb, W. Thirring, “Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger Hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities”, *Studies in Math. Phys. Essays in honor of V. Bargmann*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1976, 269–303.
- [5] A. Laptev, T. Weidl, “Sharp Lieb–Thirring inequalities in high dimensions”, *Acta Math.*, **184**:1 (2000), 87–111.
- [6] J. Dolbeault, A. Laptev, M. Loss, “Lieb–Thirring inequalities with improved constants”, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **10**:4 (2008), 1121–1126.
- [7] А. А. Ильин, “О спектре оператора Стокса”, *Функц. анализ и его прил.*, **43**:4 (2009), 14–25; англ. пер.: A. A. Ilyin, “On the spectrum of the Stokes operator”, *Funct. Anal. Appl.*, **43**:4 (2009), 254–263.
- [8] А. В. Бабин, М. И. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений*, Наука, М., 1983; англ. пер.: A. V. Babin, M. I. Vishik, *Attractors of evolution equations*, Stud. Math. Appl., **25**, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [9] P. Constantin, C. Foias, *Navier–Stokes equations*, Chicago Lectures in Math., Univ. of Chicago Press, Chicago, IL, 1988.
- [10] E. Lieb, “On characteristic exponents in turbulence”, *Comm. Math. Phys.*, **92**:4 (1984), 473–480.
- [11] R. Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Appl. Math. Sci., **68**, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [12] G. Métivier, “Valeurs propres d’opérateurs définis par la restriction de systèmes variationnels à des sous-espaces”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **57**:2 (1978), 133–156.
- [13] К. И. Бабенко, “Об асимптотике собственных значений линеаризованных уравнений Навье–Стокса”, *Докл. АН СССР*, **263**:3 (1982), 521–525; англ. пер.: K. I. Babenko, “On the asymptotics of the eigenvalues of the linearized Navier–Stokes equations”, *Soviet Math. Dokl.*, **25**:2 (1982), 359–364.
- [14] A. D. Melas, “A lower bound for sums of eigenvalues of the Laplacian”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131**:2 (2002), 631–636.
- [15] A. A. Ilyin, “Lower bounds for the spectrum of the Laplace and Stokes operators”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **28**:1 (2010), 131–146.
- [16] M. S. Ashbaugh, “Isoperimetric and universal inequalities for eigenvalues”, *Spectral theory and geometry* (Edinburgh, UK, 1998), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **273**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, 95–139.
- [17] H. Kovařík, S. Vugalter, T. Weidl, “Two-dimensional Berezin–Li–Yau inequalities with a correction term”, *Comm. Math. Phys.*, **287**:3 (2009), 959–981.
- [18] L. Geisinger, A. Laptev, T. Weidl, “Geometrical versions of improved Berezin–Li–Yau inequalities”, *J. Spectr. Theory*, **1**:1 (2011), 87–109.
- [19] С. З. Левендорский, “Асимптотика спектра задач со связями”, *Матем. сб.*, **129(171)**:1 (1986), 73–89; англ. пер.: S. Z. Levendorskiĭ, “Asymptotics of the spectrum of problems with constraints”, *Math. USSR-Sb.*, **57**:1 (1987), 77–95.

- [20] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, “ L_2 -теория оператора Максвелла в произвольных областях”, *УМН*, **42:6** (1987), 61–76; англ. пер.: M. Sh. Birman, M. Z. Solomyak, “ L_2 -Theory of the Maxwell operator in arbitrary domains”, *Russian Math. Surveys*, **42:6** (1987), 75–96.
- [21] А. Н. Кожевников, “Об операторе линеаризованной стационарной задачи Навье–Стокса”, *Матем. сб.*, **125(167):1(9)** (1984), 3–18; англ. пер.: A. N. Kozhevnikov, “On the operator of the linearized steady-state Navier–Stokes problem”, *Math. USSR-Sb.*, **53:1** (1986), 1–16.
- [22] G. Talenti, “Inequalities in rearrangement invariant function spaces”, *Nonlinear analysis, function spaces and applications*, v. 5 (Prague, 1994), Prometheus, Prague, 1994, 177–230.
- [23] E. H. Lieb, M. Loss, *Analysis*, Grad. Stud. Math., v. 14, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [24] D. E. Edmunds, A. A. Ilyin, “On some multiplicative inequalities and approximation numbers”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **45:178** (1994), 159–179.
- [25] Р. Темам, *Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Temam, *Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis*, Stud. Math. Appl., **2**, North-Holland, Amsterdam–New York, 1979.
- [26] О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Физматгиз, М., 1961; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, New York–London, 1963.
- [27] Г. Поля, Г. Серё, *Изопериметрические неравенства в математической физике*, ГИФМЛ, М., 1962; пер. с англ.: G. Pólya, G. Szegő, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Ann. of Math. Stud., **27**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1951.
- [28] E. M. Harrell, S. Y. Yolcu, “Eigenvalue inequalities for Klein–Gordon operators”, *J. Funct. Anal.*, **256:12** (2009), 3977–3995.
- [29] S. Y. Yolcu, “An improvement to a Berezin–Li–Yau type inequality”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **138:11** (2010), 4059–4066.
- [30] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Изд-во ЛГУ, Л., 1980; англ. пер.: M. S. Birman, M. Z. Solomyak, *Spectral-theory of self-adjoint operators in Hilbert space*, Math. Appl. (Soviet Ser.), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1987.
- [31] Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике*, Наука, М., 1980; пер. с фр.: G. Duvaut, J.-L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.
- [32] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975; пер. с англ.: W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York–Düsseldorf–Johannesburg, 1973.

А. А. Ильин (А. А. Ilyin)

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва
E-mail: ilyin@keldysh.ru

Поступила в редакцию
27.09.2011 и 23.08.2012