Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бадков, Асимптотические формулы для нулей ортогональных полиномов, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 9, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7951>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 05:43:26

УДК 517.587+517.518.865+517.15

В. М. Бадков

Асимптотические формулы для нулей ортогональных полиномов

Пусть $p_n(t)$ – алгебраический многочлен, ортонормированный на отрезке $[-1, 1]$ с весом $p(t)$. В случае, когда $p(t)$ является возмущением (в определенных пределах) веса Чебышёва 1-го рода, для нулей полинома $p_n(\cos \tau)$ и разностей двух таких нулей (не обязательно соседних) устанавливаются асимптотические формулы при $n \rightarrow \infty$, равномерные относительно номеров нулей. Аналогичные результаты получены в случае возмущения веса Чебышёва 2-го рода. Предварительно устанавливаются необходимые результаты об асимптотическом поведении разности нулей тригонометрического ортогонального полинома.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: ортогональные многочлены, нули, асимптотические формулы.

§ 1. Введение

Всюду ниже пользуемся обозначениями $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$, $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, \dots\}$, $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$; $L^r[a, b]$ – пространство измеримых комплекснозначных функций F с конечной нормой $\|F\|_{L^r[a, b]}$, где

$$\|F\|_{L^r[a, b]} := \left\{ \int_a^b |F(\tau)|^r d\tau \right\}^{1/r}, \quad 1 \leq r < \infty, \quad \|F\|_{L^\infty[a, b]} := \operatorname{ess\,sup}_{a \leq \tau \leq b} |F(\tau)|.$$

Для 2π -периодической F полагаем $L^r := L^r[0, 2\pi]$, $\|F\|_r := (2\pi)^{-1/r} \|F\|_{L^r[0, 2\pi]}$.

Модулем непрерывности называется неубывающая непрерывная полуаддитивная на $[0, \infty)$ функция $\omega(\delta)$, для которой $\omega(0) = 0$. Если при этом для любых $a, b \geq 0$ выполняется неравенство $2\omega(a/2 + b/2) \geq \omega(a) + \omega(b)$, то $\omega(\delta)$ называется вогнутым модулем непрерывности. Под модулем непрерывности в L^r функции F понимается величина $\omega(F; \delta)_r := \sup_{|\lambda| \leq \delta} \|F(\lambda + \cdot) - F(\cdot)\|_r$. Через $\omega(F; \delta)_{[a, b]}$ обозначается модуль непрерывности функции $F \in C[a, b]$.

Говорят, что функция $L(x) > 0$ медленно меняется в нуле, если она измерима на $[0, A]$ при некотором $A > 0$ и $\lim_{x \rightarrow +0} [L(\lambda x)/L(x)] = 1$ для любого $\lambda > 0$ (см. [1]).

Если 2π -периодический вес $\varphi(\tau)$ удовлетворяет условию $\operatorname{Ceg\ddot{e}} \ln \varphi(\tau) \in L^1$, то имеет смысл функция $\operatorname{Ceg\ddot{e}}$

$$\pi(\varphi; z) := \exp \left\{ -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\tau} + z}{e^{i\tau} - z} \ln \varphi(\tau) d\tau \right\}, \quad |z| < 1. \quad (1.1)$$

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики” при поддержке УрО РАН (грант № 09-Т-1-1004) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00462).

Под значениями функции (1.1) на окружности $\Gamma_1 := \{z : |z| = 1\}$ понимаются радиальные пределы $\pi(\varphi; e^{i\theta}) := \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \pi(\varphi; \rho e^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Пусть $\alpha(t)$, $-1 \leq t \leq 1$, и $\sigma(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 2\pi$, – ограниченные неубывающие функции с бесконечными множествами точек роста; $p_{\alpha,n}(t) = k_{\alpha,n}t^n + \dots$, $k_{\alpha,n} > 0$, $\deg p_{\alpha,n} = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, – система алгебраических многочленов, ортонормированная на отрезке $[-1, 1]$ в следующем смысле:

$$\int_{-1}^1 p_{\alpha,m}(t) p_{\alpha,n}(t) d\alpha(t) = \delta_{m,n}, \quad m, n \in \mathbb{Z}_+;$$

$\varphi_{\sigma,n}(z) = \varkappa_{\sigma,n}z^n + \dots$, $\deg \varphi_{\sigma,n} = n$, $\varkappa_{\sigma,n} > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, – система алгебраических многочленов, ортонормированная на окружности $\Gamma_1 := \{z : |z| = 1\}$ по мере $d\sigma(\tau)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{\sigma,m}(e^{i\tau}) \overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})} d\sigma(\tau) = \delta_{m,n}, \quad m, n \in \mathbb{Z}_+. \quad (1.2)$$

С помощью равенства $\sigma(\tau + 2\pi) - \sigma(\tau) = \sigma(2\pi) - \sigma(0)$ определение функции $\sigma(\tau)$ распространяется с отрезка $[0, 2\pi]$ на интервал $(-\infty, \infty)$. При этом продолженная функция не убывает на $(-\infty, \infty)$ и в формуле (1.2) можно интегрировать по любому отрезку $[a, a + 2\pi]$. Через $\{T_{\sigma,n}(\tau)\}_{n=0}^\infty$ обозначим систему тригонометрических полиномов, полученную из последовательности $1, \cos \tau, \sin \tau, \cos 2\tau, \sin 2\tau, \dots$ методом ортогонализации Шмидта относительно $d\sigma(\tau)$ на $[0, 2\pi]$. В случае абсолютно непрерывных мер $d\alpha(t) = p(t) dt$, $d\sigma(\tau) = \varphi(\tau) d\tau$ вместо $p_{\alpha,n}(t)$, $\varphi_{\sigma,n}(z)$ и $T_{\sigma,n}(\tau)$ пишем $p_n(t)$, $\varphi_n(z)$ и $\Phi_n(\tau)$ соответственно.

Обозначим через $\{\theta_{n,k}^{(p)}\}_{k=0}^n$, $0 < \theta_{n,1}^{(p)} < \theta_{n,2}^{(p)} < \dots < \theta_{n,n}^{(p)} < \pi$, нули полинома $p_n(\cos \tau)$ и рассмотрим вопрос об их асимптотическом поведении при $n \rightarrow \infty$. В случае веса Якоби соответствующие результаты приведены в [2].

Предположив, что

$$p(t) = H(t)(1 - t^2)^{-1/2}, \quad (1.3)$$

$$0 < H(t) \in C[-1, 1], \quad \omega(H; \delta)_{[-1, 1]} = O(|\ln \delta|^{-1-\mu}), \quad \mu > 0, \quad \delta \rightarrow +0, \quad (1.4)$$

С. Н. Бернштейн (см. [3; гл. II]) получил для $\theta_{n,k}^{(p)}$ выражение

$$\theta_{n,k}^{(p)} = a_k - \frac{\psi(\cos a_k) + \beta_k}{n}, \quad (1.5)$$

где $a_k = (2k - 1)\pi/(2n)$ – k -й нуль полинома Чебышёва $T_n(\cos \tau)$, $\beta_k \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $k = 1, \dots, n$, а $\psi(x)$ – функция, определяемая формулой

$$\psi(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln H(z) - \ln H(x)}{z - x} \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - z^2}} dz.$$

Ниже будет установлено (даже для несколько более общего веса $p(t)$), что отношение чисел $\theta_{n,k}^{(p)}$ и a_k при $n \rightarrow \infty$ стремится к единице равномерно по $k = 1, \dots, n$ (см. (6.5)). Вывести справедливость этого утверждения непосредственно из (1.5) не удастся. Аналогичная зависимость будет установлена между числами $\theta_{n,k}^{(q)}$, соответствующими весу $q(t) = (1 - t^2)p(t)$, где $p(t)$ имеет вид (1.3), и нулями полинома Чебышёва 2-го рода $U_n(\cos \tau)$. Будут также получены асимптотические формулы при $n \rightarrow \infty$ для разностей $\theta_{n,k}^{(p)} - \theta_{n,l}^{(p)}$ и $\theta_{n,k}^{(q)} - \theta_{n,l}^{(q)}$, равномерные относительно k и l .

Описанные результаты частично будут получены в виде следствий из предварительно устанавливаемых результатов об асимптотическом поведении разности нулей (не обязательно соседних) тригонометрического ортогонального полинома.

§ 2. Формулы, связывающие тригонометрические ортогональные полиномы с многочленами, ортогональными на окружности

Мы будем пользоваться установленными в [4] формулами

$$\operatorname{Re}\{e^{-i(n-1)\tau} \varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})\} = (c_n)^{-1} T_{\sigma,2n-1}(\tau), \quad (2.1)$$

$$\operatorname{Im}\{e^{-i(n-1)\tau} \varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})\} = -\frac{c_n}{2} \frac{\operatorname{Im} \varphi_{\sigma,2n}(0)}{\varkappa_{\sigma,2n}} T_{\sigma,2n-1}(\tau) + \frac{c_n}{2} \frac{\varkappa_{\sigma,2n-1}}{\varkappa_{\sigma,2n}} T_{\sigma,2n}(\tau), \quad (2.2)$$

$$\operatorname{Re}\{e^{-in\tau} \varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\} = \frac{c_n}{2} \frac{\varkappa_{\sigma,2n-1}}{\varkappa_{\sigma,2n}} T_{\sigma,2n-1}(\tau) + \frac{c_n}{2} \frac{\operatorname{Im} \varphi_{\sigma,2n}(0)}{\varkappa_{\sigma,2n}} T_{\sigma,2n}(\tau), \quad (2.3)$$

$$\operatorname{Im}\{e^{-in\tau} \varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\} = (c_n)^{-1} T_{\sigma,2n}(\tau), \quad (2.4)$$

где $\varkappa_{\sigma,n}$ – старший коэффициент многочлена $\varphi_{\sigma,n}(z)$,

$$c_n := (2\varkappa_{\sigma,2n})^{1/2} [\varkappa_{\sigma,2n} - \operatorname{Re} \varphi_{\sigma,2n}(0)]^{-1/2}. \quad (2.5)$$

Заметим, что соотношения (2.1) и (2.4) были получены еще в [5].

Пользуясь представлением $\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau}) = |\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})| e^{i\gamma_{\sigma,n}(\tau)}$, где $\gamma_{\sigma,n}(\tau)$ – любая из ветвей функции $\arg \varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})$, в силу (2.1) получаем, что

$$T_{\sigma,2n-1}(\tau) = c_n |\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})| \cos \Gamma_{\sigma,2n-1}(\tau), \quad (2.6)$$

где

$$\Gamma_{\sigma,2n-1}(\tau) := \gamma_{\sigma,2n-1}(\tau) - (n-1)\tau. \quad (2.7)$$

Аналогично из (2.4) выводим формулу

$$T_{\sigma,2n}(\tau) = c_n |\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})| \sin \Gamma_{\sigma,2n}(\tau), \quad (2.8)$$

в которой

$$\Gamma_{\sigma,2n}(\tau) := \gamma_{\sigma,2n}(\tau) - n\tau. \quad (2.9)$$

На Γ_1 многочлен $\varphi_{\sigma,n}(z)$ не имеет нулей и $c_n > 0$ (см. (2.5)), поэтому из (2.6) и (2.8) следует, что нули полиномов $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$ совпадают с нулями функций $\cos \Gamma_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $\sin \Gamma_{\sigma,2n}(\tau)$ соответственно. Пользуясь установленной в [4] формулой приращения аргумента многочлена $\varphi_{\sigma,n}(z)$ в точке $e^{i\tau}$:

$$\gamma_{\sigma,n}(\tau) - \gamma_{\sigma,n}(\theta) = \frac{n}{2}(\tau - \theta) + \frac{1}{2} \int_{\theta}^{\tau} \frac{\sum_{\nu=0}^{n-1} |\varphi_{\sigma,\nu}(e^{iu})|^2}{|\varphi_{\sigma,n}(e^{iu})|^2} du, \quad (2.10)$$

получаем на основании (2.7), что

$$\Gamma_{\sigma,2n-1}(\tau) - \Gamma_{\sigma,2n-1}(\theta) = \frac{\tau - \theta}{2} + \frac{1}{2} \int_{\theta}^{\tau} \frac{\sum_{\nu=0}^{2n-2} |\varphi_{\sigma,\nu}(e^{iu})|^2}{|\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{iu})|^2} du. \quad (2.11)$$

Аналогично с помощью (2.9) выводится доказанное в [4] равенство

$$\Gamma_{\sigma,2n}(\tau) - \Gamma_{\sigma,2n}(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\theta}^{\tau} \frac{\sum_{\nu=0}^{2n-1} |\varphi_{\sigma,\nu}(e^{iu})|^2}{|\varphi_{\sigma,2n}(e^{iu})|^2} du. \quad (2.12)$$

В силу (2.11) и (2.12) функции $\Gamma_{\sigma,n}(\tau)$, $n \in \mathbb{N}$, строго возрастают в $(-\infty, \infty)$.

Приведенные формулы в [4] применялись для нахождения порядка расстояния между соседними нулями полинома $\Phi_n(\tau)$ в случае весьма общего веса $\varphi(\tau)$ с особенностями, порядка которых задаются конечными произведениями действительных степеней вогнутых модулей непрерывности. В виде следствия аналогичный результат был получен для полинома $p_n(\cos \tau)$. Ниже метод работы [4] в усовершенствованном виде применяется в случае менее общего веса для получения асимптотических формул для разностей нулей (не обязательно соседних) полинома $\Phi_n(\tau)$. Из этих формул выводятся аналогичные результаты для разностей нулей полинома $p_n(\cos \tau)$. Кроме того, устанавливаются асимптотические формулы и для самих нулей полинома $p_n(\cos \tau)$.

§ 3. Леммы о логарифмической производной многочлена, ортогонального на окружности

Введем обозначение

$$\varphi_{\sigma,n}^*(z) := z^n \overline{\varphi_{\sigma,n}(1/\bar{z})} \quad (3.1)$$

и докажем две леммы, которыми будем пользоваться при исследовании асимптотических свойств нулей тригонометрических ортогональных полиномов.

ЛЕММА 1. Пусть $\ln \sigma'(\tau) \in L^1$, при некотором $B > 0$ выполняется неравенство

$$|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})| \geq B, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (3.2)$$

и найдется последовательность $\eta_n \downarrow 0$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что равномерно по $\tau \in \mathbb{R}$

$$\pi(\sigma'; e^{i\tau}) - \varphi_{\sigma,n}^*(e^{i\tau}) = O(\eta_n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

Тогда равномерно по $\tau \in \mathbb{R}$

$$\frac{e^{i\tau} \varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})}{n \varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})} - 1 = O(A_n), \quad A_n := \eta_{[\sqrt{n}]} + \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\eta_n \rightarrow 0$ и условие (3.3) выполняется равномерно по $\tau \in \mathbb{R}$, то $\pi(\sigma'; e^{i\tau}) \in C_{2\pi}$. Поэтому из (3.3) следует, что последовательность $\varphi_{\sigma,n}^*(e^{i\tau})$ равномерно ограничена. Рассуждая, как в работе [6], замечаем, что

$$\varphi_{\sigma,n}^*(e^{i\tau}) - \varphi_{\sigma,\sqrt{n}}^*(e^{i\tau}) = [\varphi_{\sigma,n}^*(e^{i\tau}) - \pi(\sigma'; e^{i\tau})] + [\pi(\sigma'; e^{i\tau}) - \varphi_{\sigma,\sqrt{n}}^*(e^{i\tau})].$$

Поэтому в силу (3.3) $\varphi_{\sigma,n}^*(e^{i\tau}) - \varphi_{\sigma,\sqrt{n}}^*(e^{i\tau}) = O(A_n)$ равномерно по $\tau \in \mathbb{R}$, откуда на основании неравенства Бернштейна следует, что

$$\frac{d}{d\tau} \varphi_{\sigma,n}^*(e^{i\tau}) = \frac{d}{d\tau} [\varphi_{\sigma,n}^*(e^{i\tau}) - \varphi_{\sigma,\sqrt{n}}^*(e^{i\tau})] + \frac{d}{d\tau} \varphi_{\sigma,\sqrt{n}}^*(e^{i\tau}) = O(nA_n). \quad (3.5)$$

В силу (3.1) $\varphi_{\sigma,n}^*(e^{i\tau}) = e^{in\tau} \overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}$. Следовательно,

$$\frac{d}{d\tau} \varphi_{\sigma,n}^*(e^{i\tau}) = in e^{in\tau} \overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})} - ie^{(n-1)\tau} \overline{\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})}. \quad (3.6)$$

Из (3.5), (3.6) и (3.2) следует (3.4).

ЛЕММА 2. Если в формулировке леммы 1 потребовать, чтобы (3.2) выполнялось лишь на отрезке $[a, b]$, $b - a < 2\pi$, и чтобы (3.3) имело место равномерно по $\tau \in [a, b]$, то условие (3.4) будет выполняться равномерно по τ на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$.

Чтобы убедиться в справедливости сформулированного утверждения, достаточно в доказательстве леммы 1 заменить (как это делается в [6]) ссылку на неравенство Бернштейна ссылкой на его локальный аналог, доказанный И. И. Приваловым (см., например, [7]).

§ 4. Асимптотические свойства нулей тригонометрических ортогональных полиномов

Пользуясь формулами (2.6), (2.8), (2.11) и (2.12), а также леммами 1 и 2, исследуем асимптотическое поведение нулей полиномов $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$ при $n \rightarrow \infty$.

Из формулы (2.11) в силу 2π -периодичности подынтегральной функции в ее правой части следует, что при всех $\theta \in \mathbb{R}$

$$\Gamma_{\sigma,2n-1}(\theta + 2\pi) - \Gamma_{\sigma,2n-1}(\theta) = \pi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sum_{\nu=0}^{2n-2} |\varphi_{\sigma,\nu}(e^{iu})|^2}{|\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{iu})|^2} du. \quad (4.1)$$

Поскольку выполняются равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\nu\tau} d\sigma(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\nu\tau} \frac{d\tau}{|\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})|^2}, \quad \nu = 0, 1, \dots, 2n-1$$

(см. [8; формула (1.20)]), то детерминантные представления (см. [8; формула (8.5)]) соответственных многочленов с номерами $\nu = 0, 1, \dots, 2n-1$, ортонормированных относительно мер $d\sigma(u)$ и $|\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{iu})|^{-2} du$, совпадают. Поэтому система $\{\varphi_{\sigma,\nu}(z)\}_{\nu=0}^{2n-1}$ ортонормальна на Γ_1 с весом $|\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})|^{-2}$. Но тогда второе слагаемое в правой части (4.1) равно $(2n-1)\pi$, а потому

$$\Gamma_{\sigma,2n-1}(\theta + 2\pi) - \Gamma_{\sigma,2n-1}(\theta) = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

С помощью аналогичных рассуждений в [4] из (2.10) получено равенство

$$\Gamma_{\sigma,2n}(\theta + 2\pi) - \Gamma_{\sigma,2n}(\theta) = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

В силу (2.6), (2.8), (4.2) и (4.3) полиномы $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$ имеют по $2n$ простых нулей в любом промежутке $[a, a + 2\pi)$, $a \in \mathbb{R}$. В силу (2.6) нули полинома $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ можно занумеровать в возрастающую последовательность $\{z_{2n-1,k}^{(\sigma)}\}$ так, чтобы выполнялись равенства $\Gamma_{\sigma,2n-1}(z_{2n-1,k}^{(\sigma)}) = (2k-1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Аналогично, в силу (2.8) нули полинома $T_{\sigma,2n}(\tau)$ можно занумеровать в возрастающую последовательность $\{z_{2n,k}^{(\sigma)}\}$, для элементов которой выполняются условия $\Gamma_{\sigma,2n}(z_{2n,k}^{(\sigma)}) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varepsilon_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ и равномерно по $\tau \in \mathbb{R}$

$$\frac{e^{i\tau} \varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})}{n \varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})} - 1 = O(\varepsilon_n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.4)$$

Тогда имеют место равномерные по $k \in \mathbb{Z}$ и $l \in \mathbb{N}$ асимптотические равенства

$$z_{2n-1,k+l}^{(\sigma)} - z_{2n-1,k}^{(\sigma)} = l \frac{\pi}{n} [1 + O(\varepsilon_{2n-1})], \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.5)$$

$$z_{2n,k+l}^{(\sigma)} - z_{2n,k}^{(\sigma)} = l \frac{\pi}{n} [1 + O(\varepsilon_{2n})], \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [9] установлена формула

$$2 \operatorname{Re}\{e^{i\tau} \varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau}) \overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}\} = n |\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2 + \sum_{\nu=0}^{n-1} |\varphi_{\sigma,\nu}(e^{i\tau})|^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

которую можно переписать в виде

$$2 \operatorname{Re} \frac{e^{i\tau} \varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})}{n \varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})} = 1 + \frac{\sum_{\nu=0}^{n-1} |\varphi_{\sigma,\nu}(e^{i\tau})|^2}{n |\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (4.7)$$

В силу (4.4) левая часть (4.7) равна $2 + O(\varepsilon_n)$. Поэтому равномерно по $\tau \in \mathbb{R}$

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{n-1} |\varphi_{\sigma,\nu}(e^{i\tau})|^2}{n |\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2} = 1 + O(\varepsilon_n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.8)$$

Согласно определению чисел $z_{2n-1,k}^{(\sigma)}$ имеет место равенство

$$\Gamma_{\sigma,2n-1}(z_{2n-1,k+l}^{(\sigma)}) - \Gamma_{\sigma,2n-1}(z_{2n-1,k}^{(\sigma)}) = l\pi, \quad (4.9)$$

из которого в силу (2.11) следует, что

$$l\pi = \frac{z_{2n-1,k+l}^{(\sigma)} - z_{2n-1,k}^{(\sigma)}}{2} + \frac{1}{2} \int_{z_{2n-1,k}^{(\sigma)}}^{z_{2n-1,k+l}^{(\sigma)}} \frac{\sum_{\nu=0}^{2n-2} |\varphi_{\sigma,\nu}(e^{iu})|^2}{|\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{iu})|^2} du. \quad (4.10)$$

Используя (4.8), получаем из (4.10) соотношение

$$l\pi = \frac{z_{2n-1,k+l}^{(\sigma)} - z_{2n-1,k}^{(\sigma)}}{2} + \frac{2n+1}{2} [1 + O(\varepsilon_{2n-1})] [z_{2n-1,k+l}^{(\sigma)} - z_{2n-1,k}^{(\sigma)}],$$

из которого вытекает (4.5).

Аналогично (4.9) получаем равенство $\Gamma_{\sigma,2n}(z_{2n,k+l}^{(\sigma)}) - \Gamma_{\sigma,2n}(z_{2n,k}^{(\sigma)}) = l\pi$, из которого в силу (2.12) следует, что

$$l\pi = \frac{1}{2} \int_{z_{2n,k}^{(\sigma)}}^{z_{2n,k+l}^{(\sigma)}} \frac{\sum_{\nu=0}^{2n-1} |\varphi_{\sigma,\nu}(e^{iu})|^2}{|\varphi_{\sigma,2n}(e^{iu})|^2} du. \quad (4.11)$$

Из (4.11) и (4.8) выводим (4.6). Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Если (4.4) выполняется равномерно по $\tau \in [a, b]$, $b - a < 2\pi$, то равномерные по k и l формулы (4.5) и (4.6) справедливы для нулей $z_{2n-1,k+l}^{(\sigma)}$, $z_{2n-1,k}^{(\sigma)}$, $z_{2n,k+l}^{(\sigma)}$ и $z_{2n,k}^{(\sigma)}$, принадлежащих $[a, b]$.

Чтобы убедиться в справедливости теоремы 2, достаточно внести очевидные изменения в доказательство теоремы 1.

Пользуясь доказанными выше леммами и теоремами, установим более конкретные результаты об асимптотическом поведении нулей полиномов $T_{\sigma,n}(\tau)$, $n \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\ln \sigma'(\tau) \in L^1$ и выполнены условия

$$\delta_{\sigma,n} := [\pi(\sigma'; 0)]^{-1} [|\varphi_{\sigma,n+1}(0)|^2 + |\varphi_{\sigma,n+2}(0)|^2 + \dots]^{1/2} = o(n^{-1/2}), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\max_{|z|=\rho} \left| \frac{\pi'(\sigma'; z)}{\pi(\sigma'; z)} \right| = o((1-\rho)^{-1}), \quad \rho \rightarrow 1-0.$$

Тогда имеют место равномерные по $k \in \mathbb{Z}$ и $l \in \mathbb{N}$ асимптотические формулы

$$z_{2n-1,k+l}^{(\sigma)} - z_{2n-1,k}^{(\sigma)} = l \frac{\pi}{n} [1 + o(1)], \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.12)$$

$$z_{2n,k+l}^{(\sigma)} - z_{2n,k}^{(\sigma)} = l \frac{\pi}{n} [1 + o(1)], \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [9]–[11] установлено, что в условиях доказываемой теоремы при фиксированном $j \in \mathbb{Z}_+$ имеет место равномерная по $\tau \in \mathbb{R}$ асимптотическая формула

$$\varphi_{\sigma,n}^{(j)}(e^{i\tau}) = n^j e^{i(n-j)\tau} \overline{\pi(\sigma'; (1 - (2n)^{-1})e^{i\tau})} [1 + o(1)], \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.14)$$

Используя (4.14) при $j = 0$ и $j = 1$, убеждаемся в существовании сходящейся к нулю последовательности $\{\varepsilon_n\}$, для которой равномерно по $\tau \in \mathbb{R}$ выполняется условие (4.4). Поэтому по теореме 1 справедливы соотношения (4.12) и (4.13).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $d\sigma(\tau) = \varphi(\tau) d\tau$, $\varphi(\tau) = h(\tau)G(\tau)$, причем

$$h, \frac{1}{h} \in L^\infty, \quad h \geq 0, \quad \omega(h; \delta)_2 = o(\sqrt{\delta}), \quad \delta \rightarrow +0, \quad (4.15)$$

$$G(\tau) = \prod_{\nu=1}^m g_\nu^{\lambda_\nu} \left(\left| \sin \frac{\tau - \theta_\nu}{2} \right| \right), \quad (4.16)$$

где $-\pi < \theta_1 < \dots < \theta_m \leq \pi$, $\lambda_\nu = \pm 1$, $g_\nu(\tau)$ – вогнутые модули непрерывности; $\tau g'_\nu(\tau)/g_\nu(\tau)$ стремится к нулю, когда $\tau \rightarrow +0$, оставаясь во множестве существования производной $g'_\nu(\tau)$, $\nu = 1, \dots, m$. Тогда справедливо заключение теоремы 3.

ТЕОРЕМА 5. Заключение теоремы 4 сохраняет силу и после замены в правой части (4.16) величины $|\sin[(\tau - \theta_\nu)/2]|$ величиной $|\cos \tau - \cos \theta_\nu|$ для тех ν , для которых $\theta_\nu \neq 0, \pi$.

Для доказательства теорем 4 и 5 достаточно заметить, что при выполнении их условий, как доказано в [9], выполняются условия теоремы 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Фигурирующий в условиях теорем 4 и 5 вес $\varphi(\tau)$ имеет особенности в точках θ_ν . Как показано в [12], ограничения, наложенные на $g_\nu(\tau)$ в формулировках теорем 4 и 5, равносильны тому, что $g_\nu(\tau)$ – вогнутый модуль непрерывности, медленно меняющийся в нуле.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $d\sigma(\tau) = \varphi(\tau) d\tau$, где вес $\varphi(\tau)$ удовлетворяет условиям

$$0 < \varphi(\tau) \in C_{2\pi}, \quad \omega(\varphi; \delta)_\infty = O(|\ln \delta|^{-1-\mu}), \quad \mu > 0, \quad \delta \rightarrow +0. \quad (4.17)$$

Тогда справедливо заключение теоремы 1 с $\varepsilon_n = (\ln n)^{-\mu}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как установил Г. Серё (см. [2; теорема 12.1.3]), в рассматриваемом случае справедлива равномерная по $\tau \in \mathbb{R}$ формула (3.3) с $\eta_n = (\ln n)^{-\mu}$. Поэтому по лемме 1 выполняется условие (3.4) с $A_n = (\ln n)^{-\mu}$ равномерно по $\tau \in \mathbb{R}$. Но тогда справедливо заключение теоремы 1 с $\varepsilon_n = (\ln n)^{-\mu}$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $d\sigma(\tau) = \varphi(\tau) d\tau$, $\mu > 0$, $s \in \mathbb{N}$ и вместо условий (4.17) выполняются условия

$$0 < \varphi(\tau) \in C_{2\pi}, \quad \omega(\varphi; \delta)_\infty = O(|\ln_{s+1}(\delta)|^{-1-\mu} |\ln_1(\delta) \cdots \ln_s(\delta)|^{-1}), \quad (4.18)$$

где $\delta \rightarrow +0$, $\ln_1(\delta) := \ln \delta$, $\ln_{s+1}(\delta) := \ln \ln_s(\delta)$, $s \in \mathbb{N}$. Тогда справедливо заключение теоремы 1 с $\varepsilon_n = (\ln_{s+1}(n))^{-\mu}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы Б. Л. Голинского (см. [13; теорема 2]) следует справедливость равномерной по $\tau \in \mathbb{R}$ формулы (3.3) с $\eta_n = (\ln_{s+1}(n))^{-\mu}$. Поэтому по лемме 1 выполняется условие (3.4) с $A_n = (\ln_{s+1}(n))^{-\mu}$ равномерно по $\tau \in \mathbb{R}$. Но тогда справедливо заключение теоремы 1 с $\varepsilon_n = (\ln_{s+1}(n))^{-\mu}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Цитированная теорема Б. Л. Голинского для положительного веса $\varphi(\tau)$, более гладкого, чем рассмотренный в теоремах 6 и 7, гарантирует выполнимость оценки (3.3) с $\eta_n = n^{-r}\omega(\varphi^{(r)}; n^{-1})_{\infty} \ln n$, где $r = 0, 1, 2, \dots$ (эта оценка несколько усиливает более ранний результат П. К. Сутина [14]). По лемме 1 в этом случае условие (3.4) выполняется, но $A_n \rightarrow 0$ медленнее чем η_n . Можно и в этом случае попытаться сформулировать аналоги теорем 6 и 7. Однако мы этого делать не будем, считая более целесообразным сначала попытаться уточнить лемму 1.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\sigma(\tau)$ – заданная на $[0, 2\pi]$ неубывающая ограниченная функция с бесконечным множеством точек роста, для которой $\ln \sigma'(\tau) \in L^1[0, 2\pi]$. Продолжим $\sigma(\tau)$ с отрезка $[0, 2\pi]$ на интервал $(-\infty, \infty)$ с помощью равенства $\sigma(\tau + 2\pi) - \sigma(\tau) = \sigma(2\pi) - \sigma(0)$. Если на некотором отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $b - a < 2\pi$, функция $\sigma(\tau)$ абсолютно непрерывна, $\sigma'(\tau)$ непрерывна, положительна и удовлетворяет условию $\omega(\sigma'; \tau)_{[a, b]} \tau^{-1} \in L^1[0, b - a]$, то справедливы равномерные по k и l асимптотические формулы (4.12) и (4.13) при условии, что содержащиеся в их левых частях нули полиномов $T_{\sigma, 2n-1}(\tau)$ и $T_{\sigma, 2n}(\tau)$ принадлежат фиксированному отрезку $[a_1, b_1]$, вложенному в интервал (a, b) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см. [15]), что для функции $\sigma(\tau)$, удовлетворяющей условиям доказываемой теоремы, найдется сходящаяся к нулю последовательность $\eta_n = \eta_n(\varepsilon) > 0$, для которой условие (3.3) при фиксированном ε , $0 < 2\varepsilon < b - a$, выполняется равномерно по $\tau \in [a - \varepsilon, b - \varepsilon]$ (этот результат доказан при условии, что $[a, b] \subset [0, 2\pi]$, однако он верен и при $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $b - a < 2\pi$, в чем нетрудно убедиться с помощью сдвига аргумента). Поэтому по лемме 2 для любого $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ найдется аналогичная последовательность $\eta_n = \eta_n(a_1, b_1)$, для которой условие (3.4) выполняется равномерно по $\tau \in [a_1, b_1]$. Для завершения доказательства теоремы достаточно применить теорему 2.

§ 5. Соотношения между тригонометрическими ортогональными полиномами и многочленами, ортогональными на отрезке

Желая воспользоваться установленными выше результатами при исследовании поведения нулей многочленов, ортогональных на отрезке, докажем следующие две леммы о связи этих многочленов с тригонометрическими ортогональными полиномами.

ЛЕММА 3. Пусть $\alpha(t)$ – неубывающая ограниченная функция на $[-1, 1]$ с бесконечным множеством точек роста, для которой $\alpha(-1) = 0$, а $\sigma(\tau)$ – неубывающая ограниченная на $[0, 2\pi]$ функция, связанная с $\alpha(t)$ соотношениями $\sigma(\tau) = -\alpha(\cos \tau)$ при $\tau \in [0, \pi]$ и $\sigma(\tau) = \alpha(\cos \tau)$ при $\tau \in [\pi, 2\pi]$. Тогда имеет место равенство

$$\sqrt{\pi} p_{\alpha, n}(\cos \tau) = T_{\sigma, 2n-1}(\tau), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [8; гл. IX] доказано, что при $n \in \mathbb{Z}_+$ и $x = (z + z^{-1})/2$

$$p_{\alpha,n}(x) = (\varkappa_{\sigma,2n})^{1/2} \{2\pi[\varkappa_{\sigma,2n} + \varphi_{\sigma,2n}(0)]\}^{-1/2} [\varphi_{\sigma,2n}(z) + \varphi_{\sigma,2n}^*(z)] z^{-n} \quad (5.2)$$

(для абсолютно непрерывной $\alpha(t)$ формулу (5.2) установил Г. Серё; см. [2]). При $z = e^{i\tau}$ равенство (5.2) принимает вид

$$p_{\alpha,n}(\cos \tau) = (\varkappa_{\sigma,2n})^{1/2} \{2\pi[\varkappa_{\sigma,2n} + \varphi_{\sigma,2n}(0)]\}^{-1/2} 2 \operatorname{Re}\{e^{-in\tau} \varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\}. \quad (5.3)$$

В силу вещественности всех моментов рассматриваемой меры $d\sigma(\tau)$ все коэффициенты многочлена $\varphi_{\sigma,n}(z)$ (в том числе и $\varphi_{\sigma,n}(0)$) суть вещественные числа. Поэтому имеют место равенства $\operatorname{Im} \varphi_{\sigma,2n}(0) = 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, в силу которых формулы (2.2) и (2.3) упрощаются. Так, (2.3) принимает вид

$$\operatorname{Re}\{e^{-in\tau} \varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\} = \frac{c_n}{2} \frac{\varkappa_{\sigma,2n-1}}{\varkappa_{\sigma,2n}} T_{\sigma,2n-1}(\tau). \quad (5.4)$$

Из (5.3), (5.4) и (2.5) следует (5.1).

ЛЕММА 4. Пусть функции $\alpha(t)$ и $\sigma(\tau)$ удовлетворяют условиям леммы 3, $\{q_{\beta,n}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ – система многочленов, ортонормированная на $[-1, 1]$ по мере $d\beta(t) := (1 - t^2) d\alpha(t)$. Тогда выполняется равенство

$$\sqrt{\pi} q_{\beta,n-1}(\cos \tau) \sin \tau = T_{\sigma,2n}(\tau), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (2.4) при $\nu = 0, \dots, n-1$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_{\sigma,2n}(\tau) \sin \nu\tau d\sigma(\tau) = \frac{c_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}\{e^{-in\tau} \varphi_{\sigma,2n}(e^{in\tau})\} \sin \nu\tau d\sigma(\tau). \quad (5.6)$$

Пользуясь разложением функции $z^{-n} \varphi_{\sigma,2n}(z)$ по степеням z , приходим к равенству $\operatorname{Im}\{e^{-in\tau} \varphi_{\sigma,2n}(e^{in\tau})\} = q_{n-1}(\cos \tau) \sin \tau$, где $q_{n-1}(t)$ – многочлен степени $n-1$. Поэтому из (5.6) следует, что

$$0 = \frac{c_n}{2\pi} \left\{ -\int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \right\} q_{n-1}(\cos \tau) U_{\nu-1}(\cos \tau) d\beta(\cos \tau).$$

Но тогда

$$\frac{c_n}{\pi} \int_{-1}^1 q_{n-1}(t) U_{\nu-1}(t) d\beta(t) = 0,$$

а потому $q_{n-1}(t)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с $q_{\beta,n-1}(t)$. Поэтому, учитывая (2.4), приходим к равенству

$$q_{\beta,n-1}(\cos \tau) \sin \tau = d_{\beta,n-1} T_{\sigma,2n}(\tau), \quad (5.7)$$

в котором $d_{\beta,n-1} > 0$ (в силу положительности старших коэффициентов полиномов $q_{\beta,n-1}(t)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$). Учитывая (5.7), находим, что

$$1 = \int_{-1}^1 q_{\beta,n-1}^2(t) d\beta(t) = \frac{1}{2} \left\{ -\int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \right\} d_{\beta,n-1}^2 T_{\sigma,2n}^2(\tau) d\alpha(\cos \tau) = d_{\beta,n-1}^2 \pi,$$

откуда в силу (5.7) следует (5.5).

§ 6. Асимптотические свойства нулей многочленов, ортогональных на отрезке

Пусть $\theta_{\alpha,n,1} < \dots < \theta_{\alpha,n,n}$ и $\theta_{\beta,n-1,1} < \dots < \theta_{\beta,n-1,n-1}$ — содержащиеся в $(0, \pi)$ нули полиномов $p_{\alpha,n}(\cos \tau)$ и $q_{\beta,n-1}(\cos \tau)$ соответственно, где $\alpha(t)$ удовлетворяет условиям леммы 3, $d\beta(t) := (1-t^2) d\alpha(t)$. Если $\sigma(\tau)$ удовлетворяет условиям леммы 3, то справедливы формулы (5.1) и (5.5), позволяющие с помощью теорем 1–8 легко решать задачу об асимптотическом поведении при $n \rightarrow \infty$ разностей $\theta_{\alpha,n,k+l} - \theta_{\alpha,n,k}$ и $\theta_{\beta,n-1,k+l} - \theta_{\beta,n-1,k}$. При этом четность полиномов $p_{\alpha,n}(\cos \tau)$ и $q_{\beta,n-1}(\cos \tau)$ позволяет установить асимптотические формулы при $n \rightarrow \infty$ и для самих нулей $\theta_{\alpha,n,k}$ и $\theta_{\beta,n-1,k}$. Для решения этих задач нам нужна

ЛЕММА 5. *Предположим, что $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\sigma(\tau)$ удовлетворяют условиям лемм 3, 4, а $\theta_{\alpha,n,1} < \dots < \theta_{\alpha,n,n}$ и $\theta_{\beta,n-1,1} < \dots < \theta_{\beta,n-1,n-1}$ — содержащиеся в $(0, \pi)$ нули полиномов $p_{\alpha,n}(\cos \tau)$ и $q_{\beta,n-1}(\cos \tau)$ соответственно. Тогда выполняются равенства*

$$\int_{E_j} \frac{\sum_{\nu=0}^{2n-1} |\varphi_{\sigma,\nu}(e^{iu})|^2}{|\varphi_{\sigma,2n}(e^{iu})|^2} du = 2\pi, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (6.1)$$

в которых $E_1 := [-\theta_{\alpha,n,1}, \theta_{\alpha,n,1}]$, $E_2 := [\theta_{\alpha,n,n}, 2\pi - \theta_{\alpha,n,n}]$, $E_3 := [0, \theta_{\beta,n-1,1}]$, $E_4 := [\theta_{\beta,n-1,n-1}, \pi]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично (2.6) из (5.4) выводим формулу

$$c_n \varkappa_{\sigma,2n-1} T_{\sigma,2n-1}(\tau) = 2 \varkappa_{\sigma,2n} |\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})| \cos \Gamma_{\sigma,2n}(\tau), \quad (6.2)$$

где $\Gamma_{\sigma,2n}(\tau)$ определяется равенством (2.6) и удовлетворяет соотношению (2.12). Из формул (5.1) и (6.2) следует, что нули полинома $p_{\alpha,n}(\cos \tau)$ совпадают с нулями функции $\cos \Gamma_{\sigma,2n}(\tau)$. Так как $\Gamma_{\sigma,2n}(\tau)$ строго возрастает, а $-\theta_{\alpha,n,1}$, $\theta_{\alpha,n,1}$ и $\theta_{\alpha,n,n}$, $2\pi - \theta_{\alpha,n,n}$ являются парами соседних нулей полинома $p_{\alpha,n}(\cos \tau)$, то в силу (2.12) выполняются равенства (6.1) при $j = 1, 2$. Аналогично, используя (2.6) и (5.5), убеждаемся в справедливости соотношений (6.1) при $j = 3, 4$.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть $m \in \mathbb{N}$; $q(t) = (1-t^2)p(t)$; вес $p(t)$ имеет вид*

$$p(t) = \frac{H(t)}{\sqrt{1-t^2}} [a(\sqrt{1-t})]^\alpha [b(\sqrt{1+t})]^\beta \prod_{\nu=1}^m [g_\nu(|t - \cos \theta_\nu|)]^{\lambda_\nu},$$

где $a(u)$, $b(u)$, $g_\nu(u)$, $\nu = 1, \dots, m$, — вогнутые модули непрерывности, медленно меняющиеся в нуле; $0 < \theta_1 < \dots < \theta_m < \pi$; значения показателей α , β , λ_ν принадлежат множеству $\{-1, 0, 1\}$; функция $h(\tau) := H(\cos \tau)$ удовлетворяет условиям (4.15). Тогда при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $k, l \in \{1, \dots, n\}$

$$\theta_{n,k}^{(p)} - \theta_{n,l}^{(p)} = (k-l) \frac{\pi}{n} [1 + o(1)], \quad (6.3)$$

$$\theta_{n,k}^{(q)} - \theta_{n,l}^{(q)} = (k-l) \frac{\pi}{n} [1 + o(1)], \quad (6.4)$$

$$\theta_{n,k}^{(p)} = \frac{(2k-1)\pi}{2n} [1 + o(1)], \quad \theta_{n,k}^{(q)} = \frac{k\pi}{n+1} [1 + o(1)]. \quad (6.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $\varphi(\tau) := p(\cos \tau) |\sin \tau|$, $d\sigma(\tau) = \varphi(\tau) d\tau$, замечаем, что $\sigma(\tau)$ удовлетворяет условиям теоремы 4, в силу которой справедливы

равномерные по $k \in \mathbb{Z}$ и $l \in \mathbb{N}$ асимптотические формулы (4.12) и (4.13). Поэтому при $n \rightarrow \infty$ выполняются равномерные по $k, l \in \{1, \dots, n\}$ асимптотические равенства (6.3) и (6.4).

Так как $\sigma(\tau)$ удовлетворяет условиям теоремы 4, то выполнены и условия теоремы 3, при доказательстве которой мы убедились в существовании сходящейся к нулю последовательности $\{\varepsilon_n\}$, для которой равномерно по $\tau \in \mathbb{R}$ выполняется условие (4.4). Но тогда имеет место равномерная по $\tau \in \mathbb{R}$ асимптотическая формула (4.8). Используя (4.8) и (6.1) при $j = 1$, получаем асимптотическое равенство $[1 + O(\varepsilon_{2n})]2n\theta_{n,1}^{(p)} = 2\pi$, из которого следует справедливость первой из формул (6.5) при $k = 1$. Отсюда в силу (6.3) вытекает справедливость первой из формул (6.5) при $k = 2, \dots, n$. Аналогично, применяя (6.1) при $j = 3$, находим, что $[1 + O(\varepsilon_{2n})]2n\theta_{n-1,1}^{(q)} = 2\pi$. Тем самым, вторая из формул (6.5) доказана при $k = 1$. Для доказательства ее справедливости при $k = 2, \dots, n$ остается воспользоваться формулой (6.4).

ТЕОРЕМА 10. Если в условиях теоремы 9 показатели $\alpha, \beta, \lambda_\nu, \nu = 1, \dots, t$, положить равными нулю и потребовать, чтобы вместо (4.15) выполнялись условия (4.17) (либо (4.18)) при замене в них φ на h , то асимптотические формулы (6.3)–(6.5) с заменой в них $o(1)$ на $O(\ln^{-\mu} n)$ (соответственно на $O((\ln_{s+1}(n))^{-\mu})$) будут иметь место при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $k, l \in \{1, \dots, n\}$.

Рассуждаем, как при доказательстве теоремы 9, и при этом учитываем, что можно взять $\varepsilon_n = \ln^{-\mu} n$ при выполнении условия (4.17) и $\varepsilon_n = (\ln_{s+1}(n))^{-\mu}$ при выполнении условия (4.18).

Заметим, что условиям теоремы 10, в частности, удовлетворяет определяемый соотношениями (1.3), (1.4) вес С. Н. Бернштейна. Аналогично теореме 9 с помощью теоремы 8 доказывается

ТЕОРЕМА 11. Пусть функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\sigma(\tau)$ удовлетворяют условиям лемм 3, 4 и при этом $\ln \sigma'(\tau) \in L^1[0, 2\pi]$. Если на некотором отрезке $[0, a]$, $0 < a < \pi$, функция $\sigma(\tau)$ абсолютно непрерывна, $\sigma'(\tau)$ непрерывна и удовлетворяет условию $\omega(\sigma'; \tau)_{[0, a]} \tau^{-1} \in L^1[0, a]$, то при $n \rightarrow \infty$ имеют место асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha, n, k} - \theta_{\alpha, n, l} &= (k - l) \frac{\pi}{n} [1 + o(1)], & \theta_{\beta, n, k} - \theta_{\beta, n, l} &= (k - l) \frac{\pi}{n} [1 + o(1)], \\ \theta_{\alpha, n, k} &= \frac{(2k - 1)\pi}{2n} [1 + o(1)], & \theta_{\beta, n, k} &= \frac{k\pi}{n + 1} [1 + o(1)], \end{aligned}$$

равномерные по k и l при условии, что входящие в их левые части нули полиномов $r_{\alpha, n}(\cos \tau)$ и $q_{\beta, n}(\cos \tau)$ принадлежат отрезку $[0, a - \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < a$.

Заметим, что если в сформулированной теореме заменить $[0, a]$ на $[a, \pi]$, то $[0, a - \varepsilon]$ заменится на $[a + \varepsilon, \pi]$.

Список литературы

- [1] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985; пер. с англ.: Eu. Seneta, *Regularly varying functions*, Lecture Notes in Math., **508**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.
- [2] Г. Сегё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962; пер. с англ.: G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1959.

- [3] С. Н. Бернштейн, “О многочленах, ортогональных на конечном отрезке”, *Собрание сочинений. Конструктивная теория функций*, **2**, Изд-во АН СССР, М., 1954, 7–106.
- [4] В. М. Бадков, “О нулях ортогональных полиномов”, *Теория функций*, Тр. ИММ УрО РАН, **11**, 2005, 30–46; англ. пер.: V. M. Badkov, “Zeros of orthogonal polynomials”, *Function theory*, Proc. Inst. Math. Mech., suppl. 2, 2005, S30–S48.
- [5] В. М. Бадков, “Приближение функций в равномерной метрике суммами Фурье по ортогональным полиномам”, *Приближение функций полиномами и сплайнами*, Тр. МИАН СССР, **145**, Наука, М., 1980, 20–62; англ. пер.: V. M. Badkov, “Approximations of functions in the uniform metric by Fourier sums of orthogonal polynomials”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **145** (1981), 19–65.
- [6] P. G. Nevai, “An asymptotic formula for the derivatives of orthogonal polynomials”, *SIAM J. Math. Anal.*, **10**:3 (1979), 472–477.
- [7] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961; англ. пер.: N. K. Bary, *A treatise on trigonometric series*, Macmillan, New York, 1964.
- [8] Я. Л. Геронимус, *Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке*, Физматгиз, М., 1958; англ. пер.: Ya. L. Geronimus, *Polynomials orthogonal on a circle and interval*, Pergamon Press, Oxford–London–New York–Paris, 1961.
- [9] В. М. Бадков, “Асимптотические и экстремальные свойства ортогональных полиномов при наличии особенностей у веса”, *Труды Всесоюзной школы по теории функций* (Миасс, 1989), Тр. МИАН, **198**, Наука, М., 1992, 41–88; англ. пер.: V. M. Badkov, “Asymptotic and extremal properties of orthogonal polynomials in the presence of singularities in the weight”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **198** (1994), 37–82.
- [10] В. М. Бадков, “Равномерные асимптотические представления ортогональных многочленов”, *Приближение функций полиномами и сплайнами*, УНЦ АН СССР, Свердловск, 1985, 41–53.
- [11] В. М. Бадков, “Равномерные асимптотические представления ортогональных полиномов и их производных”, *Теория функций и смежные вопросы анализа* (Днепропетровск, 1985), Тр. МИАН СССР, **180**, Наука, М., 1987, 36–38; англ. пер.: V. M. Badkov, “Uniform asymptotic representations of orthogonal polynomials and their derivatives”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **180** (1989), 39–41.
- [12] В. М. Бадков, “Об особенностях веса, относительно которого ортогональны многочлены второго рода”, *Изв. ТулГУ. Естеств. науки*, **1**, Изд-во ТулГУ, Тула, 2008, 6–18.
- [13] Б. Л. Голинский, “Уточнение асимптотических формул Г. Серё и С. Н. Бернштейна”, *Изв. вузов. Матем.*, 1968, № 11, 70–82.
- [14] П. К. Суетин, “Основные свойства многочленов, ортогональных по контуру”, *УМН*, **21**:2 (1966), 41–88; англ. пер.: P. K. Suetin, “Fundamental properties of polynomials orthogonal on a contour”, *Russian Math. Surveys*, **21**:2 (1966), 35–83.
- [15] В. М. Бадков, *Матем. сб.*, **109(151)**:1(5) (1979), 46–59; англ. пер.: V. M. Badkov, “The asymptotic behavior of orthogonal polynomials”, *Math. USSR-Sb.*, **37**:1 (1980), 39–51.

В. М. Бадков (V. M. Badkov)
 Институт математики и механики УрО РАН,
 г. Екатеринбург
E-mail: Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
 29.09.2011 и 10.10.2011