Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Рекало, И. Д. Чуешов, Глобальный аттрактор контактной параболической задачи в тонкой двухслойной области, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 1, 103–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm795>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 14:59:31

УДК 517.94

А. М. Рекало, И. Д. Чуешов

Глобальный аттрактор контактной параболической задачи в тонкой двухслойной области

Рассматривается полулинейное параболическое уравнение в объединении двух примыкающих друг к другу по основаниям тонких ограниченных цилиндрических областей $\Omega_{1,\varepsilon} = \Gamma \times (0, \varepsilon)$ и $\Omega_{2,\varepsilon} = \Gamma \times (-\varepsilon, 0)$, где Γ – область в $\mathbb{R}^d$, $d \leq 3$. Неизвестные функции связываются некоторым условием сопряжения на общем основании Γ . Данная задача может служить моделью химической кинетики, описывающей поведение системы, состоящей из двух компонентов, реагирующих на границе. Предполагается, что интенсивность реакции зависит от ε – поперечного размера области – и имеет порядок ε^α .

В работе исследуются предельные свойства эволюционной полугруппы $S_{\alpha,\varepsilon}(t)$, порожденной исходной задачей, при $\varepsilon \rightarrow 0$ (т.е. при утончении исходной области). Показано, что эти свойства существенно зависят от величины показателя α . В зависимости от того, будет ли α принимать значение 1, больше 1 или меньше 1, асимптотическим пределом исходной задачи будут служить три различные системы уравнений на Γ . При естественных предположениях устанавливаются свойства непрерывности глобального аттрактора полугруппы $S_{\alpha,\varepsilon}(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Библиография: 17 названий.

Введение

Пусть $\Omega_{1,\varepsilon}$ и $\Omega_{2,\varepsilon}$ – ограниченные области в $\mathbb{R}^{d+1}$, $d \leq 3$, вида

$$\Omega_{1,\varepsilon} = \Gamma \times (0, \varepsilon), \quad \Omega_{2,\varepsilon} = \Gamma \times (-\varepsilon, 0),$$

где $0 < \varepsilon \leq 1$ и Γ – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с границей $\partial\Gamma$ класса C^2 . В дальнейшем для простоты обозначений множества $\Gamma \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ и $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ не различаются. Кроме того, ниже для точки $x \in \Omega_{i,\varepsilon}$ используется обозначение $x = (x', x_{d+1})$, где $x' \in \Gamma$ и $x_{d+1} \in (0, \varepsilon)$ или $x_{d+1} \in (-\varepsilon, 0)$.

Рассматривается система полулинейных параболических уравнений

$$\partial_t w_i = \nu_i \Delta w_i - a w_i + f_i(w_i) + h_i(x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega_{i,\varepsilon}, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$w_i(0, x) = w_{i,0}(x), \quad x \in \Omega_{i,\varepsilon}, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS (грант № 2000/899).

Предполагается, что компоненты w_1 и w_2 удовлетворяют условию Неймана

$$\left. \frac{\partial w_i}{\partial n_i} \right|_{\partial \Omega_{i,\varepsilon} \setminus \Gamma} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

на внешней части границы составной области $\Omega_\varepsilon = \Omega_{1,\varepsilon} \cup \Omega_{2,\varepsilon}$ и условию сопряжения на Γ вида

$$\begin{aligned} \left(\nu_1 \frac{\partial w_1}{\partial n_1} + \varepsilon^\alpha k(x')(w_1 - w_2) \right) \Big|_\Gamma &= 0, \\ \left(\nu_2 \frac{\partial w_2}{\partial n_2} + \varepsilon^\alpha k(x')(w_2 - w_1) \right) \Big|_\Gamma &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\partial w_i / \partial n_i$ обозначает производную функции по направлению нормали, внешней к $\partial \Omega_{i,\varepsilon}$. Параметры ν_i и a считаются положительными. Относительно функций f_i предполагается, что

$$f_i(v) \in C^2(\mathbb{R}), \quad |f''(v)| \leq M(1 + |v|^p), \quad (5)$$

где $0 \leq p \leq (3-d)/(d-1)$ при $d = 2, 3$ и $p \geq 0$ любое при $d = 1$. Кроме того, для любого $\delta > 0$ существует $C_\delta > 0$ такое, что

$$v f_i(v) \leq \delta v^2 + C_\delta, \quad (6)$$

и найдутся такие $\beta > 0$, $\eta > 0$ и $\gamma < a$, что

$$v f_i(v) - \beta \int_0^v f_i(w) dw \leq \gamma v^2 + \eta. \quad (7)$$

Предполагается также, что

$$h_i(x) \in H^1(\Omega_{i,1}), \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

и

$$k(x') \in C^1(\Gamma), \quad \varkappa = \inf_{x' \in \Gamma} k(x') > 0. \quad (9)$$

Задача (1)–(4) представляет собой модель химической кинетики, описывающей поведение системы, состоящей из двух компонентов, заполняющих тонкие соприкасающиеся слои $\Omega_{1,\varepsilon}$ и $\Omega_{2,\varepsilon}$, разделенные проницаемой мембраной Γ . Взаимодействие (реакция) компонентов происходит только на поверхности Γ . Интенсивность реакции на Γ зависит от толщины областей, заполненных реагентами, и описывается коэффициентом $\varepsilon^\alpha k(x')$.

В данной работе изучаются предельные свойства решений задачи (1)–(4) при $\varepsilon \rightarrow 0$ (т.е. при утончении области Ω_ε). Эти свойства существенно зависят от величины показателя α , входящего в коэффициент обмена $\varepsilon^\alpha k(x')$. При указанных выше условиях задача (1)–(4) порождает эволюционную полугруппу $T_{\alpha,\varepsilon}(t)$, $t \geq 0$, в пространстве $H^1(\Omega_{1,\varepsilon}) \oplus H^1(\Omega_{2,\varepsilon})$, обладающую компактным глобальным

аттрактором $\mathcal{M}_{\alpha,\varepsilon}$ (см. теорему 1.1). Работа посвящена изучению свойств аттрактора $\mathcal{M}_{\alpha,\varepsilon}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Оказывается, что в зависимости от того, будет ли параметр α принимать значение 1, больше 1 или меньше < 1 , “асимптотическим пределом” $\mathcal{M}_{\alpha,\varepsilon}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ будет аттрактор эволюционной полугруппы, порождаемой следующими уравнениями в области Γ соответственно:

а) при $\alpha = 1$:

$$\begin{cases} \partial_t v_i = \nu_i \Delta v_i + (-1)^i k(x)(v_1 - v_2) - av_i + f_i(v_i) + h_i(x', 0), & t > 0, \ x' \in \Gamma; \\ \left. \frac{\partial v_i}{\partial n} \right|_{\partial\Gamma} = 0, \ v_i|_{t=0} = v_{i,0}, \quad i = 1, 2; \end{cases} \quad (10)$$

б) при $\alpha > 1$:

$$\begin{cases} \partial_t v_i = \nu_i \Delta v_i - av_i + f_i(v_i) + h_i(x', 0), & t > 0, \ x' \in \Gamma; \\ \left. \frac{\partial v_i}{\partial n} \right|_{\partial\Gamma} = 0, \ v_i|_{t=0} = v_{i,0}, \quad i = 1, 2; \end{cases} \quad (11)$$

в) при $\alpha < 1$:

$$\begin{cases} \partial_t v = \nu \Delta v - av + f(v) + h(x'), & t > 0, \ x' \in \Gamma; \\ \left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\partial\Gamma} = 0, \ v|_{t=0} = v_0, \end{cases} \quad (12)$$

где $\nu = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)$,

$$f(v) = \frac{1}{2}(f_1(v) + f_2(v)), \quad h(x') = \frac{1}{2}(h_1(x', 0) + h_2(x', 0)).$$

Отметим, что задачи об асимптотическом поведении решений нелинейных дифференциальных уравнений в тонких (однослойных) областях рассматривались многими авторами (см., например, [1]–[4] и представленную там библиографию). Кроме того, имеется значительное число работ (см., например, [5]–[12] и ссылки, приведенные в этих работах), посвященных обсуждению вопроса о непрерывности аттракторов относительно сингулярных возмущений для различных классов диссипативных динамических систем.

Опишем структуру работы. В следующем §1 приведены точные формулировки основных результатов. Параграф 2 носит предварительный характер. В нем, в частности, вводится вспомогательная (масштабированная) задача, изучаются свойства ее эллиптической части и устанавливаются равномерные оценки для ее глобального аттрактора. В §3 доказывается сходимость эволюционных операторов. Заключительный §4 посвящен доказательству основных результатов об асимптотическом поведении глобального аттрактора задачи (1)–(4).

§ 1. Основные результаты

Пусть

$$\mathcal{F}_\varepsilon = H^1(\Omega_{1,\varepsilon}) \oplus H^1(\Omega_{2,\varepsilon}), \quad \mathcal{F}_0 = H^1(\Gamma) \oplus H^1(\Gamma), \quad \mathbf{L}^2 = L^2(\Gamma) \oplus L^2(\Gamma).$$

Здесь и в дальнейшем $H^s(\mathcal{O})$ – соболевское пространство на множестве $\mathcal{O}$. Нормы в пространствах $\mathcal{F}_\varepsilon$, $\mathcal{F}_0$ и $\mathbf{L}^2$ обозначаются $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_\varepsilon}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_0}$ и $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2}$ соответственно.

Для формулировки основных результатов нам потребуется следующее предварительное утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. *В пространстве $\mathcal{F}_\varepsilon$ задача (1)–(4) порождает компактную диссипативную систему $(\mathcal{F}_\varepsilon, T_{\alpha,\varepsilon}(t))$, обладающую компактным глобальным аттрактором $\mathcal{M}_{\alpha,\varepsilon}$, лежащим в $H^2(\Omega_{1,\varepsilon}) \oplus H^2(\Omega_{2,\varepsilon})$. Эволюционный оператор $T_{\alpha,\varepsilon}(t)$ определяется формулой*

$$T_{\alpha,\varepsilon}(t)(w_{1,0}; w_{2,0}) = (w_1(t); w_2(t)),$$

где пара $(w_1(t); w_2(t))$ является решением задачи (1)–(4).

Кроме того, задачи (10) (случай $\alpha = 1$) и (11) (случай $\alpha > 1$) в пространстве $\mathcal{F}_0$ порождают компактные диссипативные системы с глобальными аттракторами $\mathcal{A}_\alpha$, лежащими в $H^2(\Gamma) \oplus H^2(\Gamma)$.

Задача (12) (случай $\alpha < 1$) порождает компактную диссипативную систему в $H^1(\Gamma)$, обладающую глобальным аттрактором $\tilde{\mathcal{A}} \subset H^2(\Gamma)$.

Напомним (см., например, [5], [6], [13]), что под компактной динамической системой понимается пара $(H, S(t))$, состоящая из метрического пространства H и (непрерывного) эволюционного оператора $S(t)$ и обладающая компактным поглощающим множеством (множество $B_0 \subset H$ называется поглощающим для $(H, S(t))$, если для любого ограниченного множества $B \subset H$ существует момент времени $t_B \geq 0$ такой, что $S(t)B \subset B_0$ для всех $t \geq t_B$). Глобальным аттрактором динамической системы $(H, S(t))$ называется ограниченное замкнутое множество $\mathcal{A} \subset H$ такое, что $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ при $t \geq 0$ и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{v \in B} \text{dist}_H(S(t)v, \mathcal{A}) = 0$$

для любого ограниченного множества $B \subset H$.

Доказательство теоремы 1.1 носит стандартный характер и получается дословным повторением (с незначительными изменениями) соответствующих рассуждений, приведенных в [5] (см. также [6], [13]).

Для описания предельного поведения эволюционных операторов $T_{\alpha,\varepsilon}$ и глобальных аттракторов $\mathcal{M}_{\alpha,\varepsilon}$ введем операторы усреднения вдоль направления x_{d+1} :

$$M_1^\varepsilon u_1 = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon u_1(x', y) dy, \quad M_2^\varepsilon u_2 = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^0 u_2(x', y) dy.$$

Пусть $M^\varepsilon u = (M_1^\varepsilon u_1; M_2^\varepsilon u_2)$. Ясно, что M^ε – непрерывный оператор из $L^2(\Omega_{1,\varepsilon}) \oplus L^2(\Omega_{2,\varepsilon})$ в $\mathbf{L}^2$ и из $\mathcal{F}_\varepsilon$ в $\mathcal{F}_0$.

Следующее утверждение описывает асимптотическое поведение оператора $T_{\alpha,\varepsilon}(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в случае $\alpha \geq 1$.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $\alpha \geq 1$ и $h(\varepsilon) = \|h\|_{\mathcal{F}_\varepsilon}^2 \equiv \|h_1\|_{H^1(\Omega_{1,\varepsilon})}^2 + \|h_2\|_{H^1(\Omega_{2,\varepsilon})}^2$. Обозначим через $S_\alpha(t)$ эволюционный оператор задачи (10) при $\alpha = 1$ и (11) при $\alpha > 1$ соответственно. Тогда для каждого $r > 0$ существуют константы $c_1(r)$ и $c_2(r)$ такие, что

$$\begin{aligned} & \|M^\varepsilon T_{\alpha,\varepsilon}(t)w_0 - S_\alpha(t)M^\varepsilon w_0\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_0^t \|M^\varepsilon T_{\alpha,\varepsilon}(\tau)w_0 - S_\alpha(\tau)M^\varepsilon w_0\|_{\mathcal{F}_0}^2 d\tau \\ & \leq c_1(r)(\varepsilon^4 + \varepsilon h(\varepsilon))e^{c_2(r)t} \end{aligned} \quad (13)$$

для любого элемента $w_0 = (w_{1,0}; w_{2,0}) \in \mathcal{F}_\varepsilon$ такого, что $\varepsilon^{-1}\|w_0\|_{\mathcal{F}_\varepsilon}^2 \leq r$. Кроме того, справедлива оценка

$$\|M^\varepsilon T_{\alpha,\varepsilon}(t)w_0 - S_\alpha(t)M^\varepsilon w_0\|_{H^s(\Gamma) \oplus H^s(\Gamma)} \leq c_1(r)(\varepsilon^4 + \varepsilon h(\varepsilon))^{(1-s)/2} e^{c_2(r)t} \quad (14)$$

для любого $0 \leq s < 1$.

Отметим, что с подходящей константой r условие $\varepsilon^{-1}\|w_0\|_{\mathcal{F}_\varepsilon}^2 \leq r$ выполнено для любой функции w_0 из $C^1(\overline{\Omega}_{1,\varepsilon}) \oplus C^1(\overline{\Omega}_{2,\varepsilon})$.

Утверждение о сходимости решений, которое удастся установить в случае $\alpha < 1$, является более слабым по сравнению с теоремой 1.2.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $\alpha < 1$ и $(w_1^\varepsilon(t); w_2^\varepsilon(t))$ – решение задачи (1)–(4) с начальными условиями $w_{1,0}(x', x_{d+1}) = v_0(x')$ и $w_{2,0}(x', x_{d+1}) = v_0(x')$, где v_0 – произвольный элемент из $H^1(\Gamma)$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1,2} \sup_{t \in [0,T]} \|M_i^\varepsilon w_i^\varepsilon(t) - v(t)\|_{H^s(\Gamma)} = 0 \quad (15)$$

для любого $0 \leq s < 1$, где $v(t)$ – решение задачи (12).

Основными результатами работы являются следующие теоремы о близости аттракторов допредельной и предельных задач.

ТЕОРЕМА 1.4. Для любых $\alpha \geq 1$ справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{u \in \mathcal{M}_{\alpha,\varepsilon}} \inf_{v \in \mathcal{A}_\alpha} \|M^\varepsilon u - v\|_{H^1(\Gamma) \oplus H^1(\Gamma)} = 0, \quad (16)$$

где $\mathcal{M}_{\alpha,\varepsilon}$ – глобальный аттрактор задачи (1)–(4) и $\mathcal{A}_\alpha$ – глобальный аттрактор задачи (10) при $\alpha = 1$ и (11) при $\alpha > 1$ соответственно.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть $\alpha < 1$. Тогда выполняется соотношение (16) для $\mathcal{A}_\alpha$, имеющего вид

$$\mathcal{A}_\alpha = \{(v; v) \in H^1(\Gamma) \oplus H^1(\Gamma) : v \in \tilde{\mathcal{A}}\}, \quad (17)$$

где $\tilde{\mathcal{A}}$ – глобальный аттрактор задачи (12).

Теоремы 1.4 и 1.5 утверждают полунепрерывность аттракторов $\mathcal{M}_{\alpha,\varepsilon}$ сверху при $\varepsilon \rightarrow 0$. В случае, когда аттрактор соответствующей предельной задачи регулярен (ситуация “общего положения”, см., например, [5] и [13]), можно также установить полную непрерывность (в симметризованной метрике Хаусдорфа) семейства $\{\mathcal{M}_{\alpha,\varepsilon}\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. А именно справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть $\alpha \geq 1$. Пусть все неподвижные точки задачи (10) при $\alpha = 1$ ((11) при $\alpha > 1$) гиперболические. Тогда для некоторых $C, \varepsilon_0, \sigma > 0$ справедливо соотношение

$$\text{dist}(M^\varepsilon \mathcal{M}_{\alpha,\varepsilon} | \mathcal{A}_\alpha) + \text{dist}(\mathcal{A}_\alpha | \mathcal{M}_{\alpha,\varepsilon}) \leq C\varepsilon^\sigma, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad (18)$$

где $\mathcal{M}_{\alpha,\varepsilon}$ и $\mathcal{A}_\alpha$ — те же что и в теореме 1.4, а расстояние $\text{dist}(\mathcal{A} | \mathcal{M})$ от множества $\mathcal{A}$ до множества $\mathcal{M}$ определено равенством

$$\text{dist}(\mathcal{A} | \mathcal{M}) = \sup_{v \in \mathcal{A}} \inf_{u \in \mathcal{M}} \|M^\varepsilon u - v\|_{H^1(\Gamma) \oplus H^1(\Gamma)}. \quad (19)$$

Таким образом, теоремы 1.4 и 1.6 показывают, что случай $\alpha > 1$ отвечает слабому (исчезающему в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$) взаимодействию компонентов $u_1^\varepsilon(t)$ и $u_2^\varepsilon(t)$ решения задачи (1)–(4). Их предельная динамика описывается парой независимых уравнений (11) и асимптотически эти компоненты эволюционируют независимо друг от друга. При $\alpha = 1$ предельная задача (10) содержит обменный член $k(x')(v_1 - v_2)$, т.е. в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ компоненты $u_1^\varepsilon(t)$ и $u_2^\varepsilon(t)$ продолжают взаимодействовать.

Теорема 1.5 означает, что случай $\alpha < 1$ отвечает сильному предельному взаимодействию компонентов. В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ наблюдается синхронизация компонентов $u_1^\varepsilon(t)$ и $u_2^\varepsilon(t)$. Фактически, в пределе возникает смесь компонентов (со средним коэффициентом диффузии ν и реактивным членом $f(u)$). Отметим также, что асимптотическое поведение решений задачи (1)–(4) при условиях $\alpha = 0, \nu_1 = \nu_2, f_1(u) = f_2(u), h_1 = h_2 = 0, d = 1$ изучалось в работе [14]. В этой работе, в частности, было доказано, что при достаточно малых ε аттрактор $\mathcal{M}_{0,\varepsilon}$ совпадает с множеством $\mathcal{A}_\alpha$, определяемым соотношением (17).

Отметим также, что теоремы 1.4 и 1.6 остаются в силе, если вместо оператора усреднения M^ε взять оператор следа γ , действующий по формуле $\gamma(u_1; u_2) = (u_1(x', +0); u_2(x', -0))$ (см. замечание 4.2). То же самое относится и к теореме 1.5, однако вместо соболевской H^1 -нормы нужно рассматривать L^2 -норму.

§ 2. Предварительные рассуждения

2.1. Масштабирование и функциональные пространства. Для доказательства приведенных выше теорем удобно иметь дело с фиксированной областью, в которой определены все уравнения при $\varepsilon > 0$. Введем новые координаты $(x, y) \in \mathbb{R}^{d+1}$ следующим образом:

$$x = x', \quad x \in \Gamma, \quad y = \varepsilon^{-1}x_{d+1}, \quad y \in (-1, 1).$$

При этом область Ω_ε перейдет в $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \Gamma \times (0, 1)$, $\Omega_2 = \Gamma \times (-1, 0)$, оператор $\nabla = (\nabla_{x'}, \partial_{x_{d+1}})$ — в $\nabla_\varepsilon = (\nabla_x, \varepsilon^{-1}\partial_y)$, $\Delta = \Delta_{x'} + \partial_{x_{d+1}}^2$ — в $\Delta_\varepsilon = \Delta_x + \varepsilon^{-2}\partial_{yy}$. Задаче (1)–(4) будет соответствовать задача

$$\partial_t u_i = \nu_i \Delta_\varepsilon u_i - a u_i + f_i(u_i) + h_i^\varepsilon(x, y), \quad t > 0, \quad (x, y) \in \Omega_i, \quad i = 1, 2, \quad (20)$$

с начальными данными

$$u_i(0, x, y) = u_{i,0}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_i, \quad i = 1, 2, \quad (21)$$

и граничными условиями

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial n_i} \right|_{\partial \Omega_i \setminus \Gamma} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (22)$$

$$\left(\nu_i \frac{\partial u_i}{\partial y} - \varepsilon^{\alpha+1} k(x)(u_1 - u_2) \right) \Big|_{y=0} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (23)$$

Здесь $h_i^\varepsilon(x, y) = h_i(x, \varepsilon y)$ и n_i — внешняя нормаль к границе $\partial \Omega_i$. Решение $w(t, x', x_{d+1})$ задачи (1)–(4) выражается через решение $u(t, x, y)$ задачи (20)–(23) по формуле $w(t, x', x_{d+1}) = u(t, x', \varepsilon^{-1} x_{d+1})$.

Введем пространство

$$H = L^2(\Omega_1) \oplus L^2(\Omega_2) \simeq L^2(\Omega)$$

с нормой $\|u\|^2 \equiv \|u_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|u_2\|_{L^2(\Omega_2)}^2$, где $u = (u_1; u_2)$, $u_i \equiv u|_{\Omega_i}$, и определим семейство классов Соболева

$$H_\varepsilon^1 = H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2), \quad \varepsilon \in (0, 1],$$

с нормами

$$\|u\|_{1,\varepsilon}^2 \equiv \sum_{i=1}^2 \left(\|u_i\|_{H^1(\Omega_i)}^2 + \varepsilon^{-2} \|\partial_y u_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right).$$

Всякий элемент $v \in H^1(\Gamma) \oplus H^1(\Gamma)$ естественным образом продолжается до элемента $u \in H_\varepsilon^1$ по формуле $u_i(x, y) \equiv v_i(x)$, $(x, y) \in \Omega_i$, $i = 1, 2$; возможность этого продолжения будет предполагаться в дальнейшем без дополнительных оговорок.

2.2. Форма Дирихле. На пространстве $H_\varepsilon^1 = H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2)$ рассмотрим билинейную форму

$$\begin{aligned} a_{\alpha,\varepsilon}(u, v) = & \sum_{i=1}^2 \nu_i \left((\nabla_x u_i, \nabla_x v_i)_{L^2(\Omega_i)} + \frac{1}{\varepsilon^2} (\partial_y u_i, \partial_y v_i)_{L^2(\Omega_i)} \right) + a \cdot (u, v)_H \\ & + \varepsilon^{\alpha-1} \int_{\Gamma} k(x) (u_1(x, 0) - u_2(x, 0)) (v_1(x, 0) - v_2(x, 0)) dx, \end{aligned}$$

где $u = (u_1; u_2)$ и $v = (v_1; v_2)$ — элементы из H_ε^1 . Форма $a_{\alpha,\varepsilon}(u, v)$ симметрична и удовлетворяет в силу (9) оценкам

$$c_1 \|u\|_{1,\varepsilon}^2 \leq a_{\alpha,\varepsilon}(u, u) \leq c_2 (1 + \varepsilon^{\alpha-1}) \|u\|_{1,\varepsilon}^2, \quad u \in H_\varepsilon^1. \quad (24)$$

Здесь и далее мы опускаем индекс ε у постоянных, которые можно выбрать независимо от $\varepsilon \in (0, 1]$.

Можно показать, что форма $a_{\alpha,\varepsilon}(u, v)$ замкнута в H . Поэтому существует такой однозначно определенный положительный самосопряженный оператор $A_{\alpha,\varepsilon}$, что $D(A_{\alpha,\varepsilon}) \subset H_\varepsilon^1$ и

$$a_{\alpha,\varepsilon}(u, v) = (A_{\alpha,\varepsilon}u, v)_H, \quad u \in D(A_{\alpha,\varepsilon}), \quad v \in H_\varepsilon^1.$$

Можно показать, что область определения $D(A_{\alpha,\varepsilon})$ состоит из элементов $u \in H_\varepsilon^2$, удовлетворяющих граничным условиям (22) и (23), причем

$$A_{\alpha,\varepsilon}u = (-\nu_1\Delta_\varepsilon u_1 + au_1; -\nu_2\Delta_\varepsilon u_2 + au_2), \quad u = (u_1, u_2) \in D(A_{\alpha,\varepsilon}).$$

Кроме того, $D(A_{\alpha,\varepsilon}^{1/2}) = H_\varepsilon^1$ и $a_{\alpha,\varepsilon}(u, u) = \|A_{\alpha,\varepsilon}^{1/2}u\|^2$.

Определим в H ортогональный проектор $Mu = (M_1u_1, M_2u_2)$, где

$$M_1u_1 = \int_0^1 u_1(x, y) dy, \quad M_2u_2 = \int_{-1}^0 u_2(x, y) dy.$$

Положим $Nu = (N_1u_1; N_2u_2) = (I - M)u$. В дальнейшем постоянно будем использовать неравенства

$$\|u - Mu\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\sum_{i=1}^2 \|\partial_y N_i u_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon \|Nu\|_{1,\varepsilon}, \quad u \in H_\varepsilon^1, \quad (25)$$

$$\|u_i(x, 0) - M_i u_i\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|\partial_y N_i u_i\|_{L^2(\Omega_i)} \leq \varepsilon \|Nu\|_{1,\varepsilon}, \quad u \in H_\varepsilon^1. \quad (26)$$

Следующее утверждение описывает поведение оператора $A_{\alpha,\varepsilon}^{-1}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в случае, когда $\alpha \geq 1$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\alpha \geq 1$. Тогда существует постоянная C такая, что

$$\|(A_{\alpha,\varepsilon}^{-1} - A_\alpha^{-1})v\|_{1,\varepsilon} \leq C(\delta_\alpha \varepsilon + (1 - \delta_\alpha)\varepsilon^{\alpha-1})\|v\|, \quad v \in MH, \quad (27)$$

где $\delta_\alpha = 1$ при $\alpha = 1$ и $\delta_\alpha = 0$ при $\alpha > 1$, а A_α — положительный самосопряженный оператор в $L^2(\Gamma) \oplus L^2(\Gamma)$ вида

$$(A_\alpha v)_i = -\nu_i \Delta_x v_i - (-1)^i \delta_\alpha k(x)(v_1 - v_2) + av_i, \quad i = 1, 2, \quad (28)$$

с областью определения

$$D(A_\alpha) = \left\{ v \in H^2(\Gamma) \oplus H^2(\Gamma) : \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial\Gamma} = 0 \right\}. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим только случай $\alpha = 1$ (при $\alpha > 1$ рассуждения аналогичны). В дальнейшем для краткости полагаем $a_\varepsilon \equiv a_{\alpha,\varepsilon}$, $A_\varepsilon \equiv A_{1,\varepsilon}$ и $A \equiv A_1$. Оператору A отвечает форма

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^2 (\nu_i (\nabla_x u_i, \nabla_x v_i)_{L^2(\Gamma)} + a \cdot (u_i, v_i)_{L^2(\Gamma)}) \\ + \int_{\Gamma} k(x) (u_1(x) - u_2(x)) (v_1(x) - v_2(x)) dx,$$

где $u = (u_1; u_2)$ и $v = (v_1; v_2)$ — элементы из $H^1(\Gamma) \oplus H^1(\Gamma)$. При этом легко видеть, что

$$a_\varepsilon(u, w) = a(Mu, w) - \sum_{i=1}^2 (-1)^i \int_{\Gamma} k(x) (u_i(x, 0) - M_i u_i) (w_1 - w_2) dx$$

для всех $u \in H_\varepsilon^1$ и $w \in H^1(\Gamma) \oplus H^1(\Gamma)$. Поэтому, используя очевидное равенство

$$a_\varepsilon(u, A_\varepsilon^{-1}v) = (u, v)_H = (Mu, v)_{L^2(\Gamma) \oplus L^2(\Gamma)} = a(Mu, A^{-1}v),$$

для всех $u \in H_\varepsilon^1$, $v \in MH$ получаем, что

$$a_\varepsilon(u, (A_\varepsilon^{-1} - A^{-1})v) = \sum_{i=1}^2 (-1)^i \int_{\Gamma} k(x) (u_i(x, 0) - M_i u_i) ((A^{-1}v)_1 - (A^{-1}v)_2) dx.$$

Следовательно, используя (26), получаем, что

$$|a_\varepsilon(u, (A_\varepsilon^{-1} - A^{-1})v)| \leq C\varepsilon \|u\|_{1,\varepsilon} \|A^{-1}v\|.$$

Взяв в последнем неравенстве $u = (A_\varepsilon^{-1} - A^{-1})v$, из (24) получим утверждение леммы.

2.3. Существование и свойства решений масштабированной задачи (20)–(23). Запишем задачу (20)–(23) в операторной форме в пространстве H :

$$\partial_t u + A_{\alpha,\varepsilon} u = B(u) + h_\varepsilon, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0, \quad (30)$$

где $h_\varepsilon = (h_1(x, \varepsilon y); h_2(x, \varepsilon y)) \in H_\varepsilon^1$ и отображение B имеет вид

$$(B(u))(x, y) = (f_1(u_1(x, y)); f_2(u_2(x, y))).$$

Отображение B обладает следующими свойствами.

ЛЕММА 2.2. Пусть выполнено (5). Тогда B отображает пространство $H^1 = H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2)$ в $L^2(\Omega)$, причем

$$\|B(u)\| \leq c(1 + \|u\|_{H^1}^{p+2}),$$

$$\|B(u) - B(v)\| \leq c\|u - v\|_{H^1}(1 + \|u\|_{H^1}^{p+1} + \|v\|_{H^1}^{p+1})$$

для всех $u, v \in H^1$. Если рассматривать B как отображение из H^1 в двойственное пространство $H^{-1} \equiv [H^1(\Omega_1)]' \oplus [H^1(\Omega_2)]'$, то

$$\|B(u) - B(v)\|_{H^{-1}} \leq c\|u - v\|(1 + \|u\|_{H^1}^{p+1} + \|v\|_{H^1}^{p+1}), \quad u, v \in H^1.$$

Кроме того, отображение $B: H^1 \rightarrow L^2(\Omega)$ дифференцируемо по Фреше, его дифференциал задается формулой $B'(u)v = (f'_1(u_1)v_1; f'_2(u_2)v_2)$ для $u, v \in H^1$. При этом для всех $u, v \in H^1$ справедливы оценки

$$\|B'(u)\|_{\mathcal{L}(H^1; H)} \leq c(1 + \|u\|_{H^1}^{p+1}),$$

$$\|B'(u) - B'(v)\|_{\mathcal{L}(H^1; H)} \leq c\|u - v\|_{H^1}(1 + \|u\|_{H^1}^p + \|v\|_{H^1}^p).$$

Если рассматривать B' как отображение из H^1 в $\mathcal{L}(H^1; H^{-1})$, то

$$\|B'(u) - B'(v)\|_{\mathcal{L}(H^1; H^{-1})} \leq c\|u - v\|(1 + \|u\|_{H^1}^p + \|v\|_{H^1}^p)$$

для всех $u, v \in H^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО носит стандартный характер и опирается на непрерывность вложения $H^s(\Omega_i)$ в $L^\theta(\Omega_i)$ при $(d+1)/\theta \geq (d+1)/2 - s$, $s \geq 0$, $\theta \geq 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем говорить, что функция $u(t): [0, +\infty) \rightarrow H$ является сильным решением задачи (30), если $u(0) = u_0$,

$$u(t) \in C([0, +\infty); H_\varepsilon^1) \cap C^1((0, +\infty); H_\varepsilon^1) \cap C((0, +\infty); D(A_{\alpha, \varepsilon}))$$

и $u(t)$ удовлетворяет уравнению (30) при всех $t \in (0, +\infty)$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены условия (5)–(9). Тогда для всех $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \leq 1$ и для любого $u_0 \in H_\varepsilon^1$ задача Коши (30) имеет единственное сильное решение $u_{\alpha, \varepsilon}(t)$. При этом для любого $r > 0$

$$\sup_{t \geq 0} \left[\sup_{a_{\alpha, \varepsilon}(u, u) \leq r} a_{\alpha, \varepsilon}(S_{\alpha, \varepsilon}(t)u, S_{\alpha, \varepsilon}(t)u) \right] \leq c(r), \quad (31)$$

$$t^{1/2} \sup \{ \|A_{\alpha, \varepsilon} S_{\alpha, \varepsilon}(t)u\| : u \in H_\varepsilon^1, a_{\alpha, \varepsilon}(u, u) \leq r \} \leq c(r)(1+t)^{1/2}, \quad t > 0, \quad (32)$$

где $S_{\alpha, \varepsilon}(t)$ – эволюционная полугруппа, порождаемая в пространстве H_ε^1 задачей (30), $S_{\alpha, \varepsilon}(t)u_0 \equiv u_{\alpha, \varepsilon}(t)$.

Кроме того, существует такое число $R > 0$, что для любого шара $U_{\varepsilon, r} = \{u \in H_\varepsilon^1 : a_{\alpha, \varepsilon}(u, u) \leq r\}$ найдется такое $t = t(r)$, что

$$\sup_{u \in U_{\varepsilon, r}} a_{\alpha, \varepsilon}(S_{\alpha, \varepsilon}(t)u, S_{\alpha, \varepsilon}(t)u) \leq R^2 \quad \text{при} \quad t \geq t(r), \quad \varepsilon \in (0, 1], \quad (33)$$

т.е. полугруппа $S_{\alpha, \varepsilon}(t)$ диссипативна в H_ε^1 равномерно по ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование и единственность сильных решений устанавливается стандартным методом (см., например, [5], [13] или [15]). Что касается равномерных оценок (31)–(33), то они могут быть получены с помощью хорошо известных подходов (см., например, [5]), развитых для нелинейных параболических задач. В случае сингулярно возмущенных задач эти подходы ранее применялись, например, в [1], [9], [10].

Опишем схему рассуждений применительно к рассматриваемой задаче. Прежде всего заметим, что для любого сильного решения $u_{\alpha,\varepsilon}(t)$ при $t > 0$ справедливы соотношения

$$\frac{1}{2} \partial_t \|u_{\alpha,\varepsilon}(t)\|^2 + a_{\alpha,\varepsilon}(u_{\alpha,\varepsilon}(t), u_{\alpha,\varepsilon}(t)) = (B(u_{\alpha,\varepsilon}(t)) + h_\varepsilon, u_{\alpha,\varepsilon}(t))_H \quad (34)$$

и

$$\partial_t \varphi_{\alpha,\varepsilon}(u_{\alpha,\varepsilon}(t)) + \|\partial_t u_{\alpha,\varepsilon}(t)\|^2 = 0, \quad (35)$$

где

$$\varphi_{\alpha,\varepsilon}(u) = \frac{1}{2} a_{\alpha,\varepsilon}(u, u) - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} F_i(u_i) dx dy - \int_{\Omega} u h_\varepsilon dx dy. \quad (36)$$

Здесь $F_i(u) = \int_0^u f_i(\xi) d\xi$. Используя (5), (6) и (8), легко обнаружить, что существуют положительные константы c_0, c_1 и K такие, что

$$c_0 a_{\alpha,\varepsilon}(u, u) \leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + \varphi_{\alpha,\varepsilon}(u) + K \leq c_1 (1 + a_{\alpha,\varepsilon}(u, u))^{(p+3)/2}. \quad (37)$$

Пусть $V_{\alpha,\varepsilon}(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 + \varphi_{\alpha,\varepsilon}(u) + K$. Тогда из (6), (7), (34) и (35) вытекает, что существуют константы $\omega > 0$ и $C > 0$ такие, что

$$\partial_t V_{\alpha,\varepsilon}(u_{\alpha,\varepsilon}(t)) + \omega V_{\alpha,\varepsilon}(u_{\alpha,\varepsilon}(t)) \leq C.$$

Отсюда после интегрирования с помощью (37) получаем соотношения (31) и (33).

Для доказательства (32) прежде всего отметим, что при условии $a_{\alpha,\varepsilon}(u_0, u_0) \leq r$ из (35) и (37) вытекает оценка

$$\int_0^t \|\partial_t u_{\alpha,\varepsilon}(\tau)\|^2 d\tau \leq c(r), \quad t > 0. \quad (38)$$

Дальнейшие рассуждения носят формальный характер. Их можно сделать строгими, рассматривая соответствующие галёркинские аппроксимации.

Пусть $v_{\alpha,\varepsilon}(t) = \partial_t u_{\alpha,\varepsilon}(t)$. Тогда функция $v_{\alpha,\varepsilon}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t v_{\alpha,\varepsilon}(t) + A_{\alpha,\varepsilon} v_{\alpha,\varepsilon}(t) = B'(u_{\alpha,\varepsilon}(t)) v_{\alpha,\varepsilon}(t). \quad (39)$$

В силу леммы 2.2

$$(B'(u)v, v)_H \leq \frac{1}{2} a_{\alpha,\varepsilon}(v, v) + C \|v\|^2 (1 + a_{\alpha,\varepsilon}(u, u))^{p+1}.$$

Поэтому из (31) и (39) получаем, что

$$\partial_t \|v_{\alpha,\varepsilon}(t)\|^2 + a_{\alpha,\varepsilon}(v_{\alpha,\varepsilon}(t), v_{\alpha,\varepsilon}(t)) \leq c(r) \|\partial_t u_{\alpha,\varepsilon}(t)\|^2, \quad t > 0,$$

при условии $a_{\alpha,\varepsilon}(u_0, u_0) \leq r$. Отсюда и из (38) вытекает, что

$$t \|\partial_t u_{\alpha,\varepsilon}(t)\|^2 + \int_0^t \tau a_{\alpha,\varepsilon}(\partial_t u_{\alpha,\varepsilon}(\tau), \partial_t u_{\alpha,\varepsilon}(\tau)) d\tau \leq c(r)(1+t). \quad (40)$$

Поэтому, используя (30) и лемму 2.2, легко получить (32).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Используя соотношение (31), а также лемму 2.2 и рассуждения, аналогичные приведенным выше, нетрудно получить равномерную оценку

$$\|S_\varepsilon(t)u^1 - S_\varepsilon(t)u^2\|_{1,\varepsilon} \leq Ce^{Kt}\|u^1 - u^2\|_{1,\varepsilon}, \quad t \geq 0, \quad (41)$$

для любых $u^i \in H_\varepsilon^1$ таких, что $a_{\alpha,\varepsilon}(u^i, u^i) \leq r$, где $r > 0$, $\varepsilon \in (0, 1]$, а числа C , $K > 0$ зависят только от r .

Из теоремы 2.1 и стандартных результатов о существовании и свойствах глобальных аттракторов (см., например, [5], [6], [13]) вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Для каждой пары $(\alpha, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times (0, 1]$ задача (30) порождает компактную диссипативную систему $(H_\varepsilon^1, S_{\alpha,\varepsilon}(t))$, обладающую компактным глобальным аттрактором $\mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}$, лежащим в пространстве $H^2(\Omega_1) \oplus H^2(\Omega_2)$. Этот аттрактор имеет вид $\mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon} = W^u(\mathcal{N}_{\alpha,\varepsilon})$, где $W^u(\mathcal{N}_{\alpha,\varepsilon})$ — неустойчивое многообразие, выходящее из множества $\mathcal{N}_{\alpha,\varepsilon}$ неподвижных точек задачи (30),

$$\mathcal{N}_{\alpha,\varepsilon} = \{u \in D(A_{\alpha,\varepsilon}) : A_{\alpha,\varepsilon}u = B(u)\}.$$

При этом полные траектории $\{u_{\alpha,\varepsilon}(t), t \in \mathbb{R}\}$, лежащие в аттракторе, обладают следующими свойствами:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \{a_{\alpha,\varepsilon}(u_{\alpha,\varepsilon}(t), u_{\alpha,\varepsilon}(t)) + \|A_{\alpha,\varepsilon}u_{\alpha,\varepsilon}(t)\|^2\} \leq R^2, \quad (42)$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ \|\partial_t u_{\alpha,\varepsilon}(t)\|^2 + \int_t^{t+1} a_{\alpha,\varepsilon}(\partial_t u_{\alpha,\varepsilon}(\tau), \partial_t u_{\alpha,\varepsilon}(\tau)) d\tau \right\} \leq R^2, \quad (43)$$

где константа R не зависит от ε .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Очевидно, что эволюционные операторы $T_{\alpha,\varepsilon}(t)$ и $S_{\alpha,\varepsilon}(t)$ связаны соотношением $T_{\alpha,\varepsilon}(t) = R_\varepsilon^{-1}S_{\alpha,\varepsilon}(t)R_\varepsilon$, где оператор растяжения R_ε действует из $H^1(\Omega_{1,\varepsilon}) \oplus H^1(\Omega_{2,\varepsilon})$ в $H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2)$ по формуле

$$[R_\varepsilon u](x, y) = u(x, \varepsilon y), \quad x \in \Gamma, \quad y \in (-1, 1). \quad (44)$$

Это наблюдение, в частности, позволяет из следствия 2.1 извлечь утверждение теоремы 1.1 об аттракторе задачи (1)–(4).

§3. Сходимость эволюционных операторов

В этом параграфе изучается поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ решений масштабированной задачи (20)–(23) на конечных интервалах времени. Установленные здесь утверждения используются при изучении асимптотического поведения аттрактора $\mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}$. Их следствием являются также теоремы 1.2 и 1.3.

ТЕОРЕМА 3.1. Предположим, что $\alpha \geq 1$. Пусть $u(t) = u_\varepsilon(t)$ — решение задачи (20)–(23) с $\|u_0\|_{1,\varepsilon} \leq r$, $\varepsilon \in (0, 1]$, $v(t)$ — решение задачи (10) при $\alpha = 1$

u и $v(t)$ – решение задачи (11) при $\alpha > 1$ с начальным условием $v(0) = Mu(0)$. Обозначим $h(\varepsilon) = \|h\|_{\mathcal{F}_\varepsilon}^2 \equiv \|h_1\|_{H^1(\Omega_{1,\varepsilon})}^2 + \|h_2\|_{H^1(\Omega_{2,\varepsilon})}^2$. Тогда для каждого $r > 0$ существуют константы $c_1(r)$ и $c_2(r)$ такие, что

$$\|Mu(t) - v(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_0^t \|Mu(\tau) - v(\tau)\|_{\mathcal{F}_0}^2 d\tau \leq c_1(r) (\varepsilon^4 + \varepsilon h(\varepsilon)) e^{c_2(r)t}, \quad (45)$$

$$\|u(t) - v(t)\|^2 + \int_0^t \|u(\tau) - v(\tau)\|_{1,\varepsilon}^2 d\tau \leq c_1(r) (\varepsilon^2 + \varepsilon h(\varepsilon)) e^{c_2(r)t}, \quad (46)$$

$$t^{1/2} \|u(t) - v(t)\|_{1,\varepsilon}^2 \leq c_1(r) (\varepsilon^2 + \varepsilon h(\varepsilon))^{1/2} e^{c_2(r)t}. \quad (47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждения проведем только для (наиболее сложного) случая $\alpha = 1$. При $\alpha > 1$ рассуждения аналогичны.

Из (20) вытекает, что величины $M_i u_i$, $i = 1, 2$, удовлетворяют уравнению

$$\partial_t M_i u_i - \nu_i \Delta_\varepsilon M_i u_i - (-1)^i k(x)(u_1(x, 0) - u_2(x, 0)) + a M_i u_i = M_i (f_i(u_i) + h_i^\varepsilon), \quad (48)$$

откуда с учетом (20) легко получить соотношение

$$(\partial_t n_i, n_i)_{L^2(\Omega_i)} - \nu_i (\Delta_\varepsilon n_i, n_i)_{L^2(\Omega_i)} + a (n_i, n_i)_{L^2(\Omega_i)} = (f_i(u_i) + h_i^\varepsilon, n_i)_{L^2(\Omega_i)}, \quad (49)$$

где $n_i = u_i(t) - M_i u_i(t)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t \|n_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \nu_i \|\nabla_\varepsilon n_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + a \|n_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \\ &= (-1)^i \int_\Gamma k(x)(u_1(x, 0) - u_2(x, 0))(u_i(x, 0) - M_i u_i) dx \\ &+ (f_i(u_i), n_i)_{L^2(\Omega_i)} + (h_i^\varepsilon, n_i)_{L^2(\Omega_i)}. \end{aligned} \quad (50)$$

Используя (31) и (26), имеем, что

$$\left| \int_\Gamma \right| \leq c(r) \varepsilon^2 + \frac{\nu_i}{4} \|\nabla_\varepsilon n_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2. \quad (51)$$

В силу леммы 2.2, соотношения (31) и оценки (25) получаем, что

$$|(f_i(u_i), n_i)_{L^2(\Omega_i)}| \leq c(r) \varepsilon^2 + \frac{\nu_i}{4} \|\nabla_\varepsilon n_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2. \quad (52)$$

Аналогично находим, что

$$|(h_i^\varepsilon, n_i)_{L^2(\Omega_i)}| \leq c \varepsilon^2 \|(I - M_i) h_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \frac{\nu_i}{4} \|\nabla_\varepsilon n_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2.$$

Очевидно, что норма $\|(I - M_i) h_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_i)}^2$ равномерно ограничена. Поэтому из (50)–(52) выводим, что

$$\partial_t \|n(t)\|^2 + c \|n(t)\|_{1,\varepsilon}^2 \leq c(r) \varepsilon^2.$$

Так как из (25) вытекает, что $\varepsilon^{-2}\|n\|^2 \leq \|n(t)\|_{1,\varepsilon}^2$, то после интегрирования и применения леммы Гронуолла получаются оценки

$$\|n(t)\|^2 \leq c_1(r)\varepsilon^2 e^{-c_0 t \varepsilon^{-2}} + c_2(r)\varepsilon^4, \quad t \geq 0, \quad (53)$$

и

$$\int_0^t \|n(s)\|_{1,\varepsilon}^2 ds \leq c(r)(1+t)\varepsilon^2, \quad t \geq 0, \quad (54)$$

где $n(t) = Nu(t)$. Далее, из (10) и (48) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t \|M_i u_i - v_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \nu_i \|\nabla(M_i u_i - v_i)\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + a \|M_i u_i - v_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \\ & \leq \int_{\Gamma} |k(x)((u_1(x, 0) - v_1) - (u_2(x, 0) - v_2))(M_i u_i - v_i)| dx \\ & \quad + |(f_i(u_i) - f_i(v_i), M_i u_i - v_i)_{L^2(\Omega_i)}| + |(M_i h^\varepsilon - \gamma_i h, M_i u_i - v_i)_{L^2(\Omega_i)}|, \end{aligned} \quad (55)$$

где $\gamma_i h = h_i(x, 0)$. Используя (25), легко обнаружить, что

$$\int_{\Gamma} |\cdot| \leq c(\|m - v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 \|n\|_{1,\varepsilon}^2), \quad (56)$$

где $m(t) = Mu(t)$. Из леммы 2.2 и оценки (31) вытекает, что

$$\begin{aligned} |(B(u) - B(v), m - v)_H| & \leq c(r) \|u - v\| \|m - v\|_{H^1} \\ & \leq \delta \|m - v\|_{H^1}^2 + \delta^{-1} c(r) (\|m - v\|^2 + \varepsilon^2 \|n\|_{1,\varepsilon}^2) \end{aligned} \quad (57)$$

для любого $\delta > 0$. Выбирая в (57) достаточно малое δ и используя (56), а также очевидное неравенство

$$\sum_{i=1,2} \int_{\Gamma} |M_i h^\varepsilon - \gamma_i h|^2 dx \leq \varepsilon \sum_{i=1,2} \|h_i\|_{H^1(\Omega_{i,\varepsilon})}^2 \equiv \varepsilon h(\varepsilon),$$

из (55) выводим, что

$$\partial_t \|m - v\|^2 + c_1 \|m - v\|_{1,\varepsilon}^2 \leq c(r) (\|m - v\|^2 + \varepsilon^2 \|n\|_{1,\varepsilon}^2) + c_2 \varepsilon h(\varepsilon).$$

Интегрируя последнее неравенство от 0 до t , применяя лемму Гронуолла, оценку (54) и равенство $m(0) = v(0)$, получаем неравенство (45).

Оценка (46) вытекает из (53), (54) и (45).

Докажем теперь неравенство (47). Прежде всего заметим, что для $u \in D(A_\varepsilon)$ и $v \in D(A)$ справедливо неравенство

$$\|u - v\|_{1,\varepsilon}^2 \leq C_1 \|u - v\| (\|A_\varepsilon u\| + \|Av\|) + C_2 \varepsilon^2 \|u\|^2. \quad (58)$$

Действительно, из определения нормы $\|\cdot\|_{1,\varepsilon}$ после интегрирования по частям, используя граничное условие (23), для $w = u - v$ имеем, что

$$\|w\|_{1,\varepsilon}^2 \leq (A_\varepsilon u - Av, w)_H + C \sum_{i,j=1,2} \|u_i\|_{L^2(\Gamma)} \|w_j\|_{L^2(\Gamma)}. \quad (59)$$

Так как

$$\|u_i\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|u_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + 2\|u_i\|_{L^2(\Omega_i)} \|\partial_y u_i\|_{L^2(\Omega_i)}$$

и $\partial_y u_i = \partial_y w_i$, то нетрудно обнаружить, что

$$\|u_i\|_{L^2(\Gamma)} \|w_j\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_1 \|w\| (\|u\| + \|w\|) + C_2 \varepsilon^2 \|u\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} \sum_{i=1,2} \|\partial_y w_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2.$$

Отсюда и из (59) вытекает (58).

Используя (31) и (32) вместе с аналогичным соотношением для предельной задачи, из (58) получаем, что

$$t^{1/2} \|u(t) - v(t)\|_{1,\varepsilon}^2 \leq c_1(r)(1+t)^{1/2} \|u(t) - v(t)\| + c_2(r)\varepsilon^2 t^{1/2}.$$

Отсюда и из (46) вытекает оценка (47).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Очевидно, что

$$M^\varepsilon T_{\alpha,\varepsilon} w_0 = M S_{\alpha,\varepsilon} R_\varepsilon w_0, \quad M^\varepsilon w_0 = M R_\varepsilon w_0, \quad (60)$$

где оператор R_ε определен равенством (44). Кроме того,

$$\|R_\varepsilon w_0\|_{1,\varepsilon}^2 \leq \frac{C}{\varepsilon} (\|w_{1,0}\|_{H^1(\Omega_{1,\varepsilon})}^2 + \|w_{2,0}\|_{H^1(\Omega_{2,\varepsilon})}^2).$$

Поэтому (13) вытекает из неравенства (45). Что касается (14), то следует воспользоваться соотношением (13), интерполяционным неравенством $\|u\|_{H^s(\Gamma)} \leq C \|u\|_{L^2(\Gamma)}^{1-s} \|u\|_{H^1(\Gamma)}^s$ и равномерной оценкой (31).

Рассмотрим теперь случай $\alpha < 1$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\alpha < 1$ и $u(t) \equiv (u_1^\varepsilon(t); u_2^\varepsilon(t))$ — решение задачи (20)–(23) с начальными условиями $u_{1,0}(x, y) = v_0(x)$ и $u_{2,0}(x, y) = v_0(x)$, где $v_0 \in H^1(\Gamma)$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1,2} \sup_{t \in [0, T]} \|M u_i^\varepsilon(t) - v(t)\|_{H^s(\Gamma)} = 0 \quad (61)$$

для любого $0 \leq s < 1$, где $v(t)$ — решение задачи (12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $a_{\alpha,\varepsilon}(u_0, u_0)$ не зависит от ε . Поэтому из теоремы 2.1 вытекает равномерная оценка

$$\sum_{i=1,2} \left(\|u_i^\varepsilon(t)\|_{H^1(\Omega_i)}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|\partial_y u_i^\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right) + \frac{1}{\varepsilon^{1-\alpha}} \int_{\Gamma} |u_1^\varepsilon(t) - u_2^\varepsilon(t)|^2 dx \leq C$$

для всех $t \in [0, T]$. Кроме того, из (38) имеем, что

$$\sum_{i=1,2} \int_0^T \|\partial_t u_i^\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega_i)}^2 dt \leq C.$$

Поэтому из теоремы Дубинского [5; гл. I, § 1, теорема 4] вытекает, что существуют функции

$$v(t) \in C(0, T; L^2(\Gamma)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Gamma))$$

и последовательность $\{\varepsilon_n\}$ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1,2} \sup_{t \in [0, T]} \|u_i^{\varepsilon_n}(t) - v(t)\|_{L^2(\Omega_i)} = 0 \quad (62)$$

и $u_i^{\varepsilon_n}(t) \rightarrow v(t)$ *-слабо в $L^\infty(0, T; H^1(\Omega_i))$. Покажем, что $v(t)$ является решением задачи (12). Для этого воспользуемся вариационной формой задачи (20)–(23):

$$(u^\varepsilon(t), \psi)_H + \int_0^t a_{\alpha,\varepsilon}(u^\varepsilon(\tau), \psi) d\tau = (u_0, \psi)_H + \int_0^t (B(u^\varepsilon(\tau)) + h^\varepsilon, \psi)_H d\tau \quad (63)$$

для любых $\psi \in H_\varepsilon^1$. Выбирая функцию ψ в виде $\psi = (\psi_0(x); \psi_0(x))$, где $\psi_0(x) \in H^1(\Gamma)$, находим, что

$$a_{\alpha,\varepsilon}(u^\varepsilon(\tau), \psi) = \sum_{i=1,2} \int_{\Omega_i} (\nu_i \nabla_x u_i^\varepsilon(\tau, x, y) \cdot \nabla_x \psi_0(x) + a u_i^\varepsilon(\tau, x, y) \psi_0(x)) dx dy.$$

Поэтому, используя лемму 2.2, можно совершить в (63) предельный переход и убедиться в том, что $v(t)$ является решением задачи (12).

Неравенство (61) вытекает из (62) и равномерной оценки (31).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Достаточно воспользоваться равенством $M^\varepsilon w^\varepsilon = M u^\varepsilon$ и теоремой 3.2.

§ 4. Асимптотические свойства аттрактора масштабированной системы

В этом параграфе устанавливаются асимптотические свойства аттрактора $\mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}$ масштабированной задачи (20)–(23), позволяющие доказать теоремы 1.4–1.6.

4.1. Полунепрерывность сверху.

ТЕОРЕМА 4.1. *Для любых $\alpha \geq 1$ справедливо соотношение*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{u \in \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}} \inf_{v \in \mathcal{A}_\alpha} \|u - v\|_{1,\varepsilon} = 0, \quad (64)$$

где $\mathcal{A}_\alpha$ – глобальный аттрактор задачи (10) при $\alpha = 1$ и (11) при $\alpha > 1$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся соответствующим рассуждением из [1] (см. также [5]). Пусть $u \in \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}$. Тогда в силу (42)

$$\|Mu\|_{H^1(\Gamma)} \leq \|u\|_{1,\varepsilon} \leq R, \quad \varepsilon \in (0, 1],$$

для некоторого $R > 0$. Поэтому для любого $\delta > 0$ существует такое $T = T(\delta, R) > 0$, что

$$\inf_{w \in \mathcal{A}_\alpha} \|S_\alpha(t)Mu - w\|_{H^1(\Gamma)} \leq \delta, \quad u \in \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}, \quad t \geq T. \quad (65)$$

Из (47) следует, что для $0 < \tau \leq t \leq T$

$$\|S_{\alpha,\varepsilon}(t)u - S_\alpha(t)Mu\|_{1,\varepsilon} \leq \tau^{-1/4}(\varepsilon^2 + \varepsilon h(\varepsilon))^{1/4} c_1(R) e^{c_2(R)T} \quad (66)$$

при всех $u \in \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}$. Соотношения (65) и (66) влекут оценку

$$\inf_{w \in \mathcal{A}_\alpha} \|S_{\alpha,\varepsilon}(T)u - w\|_{1,\varepsilon} \leq \delta + \tau^{-1/4}(\varepsilon^2 + \varepsilon h(\varepsilon))^{1/4} c_1(R) e^{c_2(R)T}$$

для всех $u \in \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}$. Теперь утверждение теоремы сразу следует из последнего неравенства, так как $S_{\alpha,\varepsilon}(T)\mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon} = \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Так как $\|M_i f_i\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|f_i\|_{L^2(\Omega_i)}$ для всех $f_i \in L^2(\Omega_i)$, то

$$\|Mu - v\|_{H^1(\Gamma) \oplus H^1(\Gamma)} = \|M(u - v)\|_{H^1(\Gamma) \oplus H^1(\Gamma)} \leq c\|u - v\|_{1,\varepsilon}. \quad (67)$$

Поэтому утверждение теоремы 1.4 вытекает из теоремы 4.1.

Точно так же для доказательства теоремы 1.5 достаточно установить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\alpha < 1$ и $\mathcal{A}_\alpha$ определяется формулой

$$\mathcal{A}_\alpha = \{(v; v) \in H^1(\Gamma) \oplus H^1(\Gamma) : v \in \tilde{\mathcal{A}}\}, \quad (68)$$

где $\tilde{\mathcal{A}}$ – глобальный аттрактор задачи (12). Тогда имеет место соотношение (64).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что (64) неверно. Тогда существуют $\eta > 0$ и последовательности $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и $u^n \in \mathcal{A}_{\alpha, \varepsilon_n}$ такие, что

$$\inf_{v \in \mathcal{A}_\alpha} \|u^n - v\|_{1, \varepsilon_n} > \eta. \quad (69)$$

Пусть $\{u^n(t) : t \in \mathbb{R}\}$ – полная траектория, лежащая в аттракторе $\mathcal{A}_{\alpha, \varepsilon_n}$ и проходящая через u^n , $u^n(0) = u^n$. Следствие 2.1 дает, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \left(\|\nabla_x u_i^n(t)\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \frac{1}{\varepsilon_n^2} \|\partial_y u_i^n(t)\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \|u_i^n(t)\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right) &\leq C, \\ \frac{1}{\varepsilon^{1-\alpha}} \int_{\Gamma} |u_1^n(t) - u_2^n(t)|^2 dx &\leq C, \quad \int_t^{t+1} \|\partial_t u_i^n(\tau)\|_{1, \varepsilon_n}^2 d\tau \leq C \end{aligned}$$

для всех $t \in \mathbb{R}$. В частности,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ \|\partial_y u_1^n(t)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|\partial_y u_2^n(t)\|_{L^2(\Omega_2)}^2 + \int_{\Gamma} |u_1^n(t) - u_2^n(t)|^2 dx \right\} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Используя теорему Дубинского [5; гл. I, §1, теорема 4], заключаем, что существуют функция $v(t) \in C_b(\mathbb{R}, L^2(\Gamma)) \cap L^\infty(\mathbb{R}, H^1(\Gamma))$ и подпоследовательность $\{n_k\}$ такие, что

$$\max_{t \in [a, b]} \left\{ \|u_1^{n_k}(t) - v(t)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|u_2^{n_k}(t) - v(t)\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \right\} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

и $u_i^{n_k}(t) \rightarrow v(t)$ *-слабо в $L^\infty(a, b; H^1(\Gamma))$ для любого интервала $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Далее, как и при доказательстве теоремы 3.2, переходя к пределу в вариационной формулировке задачи (20)–(23), нетрудно обнаружить, что $v(t)$ – ограниченное на $\mathbb{R}$ решение задачи (12) и $v(t) \in C_b(\mathbb{R}, H^1(\Gamma))$. Поэтому оно принадлежит аттрактору $\tilde{\mathcal{A}}$ и, значит, $\tilde{v}(t) \equiv (v(t); v(t)) \in \mathcal{A}_\alpha$. При этом очевидно, что $\tilde{v}(t) \in D(A_{\alpha, \varepsilon})$ и $\|A_{\alpha, \varepsilon} \tilde{v}(t)\| \leq C$. Следовательно, интерполяционное неравенство

$$a_{\alpha, \varepsilon_n} (u^n - \tilde{v}, u^n - \tilde{v}) \leq C \|u^n - \tilde{v}\| \|A_{\alpha, \varepsilon_n} (u^n - \tilde{v})\|$$

и оценка (42) дают, что

$$\max_{t \in [a, b]} \|u^{n_k}(t) - \tilde{v}(t)\|_{1, \varepsilon_{n_k}}^2 \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

для любого интервала $[a, b] \subset \mathbb{R}$. В частности, $\|u^{n_k}(0) - \tilde{v}(0)\|_{1, \varepsilon_{n_k}}^2 \rightarrow 0$, что противоречит предположению (69).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из теорем 4.1 и 4.2 для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ можно извлечь также следующее свойство элементов аттрактора $\mathcal{M}_{\alpha,\varepsilon}$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{u \in \mathcal{M}_{\alpha,\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1,2} \int_{\Omega_{i,\varepsilon}} |\partial_z u_i(x, z)|^2 dx dz = 0.$$

Подобным образом (за счет (46)) может быть также усилена и теорема 1.2. Кроме того, использование соотношения (43) позволяет получить в теоремах 4.1 и 4.2 полунепрерывность аттрактора в более сильных (чем H_ε^1) нормах.

4.2. Полная непрерывность аттракторов. В случае, когда аттрактор соответствующей предельной задачи регулярен (ситуация “общего положения”, см. [5] и [13]), можно также установить непрерывность в H_ε^1 семейства $\{\mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $\alpha \geq 1$. Пусть все неподвижные точки задачи (10) при $\alpha = 1$ ((11) при $\alpha > 1$) гиперболические. Тогда для некоторых $C, \varepsilon_0, \sigma > 0$ справедливо соотношение

$$\sup_{v \in \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}} \inf_{u \in \mathcal{A}_\alpha} \|u - v\|_{1,\varepsilon} + \sup_{v \in \mathcal{A}_\alpha} \inf_{u \in \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}} \|u - v\|_{1,\varepsilon} \leq C\varepsilon^\sigma, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad (70)$$

где $\mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}$ — глобальный аттрактор задачи (20)–(23), $\mathcal{A}_\alpha$ — глобальный аттрактор соответствующей предельной задачи.

Очевидно, что утверждение теоремы 1.6 вытекает из теоремы 4.3, замечания 2.2 и соотношений (60) и (67).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. В случае $\alpha \geq 1$ непосредственной проверкой можно доказать, что

$$\sum_{i=1,2} \|\nabla_x \partial_y u_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \leq c_0 \varepsilon^2 \|A_{\alpha,\varepsilon} u\|^2, \quad u \in D(A_{\alpha,\varepsilon}).$$

Поэтому, используя (26) и (42), легко убедиться в том, что

$$\sup_{u \in \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}} \|Mu - \gamma u\|_{H^1(\Gamma) \oplus H^1(\Gamma)} \leq c\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

где γ — оператор следа, $\gamma(u_1; u_2) = (u_1(x, +0); u_2(x, -0))$. Это обстоятельство позволяет утверждать, что теоремы 1.4 и 1.6 остаются в силе, если вместо оператора M^ε подставить в (16) и (19) оператор следа γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.3 следует хорошо известной схеме (ср. [5], [7], [8]). Однако ввиду того, что предельная полугруппа $S_\alpha(t)$ действует лишь на некотором подпространстве фазового пространства H_ε^1 , мы не можем непосредственно применять известные общие теоремы о непрерывной зависимости от параметра семейства аттракторов (см., например, [5]) и должны заново получить некоторые оценки в нашей конкретной ситуации.

Доказательство теоремы проведем лишь для случая $\alpha = 1$. Рассуждения в случае $\alpha > 1$ аналогичны. В дальнейшем для краткости полагаем $S_\varepsilon(t) = S_{1,\varepsilon}(t)$, $S(t) = S_1(t)$ и $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathcal{A}_{1,\varepsilon}$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$.

Основным фактом, используемым при доказательстве соотношений вида (70), кроме близости полугрупп $S_\varepsilon(t)$ и $S(t)$ является равномерное (по ε) экспоненциальное притяжение ограниченных множеств аттракторами $\mathcal{A}_\varepsilon$ (см., например, [5; гл. VIII, теорема 2.1]). Доказательство этого факта (см. лемму 4.4) основано на изучении неподвижных точек полугруппы $S_\varepsilon(t)$ и свойств ее линеаризаций в окрестности этих точек.

4.2.1. Неподвижные точки $S_\varepsilon(t)$. Прежде всего отметим, что имеет место полунепрерывность сверху по норме H_ε^1 при $\varepsilon \rightarrow 0$ семейства $\{\mathcal{N}_\varepsilon : \varepsilon \in (0, 1]\}$ неподвижных точек задачи (20)–(23), т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{u \in \mathcal{N}_\varepsilon} \inf_{v \in \mathcal{N}} \|u - v\|_{1,\varepsilon} = 0, \quad (71)$$

где $\mathcal{N}$ – множество неподвижных точек задачи (10). Это свойство вытекает из полунепрерывности сверху семейства $\{\mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ (см. теорему 4.1) и может быть установлено тем же методом, что и в [10].

Отметим, что если все неподвижные точки задачи (10) гиперболически, то их число конечно, $\text{card } \mathcal{N} < \infty$ (см. [5]).

ЛЕММА 4.1. 1) Пусть v – неподвижная гиперболическая точка полугруппы $S(t)$. Для любого $0 < q < 1$ существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в окрестности $\mathcal{W}_\varepsilon \equiv \{u \in H_\varepsilon^1 : \|u - v\|_{1,\varepsilon} < \varepsilon^q\}$ содержится единственная неподвижная точка u_ε полугруппы $S_\varepsilon(t)$.

2) Предположим, что все неподвижные точки задачи (10) гиперболически. Тогда множество $\mathcal{N}_\varepsilon$ конечно, $\text{card } \mathcal{N}_\varepsilon = \text{card } \mathcal{N}$ и справедлива оценка

$$\sup_{v \in \mathcal{N}_\varepsilon} \inf_{u \in \mathcal{N}} \|u - v\|_{1,\varepsilon} + \sup_{v \in \mathcal{N}} \inf_{u \in \mathcal{N}_\varepsilon} \|u - v\|_{1,\varepsilon} \leq \varepsilon^q, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad 0 < q < 1. \quad (72)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех $\delta > 0$, $0 < \varepsilon \leq 1$, $u \in H_\varepsilon^1$ положим

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(u) &= u - A_\varepsilon^{-1}B(u), \quad \Phi_\varepsilon(u) = u - (G'_\varepsilon(v))^{-1}G_\varepsilon(u), \\ \Psi_{\varepsilon,\delta}(u) &= \eta\left(\frac{\|u - v\|_{1,\varepsilon}}{\delta}\right)\Phi_\varepsilon(u) + \left(1 - \eta\left(\frac{\|u - v\|_{1,\varepsilon}}{\delta}\right)\right)\Phi_\varepsilon(v), \end{aligned}$$

где $\eta(r) \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $\text{supp } \eta \subset [-2, 2]$, $\eta(r) = 1$ при $r \in [-1, 1]$. Как и ранее, полагаем $A_\varepsilon = A_{1,\varepsilon}$ и $A = A_1$.

Покажем, что для любого достаточно малого $\delta > 0$ и для любого $0 < q < 1$ существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ отображение $\Psi_{\varepsilon,\delta}$ корректно определено и является сжимающим на пространстве H_ε^1 , причем соответствующая неподвижная точка не зависит от δ и является единственным элементом множества $\mathcal{N}_\varepsilon \cap \mathcal{W}_\varepsilon$.

Шаг 1. Покажем, что для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\|(G'_\varepsilon(v))^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^1_\varepsilon; H^1_\varepsilon)} \leq C. \quad (73)$$

Используя леммы 2.1 и 2.2, имеем

$$\|(A_\varepsilon^{-1}B'(v) - A^{-1}B'(v))Mu\|_{1,\varepsilon} \leq C\varepsilon\|B'(v)Mu\| \leq C\varepsilon\|Mu\|_{1,\varepsilon}. \quad (74)$$

Поскольку $v \in H^2(\Gamma_1) \oplus H^2(\Gamma_2)$, то в силу (5) оператор $B'(v) \in \mathcal{L}(H; H)$. Следовательно, с помощью (25) получаем, что

$$\|A_\varepsilon^{-1}B'(v)Nu\|_{1,\varepsilon} \leq C_1\|A_\varepsilon^{-1/2}B'(v)Nu\| \leq C_2\varepsilon\|Nu\|_{1,\varepsilon} \quad (75)$$

для любого $u \in H^1_\varepsilon$ и некоторых $C_i > 0$. Легко видеть (ср., например, [13; лемма 2.5.4]), что оператор $G'(v) = I - A^{-1}B'(v)M$ фредгольмов. А так как оператор $A - B'(v)$ обратим на MH (v – неподвижная гиперболическая точка), то оператор $G'(v)$ обратим на H^1_ε . Поэтому (74) и (75) дают, что $G'_\varepsilon(v)$ обратим при всех достаточно малых ε , причем соотношение (73) выполняется с константой C , не зависящей от ε . В частности, отображение $\Psi_{\varepsilon,\delta}$ корректно определено.

Шаг 2. Пусть $0 < q < 1$, $\delta > 0$. Проверим, что для достаточно малых $\varepsilon > 0$ $\Psi_{\varepsilon,\delta}$ отображает шар $B^\varepsilon(\varepsilon^q, v) \equiv \{u \in H^1_\varepsilon : \|u - v\|_{1,\varepsilon} \leq \varepsilon^q\}$ в себя.

Так как $v = A^{-1}B(v)$, имеем

$$v - \Psi_{\varepsilon,\delta}(v) = (G'_\varepsilon(v))^{-1}G_\varepsilon(v) = (G'_\varepsilon(v))^{-1}(A^{-1} - A_\varepsilon^{-1})B(v).$$

Поэтому из (73) и леммы 2.1 следует, что

$$\|v - \Psi_{\varepsilon,\delta}(v)\|_{1,\varepsilon} \leq C\varepsilon. \quad (76)$$

Легко убедиться, что

$$\Phi_\varepsilon(u) - \Phi_\varepsilon(w) = (G'_\varepsilon(v))^{-1}A_\varepsilon^{-1}(B(u) - B(w) - B'(v)(u - w)) \quad (77)$$

для всех $u, w \in H^1_\varepsilon$. Так как $\|A_\varepsilon^{-1/2}y\| \leq C\|y\|_{H^{-1}}$, то из (73) вытекает, что

$$\|\Phi_\varepsilon(u) - \Phi_\varepsilon(v)\|_{1,\varepsilon} \leq C\|B(u) - B(v) - B'(v)(u - v)\|_{H^{-1}}.$$

Поэтому в силу леммы 2.2

$$\|\Phi_\varepsilon(u) - \Phi_\varepsilon(v)\|_{1,\varepsilon} \leq C(1 + \|u\|_{H^1}^p + \|v\|_{H^1}^p)\|u - v\|_{H^1}^2. \quad (78)$$

Следовательно,

$$\|\Psi_{\varepsilon,\delta}(u) - \Psi_{\varepsilon,\delta}(v)\|_{1,\varepsilon} \leq \eta\left(\frac{\|u - v\|_{1,\varepsilon}}{\delta}\right)\|\Phi_\varepsilon(u) - \Phi_\varepsilon(v)\|_{1,\varepsilon} \leq C\varepsilon^{2q}$$

для $u \in B^\varepsilon(\varepsilon^q, v)$. Поэтому из (76) получаем, что

$$\|v - \Psi_{\varepsilon, \delta}(u)\|_{1, \varepsilon} \leq C(\varepsilon + \varepsilon^{2q}) \leq \varepsilon^q, \quad u \in B^\varepsilon(\varepsilon^q, v),$$

для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Шаг 3. Отображение $\Psi_{\varepsilon, \delta}$ является сжимающим на H_ε^1 при всех достаточно малых $\delta > 0$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Действительно, очевидно, что

$$\Psi'_{\varepsilon, \delta}(u)h = \eta \left(\frac{\|u - v\|_{1, \varepsilon}}{\delta} \right) \Phi'_\varepsilon(u)h + \frac{1}{\delta} \eta' \left(\frac{\|u - v\|_{1, \varepsilon}}{\delta} \right) \frac{(u - v, h)_{1, \varepsilon}}{\|u - v\|_{1, \varepsilon}} (\Phi_\varepsilon(u) - \Phi_\varepsilon(v))$$

для любого $u \in H_\varepsilon^1$. Из (78) вытекает, что

$$\|\Phi_\varepsilon(u) - \Phi_\varepsilon(v)\|_{1, \varepsilon} \leq C\delta^2$$

при условии, что $\|u - v\|_{1, \varepsilon} \leq 2\delta$, $\delta < 1$. Из (77) следует, что

$$\Phi'_\varepsilon(u) = (G'_\varepsilon(v))^{-1} A_\varepsilon^{-1} (B'(u) - B'(v)).$$

Поэтому легко видеть, что $\|\Phi'_\varepsilon(u)\|_{\mathcal{L}(H_\varepsilon^1; H_\varepsilon^1)} \leq C\delta$, если $\|u - v\|_{1, \varepsilon} \leq 2\delta$. Следовательно, $\|\Psi'_{\varepsilon, \delta}(u)\|_{\mathcal{L}(H_\varepsilon^1; H_\varepsilon^1)} \leq C\delta$ для всех $u \in H_\varepsilon^1$. Отсюда вытекает сжимаемость отображения $\Psi_{\varepsilon, \delta}$ в H_ε^1 для достаточно малых $\delta > 0$. Так как $\Psi_{\varepsilon, \delta}$ отображает $B^\varepsilon(\varepsilon^q, v)$ в себя, то единственная неподвижная точка $u_{\varepsilon, \delta}$ для $\Psi_{\varepsilon, \delta}$ лежит в $B^\varepsilon(\varepsilon^q, v)$. В случае, когда $\varepsilon^q < \delta$, имеем $u_{\varepsilon, \delta} \in \mathcal{N}_\varepsilon$.

Докажем вторую часть леммы. Из (71) вытекает, что для достаточно малых ε каждая неподвижная точка $u_\varepsilon \in \mathcal{N}_\varepsilon$ попадает в δ -окрестность некоторой точки $v \in \mathcal{N}$, т.е. u_ε является единственной неподвижной точкой отображения $\Psi_{\varepsilon, \delta}$ для некоторого δ . При этом можно считать, что δ -окрестности различных неподвижных точек из $\mathcal{N}$ не пересекаются. Следовательно, $u_\varepsilon \in \mathcal{W}_\varepsilon$ и справедлива оценка (72). Лемма доказана.

4.2.2. Равномерное экспоненциальное притяжение.

ЛЕММА 4.2. Для любых $v \in MH_\varepsilon^1$, $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ существуют такие $\varepsilon_0 > 0$, $\rho > 0$, что для всех $u \in H_\varepsilon^1$, $\|u - v\|_{1, \varepsilon} \leq \rho$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, выполняется соотношение

$$\max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_{j, \varepsilon}(u) - \lambda_j(v)| \leq \delta,$$

где $\lambda_{1, \varepsilon}(u) \leq \lambda_{2, \varepsilon}(u) \leq \dots$ ($\lambda_1(v) \leq \lambda_2(v) \leq \dots$) – собственные числа оператора $A_\varepsilon - B'(u)$ ($A - B'(v)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим операторы

$$\begin{aligned} C_\varepsilon(u)g &= (A_\varepsilon - B'(u) + b)g, \quad g \in D(A_\varepsilon), \\ C(v)h &= (A - B'(v) + b)h, \quad h \in D(A), \end{aligned}$$

где $b > 0$ достаточно велико. Легко проверить (см. [16; гл. 5, теорема 4.11]), что $C_\varepsilon(u)$ ($C(v)$) – самосопряжен и положителен в пространстве H (MH). Пусть $c_\varepsilon^u(g, h)$ и $c^v(g, h)$ – билинейные формы на H_ε^1 , соответствующие операторам $C_\varepsilon(u)$ и $C(v)$. Рассуждая, как и при доказательстве леммы 2.1, находим, что

$$\begin{aligned} c_\varepsilon^u((C_\varepsilon(u)^{-1} - C(v)^{-1})g, h) &= ((B'(u) - B'(v))C(v)^{-1}g, h)_H \\ &+ \sum_{i=1}^2 (-1)^i \int_{\Gamma} k(x)(h_i(x, 0) - M_i h_i)((C(v)^{-1}g)_1 - (C(v)^{-1}g)_2) dx \end{aligned}$$

для всех $g \in MH \cap H_\varepsilon^1$ и $h \in H_\varepsilon^1$. Поэтому, используя лемму 2.2, как и ранее, получаем, что

$$\begin{aligned} |c_\varepsilon^u((C_\varepsilon(u)^{-1} - C(v)^{-1})g, h)| &\leq C\varepsilon \|h\|_{1,\varepsilon} \|C(v)^{-1}g\| \\ &+ C\|h\|_{1,\varepsilon} (1 + \|u\|_{1,\varepsilon}^p + \|v\|_{1,\varepsilon}^p) \|u - v\|_{1,\varepsilon} \|g\|. \end{aligned}$$

Так как $c_\varepsilon^u(h, h) \geq \beta \|h\|_{1,\varepsilon}^2$, $\beta > 0$, после подстановки $h = (C_\varepsilon(u)^{-1} - C(v)^{-1})g$, получаем, что

$$\|(C_\varepsilon(u)^{-1} - C(v)^{-1})g\|_{1,\varepsilon} \leq C(\varepsilon + (1 + \|u\|_{1,\varepsilon}^p + \|v\|_{1,\varepsilon}^p) \|u - v\|_{1,\varepsilon}) \|g\|.$$

Полученное соотношение позволяет применить к $C_\varepsilon(u)$ теорему о спектре и собственных векторах сингулярно возмущенного семейства операторов (см. [17; теорема 1]) и получить утверждение леммы.

ЛЕММА 4.3. Пусть $U_{\varepsilon,R} = \{u \in H_\varepsilon^1 : \|u\|_{1,\varepsilon} \leq R\}$ – поглощающее множество для полугруппы $S_\varepsilon(t)$, $\varepsilon \in (0, 1]$. Для любого $\delta > 0$ существует $T = T(\delta) > 0$ такое, что при всех $0 < \varepsilon \leq 1$, $u \in U_{\varepsilon,R}$ найдется $t \in [0, T]$, для которого выполняется соотношение

$$\inf_{w \in \mathcal{N}_\varepsilon} \|S_\varepsilon(t)u - w\|_{1,\varepsilon} < \delta. \quad (79)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что для любого $\delta > 0$ существуют $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ и $T_0 > 0$ такие, что для всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $u \in U_{\varepsilon,R}$ выполняется соотношение

$$\inf_{v \in \mathcal{N}} \|S_\varepsilon(t)u - v\|_{1,\varepsilon} < \delta \quad (80)$$

для некоторого $t \in [0, T_0]$. Если это не так, то существуют число $\delta > 0$ и последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, $\{u^n\}_{n=1}^\infty \subset U_{\varepsilon,R}$ такие, что

$$\inf_{v \in \mathcal{N}} \|S_{\varepsilon_n}(t)u^n - v\|_{1,\varepsilon_n} \geq \delta, \quad t \in [0, n], \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу (47) на любом интервале $t \in [1, m]$, $m \in \mathbb{N}$, имеем

$$\inf_{v \in \mathcal{N}} \|S(t)Mu^n - v\|_{1, \varepsilon_n} \geq \inf_{v \in \mathcal{N}} \|S_{\varepsilon_n}(t)u^n - v\|_{1, \varepsilon_n} - \|S(t)Mu^n - S_{\varepsilon_n}(t)u^n\|_{1, \varepsilon_n} \geq \frac{\delta}{2}$$

для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $S(1)Mu^n$, очевидно, ограничена в $H^2(\Gamma) \oplus H^2(\Gamma)$, а значит, содержит сходящуюся в $H^1(\Gamma) \oplus H^1(\Gamma)$ подпоследовательность. Тогда для соответствующей предельной точки w имеем

$$\inf_{v \in \mathcal{N}} \|S(t-1)w - v\|_{H^1(\Gamma) \oplus H^1(\Gamma)} \geq \frac{\delta}{2}, \quad t \geq 1,$$

что противоречит тому, что (10) имеет функционал Ляпунова на фазовом пространстве и любая полутраектория должна стремиться к множеству неподвижных точек. Следовательно, неравенство (80) справедливо с какими-то $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ и $T_0 > 0$.

В силу (72) и (80) для любого $\delta > 0$ существует $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ такое, что при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $u \in U_{\varepsilon, R}$ и некотором $t \in [0, T_0]$ выполняется соотношение

$$\inf_{w \in \mathcal{N}_\varepsilon} \|S_\varepsilon(t)u - w\|_{1, \varepsilon} \leq \inf_{v \in \mathcal{N}} \|S_\varepsilon(t)u - v\|_{1, \varepsilon} + \sup_{v \in \mathcal{N}} \inf_{w \in \mathcal{N}_\varepsilon} \|v - w\|_{1, \varepsilon} < \delta. \quad (81)$$

Семейство полугрупп $S_\varepsilon(t)$ при $\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq 1$ обладает функционалом Ляпунова $\varphi_\varepsilon(u)$, непрерывным на $H_\varepsilon^1 \times [\varepsilon_0, 1]$ (см. (36)), и удовлетворяет оценке (41). Применяя теорему 2.1, легко проверить, что множество $U = \bigcup_{\varepsilon \in [\varepsilon_0, 1]} S_\varepsilon(1)U_{\varepsilon, R}$ компактно в H_ε^1 и является поглощающим (равномерно по ε) для всех полугрупп $S_\varepsilon(t)$ с $\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq 1$. Отсюда легко вывести (см., например, [5; гл. IX, § 1, лемма 1]), что для любого $\delta > 0$ найдется такое $T_1 > 0$, что при $u \in U$ для некоторого $t \in [0, T_1]$ имеет место (79). Учитывая оценку (81) и полагая $T = T_0 + T_1 + 1$, получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 4.4. *Существуют $\varepsilon_0 > 0$ и константы $C > 0$ и $\eta > 0$ такие, что*

$$\sup_{u \in U_{\varepsilon, R}} \inf_{w \in \mathcal{A}_\varepsilon} \|S_\varepsilon(t)u - w\|_{1, \varepsilon} \leq Ce^{-\eta t}, \quad t \geq 0, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad (82)$$

где $U_{\varepsilon, R} = \{u \in H_\varepsilon^1 : \|u\|_{1, \varepsilon} \leq R\}$ – поглощающее множество для полугруппы $S_\varepsilon(t)$ (см. (33)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4.1 множество $\mathcal{N}_\varepsilon$ неподвижных точек для $S_\varepsilon(t)$ при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ является конечным. Из леммы 4.2 вытекает, что эти точки гиперболичны. Все полугруппы $S_\varepsilon(t)$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, диссипативны, компактны, обладают функционалом Ляпунова на пространстве H_ε^1 и удовлетворяют оценке (41). Кроме того, применяя теорему 1 [5; гл. 7, § 1] и свойства дифференцируемости отображения B (лемма 2.2), нетрудно убедиться, что $S_\varepsilon(t)$ принадлежит

классу $C^1(H_\varepsilon^1)$ и соответствующая производная Фреше $[S'_\varepsilon(t)u]$ является эволюционным оператором задачи

$$\partial_t w + A_\varepsilon w = B'(S_\varepsilon(t)u)w.$$

При этом $[S'_\varepsilon(t)u]$ удовлетворяет оценкам, аналогичным неравенствам (41) и (47) (и получаемым аналогичным образом), а именно,

$$\begin{aligned} \| [S'_\varepsilon(t)u_1] - [S'_\varepsilon(t)u_2] \|_{\mathcal{L}(H_\varepsilon^1; H_\varepsilon^1)} &\leq C_1 e^{L_1 t} \|u_1 - u_2\|_{1, \varepsilon}, \\ t^{1/2} \| [S'_\varepsilon(t)u_1]u_2 - [S'_\varepsilon(t)Mu_1]Mu_2 \|_{1, \varepsilon}^2 &\leq C_2 \varepsilon e^{L_2 t}, \end{aligned} \quad (83)$$

где $t \geq 0$, $\varepsilon \in (0, 1]$, $\|u_1\|_{1, \varepsilon}, \|u_2\|_\varepsilon \leq r$, а константы C_1, C_2, L_1, L_2 зависят только от r . Поэтому можно применить теорему 1 [5; гл. V, § 7] и получить, что для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ существуют такие $C_\varepsilon, \eta_\varepsilon$, что (82) выполняется с $C = C_\varepsilon$ и $\eta = \eta_\varepsilon$. Однако постоянная η_ε зависит только от числа K в оценке (41) и от некоторого конечного (и не зависящего от ε) числа собственных значений операторов $A_\varepsilon - B'(u)$ с $u \in \mathcal{N}_\varepsilon$ (которые близки по лемме 4.2 к соответствующим собственным значениям операторов $A - B'(v)$ с $v \in \mathcal{N}$) (см. [5; гл. V, § 7]). Постоянная C_ε зависит от времени $T = T(\delta)$ из леммы 4.3 и от равномерно по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ограниченных характеристик полугруппы $S_\varepsilon(t)$, а именно, от постоянных в соотношениях (83) и в оценках, приведенных в теоремах 2.1 и 3.1 (см. [5], там же). Следовательно, соотношение (82) выполняется с $C = \sup_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0} C_\varepsilon < \infty$ и $\eta = \inf_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0} \eta_\varepsilon > 0$.

Для завершения доказательства теоремы 4.3 осталось воспользоваться рассуждениями, приведенными при доказательстве теоремы 1 [5; гл. VIII, § 2]. Отметим, что формально эта теорема неприменима в нашей ситуации (например, из-за того, что фазовое пространство H_ε^1 зависит от ε и предельная полугруппа $S(t)$ определена лишь на некотором подпространстве из H_ε^1). Однако соответствующая модификация рассуждений не составляет особого труда.

Список литературы

1. Hale J., Raugel G. Reaction-diffusion equation on thin domains // J. Math. Pures Appl. (9). 1992. V. 71. P. 33–95.
2. Hale J., Raugel G. A reaction-diffusion equation on a thin L-shaped domain // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1995. V. 125. P. 283–327.
3. Ciuperca I. S. Reaction-diffusion equations on thin domains with varying order of thinness // J. Differential Equations. 1996. V. 126. P. 244–291.
4. Prizzi M., Rybakowski K. P. Some recent results on thin domain problem // Topol. Methods Nonlinear Anal. 1999. V. 14. P. 239–255.
5. Бабин А. В., Вилиш М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
6. Hale J. Asymptotic behavior of dissipative systems. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1988.
7. Капитанский Л. В., Костин И. Н. Аттракторы нелинейных эволюционных уравнений и их аппроксимаций // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. № 1. С. 114–140.
8. Костин И. Н. Регулярный подход в задаче об аттракторах сингулярно возмущенных уравнений // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1990. Т. 181. С. 93–131.

9. *Boutet de Monvel L., Chueshov I. D., Khruslov E. Ya.* Homogenization of attractors for semilinear parabolic equations on manifolds with complicated microstructure // *Ann. Mat. Pura Appl.* (4). 1997. V. 162. P. 297–322.
10. *Панкратов Л. С., Чуешов И. Д.* Усреднение аттракторов нелинейных гиперболических уравнений с асимптотически вырождающимися коэффициентами // *Матем. сб.* 1999. Т. 190. №9. С. 99–126.
11. *Bourgeat A., Chueshov I. D., Pankratov L. S.* Homogenization of attractors of semilinear parabolic equations in domains with spherical traps // *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 1999. V. 329. P. 581–587.
12. *Вишик М. И., Чепыжов В. В.* Усреднение траекторных аттракторов эволюционных уравнений с быстро осциллирующими членами // *Матем. сб.* 2001. Т. 192. №1. С. 13–50.
13. *Чуешов И. Д.* Введение в теорию бесконечномерных диссипативных систем. Харьков: Акта, 1999; <http://www.emis.de/monographs/Chueshov/>.
14. *Rekalo A.* Asymptotic behaviour of solutions of nonlinear parabolic equations on two-layer thin domains // *Nonlinear Anal.* 2003. V. 52. P. 1393–1410.
15. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
16. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
17. *Иосифьян Г. А., Олейник О. А., Шамаев А. С.* О предельном поведении спектра последовательности операторов, заданных в различных гильбертовых пространствах // *УМН.* 1989. Т. 44. №3. С. 157–158.

Харьковский университет, Украина

Поступила в редакцию
15.01.2003