I. R. Braïtsev, Sur une classe d'équation différentielles linéaires, dont les intégrales jouissent de certaines propriétés des fonctions harmoniques et des fonctions potentielles, *Mat. Sb.*, 1901, Volume 22, Number 2, 254–274

ОБЪ ОДНОМЪ КЛАССѢ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ ЛИНЕЙНЫХЪ УРАВНЕНІЙ, ИНТЕГРАЛЫ КОТОРЫХЪ ОБЛАДАЮТЪ НѢКОТОРЫМИ СВОЙСТВАМИ ГАРМОНИЧЕСКИХЪ И ПОТЕНЦІАЛЬНЫХЪ ФУНКЦІЙ.

И. Р. Брайцева.

Настоящая статья тѣсно соприкасается съ изслѣдованіями É. Picard'a *) и Paraf'a **). Она имѣетъ въ виду значительно расширить классъ уравненій, интегралы которыхъ обладаютъ нѣкоторыми свойствами гармоническихъ функцій, а также функцій, удовлетворяющихъ уравненію Лапласа:

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Долженъ сказать, что эта статья представляетъ въ новой обработкѣ сообщеніе, дѣланное мною 21-го января 1898 года въ Московскомъ Математическомъ Обществѣ.

§ 1. Имѣемъ уравненіе:

$$\frac{d^{2k} y}{dx^{2k}} + 2P \frac{dy}{dx} + Qy = 0 , \tag{1}$$

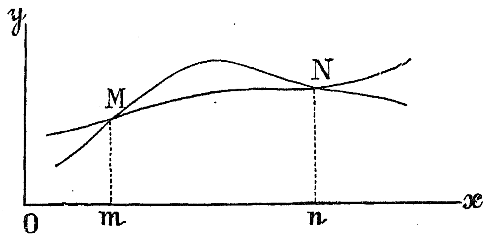
*) Traité d'Analyse, t. II, 1893, p. 23—34.

**) Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. VI, 1892.

гдѣ P и Q суть нѣкоторыя функціи независимаго перемѣннаго x.

Относительно интеграловъ этого уравненія докажемъ слѣдующую теорему:

Пусть двѣ интегральныя кривыя $y=y_1$ и $y=y_2$ соприкасаются между собою въ точкахъ M и N и порядокъ соприкосновенія ихъ есть $k-1$.



Черт. 1.

Допустимъ, что функціи y_1 и y_2 и всѣ ихъ производныя до порядка $2k-1$ включительно непрерывны для всѣхъ значеній x, лежащихъ на отрѣзкѣ mn, гдѣ m и n суть проекціи точекъ M и N на ось иксовъ. При этихъ условіяхъ, а также при сохраненіи неравенства

$$(-1)^k\left(Q-\frac{dP}{dx}\right)>0 \qquad (\alpha)$$

для всѣхъ точекъ отрѣзка mn, обѣ кривыя совпадаютъ между M и N.

Для доказательства полагаемъ:

$$\eta=y_1-y_2. \qquad (2)$$

Такъ какъ η есть также интегралъ уравненія (1), то будемъ имѣть тождественно:

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta \left[\frac{d^{2k}\eta}{dx^{2k}} + 2P\frac{d\eta}{dx} + Q\eta\right] dx = 0\,, \tag{3}$$

гдѣ x_0 и x_1 суть координаты точекъ m и n.

Производя интеграціи по частямъ въ лѣвой части соотношенія (3) и принимая во вниманіе, что для точекъ m и n имѣютъ мѣсто:

$$\eta = 0,\quad \frac{d\eta}{dx} = 0,\quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = 0,\ \ldots\ldots,\ \frac{d^{k-1}\eta}{dx^{k-1}} = 0\,, \tag{4}$$

получимъ:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{d^k\eta}{dx^k}\right)^2 + (-1)^k\left(Q - \frac{dP}{dx}\right)\eta^2\right] dx = 0\,. \tag{5}$$

Отсюда, въ виду условія (α), слѣдуетъ, что дѣйствительно $\eta = 0$, или $y_1 = y_2$ для всѣхъ значеній x, лежащихъ на отрѣзкѣ mn.

Если въ уравненіи (1) положимъ $k=1$, то будемъ имѣть самый общій видъ линейнаго уравненія 2-го порядка однородной формы:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2P\frac{dy}{dx} + Qy = 0\,, \tag{6}$$

и теорема приметъ слѣдующее выраженіе:

Пусть двѣ интегральныя кривыя $y = y_1$ и $y = y_2$ пересѣкаются въ точкахъ M и N. Положимъ, что функціи y_1 и y_2 и первыя ихъ производныя непрерывны для всѣхъ значеній x, находящихся на отрѣзкѣ mn. Если, при соблюденіи этихъ условій, имѣетъ мѣсто:

$$\frac{dP}{dx} - Q > 0 \tag{β}$$

для вышеуказанныхъ значеній x, то обѣ кривыя совпадаютъ между M и N.

Будемъ первую теорему называть основною. Предыдущіе результаты можно нѣсколько обобщить.

Имѣемъ уравненіе:

$$\sum_{k=1}^{k=m} (-1)^k A_k \frac{d^{2k}y}{dx^{2k}} + 2P\frac{dy}{dx} + Qy = 0\,, \tag{7}$$

гдѣ P и Q нѣкоторыя функціи x, а A_k суть постоянныя количества одинаковаго знака. Легко убѣдиться, что заключеніе основной теоремы имѣетъ силу и относительно двухъ интеграловъ (7), если только, при сохраненіи всѣхъ условій теоремы, справедливо слѣдующее неравенство:

$$j\left(Q - \frac{dP}{dx}\right) > 0, \tag{γ}$$

гдѣ j есть единица съ тѣмъ знакомъ, каковъ знакъ при A_k.

Въ самомъ дѣлѣ, придерживаясь предыдущихъ обозначеній, напишемъ тождество:

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta\left[\sum_{k=1}^{k=m} (-1)^k j A_k \frac{d^{2k}\eta}{dx^{2k}} + 2Pj\frac{d\eta}{dx} + jQ\eta\right] dx = 0\,. \tag{8}$$

При помощи интеграціи по частямъ въ лѣвой части тождества (8), при условіяхъ (4) для $k=m$, находимъ:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\sum_{k=1}^{k=m} jA_k \left(\frac{d^k\eta}{dx^k}\right)^2 + j\left(Q - \frac{dP}{dx}\right)\eta^2\right] dx = 0\,. \tag{9}$$

Это соотношеніе, въ виду условія (γ), подтверждаетъ наше положеніе.

Укажемъ теперь, какъ и эти результаты можно также обобщить.

Положимъ, что имѣемъ уравненіе:

$$\frac{d^{2k}y}{dx^{2k}}+p_1\frac{d^{2k-1}y}{dx^{2k-1}}+p_2\frac{d^{2k-2}y}{dx^{2k-2}}+\ldots+p_{2k}y=0\,, \tag{10}$$

гдѣ $p_1, p_2, \ldots, p_{2k}$ суть нѣкоторыя функціи перемѣннаго x.

При помощи подстановки

$$y=z\,e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}\,, \tag{11}$$

уравненіе (10) приводится къ слѣдующему:

$$\frac{d^{2k}z}{dx^{2k}}+q_2\frac{d^{2k-2}z}{dx^{2k-2}}+q_3\frac{d^{2k-3}z}{dx^{2k-3}}+\ldots+q_{2k}\,z=0, \tag{12}$$

гдѣ $q_2, q_3, \ldots, q_{2k}$ выражаются извѣстнымъ образомъ чрезъ функціи $p_1, p_2, \ldots, p_{2k}$ и ихъ производныя до порядка $2k-1$ включительно.

Послѣ этого остается выбрать $p_1, p_2, \ldots, p_{2k-2}$ такимъ образомъ, чтобы уравненіе (12) совпало съ уравненіемъ (7). При такомъ подборѣ $p_1, p_2, \ldots, p_{2k-2}$, уравненіе принадлежитъ къ изыскиваемому классу уравненій. Само собою разумѣется, что, кромѣ подстановки (11), можно пользоваться для той же цѣли другими преобразованіями.

§ 2. Остановимся теперь на уравненіи:

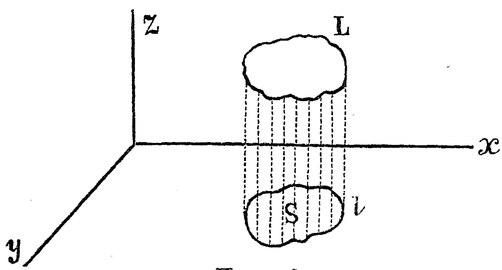
$$\Delta'_{2k} u = \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^{2k} u}{\partial y^{2k}} = 0 \text{ *)}. \qquad (1)$$

Предварительно выведемъ нѣсколько формулъ, которыя будутъ для насъ полезны.

Обозначимъ чрезъ J_0 слѣдующее выраженіе:

$$J_0 = \iint_S \left[\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\frac{\partial^k v}{\partial x^k} + \frac{\partial^k u}{\partial y^k}\frac{\partial^k v}{\partial y^k}\right] dx\, dy. \qquad (2)$$

Предполагаемъ, что двукратный интегралъ распространяется на площадь, окруженную замкнутой линіей l.



Черт. 2.

---

*) Замѣтимъ, что общій интегралъ этого уравненія имѣетъ видъ:

$$\varphi_1(x+\alpha_1 y) + \varphi_2(x+\alpha_2 y) + \ldots + \varphi_{2k}(x+\alpha_{2k} y),$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}$ суть $2k$ значеній выраженія $\sqrt[2k]{-1}$, а $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2k}$ произвольныя функціи. Вообще общимъ интеграломъ уравненія

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m} + \frac{\partial^m u}{\partial y^m} = 0$$

служитъ:

$$u = \varphi_1(x+\beta_1 y) + \varphi_2(x+\beta_2 y) + \ldots + \varphi_m(x+\beta_m y),$$

гдѣ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ суть m значеній выраженія $\sqrt[m]{-1}$, а $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ произвольныя функціи.

Мы будемъ также предполагать, что функціи u и v и всѣ ихъ производныя до порядка $2k-1$ включительно непрерывны внутри l и на самой линіи l.

Посредствомъ интеграціи по частямъ находимъ:

$$J_0 = \int_l \left[\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x^{k-1}}\frac{\partial^k v}{\partial x^k} - \frac{\partial^{k-2}u}{\partial x^{k-2}}\frac{\partial^{k+1}v}{\partial x^{k+1}} + \ldots + (-1)^{k-1}u\frac{\partial^{2k-1}v}{\partial x^{2k-1}}\right)dy -\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial y^{k-1}}\frac{\partial^k v}{\partial y^k} - \frac{\partial^{k-2}u}{\partial y^{k-2}}\frac{\partial^{k+1}v}{\partial y^{k+1}} + \ldots + (-1)^{k-1}u\frac{\partial^{2k-1}v}{\partial y^{2k-1}}\right)dx\right] +$$

$$+(-1)^k \iint_S u\Delta'_{2k} v\,dxdy. \tag{3}$$

Изъ формулъ (2) и (3), полагая въ нихъ $v=u$, находимъ:

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)^2 + \left(\frac{\partial^k u}{\partial y^k}\right)^2\right] dxdy =$$

$$= \int_l \left[\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x^{k-1}}\frac{\partial^k u}{\partial x^k} - \frac{\partial^{k-2}u}{\partial x^{k-2}}\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x^{k+1}} + \ldots + (-1)^{k-1}u\frac{\partial^{2k-1}u}{\partial x^{2k-1}}\right)dy -\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial y^{k-1}}\frac{\partial^{k-1}u}{\partial y^k} - \frac{\partial^{k-2}u}{\partial y^{k-2}}\frac{\partial^k u}{\partial y^k} + \ldots + (-1)^{k-1}u\frac{\partial^{2k-1}u}{\partial y^{2k-1}}\right)dx\right| +$$

$$+(-1)^k \iint_S u\Delta'_{2k} u\,dxdy. \tag{4}$$

Приравнивая между собою значеніе J_0 по формулѣ (3) и то, которое получится послѣ взаимнаго перемѣщенія функцій n и v, получимъ формулу, которая представляетъ обобщеніе извѣстной теоремы Грина для случая двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y:

$$\iint_S \left[u\Delta'_{2k}v - v\Delta'_{2k}u\right]dxdy +$$

$$+\int_l \left\{ \left[(-1)^1\left(u\frac{\partial^{2k-1}v}{\partial x^{2k-1}} - v\frac{\partial^{2k-1}u}{\partial x^{2k-1}}\right) + \ldots + \right.\right.$$

$$\left. + (-1)^k\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x^{k-1}}\frac{\partial^k v}{\partial x^k} - \frac{\partial^{k-1}v}{\partial x^{k-1}}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)\right]dy -$$

$$-\left[(-1)^1\left(u\frac{\partial^{2k-1}v}{\partial y^{2k-1}} - v\frac{\partial^{2k-1}u}{\partial y^{2k-1}}\right) + \ldots + \right.$$

$$\left.\left. + (-1)^k\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial y^{k-1}}\frac{\partial^k v}{\partial y^k} - \frac{\partial^{k-1}v}{\partial y^{k-1}}\frac{\partial^k u}{\partial y^k}\right)\right]dx\right\} = 0. \tag{5}$$

Полагая $u=1$, будемъ имѣть:

$$\iint_S \Delta'_{2k}v\,dxdy = \int_l \left(\frac{\partial^{2k-1}v}{\partial x^{2k-1}}dy - \frac{\partial^{2k-1}v}{\partial y^{2k-1}}dx\right). \tag{6}$$

Докажемъ теперь слѣдующую теорему:

Пусть двѣ интегральныя поверхности уравненія (1) соприкасаются между собою по линіи L (черт. 2). Допустимъ, что внутри линіи l, проекціи L на плоскость (xy), функціи u_1 и u_2 и всѣ ихъ производныя до порядка $2k-1$ включительно непрерывны. При этихъ условіяхъ, обѣ поверхности совпадаютъ для всѣхъ значеній x и y внутри l.

Для доказательства воспользуемся формулою (4). Такъ какъ для всѣхъ точекъ кривой l имѣетъ мѣсто:

$$v'=0;\ \frac{\partial v'}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v'}{\partial y}=0;\ \ldots\ldots;\ \frac{\partial^{k-1}v'}{\partial x^{k-1}}=0;\ \ldots\ldots;\ \frac{\partial^{k-1}v'}{\partial y^{k-1}}=0, \tag{7}$$

гдѣ принято:

$$v'=u_1-u_2\,, \tag{8}$$

то, полагая въ формулѣ (4) $u=v'$, будемъ имѣть:

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial^k v'}{\partial x^k}\right)^2+\left(\frac{\partial^k v'}{\partial y^k}\right)^2\right]dxdy=0. \tag{9}$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\frac{\partial^k v'}{\partial x^k}=0,\quad \frac{\partial^k v'}{\partial y^k}=0. \tag{10}$$

Интегрируя эти уравненія, находимъ:

$$\frac{\partial^{k-1} v'}{\partial x^{k-1}}=c_1,\quad \frac{\partial^{k-1} v'}{\partial y^{k-1}}=c_2. \tag{11}$$

Въ виду условій (7), $c_1=c_2=0$ и мы имѣемъ:

$$\frac{\partial^{k-1} v'}{\partial x^{k-1}}=0,\quad \frac{\partial^{k-1} v'}{\partial y^{k-1}}=0. \tag{12}$$

Продолжая поступать въ томъ же духѣ, въ концѣ концовъ, очевидно, придемъ къ заключенію о справедливости положенія.

Предыдущая теорема влечетъ за собою слѣдующее слѣдствіе:

Не можетъ существовать внутри l двухъ различныхъ функцій u_1 и u_2, принимающихъ на линіи l одинаковыя значенія и удовлетворяющихъ условіямъ теоремы.

Въ самомъ дѣлѣ, функція $v'=u_1-u_2$ въ этомъ случаѣ, подчиняясь всѣмъ условіямъ теоремы, равна нулю на линіи l. Тогда, примѣняя къ v' формулу (4), придемъ къ заключенію, что $v'=0$, или $u_1=u_2$ для всѣхъ точекъ внутри l.

Выведемъ далѣе двѣ формулы, которыя какъ частный случай заключаютъ извѣстныя формулы для гармоническихъ функцій. Положимъ, что въ соотношеніи (5) функціи u и v удовлетворяютъ уравненію (1). Тогда это соотношеніе обратится въ слѣдующее:

$$\int_l \Big\{ \Big[(-1)^1 \Big(u \frac{\partial^{2k-1} v}{\partial x^{2k-1}} - v \frac{\partial^{2k-1} u}{\partial x^{2k-1}} \Big) + \ldots +$$

$$+ (-1)^{k-1} \Big(\frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}} \frac{\partial^k v}{\partial x^k} - \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}} \frac{\partial^k v}{\partial x^k} \Big) \Big] dy -$$

$$- \Big[(-1)^1 \Big(u \frac{\partial^{2k-1} v}{\partial y^{2k-1}} - v \frac{\partial^{2k-1} u}{\partial y^{2k-1}} \Big) + \ldots +$$

$$+ (-1)^{k-1} \Big(\frac{\partial^{k-1} u}{\partial y^{k-1}} \frac{\partial^k v}{\partial y^k} - \frac{\partial^{k-1} u}{\partial y^{k-1}} \frac{\partial^k u}{\partial y^k} \Big) \Big] dx \Big\} = 0. \qquad (13)$$

Считая же въ соотношеніи (6) функцію v интеграломъ уравненія (1), найдемъ:

$$\int_l \Big(\frac{\partial^{2k-1} v}{\partial x^{2k-1}} dy - \frac{\partial^{2k-1} v}{\partial y^{2k-1}} dx \Big) = 0. \qquad (14)$$

При условіи $k=1$, предшествующіе результаты обратятся въ извѣстныя теоремы гармоническихъ функцій, при иной формулировкѣ.

Предыдущіе выводы можно нѣсколько обобщить. Возьмемъ уравненіе:

$$\sum_{q=0}^{q=k-1} (-1)^{k-q} \sum_{p=0}^{p=k-q} A_{p,k-q} \frac{\partial^{2(k-q)} u}{\partial x^{2(k-q)-2p} \partial y^{2p}} +$$

$$+ 2l \frac{\partial u}{\partial x} + 2k \frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0, \qquad (15)$$

гдѣ $A_{p,k-q}$ суть дѣйствительныя постоянныя количества одинаковаго знака.

Относительно интеграловъ этого уравненія справедливо заключеніе основной теоремы, при добавочномъ условіи:

$$j\left(f-\frac{\partial l}{\partial x}-\frac{\partial k}{\partial y}\right)>0\,, \tag{16}$$

гдѣ подъ j разумѣется единица съ такимъ же знакомъ, каковъ при $A_{p,\,k-q}$.

Сохраняя прежнія обозначенія, пишемъ тождество:

$$\iint_S v'\left[\sum_{q=0}^{q=k-1}(-1)^{k-q}\sum_{p=0}^{p=k-q}A_{p,\,k-q}\,\frac{\partial^{2(k-q)}v'}{\partial x^{2(k-q)-2p}\partial y^{2p}}+\right.$$
$$\left.+\,2l\frac{\partial v'}{\partial x}+2k\frac{\partial v'}{\partial y}+fv'\right]dxdy=0\,. \tag{17}$$

При помощи интеграціи по частямъ, въ виду условій (7), тождеству (17) дадимъ слѣдующую форму:

$$\iint_S\left[\sum_{q=0}^{q=k-1}\sum_{p=0}^{p=k-q}jA_{p,\,k-q}\left(\frac{\partial^{k-q}v'}{\partial x^{k-q-p}\partial y^p}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\,j\left(f-\frac{\partial l}{\partial x}-\frac{\partial k}{\partial y}\right)v'^2\right]dxdy=0\,, \tag{18}$$

гдѣ $v'=u_1-u_2$, разность двухъ интеграловъ уравненія (17).

Соотношеніе (18), въ виду условія (16), и подтверждаетъ положеніе.

При $k=1$, уравненіе (15) принимаетъ видъ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2l\frac{\partial u}{\partial x}+2k\frac{\partial u}{\partial y}+fu=0\,. \tag{19}$$

Найденные же результаты въ разсматриваемомъ случаѣ совпадаютъ съ теоремами Picard'а.

Слѣдуя плану, указанному для случая одного независимаго перемѣннаго въ предшествующемъ параграфѣ, можно было бы обобщить предыдущіе выводы.

§ 3. Возьмемъ уравненіе:

$$\Delta_{2k}u=\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}+\frac{\partial^{2k}u}{\partial y^{2k}}+\frac{\partial^{2k}u}{\partial z^{2k}}=0. \qquad (1)$$

Постараемся обнаружить, что интегралы этого уравненія обладаютъ нѣкоторыми свойствами интеграловъ уравненія Лапласа:

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \qquad (2)$$

Для цѣли выведемъ нѣсколько формулъ, аналогичныхъ тѣмъ, которыя найдены нами въ предыдущемъ параграфѣ.

Возьмемъ выраженіе:

$$J_2=\int\!\!\int\!\!\int_W\left[\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\frac{\partial^k v}{\partial x^k}+\frac{\partial^k u}{\partial y^k}\frac{\partial^k v}{\partial y^k}+\frac{\partial^k u}{\partial z^k}\frac{\partial^k v}{\partial z^k}\right]dxdydz\,, \qquad (3)$$

гдѣ трехкратный интегралъ распространяется на нѣкоторый объемъ W, окруженный замкнутою поверхностью Σ.

Допустимъ, что функціи u и v и всѣ ихъ частныя производныя по x и y до порядка $2k—1$ включительно непрерывны внутри объема W и на его поверхности Σ.

Посредствомъ интеграціи по частямъ интегралъ (3) представится въ слѣдующей формѣ:

$$J_2=\iint_\Sigma\Bigg[\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x^{k-1}}\frac{\partial^k v}{\partial x^k}+(-1)^1\frac{\partial^{k-2}u}{\partial x^{k-2}}\frac{\partial^{k+1}v}{\partial x^{k+1}}+\ldots+\right.$$

$$\left.+(-1)^{k-1}u\frac{\partial^{2k-1}v}{\partial x^{2k-1}}\right)dydz+\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial y^{k-1}}\frac{\partial^k v}{\partial y^k}+(-1)^1\frac{\partial^{k-2}u}{\partial y^{k-2}}\frac{\partial^{k+1}v}{\partial y^{k+1}}+\right.$$

$$\left.+\ldots+(-1)^{k-1}u\frac{\partial^{2k-1}v}{\partial y^{2k-1}}\right)dxdz+$$

$$+\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial z^{k-1}}\frac{\partial^k v}{\partial z^k}+(-1)^1\frac{\partial^{k-1}u}{\partial z^{k-1}}\frac{\partial^{k+1}v}{\partial z^{k+1}}+\ldots+\right.$$

$$\left.+(-1)^{k-1}u\frac{\partial^{2k-1}v}{\partial z^{2k-1}}\right)dxdy\Bigg]+(-1)^k\iiint_W u\Delta_{2k}v\,dxdydz. \qquad (4)$$

Изъ формулъ (3) и (4), полагая въ нихъ $v=u$, находимъ:

$$\iiint_W\left[\left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)^2+\left(\frac{\partial^k u}{\partial y^k}\right)^2+\left(\frac{\partial^k u}{\partial z^k}\right)^2\right]dxdydz=$$

$$=\iint_\Sigma\Bigg[\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x^{k-1}}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}+(-1)^1\frac{\partial^{k-2}u}{\partial x^{k-2}}\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x^{k+1}}+\ldots+\right.$$

$$\left.+(-1)^{k-1}u\frac{\partial^{2k-1}u}{\partial x^{2k-1}}\right)dydz+\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial y^{k-1}}\frac{\partial^k u}{\partial y^k}+\right.$$

$$\left.+(-1)^1\frac{\partial^{k-2}u}{\partial y^{k-2}}\frac{\partial^{k+1}u}{\partial y^{k+1}}+\ldots+(-1)^{k-1}u\frac{\partial^{2k-1}u}{\partial y^{2k-1}}\right)dxdz+$$

$$+\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial z^{k-1}}\frac{\partial^k u}{\partial z^k}+(-1)^1\frac{\partial^{k-2}u}{\partial z^{k-2}}\frac{\partial^{k+1}u}{\partial z^{k+1}}+\ldots+\right.$$

$$\left.+(-1)^{k-1}u\frac{\partial^{2k-1}u}{\partial z^{2k-1}}\right)dxdy\Bigg]+(-1)^k\iiint_W u\Delta_{2k}u\,dxdydz. \qquad (5)$$

Легко вывести теперь формулу, которая представляетъ обобщеніе извѣстной формулы Грина. Для полученія ея, стоитъ только въ правой части равенства (4) перемѣстить взаимно

u и v и полученное новое выраженіе того же интеграла J_2 приравнять его значенію, данному по формулѣ (5). Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$\iint_{\Sigma}\Bigg\{\Bigg[\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x^{k-1}}\frac{\partial^k v}{\partial x^k}-\frac{\partial^{k-1}v}{\partial x^{k-1}}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)+\ldots+$$

$$+(-1)^{k-1}\left(u\frac{\partial^{2k-1}v}{\partial x^{2k-1}}-v\frac{\partial^{2k-1}u}{\partial x^{2k-1}}\right)\Bigg]dydz+$$

$$+\Bigg[\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial y^{k-1}}\frac{\partial^k v}{\partial y^k}-\frac{\partial^{k-1}v}{\partial y^{k-1}}\frac{\partial^k u}{\partial y^k}\right)+\ldots+$$

$$+(-1)^{k-1}\left(u\frac{\partial^{2k-1}v}{\partial y^{2k-1}}-v\frac{\partial^{2k-1}u}{\partial y^{2k-1}}\right)\Bigg]dxdz+$$

$$+\Bigg[\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial z^{k-1}}\frac{\partial^k v}{\partial z^k}-\frac{\partial^{k-1}v}{\partial z^{k-1}}\frac{\partial^k u}{\partial z^k}\right)+\ldots+$$

$$+(-1)^{k-1}\left(u\frac{\partial^{2k-1}v}{\partial z^{2k-1}}-v\frac{\partial^{2k-1}u}{\partial z^{2k-1}}\right)\Bigg]dxdy\Bigg\}+$$

$$+(-1)^k\iiint_W\Big[u\Delta_{2k}v-v\Delta_{2k}u\Big]dxdydz=0. \qquad (6)$$

Полагая тутъ $u=1$, будемъ имѣть:

$$\iiint_W \Delta_{2k}v\,dxdydz=$$

$$\iint_{\Sigma}\left[\frac{\partial^{2k-1}v}{\partial x^{2k-1}}dydz+\frac{\partial^{2k-1}v}{\partial y^{2k-1}}dxdz+\frac{\partial^{2k-1}v}{\partial z^{2k-1}}dxdy\right]. \qquad (7)$$

Если u и v суть интегралы уравненія (1), то формула (6) дастъ:

$$\iint_\Sigma \Bigg\{ \Bigg[\left(\frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}} \frac{\partial^k v}{\partial x^k} - \frac{\partial^{k-1} v}{\partial x^{k-1}} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right) + \ldots +$$

$$+ (-1)^{k-1} \left(u \frac{\partial^{2k-1} v}{\partial x^{2k-1}} - v \frac{\partial^{2k-1} u}{\partial x^{2k-1}} \right) \Bigg] dydz +$$

$$+ \Bigg[\left(\frac{\partial^{k-1} u}{\partial y^{k-1}} \frac{\partial^k v}{\partial y^k} - \frac{\partial^{k-1} v}{\partial y^{k-1}} \frac{\partial^k u}{\partial y^k} \right) + \ldots +$$

$$+ (-1)^{k-1} \left(u \frac{\partial^{2k-1} v}{\partial y^{2k-1}} - v \frac{\partial^{2k-1} u}{\partial y^{2k-1}} \right) \Bigg] dxdz +$$

$$+ \Bigg[\left(\frac{\partial^{k-1} u}{\partial z^{k-1}} \frac{\partial^k v}{\partial z} - \frac{\partial^{k-1} v}{\partial z^{k-1}} \frac{\partial^k u}{\partial z^k} \right) + \ldots +$$

$$+ (-1)^{k-1} \left(u \frac{\partial^{2k-1} v}{\partial z^{2k-1}} - v \frac{\partial^{2k-1} u}{\partial z^{2k-1}} \right) \Bigg] dxdy \Bigg\} = 0. \qquad (8)$$

Если же v есть интегралъ уравненія (1), то онъ удовлетворяетъ соотношенію на поверхности Σ:

$$\iint_\Sigma \left(\frac{\partial^{2k-1} v}{\partial x^{2k-1}} dydz + \frac{\partial^{2k-1} v}{\partial y^{2k-1}} dxdz + \frac{\partial^{2k-1} v}{\partial z^{2k-1}} dxdy \right) = 0. \qquad (9)$$

Относительно интеграловъ уравненія (1) постараемся установить слѣдующую теорему:

Пусть двѣ функціи u_1 и u_2 —, интегралы уравненія (1),— и ихъ частныя производныя до порядка $2k-1$ включительно остаются непрерывными внутри объема W и на его поверхности Σ. Допустимъ, что для всѣхъ точекъ этой поверхности имѣютъ мѣсто условія:

$$v' = 0\,; \ \frac{\partial v'}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial v'}{\partial y} = 0; \ \ldots; \ \frac{\partial^{k-1} v'}{\partial x^{k-1}} = 0; \ \ldots; \ \frac{\partial^{k-1} v'}{\partial y^{k-1}} = 0, \qquad (10)$$

гдѣ принято:

$$v' = u_1 - u_2 . \tag{11}$$

При такихъ условіяхъ, функціи u_1 и u_2 совпадаютъ для всѣхъ значеній x, y, z внутри объема W.

Для доказательства воспользуемся формулою (5). Полагая въ ней $u = v'$, будемъ имѣть:

$$\iiint_W \left[\left(\frac{\partial^k v'}{\partial x^k}\right)^2 + \left(\frac{\partial^k v'}{\partial y^k}\right)^2 + \left(\frac{\partial^k v'}{\partial z^k}\right)^2\right] dx dy dz = 0 \tag{12}$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\frac{\partial^k v'}{\partial x^k} = 0, \quad \frac{\partial^k v'}{\partial y^k} = 0, \quad \frac{\partial^k v'}{\partial z^k} = 0 . \tag{13}$$

Эти же соотношенія, въ виду условій (10), влекутъ за собою: $v' = 0$, $u_1 = u_2$ для всѣхъ точекъ объема W. Какъ слѣдствіе предыдущей теоремы, оказывается справедливымъ слѣдующее положеніе:

Не можетъ существовать внутри объема W двухъ функцій u_1 и u_2,—интеграловъ уравненія (1),—которыя принимали бы одинаковыя значенія на поверхности Σ и подчинялись бы условіямъ теоремы. Дѣйствительно, функція $v' = u_1 - u_2$, выполняя условія непрерывности, указанныя въ теоремѣ, равна нулю на поверхности Σ. На той же поверхности равны нулю и всѣ ея производныя до порядка $k-1$ включительно. Пользуясь формулою (5) для $u = v'$, приходимъ къ условію (12). Отсюда легко заключить, что обѣ функціи u_1 и u_2 совпадаютъ для всѣхъ значеній x, y и z внутри объема W.

Въ случаѣ $k = 1$ предыдущіе результаты представляютъ извѣстныя теоремы относительно потенціальныхъ функцій.

Предшествующіе выводы можно нѣсколько обобщить.

Беремъ уравненіе:

$$\sum_{q=0}^{q=k-1} (-1)^{k-q} \sum_{(p_1 p_2)} A^{(k)}{}_{p_1 p_2} \frac{\partial^{2(k-q)} u}{\partial x^{2(k-q-p_1)} \partial y^{2p_1-2p_2} \partial z^{2p_2}} +$$

$$+2l_1 \frac{\partial u}{\partial x} + 2l_2 \frac{\partial u}{\partial y} + 2l_3 \frac{\partial u}{\partial z} + fu = 0\,, \tag{14}$$

гдѣ $A^{(k)}{}_{p_1 p_2}$ суть дѣйствительныя постоянныя одинаковаго знака, а l_1, l_2, l_3 и f нѣкоторыя функціи перемѣнныхъ x, y и z. Касательно интеграловъ этого уравненія справедливо заключеніе основной теоремы, при добавочномъ условіи:

$$j\left(f - \frac{\partial l_1}{\partial x} - \frac{\partial l_2}{\partial y} - \frac{\partial l_3}{\partial z}\right) > 0 \tag{15}$$

для всѣхъ точекъ внутри объема W; при чемъ j представляетъ единицу со знакомъ постоянныхъ $A^{(k)}{}_{p_1 p_2}$.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, стоитъ лишь тождество:

$$\iiint_W v' \left[\sum_{q=0}^{q=k-1} (-1)^{k-q} \sum_{(p_1 p_2)} A^{(k)}{}_{p_1 p_2} \frac{\partial^{2(k-q)} v'}{\partial x^{2(k-q)-2p_1} \partial y^{2p_1-2p_2} \partial z^{2p_2}} + \right.$$

$$\left. + 2l_1 \frac{\partial v'}{\partial x} + 2l_2 \frac{\partial v'}{\partial y} + 2l_3 \frac{\partial v'}{\partial z} + fv' \right] dxdydz = 0 \tag{16}$$

посредствомъ интеграціи по частямъ въ лѣвой его части, при условіяхъ (10), привести къ виду:

$$\iiint_W \left[\sum_{q=0}^{q=k-1} \sum_{(p_1 p_2)} j A^{(k)}{}_{p_1 p_2} \left(\frac{\partial^{k-q} v'}{\partial x^{k-q-p_1} \partial y^{p_1-p_2} \partial z^{p_2}} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + j\left(f - \frac{\partial l_1}{\partial x} - \frac{\partial l_2}{\partial y} - \frac{\partial l_3}{\partial z}\right) v'^2 \right] dxdydz = 0, \tag{17}$$

гдѣ $v'=u_1-u_2$, разности двухъ интеграловъ уравненія (14), и отсюда прямо заключаемъ о справедливости высказаннаго сужденія.

§ 4. Возьмемъ уравненіе:

$$\nabla^{2k}u=\frac{\partial^{2k}u}{\partial x_1^{2k}}+\frac{\partial^{2k}u}{\partial x_2^{2k}}+\ldots+\frac{\partial^{2k}u}{\partial x_m^{2k}}=0. \tag{1}$$

Предварительно выведемъ одну формулу, аналогичную формулѣ (5) предшествующаго параграфа.

Имѣемъ выраженіе:

$$J_{2k}=\int\int\cdots\int_{W_1}\left[\frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}\frac{\partial^k v}{\partial x_1^k}+\frac{\partial^k u}{\partial x_2^k}\frac{\partial^k v}{\partial x_2^k}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^k u}{\partial x_m^k}\frac{\partial^k v}{\partial x_m^k}\right]dx_1\ldots dx_m, \tag{2}$$

гдѣ m-кратный интегралъ распространяется на нѣкоторое многообразіе W_1 измѣренія m, ограниченное всецѣло многообразіемъ Σ_1 измѣренія $m-1$.

При помощи интеграціи по частямъ интегралу (2) дадимъ слѣдующую форму:

$$J_{2k}=\int\int\cdots\int_{\Sigma_1}\left\{\left[\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_1^{k-1}}\frac{\partial^k v}{\partial x_1^k}+(-1)'\frac{\partial^{k-2}u}{\partial x_1^{k-2}}\frac{\partial^{k+1}v}{\partial x_1^{k+1}}+\ldots+\right.\right.$$

$$\left.+(-1)^{k-1}u\frac{\partial^{2k-1}v}{\partial x_1^{2k-1}}\right]dx_2\ldots dx_m+$$

$$+\left[\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_2^{k-1}}\frac{\partial^k v}{\partial x_2^k}+(-1)'\frac{\partial^{k-2}u}{\partial x_2^{k-2}}\frac{\partial^{k+1}v}{\partial x_2^{k+1}}+\ldots+\right.$$

$$\left.+(-1)^{k-1}u\frac{\partial^{2k-1}v}{\partial x_2^{2k-1}}\right]dx_1dx_3\ldots dx_m$$

. . . .

. . . .

$$+\left[\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_m{}^{k-1}}\frac{\partial^k v}{\partial x_m{}^k}+(-1)'\frac{\partial^{k-2}u}{\partial x_m{}^{k-2}}\frac{\partial^{k+1}v}{\partial x_m{}^{k+1}}+\ldots+\right.$$

$$\left.+(-1)^{k-1}u\frac{\partial^{2k-1}v}{\partial x_m{}^{2k-1}}\right]dx_1\ldots dx_{m-1}+$$

$$+(-1)^k\iiint\ldots\int_{W_1}u\nabla^{2k}v\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m\,, \qquad (3)$$

гдѣ первый интегралъ распространяется на многообразіе Σ_1, а второй на многообразіе W_1.

Изъ формулъ (2) и (3), полагая въ нихъ $v=u$, находимъ:

$$\iiint\ldots\int_{W_1}\left[\left(\frac{\partial^k u}{\partial x_1{}^k}\right)^2+\left(\frac{\partial^k u}{\partial x_2{}^k}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial^k u}{\partial x_m{}^k}\right)^2\right]dx_1\ldots dx_m=$$

$$=\iint\ldots\int_{\Sigma_1}\left\{\left[\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_1{}^{k-1}}\frac{\partial^k u}{\partial x_1{}^k}+(-1)'\frac{\partial^{k-2}u}{\partial x_1{}^{k-2}}\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x_1{}^{k+1}}+\ldots+\right.\right.$$

$$\left.+(-1)^{k-1}u\frac{\partial^{2k-1}u}{\partial x_1{}^{2k-1}}\right]dx_2\ldots dx_m+$$

$$+\left[\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_2{}^{k-1}}\frac{\partial^k u}{\partial x_2{}^k}+(-1)'\frac{\partial^{k-2}u}{\partial x_2{}^{k-2}}\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x_2{}^{k+1}}+\ldots+\right.$$

$$\left.+(-1)^{k-1}u\frac{\partial^{2k-1}u}{\partial x_2{}^{2k-1}}\right]dx_1\,dx_3\ldots dx_m+$$

. . . .

. . . .

$$+\left[\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_m{}^{k-1}}\frac{\partial^k u}{\partial x_m{}^k}+(-1)'\frac{\partial^{k-2}u}{\partial x_m{}^{k-2}}\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x_m{}^{k+1}}+\ldots+\right.$$

$$\left.+(-1)^{k-1}u\frac{\partial^{2k-1}u}{\partial x_m{}^{2k-1}}\right]dx_1\,dx_2\ldots dx_{m-1}+$$

$$+(-1)^k\iiint\ldots\int_{W_1}u\nabla^{2k}u\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m\,. \qquad (4)$$

Замѣтимъ, что во всѣхъ этихъ формулахъ предполагается, что функціи u и v и всѣ ихъ производныя по $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ и x_m до порядка $2k-1$ включительно непрерывны для всѣхъ точекъ многообразія W_1.

Изъ формулы (3) легко получается формула, служащая обобщеніемъ соотношенія (6) § 3 для случая m независимыхъ перемѣнныхъ.

Относительно интеграловъ этого уравненія докажемъ слѣдующую теорему:

Пусть функціи u_1 и u_2,—интегралы уравненія (1),—и ихъ производныя по $x_1, x_2, \ldots, x_m$ до порядка $2k-1$ включительно непрерывны для всѣхъ точекъ многообразія W_1. Допустимъ также, что для всѣхъ точекъ многообразія Σ_1 имѣетъ мѣсто:

$$v'=0;\quad \frac{\partial v'}{\partial x_1}=0,\quad \ldots,\quad \frac{\partial v'}{\partial x_m}=0;\quad \ldots;$$

$$\frac{\partial^{k-1} v'}{\partial x_1^{k-1}}=0,\quad \frac{\partial^{k-1} v'}{\partial x_1^{k-2}\partial x_2}=0,\quad \ldots,\quad \frac{\partial^{k-1} v'}{\partial x_m^{k-1}}=0, \tag{5}$$

гдѣ принято:

$$v'=u_1-u_2. \tag{6}$$

При такихъ условіяхъ, функціи u_1 и u_2 совпадаютъ для всѣхъ точекъ многообразія W_1.

Чтобы обнаружить справедливость теоремы, замѣнимъ въ формулѣ (4) функцію u чрезъ v'. Въ силу условій (5), будемъ тогда имѣть:

$$\iint\cdots\int_{W_1}\left[\left(\frac{\partial^k v'}{\partial x_1^k}\right)^2+\left(\frac{\partial^k v'}{\partial x_2^k}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial^k v'}{\partial x_m^k}\right)^2\right]dx_1\ldots dx_m=0. \tag{7}$$

Отсюда необходимо слѣдуетъ:

$$\frac{\partial^k v'}{\partial x_1^k}=0,\quad \frac{\partial^k v'}{\partial x_2^k}=0,\quad \ldots,\quad \frac{\partial^k v'}{\partial x_m^k}=0. \tag{8}$$

Эти же послѣднія уравненія по интеграціи, въ виду условій (5), даютъ $v'=0$, или $u_1=u_2$ для всѣхъ точекъ многообразія W_1.

Пріемомъ, который считаемъ выясненнымъ, убѣждаемся, что заключеніе теоремы справедливо также касательно интеграловъ уравненія:

$$\sum_{q=0}^{q=k-1}\sum_{(p_1p_2\ldots p_m)}(-1)^{p-q}A^{(q)}{}_{p_1p_2\ldots p_m}\frac{\partial^{2(k-q)}u}{\partial x_1{}^{2(k-q)-2p_1}\partial x_2{}^{2p_1-p_2}\ldots\partial x_m{}^{2p_m}}+$$

$$+2\Sigma l_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+fu=0, \tag{9}$$

гдѣ $A^{(k)}{}_{p_1p_2\ldots p_m}$ суть постоянныя одинаковаго знака, а l_i и f нѣкоторыя функціи $x_1, x_2, \ldots, x_m$,—если къ условіямъ теоремы присоединить слѣдующее неравенство:

$$j\left(f-\Sigma\frac{\partial l_i}{\partial x_i}\right)>0. \tag{10}$$

При этомъ j представляетъ единицу со знакомъ постоянныхъ $A^{(k)}{}_{p_1p_2\ldots p_m}$.

Варшава.

10-го сентября 1900 года.