Общероссийский математический портал

П. В. Тумаркин, Подсистемы корней полного ранга в гиперболических системах корней, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 1, 129–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm796>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 12:33:58

УДК 512.817.72

П. В. Тумаркин

Подсистемы корней полного ранга в гиперболических системах корней

Алгебра Каца–Мули называется *гиперболической*, если она построена по обобщенной матрице Картана гиперболического типа. Мы исследуем подсистемы корней в системах корней алгебр такого вида. Основным результатом настоящей работы является классификация регулярных гиперболических подалгебр полного ранга гиперболических алгебр Каца–Мули.

Библиография: 9 названий.

Введение

Симметризуемая обобщенная матрица Картана называется матрицей *гиперболического типа*, если при симметризации получается матрица сигнатуры $(n, 1)$, любая главная подматрица которой имеет конечный или аффинный тип. Пусть A – обобщенная матрица Картана гиперболического типа. Следуя [1], по матрице A можно построить алгебру Каца–Мули $\mathfrak{g}(A)$. Согласно [2] группа Вейля ее системы корней $\Delta(A)$ является группой Кокстера. Фундаментальной камерой группы Вейля является n -мерный гиперболический симплекс Кокстера конечного объема (рассмотренный в линейной модели гиперболического пространства), не имеющий двугранных углов отличных от $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$ и $\pi/6$. При $n = 2$ угол может также равняться нулю.

По аналогии с [3] назовем подалгебру $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}(A)$ *регулярной*, если она инвариантна относительно некоторой картановской подалгебры $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}(A)$. Иначе говоря, $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}(A)$ регулярна, если для нее можно построить базис из элементов $\mathfrak{h}$ и корневых векторов алгебры $\mathfrak{g}(A)$ относительно $\mathfrak{h}$. Нас будут интересовать те регулярные подалгебры полного ранга, которые могут быть построены как алгебры Каца–Мули $\mathfrak{g}_1(A_1)$ по некоторой обобщенной матрице Картана гиперболического типа A_1 .

Каждой такой подалгебре алгебры $\mathfrak{g}(A)$ соответствует система корней $\Delta_1(A_1) \subset \Delta(A)$, удовлетворяющая условию:

$$\text{если } \alpha, \beta \in \Delta_1 \text{ и } \alpha + \beta \in \Delta, \text{ то } \alpha + \beta \in \Delta_1. \quad (*)$$

И обратно: имея систему корней, лежащую в гиперболической системе корней и удовлетворяющую условию $(*)$, мы можем построить подалгебру указанного типа в алгебре $\mathfrak{g}(A)$.

Гиперболической системой корней мы будем называть систему корней алгебры Каца–Мули, построенной по обобщенной матрице Картана гиперболического

типа. Рангом системы корней назовем ранг соответствующей обобщенной матрицы Картана. Фундаментальная камера группы Вейля гиперболической системы корней ранга k является гиперболическим симплексом размерности $k - 1$.

Пусть Δ – система корней. Подсистемой корней в Δ называется система корней $\Delta_1 \subset \Delta$, для которой выполнено условие (*).

Классификация подсистем корней в эллиптических системах корней получена Дынкиным в [3].

Настоящая работа посвящена классификации гиперболических подсистем корней полного ранга в гиперболических системах корней.

Рассмотрим гиперболическую подсистему корней полного ранга Δ_1 в гиперболической системе корней Δ . Фундаментальной камерой группы Вейля W_1 системы корней Δ_1 является некоторый симплекс Кокстера F_1 , а фундаментальной камерой группы Вейля W системы корней Δ – некоторый симплекс Кокстера F . Группа W_1 порождена отражениями относительно граней симплекса F_1 , а W – отражениями относительно граней симплекса F . Поскольку W_1 является подгруппой группы W , симплекс F_1 состоит из нескольких копий симплекса F , причем если две копии имеют общую грань, то они симметричны относительно нее. Такое разбиение (F, F_1) симплекса F_1 на симплексы F мы будем называть *минимальным*, если W_1 является максимальной (по включению) собственной подгруппой в W , порожденной отражениями. Все минимальные разбиения гиперболических симплексов Кокстера конечного объема перечислены в [4]–[6].

В дальнейшем, говоря о симплексах, мы подразумеваем гиперболический симплекс Кокстера конечного объема, не имеющий двугранных углов отличных от $\pi/2, \pi/3, \pi/4$ и $\pi/6$ (при $n = 2$ допускаются также углы равные нулю).

В §1 (теорема 1) будет доказано, что любому минимальному разбиению гиперболических симплексов соответствует некоторая подсистема корней в гиперболической системе корней. В §2 (теорема 2) будет доказано, что любому разбиению гиперболического симплекса на гиперболические симплексы соответствует некоторая подсистема корней. Классификация подсистем корней приведена на рис. 1–19.

Автор выражает благодарность Э. Б. Винбергу за внимание к работе и полезные замечания.

§1. Максимальные подгруппы

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями: $A = (a_{ij})$ – симметризуемая обобщенная матрица Картана гиперболического типа; Δ – соответствующая система корней; $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ – простые корни; $L = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{Z}\alpha_i$ – соответствующая решетка корней. Группа Вейля W_F системы корней Δ порождена отражениями в гранях фундаментальной камеры – симплекса F . Грани F – гиперплоскости, на которых обращаются в нуль простые корни. Далее, $\Delta^\vee$ и $L^\vee$ – система и решетка корней, соответствующие обобщенной матрице Картана A^t (ей соответствует система простых корней с тем же фундаментальным симплексом F , но с другими длинами); $\Delta_1 \subset \Delta$ – гиперболическая система корней, решетка корней которой, L_1 , является подрешеткой полного ранга в L ; F_1 – фундаментальный симплекс для группы Вейля W_{F_1} системы корней Δ_1 .

Для изображения систем корней мы будем использовать *схемы Дынкина*. Каж-

дая вершина v_i схемы Дынкина системы Δ соответствует простому корню α_i . Вершины v_i и v_j соединены ребром кратности $k = a_{ij}a_{ji}$, если $k = 1, 2$ или 3 . Если $k = 0$, то вершины не соединены, а если $k = 4$ (это возможно только при $n = 2$), то вершины соединены толстым ребром. Если $|a_{ij}| < |a_{ji}|$, то соответствующее ребро ориентируется стрелкой, направленной от v_i к v_j .

Мы воспользуемся следующим описанием системы корней гиперболической алгебры (см. [1; предложение 5.10]). Гиперболическая система корней Δ состоит из двух частей: множество вещественных корней Δ^{re} и множество мнимых корней Δ^{im} , где

$$\Delta^{\text{re}} = W(\alpha_1) \cup \dots \cup W(\alpha_{n+1}), \quad \Delta^{\text{im}} = \{\alpha \in L \mid (\alpha \mid \alpha) \leq 0\}.$$

ЛЕММА 1. Пусть (F, F_1) – минимальное разбиение. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) L_1 – собственная подрешетка в L ;
- 2) $\Delta_1 = \Delta \cap L_1$;
- 3) Δ_1 является подсистемой корней в Δ ;
- 4) условие (*) выполняется для $\Delta_1^{\text{re}} \subset \Delta^{\text{re}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1)→2). Для Δ_1^{im} утверждение очевидно.

Пусть найдется $\alpha \in \Delta^{\text{re}}$ такой, что $\alpha \in L$, но $\alpha \notin \Delta_1$. Рассмотрим подгруппу G группы W_F , порожденную отражениями относительно всех корней, лежащих в L_1 . Очевидно, $W_{F_1} \subset G$. Поскольку W_{F_1} максимальна в W_F и $G \neq W_{F_1}$, мы получаем, что $G = W_F$. Тогда все простые корни системы Δ представляются как линейные комбинации корней из L_1 с целыми коэффициентами, а следовательно, и сами лежат в L_1 . То есть $L = L_1$.

2)→3). Пусть $\alpha, \beta \in \Delta_1$. Тогда $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in L_1$. Если $\alpha + \beta \in \Delta$, то $\alpha + \beta \in \Delta \cap L_1$, т.е. $\alpha + \beta \in \Delta_1$.

3)→4). Доказательство очевидно.

4)→1). Пусть L совпадает с L_1 . Предположим, что у F_1 есть разрезанный двугранный угол, т.е. зеркало отражения из группы W_F разрезает угол симплекса F_1 . Пусть $\alpha, \beta \in \Delta_1^{\text{re}}$ – корни, обращающиеся в нуль на гранях этого угла (мы считаем, что корни – внешние нормали к граням угла). Тогда $\alpha - \beta \in L_1$ обращается в нуль на одном из зеркал, разрезающих угол. Следовательно, $c(\alpha - \beta) \in \Delta^{\text{re}}$ при некотором $c > 0$. По предположению решетка L совпадает с L_1 , поэтому $c(\alpha - \beta) \in L_1$. Мы можем считать, что α и β – простые корни в Δ_1 . Тогда $\alpha - \beta \notin \Delta_1^{\text{re}}$. Решетка L_1 натянута на простые корни системы Δ_1 , а следовательно, $c \in \mathbb{Z}$. Поскольку для $\Delta_1^{\text{re}} \subset \Delta^{\text{re}}$ выполнено условие (*) и $\alpha - \beta \notin \Delta_1^{\text{re}}$, мы получаем, что $c \neq 1$. Учитывая, что $(\alpha \mid \beta) \leq 0$, при $c \geq 2$ корень $c(\alpha - \beta)$ оказывается более чем в два раза длиннее α , что невозможно, так как они не ортогональны друг другу.

Пусть теперь у F_1 нет разрезанного угла. Тогда пара (F, F_1) – это одна из шести пар, приведенных в таблице 1 (см. [6]). Поскольку ни один из этих симплексов не имеет двугранных углов отличных от $\pi/2$ и $\pi/3$, каждому из них соответствует ровно одна система корней. Непосредственная проверка показывает, что в каждом из этих случаев корни подсистемы порождают подрешетку индекса два в решетке корней.

F	F_1	$[W_F : W_{F_1}]$
5
12
10
20
272
527

ТАБЛИЦА 1. Минимальные разбиения с неразрезанными двугранными углами

ЗАМЕЧАНИЕ. Минимальность разбиения не используется при доказательстве второй импликации. Это понадобится нам при исследовании неминимальных разбиений.

Одному и тому же симплексу F может соответствовать несколько систем корней. Действительно, если у F есть хотя бы один угол отличный от $\pi/2$ и $\pi/3$, то мы можем разными способами задать длины корней (см. § 3). Далее будет доказано, что для любого минимального разбиения (F, F_1) можно выбрать такую систему корней Δ (с фундаментальным симплексом F), что корни, определяющие симплекс F_1 , порождают собственную подрешетку в L . По лемме 1 для системы, соответствующей симплексу F_1 , будет выполняться условие (*).

Рассмотрим сначала случай, когда симплекс F_1 состоит из двух экземпляров симплекса F .

ЛЕММА 2. Пусть $[W_F : W_{F_1}] = 2$. Рассмотрим любую систему корней Δ с фундаментальным симплексом F . Тогда корни либо из Δ , либо из $\Delta^\vee$, обрашающиеся в нуль на гранях F_1 , порождают собственную подрешетку L_1 либо в L , либо в $L^\vee$ соответственно. Индекс подрешетки равен двум, трем или четырем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Симплекс F_1 является объединением симплекса F и его образа, полученного отражением относительно одной из граней. Можно считать, что α_1 – корень, определяющий эту грань. Поскольку у F_1 и F все грани, кроме одной, общие, только один из корней $\alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ не ортогонален α_1 .

Пусть α_2 не ортогонален α_1 . Можно считать, что $|a_{21}| \leq |a_{12}|$, иначе вместо матрицы A рассмотрим матрицу A^t . Тогда многогранник F_1 ограничен гранями, соответствующими корням $\alpha_2 - a_{12}\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}$.

Поскольку A – симметризуемая матрица гиперболического типа, то $a_{12} = -1, -2, -3$ или -4 (-4 может встречаться только в том случае, когда F_1 и F – неограниченные треугольники). Если $a_{12} = -1$, то угол между гранями, соответствующими α_2 и $\alpha_2 - a_{12}\alpha_1$, равен $2\pi/3$ и группа W_{F_1} совпадает с W_F .

Поэтому либо $a_{12} = -2$, либо $a_{12} = -3$, либо $a_{12} = -4$. Следовательно, $L_1 = \mathbb{Z}(\alpha_2 - a_{12}\alpha_1) + \mathbb{Z}\alpha_2 + \mathbb{Z}\alpha_3 + \dots + \mathbb{Z}\alpha_{n+1}$ является подрешеткой индекса $|a_{12}|$ в решетке $L = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{Z}\alpha_i$.

Перейдем теперь к общему случаю.

ТЕОРЕМА 1. Пусть W_{F_1} – максимальная подгруппа группы W_F . Рассмотрим любую систему корней Δ с фундаментальным симплексом F . Тогда корни либо из Δ , либо из $\Delta^\vee$, обращающиеся в нуль на гранях F_1 , порождают собственную подрешетку L_1 либо в L , либо в $L^\vee$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку W_{F_1} является подгруппой группы W_F , симплекс F_1 состоит из нескольких копий симплекса F , причем если две копии имеют общую грань, то они симметричны относительно нее.

Рассмотрев все минимальные разбиения (они описаны в работах [4]–[6]), можно заметить, что для любого минимального разбиения (F, F_1) у симплекса F_1 всегда есть хотя бы одна вершина, стабилизатор которой в W_F совпадает с ее стабилизатором в W_{F_1} . Другими словами, можно считать, что у симплексов F и F_1 есть n общих граней – в точности те грани, которые в пересечении дают эту вершину.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – корни, обращающиеся в нуль на общих для F и F_1 гранях, а α_{n+1} и α_{F_1} – корни, соответствующие оставшимся граням симплексов F и F_1 соответственно. Выразим α_{F_1} через $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$. Тогда индекс подрешетки, порожденной векторами $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{F_1}$, равен коэффициенту при α_{n+1} .

Теперь возьмем минимальное разбиение (F, F_1) и систему корней Δ с фундаментальным симплексом F и подсчитаем коэффициент при α_{n+1} в разложении α_{F_1} . Если он отличен от единицы, то мы получаем собственную подрешетку (коэффициент не может быть отрицательным, поскольку α_{F_1} – положительный корень; он также не может равняться нулю, так как тогда простые корни подсистемы были бы линейно зависимы). Пусть он равен единице. Поменяем направление всех стрелок в схеме Дынкина системы корней Δ . Другими словами, рассмотрим систему корней $\Delta^\vee$, отличающуюся от Δ только длинами корней, причем самые короткие корни станут самыми длинными и наоборот. Непосредственным вычислением можно проверить, что в этой системе коэффициент при α_{n+1} в разложении α_{F_1} отличен от единицы. Почти во всех случаях коэффициент равен двум. Более точно, индекс подрешетки не равный двум встречается только в размерностях 2 и 3 (см. рис. 1–7).

§ 2. Немаксимальные подгруппы

В этом параграфе для каждого неминимального разбиения (F, F_1) мы найдем подсистему корней Δ_1 (с фундаментальным симплексом F_1 соответствующей группы Вейля) в системе корней Δ (с фундаментальным симплексом F). Вообще говоря, для некоторых пар (F, F_1) такую пару систем корней $\Delta_1 \subset \Delta$ можно выбрать неединственным образом.

ЛЕММА 3. Пусть Δ_1 – подсистема корней в Δ , а Δ_2 – подсистема корней в Δ_1 . Тогда $\Delta_2 \subset \Delta$ также является подсистемой корней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $\alpha, \beta \in \Delta_2$ и $\alpha + \beta \in \Delta$. Поскольку $\Delta_2 \subset \Delta_1$, имеем $\alpha, \beta \in \Delta_1$. Для $\Delta_1 \subset \Delta$ условие (*) выполнено, а следовательно, $\alpha + \beta \in \Delta_1$. Но условие (*) выполнено и для $\Delta_2 \subset \Delta_1$. Отсюда следует, что $\alpha + \beta \in \Delta_2$ и для $\Delta_2 \subset \Delta$ выполнено условие (*).

Условия леммы, вообще говоря, не являются необходимыми (см. § 3). Однако верно следующее утверждение:

ЛЕММА 4. Пусть $\Delta_2 \subset \Delta_1 \subset \Delta$, и пусть $\Delta_2 \subset \Delta_1$ не является подсистемой корней. Тогда $\Delta_2 \subset \Delta$ также не является подсистемой корней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию леммы найдутся $\alpha, \beta \in \Delta_2$ и $\alpha + \beta \in \Delta_1$ такие, что $\alpha + \beta \notin \Delta_2$. Поскольку $\Delta_1 \subset \Delta$, имеем $\alpha + \beta \in \Delta$. Отсюда следует, что для $\Delta_2 \subset \Delta$ условие (*) не выполнено.

Из леммы 3 следует, что нам достаточно для каждого неминимального разбиения (F, F_1) построить цепочку систем корней $\Delta_k \subset \Delta_{k-1} \subset \dots \subset \Delta_1 \subset \Delta$ так, что Δ_k соответствует симплексу F_1 , Δ соответствует симплексу F и для любого $i \leq k$ разбиение, соответствующее системе $\Delta_i \subset \Delta_{i-1}$, минимальное. Такую цепочку удастся построить для всех неминимальных разбиений, кроме двух четырехмерных (см. рис. 10) и одного пятимерного (см. рис. 13). Подсистемы корней для этих трех разбиений приведены в § 3.

Из сказанного выше мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть F и F_1 — n -мерные гиперболические симплексы Кокстера конечного объема, не имеющие двугранных углов отличных от $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/6$ и 0. Пусть W_{F_1}, W_F — группы, порожденные отражениями относительно гиперграней F_1 и F соответственно, и $W_{F_1} \subset W_F$. Тогда найдутся система корней Δ с фундаментальным симплексом группы Вейля F и система корней Δ_1 с фундаментальным симплексом группы Вейля F_1 такие, что $\Delta_1 \subset \Delta$ является подсистемой корней.

§ 3. Классификация подсистем корней полного ранга

Симплексы Кокстера в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^n$ существуют лишь при $n \leq 9$, причем число их конечно (см. [7]).

Симплексу Кокстера может соответствовать несколько систем корней. Все системы корней, соответствующие гиперболическому симплексу Кокстера конечного объема, получаются из соответствующей схемы Кокстера расстановкой стрелок на кратных и толстых ребрах (иначе говоря, указанием длин корней). Для того чтобы при расстановке стрелок получилась система корней, для каждого цикла в схеме Кокстера должно выполняться следующее условие: если в цикле нет толстых ребер, то в получившейся схеме Дынкина число ребер в цикле, направленных по часовой стрелке, должно быть равно числу ребер, направленных против часовой стрелки. Это правило должно выполняться отдельно для двойных ребер и отдельно для тройных (заметим, что на схеме Дынкина системы простых корней угол $\pi/6$ обозначается тройным ребром, в то время как на схеме Кокстера соответствующего симплекса — четверным).

Если же в схеме есть цикл с толстым ребром (а это возможно только при $n = 2$), то условие выглядит немного по-другому. Если толстые ребра не направлены (т.е.

соответствующие корни имеют одинаковую длину), то условие совпадает с написанным выше. А если есть направленное толстое ребро, то либо толстых направленных ребер два, они направлены в разные стороны и третий угол $-\pi/2$, $\pi/3$ или 0, либо направленное толстое ребро одно и остальные два ребра двойные, направленные в противоположную сторону.

В общем случае алгоритм отыскания всех систем корней с заданной группой Вейля описан в работе [8].

Для получения полной классификации систем корней мы делаем следующее. Рассмотрим минимальное разбиение (F, F_1) . Теперь расставим на схеме Кокстера симплекса F стрелки всеми возможными способами и рассмотрим все системы корней, соответствующие симплексу F_1 . Прделав эту процедуру для всех минимальных разбиений и рассмотрев также их композиции, мы получаем все гиперболические системы корней полного ранга в гиперболических системах корней.

Для получения классификации подсистем нам необходимо для каждой пары $\Delta_1 \subset \Delta$ проверить, выполняется ли условие (*). Для систем, соответствующих минимальным разбиениям, это делается с помощью леммы 1: достаточно проверить, что система корней Δ_1 порождает собственную подрешетку в решетке корней L . Как уже было отмечено выше, для неминимальных разбиений с помощью леммы 3 во многих случаях удастся дать положительный ответ. Заметим, что в этом случае $\Delta_1 = \Delta \cap L_1$, где L_1 – решетка корней системы Δ_1 . Лемма 4 также позволяет существенно сократить вычисления для неминимальных разбиений: для большого количества пар $\Delta_1 \subset \Delta$ удастся сразу доказать, что условие (*) не выполняется. В оставшихся случаях непосредственным вычислением проверяется, выполняется ли условие (*). Оно выполнено для 18 пар систем корней. В каждом из этих восемнадцати случаев оказывается, что $\Delta_1 = \Delta \cap L_1$. Вместе с леммой 1 и замечанием к ней это приводит нас к следующему результату.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\Delta_1 \subset \Delta$ – гиперболические системы корней одного ранга и $L_1 \subset L$ – соответствующие решетки корней. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\Delta_1 = \Delta \cap L_1$;
- 2) $\Delta_1 \subset \Delta$ является подсистемой корней;
- 3) условие (*) выполняется для $\Delta_1^{\text{re}} \subset \Delta^{\text{re}}$.

Ниже мы приводим полный список гиперболических подсистем корней полного ранга в гиперболических системах корней ранга 3–10.

На рис. 1–19 используются следующие обозначения. Если две схемы соединены, то система корней, соответствующая нижней схеме, содержится в системе корней, соответствующей верхней. На каждом ребре, соответствующем минимальному разбиению, написан индекс подгруппы. Если разбиение минимально, нижняя система является подсистемой верхней и индекс подрешетки не равен двум, то в скобках написан индекс подрешетки.

Виды соединений:

	минимальное разбиение, условие (*) выполнено;
	минимальное разбиение, но условие (*) не выполнено;
	неминимальное разбиение, условие (*) выполнено, но хотя

бы для одного промежуточного минимального разбиения условие (*) не выполняется.

Подсистема корней не соединена с системой корней в случае, если разбиение неминимальное и для всех промежуточных подсистем корней условие (*) выполняется (лемма 3).

3.1. Подсистемы корней ранга 3. Существует всего три минимальных разбиения ограниченных треугольников Кокстера, не имеющих углов отличных от $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$ и $\pi/6$. Подсистемы корней, соответствующие ограниченному треугольникам, описаны на рис. 1.

Рис. 1

Существует шесть классов соизмеримости неограниченных треугольников Кокстера, не имеющих углов отличных от $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/6$ и 0. Пять из них содержат по одному элементу и, следовательно, не приводят к подсистемам корней. Оставшийся класс соизмеримости описан на рис. 2–4.

Рис. 2

На рис. 2 приведены подсистемы корней, схемы Дынкина которых не содержат ориентированных толстых ребер.

На рис. 3 и 4 описаны подсистемы корней, схемы Дынкина которых содержат ориентированные толстые ребра.

3.2. Подсистемы корней ранга 4. Существует ровно одна система корней, фундаментальной камерой группы Вейля которой является ограниченный тетраэдр Кокстера.

Рис. 3

Рис. 4

Существует пять классов соизмеримости неограниченных тетраэдров Кокстера, не имеющих двугранных углов отличных от $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$ и $\pi/6$ (см. [9]). Три из них содержат по одному элементу и, следовательно, не приводят к подсистемам корней. Оставшиеся два класса описаны на рис. 5–7 и на рис. 8–9 соответственно.

Рис. 5

Схемы на рис. 6 получены из схем рис. 5 заменой направления всех стрелок.

Все оставшиеся возможности расстановки стрелок приведены на рис. 7.

Системы корней, происходящие из второго класса соизмеримости, описаны на рис. 8 и 9.

На рис. 9 для наглядности изображения крайняя правая схема второго уровня сверху продублирована: она совпадает с крайней левой схемой того же уровня.

3.3. Подсистемы корней ранга 5. Согласно [9] (см. также [6]) существует ровно два класса соизмеримости четырехмерных гиперболических симплексов, не

Рис. 6

Рис. 7

Рис. 8

Рис. 9

имеющих двугранных углов отличных от $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$ и $\pi/6$. Один из них содержит ровно один симплекс и не приводит к подсистемам корней. Оставшийся класс описан на рис. 10–12.

Рис. 10

Схемы на рис. 11 получены из схем рис. 10 заменой направления всех стрелок.

Рис. 11

Все оставшиеся возможности расстановки стрелок (все системы корней, содержащие вещественные корни трех различных длин) приведены на рис. 12.

3.4. Подсистемы корней ранга 6. Согласно [9] (см. также [6]) существует ровно три класса соизмеримости пятимерных гиперболических симплексов. Два из них содержат по одному симплексу и не приводят к подсистемам корней. Оставшийся класс описан на рис. 13–15.

Схемы на рис. 14 получены из схем рис. 13 заменой направления всех стрелок.

Рис. 12

Рис. 13

Рис. 16. Подсистемы корней ранга 7

Все оставшиеся возможности расстановки стрелок (все системы корней, содержащие вещественные корни трех различных длин) приведены на рис. 15.

3.5. Подсистемы корней ранга 7–10. В размерностях 6–9 нет неминимальных разбиений симплексов. Все подсистемы корней ранга 7–10 приведены на рис. 16–19.

Рис. 14

Рис. 15

Рис. 17. Подсистемы корней ранга 8

Рис. 18. Подсистемы корней ранга 9

Рис. 19. Подсистемы корней ранга 10

Список литературы

1. Кац В. Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993.
2. Винберг Э. Б. Дискретные линейные группы, порожденные отражениями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. С. 1072–1112.
3. Дынкин Е. Б. Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли // Матем. сб. 1952. Т. 30 (72). № 2. С. 349–462.
4. Klimenko E., Sakuma M. Two-generator discrete subgroups of $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ containing orientation-reversing elements // Geom. Dedicata. 1998. V. 72. P. 247–282.
5. Felikson A. Coxeter decompositions of hyperbolic tetrahedra // Preprint. № 98-083. Bielefeld: Univ. Bielefeld, 1998.
6. Феликсон А. Кокстеровские разбиения гиперболических симплексов // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 12. С. 134–156.
7. Винберг Э. Б., Шварцман О. В. Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Т. 29. М.: ВИНТИ, 1988. С. 147–259.
8. Котова И. И. Описание систем корней с данной группой Вейля // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 3. С. 397–402.
9. Johnson N. W., Kellerhals R., Ratcliffe J. G., Tschantz S. T. Commensurability classes of hyperbolic Coxeter groups // Linear Algebra Appl. 2002. V. 345. P. 119–147.

Независимый московский университет

Поступила в редакцию
29.11.2002