Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Н. Хабибуллин, Аппроксимационная теорема для целых функций экспоненциального типа и устойчивость нуль-последовательностей, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 1, 143–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm797>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 04:19:13

УДК 517.547.22+517.982.274+517.538.2

Б. Н. Хабибуллин

Аппроксимационная теорема для целых функций экспоненциального типа и устойчивость нуль-последовательностей

Пусть L – целая функция экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) в $\mathbb{C}$ с индикатором роста h_L ; $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, – подпоследовательность нулей ц.ф.э.т. $L \not\equiv 0$; $\Gamma = \{\gamma_n\}$ – последовательность комплексных чисел и

$$\sum_n \left| \frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\gamma_n} \right| < \infty.$$

Указывается простое построение некоторой последовательности ц.ф.э.т. $\{L_n\}$, которая сдвигает последовательность Λ в подпоследовательность Γ нулей определенной ц.ф.э.т. $G \not\equiv 0$ такой, что $h_G = h_L$ (аппроксимационная теорема). Эта аппроксимационная теорема применяется к задачам устойчивости нуль-последовательностей и последовательностей неединственности для пространств ц.ф.э.т. с ограничением на индикаторы роста и к проблеме устойчивости полноты экспоненциальных систем в пространстве ростков аналитических функций на выпуклом компакте.

Библиография: 31 название.

Введение

Всюду в работе под последовательностью в $\mathbb{C}$ понимается (пустая, конечная или бесконечная) последовательность комплексных чисел (точек) вида $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$, не имеющая предельных точек в $\mathbb{C}$. В последовательности Λ , вообще говоря, допускается повторение точек, т.е. возможно, что $\lambda_n = \lambda_k$ при $n \neq k$. Через $\Lambda(\lambda)$ обозначаем число повторений точки $\lambda \in \mathbb{C}$ в последовательности Λ . Для двух последовательностей Λ и Γ соотношения $\Lambda = \Gamma$ и $\Lambda \subset \Gamma$ означают соответственно $\Lambda(\lambda) = \Gamma(\lambda)$ и $\Lambda(\lambda) \leq \Gamma(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Последовательности $\Lambda \cup \Gamma$ и соответственно $\Gamma \setminus \Lambda$ (последнее при условии $\Lambda \subset \Gamma$) полностью определяются соотношениями $(\Lambda \cup \Gamma)(\lambda) = \Lambda(\lambda) + \Gamma(\lambda)$ и $(\Gamma \setminus \Lambda)(\lambda) = \Gamma(\lambda) - \Lambda(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Далее в вопросах, связанных с теорией целых функций, в основном придерживаемся терминологии и обозначений работ Б. Я. Левина [1], [2].

Пространство всех целых функций в $\mathbb{C}$ обозначаем через $H(\mathbb{C})$. Пусть L – целая функция, не равная тождественно нулю (пишем $L \not\equiv 0$). Последовательность

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00033) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1528.2003.1).

$\Lambda \subset \mathbb{C}$ называем *последовательностью нулей функции* $L \in H(\mathbb{C})$, если кратность нуля функции L в каждой точке $\lambda \in \mathbb{C}$ равна числу повторений точки λ в последовательности Λ (пишем $\text{Zero}_L = \Lambda$). Говорим, что функция $L \in H(\mathbb{C})$ *обращается в нуль на последовательности* $\Lambda \subset \mathbb{C}$, если кратность нуля функции L в каждой точке $\lambda \in \mathbb{C}$ не меньше числа повторений точки λ в Λ (пишем $L(\Lambda) = 0$).

Пусть E – некоторое линейное подпространство в $H(\mathbb{C})$ над $\mathbb{C}$. Последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$ называем *нуль-последовательностью для пространства* E , если существует функция $L \in E$ такая, что $\text{Zero}_L = \Lambda$. Последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$ называем *последовательностью неединственности для пространства* E , если существует функция $L \in E$ такая, что $L \neq 0$ и $L(\Lambda) = 0$.

Для целой функции экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) L в $\mathbb{C}$ ее индикатор роста (при порядке $\rho = 1$) обозначаем как $h_L(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Основной результат статьи – аппроксимационная теорема 1, в которой при определенном условии “малости” сдвига подпоследовательности нулей $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \text{Zero}_L$ ц.ф.э.т. $L \neq 0$ в последовательность $\Gamma = \{\gamma_n\}$ предлагается простая и естественная конструкция некоторой рекуррентной последовательности ц.ф.э.т. L_n , сходящейся в топологии равномерной сходимости на компактах к некоторой ц.ф.э.т. $G \neq 0$ с последовательностью нулей $\text{Zero}_G = (\text{Zero}_L \setminus \Lambda) \cup \Gamma$ и с индикатором $h_G = h_L$. Доказательство этого утверждения в большей своей части сакраментально и отдельные технические элементы его опираются на приемы из [3]–[11]. В то же время прямо из [3]–[11] аппроксимационная теорема 1 не следует. Исключительная существенность порядка подбора специальных констант в доказательстве и различие приемов оценок по различным группам точек из последовательностей Λ и Γ вынуждают нас к подробному изложению доказательства по пунктам даже в достаточно очевидных в идейном плане моментах.

Пусть $h(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, – некоторая 2π -периодическая тригонометрически выпуклая функция. Аппроксимационную теорему 1 можно трактовать и как условие устойчивости нуль-последовательностей или последовательностей неединственности для пространств типа $E[1, h] \subset H(\mathbb{C})$, состоящих из всех ц.ф.э.т. L с индикатором роста h_L (при порядке 1), не превышающем h всюду на $\mathbb{R}$ (следствие 1).

Каждой последовательности Λ из $\mathbb{C}$ сопоставляем систему (кратных) экспонент $\text{Ехр } \Lambda = \{z^{k-1}e^{\lambda z} : \lambda \in \Lambda, 1 \leq k \leq \Lambda(\lambda), k \in \mathbb{N}\}$.

Пусть B – компакт в $\mathbb{C}$. Через $H(B)$ обозначаем кольцо ростков¹ голоморфных функций на B . Пространство $H(B)$ наделяется естественной топологией индуктивного предела (см. [13], [14; гл. I, § 4.4]). Известны различные достаточные условия полноты или неполноты системы экспонент $\text{Ехр } \Lambda$ в таком пространстве, формулируемые в терминах системы показателей Λ . Классические результаты такого рода для специальных компактов B (замкнутый круг, отрезок) можно извлечь из [1], [2], [15], [16]. Целая шкала условий полноты для достаточно произвольных компактов B содержится в работе [17; теорема 2.1 (о полноте)], а достаточно общие условия неполноты системы $\text{Ехр } \Lambda$ в $H(B)$ легко выводятся из [12; § 6.2] (см. также краткий обзор [18]). В настоящей работе в качестве применения аппроксимационной теоремы 1 мы устанавливаем следствие этой теоремы об устойчивости

¹ Две функции, голоморфные в открытых окрестностях компакта B (каждая, возможно, в своей), отождествляются, если существует открытая окрестность компакта B , на которой эти функции совпадают поточечно.

полноты систем экспонент $\text{Exp } \Lambda$ в пространстве $H(B)$ (следствие 2). Существенно более глубокое использование аппроксимационной теоремы 1 вкупе с другой аппроксимационной теоремой для ц.ф.э.т., анонсированное в [19], предполагается изложить в последующей работе применительно к проблеме спектрального синтеза для инвариантных относительно дифференцирования подпространств голоморфных в выпуклой области функций.

Автор искренне признателен Р. М. Редхефферу, чье сообщение [20] существенно стимулировало предпринятое в данной работе исследование, а также благодарен рецензенту первоначального варианта статьи, чьи замечания и исключительная проницательность в выявлении неточностей и опечаток способствовали сокращению и, надеюсь, улучшению изложения.

§ 1. Аппроксимационная теорема

Пусть L – целая функция и $L(\lambda) = 0$, $\gamma \in \mathbb{C}$. Сдвиг нуля λ функции L в точку γ порождает новую целую функцию, которую можно задать следующим образом:

$$L_{[\lambda]}^{[\gamma]}(z) = \begin{cases} \frac{z-\gamma}{z-\lambda} L(z), & \text{если } \lambda = 0 \text{ или } \gamma = 0; \\ \frac{1-z/\gamma}{1-z/\lambda} L(z), & \text{если } \lambda \neq 0 \text{ и } \gamma \neq 0. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $L \not\equiv 0$ – целая функция и $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \text{Zero}_L$, а $\Gamma = \{\gamma_n\}$ – последовательность в $\mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$.

Рекуррентно определенную последовательность

$$L_1(z) = L(z), \quad L_{n+1}(z) = (L_n)_{[\lambda_n]}^{[\gamma_n]}(z), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

будем называть *канонической последовательностью (рода 0) для L , сдвигающей подпоследовательность нулей Λ в последовательность Γ* .

Конечно же, конструкция канонической последовательности (1.1) зависит от нумерации последовательностей Λ и Γ .

ТЕОРЕМА 1 (аппроксимационная). Пусть $L \not\equiv 0$ – ц.ф.э.т. с индикатором роста h_L , $\Lambda \subset \text{Zero}_L$, а $\Gamma = \{\gamma_n\}$ – последовательность в $\mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$, $\{L_n\}$ – каноническая последовательность для L , сдвигающая Λ в Γ . Далее, пусть выполняется

$$\sum_{\gamma_k \cdot \lambda_k \neq 0} \left| \frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\gamma_k} \right| < \infty. \quad (1.2)$$

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется постоянная C_ε , с которой выполнены равномерные оценки

$$|L_n(z)| \leq C_\varepsilon \exp((h_L(\theta) + \varepsilon)r) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}, \quad (1.3)$$

и последовательность ц.ф.э.т. $\{L_n\}$ сходится в топологии равномерной сходимости на компактах в $\mathbb{C}$ к некоторой ц.ф.э.т. $G \not\equiv 0$ такой, что $\text{Zero}_G =$

$(\text{Zero}_L \setminus \Lambda) \cup \Gamma$ и индикатор роста h_G функции G равен индикатору роста h_L функции L .

В доказательстве и далее нам потребуются следующие обозначения: $D(z, t) \subset \mathbb{C}$ – открытый круг с центром в точке $z \in \mathbb{C}$ радиуса $t > 0$; $D(t) = D(0, t)$; $\Lambda(z, t)$ – число точек последовательности Λ в круге $D(z, t)$; $n_\Lambda(t) = \Lambda(0, t)$; ∂B – граница подмножества $B \subset \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем последовательность Λ на две подпоследовательности: $\Lambda_0 = \{\lambda_k : \lambda_k = 0 \text{ или } \gamma_k = 0\}$, $\Lambda_\infty = \Lambda \setminus \Lambda_0$.

Будем оценивать $|L_n(z)|$ сверху, используя представление

$$\ln |L_n(z)| = \Sigma_0^n(z) + \Sigma_\infty^n(z) + \ln |L(z)|, \quad (1.4)$$

где (как обычно, полагаем $\sum_{k \in \emptyset} \dots = 0$)

$$\Sigma_0^n(z) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n-1 \\ \lambda_k \in \Lambda_0}} \ln \left| \frac{z - \gamma_k}{z - \lambda_k} \right|, \quad \Sigma_\infty^n(z) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n-1 \\ \lambda_k \in \Lambda_\infty}} \ln \left| \frac{1 - z/\gamma_k}{1 - z/\lambda_k} \right|. \quad (1.5)$$

Поскольку $0 \notin \Lambda_\infty$ и последовательность нулей ц.ф.э.т. имеет конечную верхнюю плотность [1], [2], то найдется постоянная B , с которой справедлива оценка²

$$\boxed{n_{\Lambda_\infty}(t) \leq Bt \quad \forall t > 0.} \quad (1.6)$$

В силу равномерной непрерывности [1] индикатора роста h_L для любого строго положительного $\varepsilon < 1$ найдется строго положительное число $\sigma_\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ такое, что с некоторой постоянной C_ε при всех $z \in \mathbb{C}$ выполнено

$$\boxed{\sup_{|z-\zeta| \leq \sigma_\varepsilon |z|} \ln |L(\zeta)| \leq h_L(\theta)r + \frac{\varepsilon}{11}r + C_\varepsilon, \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}.} \quad (1.7)$$

Это число $\sigma_\varepsilon > 0$ вместе с B и ε и послужит первоначальной основой для выбора остальных специальных констант.

1) *Метод Хеймана нормальных точек.* Пусть числа $M, d > 0$. Напомним, что точка z называется (M, d) -нормальной относительно Λ_∞ (см., например, [8; § 2]), если выполнена оценка

$$\Lambda_\infty(z, t) \leq Mt \quad \forall t < d|z|. \quad (1.8)$$

Зафиксируем пока некоторое число d такое, что

$$\boxed{0 < d \leq \frac{1}{2},} \quad (1.9)$$

выбор которого уточним чуть ниже.

² Формулы в рамке указывают выбор специальных констант $B, \sigma_\varepsilon, M, d, \beta$.

Множество точек, не являющихся (M, d) -нормальными относительно Λ_∞ , всегда можно покрыть некоторым не более чем счетным множеством исключительных кружков $D(\zeta_j, t_j)$, $j = 1, 2, \dots$, так (см., например, [8; лемма о нормальных точках]), что

$$t_j \leq d|\zeta_j| \quad (1.10)$$

и с некоторой *абсолютной постоянной* $a > 0$ выполнено

$$\sum_{|\zeta_j| \leq r} t_j \leq a \int_0^{(1+d)r} \frac{dn_{\Lambda_\infty}(t)}{M} \leq a \frac{n_{\Lambda_\infty}(3r/2)}{M} \leq \frac{3aB}{2M} \cdot r, \quad r \geq 1, \quad (1.11)$$

где B из (1.6). Выберем число M столь большим, что выполнено неравенство

$$\boxed{\frac{aB}{M} < \frac{1}{9}\sigma_\varepsilon, \quad a - \text{абсолютная постоянная.}} \quad (1.12)$$

Тогда (1.11) перепишется как

$$\sum_{|\zeta_j| \leq r} t_j < \frac{\sigma_\varepsilon}{6} \cdot r, \quad r \geq 1. \quad (1.13)$$

Очень существенно то, что значение $d \leq \frac{1}{2}$ не влияет на оценку (1.11) и, следовательно, на выбор M в (1.12) и оценку (1.13).

Теперь по числам ε из (1.7) и M из (1.8) и (1.12) мы можем указать выбор d и еще одной необходимой константы β . Поскольку на d накладывалось единственное ограничение (1.9), можно подобрать d столь малым, что

$$\boxed{Md \left(1 + \ln \left(1 + \frac{1}{d} \right) \right) \leq \frac{\varepsilon}{5}.} \quad (1.14)$$

После этого выберем настолько малое число $\beta > 0$, что одновременно

$$\boxed{M\beta \left(1 + \ln \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right) \leq \frac{\varepsilon}{5}, \quad \frac{\beta}{d} \leq \frac{\varepsilon}{10}.} \quad (1.15)$$

Это возможно, так как левые части в неравенствах (1.14), (1.15) стремятся к нулю соответственно при $d \rightarrow 0$ в (1.14) и при $\beta \rightarrow 0$ в (1.15).

Рассмотрим произвольную точку $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 1$. Если

$$D(\zeta_j, t_j) \cap D(z, \sigma_\varepsilon|z|) \neq \emptyset, \quad (1.16)$$

то, учитывая (1.9) и (1.10), имеем

$$\frac{1}{2}|\zeta_j| \leq |\zeta_j| - d|\zeta_j| \leq |\zeta_j| - t_j \leq (1 + \sigma_\varepsilon)|z| \leq \frac{3}{2}|z|,$$

т.е. $|\zeta_j| \leq 3|z|$, откуда согласно (1.13) имеем

$$\sum_{D(\zeta_j, t_j) \cap D(z, \sigma_\varepsilon |z|) \neq \emptyset} t_j \leq \sum_{|\zeta_j| \leq 3|z|} t_j < \frac{1}{2} \sigma_\varepsilon |z|$$

или (diam – диаметр)

$$\sum_{D(\zeta_j, t_j) \cap D(z, \sigma_\varepsilon |z|) \neq \emptyset} \text{diam } D(\zeta_j, t_j) < \sigma_\varepsilon |z|. \quad (1.17)$$

Выберем в круге $D(z, \sigma_\varepsilon |z|)$ какой-либо радиальный интервал $[z, z']$, $z' \in \partial D(z, \sigma_\varepsilon |z|)$, и произведем круговую проекцию всех исключительных кружков, удовлетворяющих условию (1.16), на этот радиальный интервал. В силу строгого неравенства в (1.17) на открытом интервале (z, z') длины $\sigma_\varepsilon |z|$ найдется хотя бы одна точка, не являющаяся проекцией исключительных кружков $D(\zeta_j, t_j)$. Последнее означает, что для любой точки $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 1$, существует окружность $\partial D(z, \sigma(z)|z|)$ ненулевого радиуса $\sigma(z)|z| < \sigma_\varepsilon |z|$, проходящая только через (M, d) -нормальные относительно Λ_∞ точки.

2) Уменьшение суммы (1.2). Выберем номер $N \geq 1$ настолько большим, что выполнена оценка

$$\sum_{k > N} \left| \frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\gamma_k} \right| \leq \beta. \quad (1.18)$$

В частности, $\lambda_k \notin \Lambda_0$ при $k > N$.

Положим $R'_N = \max\{|\lambda_k| : k \leq N\}$, $R_N = \max\{1, 2R'_N\}$.

Тогда для всех слагаемых из (1.5) с номером, не превышающим N (и, конечно, $n-1$), при $|z| \geq R_N$, т.е. при гарантированной для $|\lambda_k| \leq R'_N$, $k \leq N$, оценке $|z - \lambda_k| \geq |z| - R'_N \geq |z| - R_N/2 \geq |z|/2$, имеем “грубые” оценки

$$\begin{aligned} \Sigma_0^n(z) &\leq \sum_{k=1}^N \ln \frac{|z| + |\gamma_k|}{|z|/2} \leq C_N, & |z| \geq R_N, \\ \sum_{\substack{k \leq \min\{n-1, N\} \\ \lambda_k \in \Lambda_\infty}} \ln \left| \frac{1 - z/\gamma_k}{1 - z/\lambda_k} \right| &\leq \sum_{k=1}^N \ln \frac{|\lambda_k|(|z| + |\gamma_k|)}{|\gamma_k||z|/2} \leq C_N, & |z| \geq R_N, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где постоянные R_N и C_N не зависят от n .

3) Оценка по λ_k вне $D(z, d|z|)$. Оценим сверху часть суммы $\Sigma_\infty^n(z)$ из (1.5) по тем номерам $k > N$, для которых

$$|z - \lambda_k| \geq d|z|. \quad (1.20)$$

При этом условии с учетом (1.9) автоматически выполнены оценки

$$|z - \lambda_k| \geq \frac{d}{1+d} |\lambda_k| \geq \frac{d}{2} |\lambda_k|. \quad (1.21)$$

Действительно, в противном случае $|z - \lambda_k| < d|\lambda_k|/(1 + d)$, что влечет

$$|\lambda_k| - |z| < \frac{d}{1+d}|\lambda_k| \Rightarrow \frac{1}{1+d}|\lambda_k| < |z| \Rightarrow |z - \lambda_k| < \frac{d}{1+d}|\lambda_k| < d|z|,$$

и приходим к противоречию с (1.20).

Из легко проверяемого тождества

$$\ln \left| \frac{1 - z/\gamma}{1 - z/\lambda} \right| = \ln \left| 1 + \frac{z\lambda}{\lambda - z} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\gamma} \right) \right|$$

при любом $k \in \mathbb{N}$ получаем оценку

$$\ln \left| \frac{1 - z/\gamma_k}{1 - z/\lambda_k} \right| \leq \ln \left(1 + \frac{|z||\lambda_k|}{|z - \lambda_k|} \left| \frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\gamma_k} \right| \right). \quad (1.22)$$

Отсюда при условии (1.20), а значит и (1.21), для части суммы $\Sigma_\infty^n(z)$ из (1.5) справедливо

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{|z - \lambda_k| \geq d|z| \\ N < k < n}} \ln \left| \frac{1 - z/\gamma_k}{1 - z/\lambda_k} \right| &\leq \sum_{\substack{|z - \lambda_k| \geq d|\lambda_k|/2 \\ k > N}} \ln \left(1 + \frac{|z||\lambda_k|}{|z - \lambda_k|} \left| \frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\gamma_k} \right| \right) \\ &\leq \sum_{k > N} \ln \left(1 + \frac{2|z|}{d} \left| \frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\gamma_k} \right| \right) \leq 2 \frac{|z|}{d} \sum_{k > N} \left| \frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\gamma_k} \right|, \end{aligned}$$

где правая часть уже не зависит от n . Таким образом, оценивая с помощью (1.18) и (1.15) правую часть последнего неравенства, независимо от n имеем

$$\sum_{\substack{|z - \lambda_k| \geq d|z| \\ N < k < n}} \ln \left| \frac{1 - z/\gamma_k}{1 - z/\lambda_k} \right| \leq 2 \frac{\beta}{d} |z| \leq \frac{\varepsilon}{5} |z|. \quad (1.23)$$

4) *Оценка по λ_k из $D(z, d|z|)$.* Представим каждую из последовательностей Λ_∞ и $\Gamma_\infty = \{\gamma_k : \lambda_k \in \Lambda_\infty\}$ в виде объединения двух подпоследовательностей. К первой подпоследовательности Λ' (соответственно Γ') отнесем те точки λ_k из Λ_∞ (соответственно γ_k из Γ_∞), для которых выполнено

$$|\lambda_k - \gamma_k| \leq \beta |\gamma_k|, \quad (1.24)$$

где β то же, что и в (1.15). Затем полагаем $\Lambda'' = \Lambda_\infty \setminus \Lambda'$, $\Gamma'' = \Gamma_\infty \setminus \Gamma'$. Отметим, что это разбиение зависит от β , а значит и от ε , но не зависит от n .

4а) *Оценка при условии (1.24).* Оценку (1.22) можно переписать в виде

$$\ln \left| \frac{1 - z/\gamma_k}{1 - z/\lambda_k} \right| \leq \ln \left(1 + \frac{|z||\lambda_k|}{|z - \lambda_k|} \frac{|\lambda_k - \gamma_k|}{|\lambda_k||\gamma_k|} \right),$$

откуда при условии (1.24) имеем

$$\ln \left| \frac{1 - z/\gamma_k}{1 - z/\lambda_k} \right| \leq \ln \left(1 + \frac{|z|\beta}{|z - \lambda_k|} \right).$$

Применяя эту оценку, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{|z-\lambda_k| < d|z| \\ \lambda_k \in \Lambda', \ N < k < n}} \ln \left| \frac{1-z/\gamma_k}{1-z/\lambda_k} \right| &\leq \sum_{|z-\lambda_k| < d|z|} \ln \left(1 + \frac{\beta|z|}{|z-\lambda_k|} \right) \\ &= \int_0^{d|z|} \ln \left(1 + \frac{\beta|z|}{t} \right) d\Lambda_\infty(z, t), \end{aligned} \quad (1.25)$$

где правая часть не зависит от n . Правую часть в (1.25) после интегрирования по частям оценим только для (M, d) -нормальных в смысле (1.8) точек z :

$$\begin{aligned} \int_0^{d|z|} \ln \left(1 + \frac{\beta|z|}{t} \right) d\Lambda_\infty(z, t) &= \Lambda_\infty(z, d|z|) \ln \left(1 + \frac{\beta}{d} \right) + \int_0^{d|z|} \frac{\beta|z| \Lambda_\infty(z, t)}{t(t + \beta|z|)} dt \\ &\leq M d|z| \ln \left(1 + \frac{\beta}{d} \right) + \beta M|z| \int_0^{d|z|} \frac{dt}{t + \beta|z|} \\ &= M d|z| \ln \left(1 + \frac{\beta}{d} \right) + \beta M|z| \ln \left(1 + \frac{d}{\beta} \right) \\ &\leq M \left(\beta + \beta \ln \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right) |z| \leq \frac{\varepsilon}{5} |z|, \end{aligned}$$

где последний переход следует из (1.15). Таким образом, из последнего неравенства и из (1.25) для всех (M, d) -нормальных точек z независимо от n имеем

$$\sum_{\substack{|z-\lambda_k| < d|z| \\ \lambda_k \in \Lambda', \ N < k < n}} \ln \left| \frac{1-z/\gamma_k}{1-z/\lambda_k} \right| \leq \frac{\varepsilon}{5} |z|. \quad (1.26)$$

4б) *Оценка при нарушении (1.24).* Для точек λ_k и γ_k из подпоследовательностей Λ'' и Γ'' по неравенству $|\lambda_k - \gamma_k| > \beta|\gamma_k|$, $\lambda_k \in \Lambda''$, $\gamma_k \in \Gamma''$, в силу (1.2) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_k \in \Lambda''} \frac{1}{|\lambda_k|} &= \frac{1}{\beta} \sum_{\lambda_k \in \Lambda''} \frac{\beta|\gamma_k|}{|\lambda_k||\gamma_k|} \leq \frac{1}{\beta} \sum_{\lambda_k \in \Lambda''} \frac{|\lambda_k - \gamma_k|}{|\lambda_k||\gamma_k|} \\ &\leq \frac{1}{\beta} \sum_{\lambda_k \in \Lambda_\infty} \left| \frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\gamma_k} \right| \leq A_\beta, \end{aligned}$$

где постоянная A_β не зависит от n . Отсюда опять же в силу (1.2) получаем

$$\sum_{\gamma_k \in \Gamma''} \frac{1}{|\gamma_k|} \leq \sum_{\lambda_k \in \Lambda''} \frac{1}{|\lambda_k|} + \sum_{\lambda_k \in \Lambda_\infty} \left| \frac{1}{\gamma_k} - \frac{1}{\lambda_k} \right| \leq C_\beta, \quad (1.27)$$

где постоянная C_β по-прежнему не зависит от n . Сходимость начальной суммы в (1.27), в частности, означает, что

$$\int_0^\infty \frac{dn_{\Gamma''}(t)}{t} = \sum_{\gamma_k \in \Gamma''} \frac{1}{|\gamma_k|} \leq C_\beta. \quad (1.28)$$

Перепишем оставшуюся неопененной сверху часть суммы $\Sigma_\infty^n(z)$ из (1.5) в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{|z-\lambda_k| < d|z| \\ \lambda_k \in \Lambda'', N < k < n}} \ln \left| \frac{1 - z/\gamma_k}{1 - z/\lambda_k} \right| \\ &= \sum_{\substack{|z-\lambda_k| < d|z| \\ \gamma_k \in \Gamma'', N < k < n}} \ln \left| 1 - \frac{z}{\gamma_k} \right| - \sum_{\substack{|z-\lambda_k| < d|z| \\ \lambda_k \in \Lambda'', N < k < n}} \ln \left| 1 - \frac{z}{\lambda_k} \right| \end{aligned} \quad (1.29)$$

и будем оценивать сверху каждую сумму из правой части (1.29) по отдельности.

Для первой суммы в правой части (1.29) имеем

$$\sum_{\substack{|z-\lambda_k| < d|z| \\ \gamma_k \in \Gamma'', N < k < n}} \ln \left| 1 - \frac{z}{\gamma_k} \right| \leq \sum_{\gamma_k \in \Gamma''} \ln \left(1 + \frac{|z|}{|\gamma_k|} \right) = \int_0^\infty \ln \left(1 + \frac{|z|}{t} \right) dn_{\Gamma''}(t), \quad (1.30)$$

где в силу (1.28) интеграл в правой части сходится. Для его оценки возьмем произвольное число $\alpha > 0$. Тогда из сходимости интеграла в (1.28) следует, что найдется $r_\alpha > 0$ такое, что

$$\int_{r_\alpha}^\infty \frac{dn_{\Gamma''}(t)}{t} \leq \alpha.$$

Отсюда для интеграла в (1.30) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \ln \left(1 + \frac{|z|}{t} \right) dn_{\Gamma''}(t) &= \int_0^{r_\alpha} \ln \left(1 + \frac{|z|}{t} \right) dn_{\Gamma''}(t) + \int_{r_\alpha}^\infty \ln \left(1 + \frac{|z|}{t} \right) dn_{\Gamma''}(t) \\ &\leq n_{\Gamma''}(r_\alpha) \ln \left(1 + \frac{|z|}{\min_{\gamma_k \neq 0} |\gamma_k|} \right) + \alpha|z| = o(|z|) + \alpha|z|, \quad z \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

В силу произвольности выбора α последнее для (1.30) означает

$$\sum_{\substack{|z-\lambda_k| < d|z| \\ \gamma_k \in \Gamma'', N < k < n}} \ln \left| 1 - \frac{z}{\gamma_k} \right| \leq o(|z|), \quad z \rightarrow \infty, \quad (1.31)$$

равномерно относительно номера n из (1.5).

Последнюю сумму в (1.29), т.е.

$$- \sum_{\substack{|z-\lambda_k| < d|z| \\ \lambda_k \in \Lambda'', N < k < n}} \ln \left| 1 - \frac{z}{\lambda_k} \right| = \sum_{\substack{|z-\lambda_k| < d|z| \\ \lambda_k \in \Lambda'', N < k < n}} \ln \frac{|\lambda_k|}{|z - \lambda_k|}, \quad (1.32)$$

оценим сверху только для (M, d) -нормальных относительно Λ_∞ точек $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 1$.

Для любого k из условия $|z - \lambda_k| < d|z|$ ввиду $d \leq \frac{1}{2}$ имеем

$$\frac{|\lambda_k|}{|z - \lambda_k|} \geq \frac{(1-d)|z|}{d|z|} = \frac{1}{d} - 1 \geq 1.$$

Следовательно, правая часть в (1.32) разве что увеличится, если в ней вести суммирование по всем $\lambda_k \in \Lambda_\infty$, для которых $|z - \lambda_k| < d|z|$. Поскольку для таких точек выполнено и неравенство $|\lambda_k| \leq (1 + d)|z|$, для каждой (M, d) -нормальной точки z , $|z| \geq 1$, путем интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} - \sum_{\substack{|z - \lambda_k| < d|z| \\ \lambda_k \in \Lambda'' , N < k < n}} \ln \left| 1 - \frac{z}{\lambda_k} \right| &\leq \sum_{\substack{|z - \lambda_k| < d|z| \\ \lambda_k \in \Lambda_\infty}} \ln \frac{(1 + d)|z|}{|z - \lambda_k|} \\ &= \int_0^{d|z|} \ln \frac{(1 + d)|z|}{t} d\Lambda_\infty(z, t) = \Lambda_\infty(z, d|z|) \ln \frac{(1 + d)|z|}{d|z|} + \int_0^{d|z|} \frac{\Lambda_\infty(z, t)}{t} dt \\ &\leq Md|z| \ln \left(1 + \frac{1}{d} \right) + Md|z| = Md \left(1 + \ln \left(1 + \frac{1}{d} \right) \right) |z|. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Отсюда ввиду выбора (1.14) числа d следует

$$- \sum_{\substack{|z - \lambda_k| < d|z| \\ \lambda_k \in \Lambda'' , N < k < n}} \ln \left| 1 - \frac{z}{\lambda_k} \right| \leq \frac{\varepsilon}{5} |z|$$

для всех (M, d) -нормальных точек z независимо от n . Последняя оценка вместе с (1.31) для (1.29) дает

$$\sum_{\substack{|z - \lambda_k| < d|z| \\ \lambda_k \in \Lambda'' , N < k < n}} \ln \left| \frac{1 - z/\gamma_k}{1 - z/\lambda_k} \right| \leq \frac{\varepsilon}{5} |z| + o(|z|), \quad z \rightarrow \infty, \quad (1.34)$$

равномерно по всем n , когда $z \rightarrow \infty$ по множеству (M, d) -нормальных точек относительно Λ_∞ .

5) *Объединение оценок и их глобализация.* Объединяя оценки (1.19), (1.23), (1.26) и (1.34), при стремлении z к бесконечности по множеству (M, d) -нормальных точек относительно Λ_∞ из представления (1.4) *равномерно по n* получаем

$$\ln |L_n(z)| \leq \frac{3}{5} \varepsilon |z| + o(|z|) + \ln |L(z)|, \quad z \rightarrow \infty. \quad (1.35)$$

Для произвольной же точки $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 1$, согласно завершающему утверждению п. 1) найдется окружность $\partial D(z, \sigma|z|)$, $\sigma < \sigma_\varepsilon \leq \frac{1}{2}$, проходящая исключительно через (M, d) -нормальные точки (σ , вообще говоря, зависит от z). Следовательно, по принципу максимума для функции $\ln |L_n|$ из (1.35) и (1.7) при $z \rightarrow \infty$ *равномерно по n* получаем

$$\begin{aligned} \ln |L_n(z)| &\leq \sup_{|z - \zeta| = \sigma|z|} \left(\frac{3}{5} \varepsilon |\zeta| + o(|\zeta|) + \ln |L(\zeta)| \right) \\ &\leq \frac{9}{10} \varepsilon |z| + o(|z|) + \sup_{|z - \zeta| \leq \sigma_\varepsilon |z|} \ln |L(\zeta)| \\ &\leq \frac{109}{110} \varepsilon r + o(r) + h_L(\theta) r, \quad r = |z| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда, еще раз воспользовавшись принципом максимума в круге $D(R)$ достаточно большого радиуса R , не зависящего от n , получаем требуемые равномерные оценки (1.3).

6) *Сходимость к функции G и ее индикатор роста.* Из представления Вейерштрасса–Адамара [1], [2] для ц.ф.э.т. $L(z)$ имеем представление

$$L(z) = R(z) \prod_{\lambda \in \Lambda_0} (z - \lambda) \prod_{\lambda \in \Lambda_\infty} E\left(\frac{z}{\lambda}, 1\right), \quad (1.36)$$

где $E(w, 1) = (1 - w) \exp w$ – первичный множитель Вейерштрасса рода 1 и $R(z)$ – некоторая целая функция порядка не выше 1.

После разбиения последовательности Γ_∞ на две подпоследовательности $\Gamma_\infty = \Gamma' \cup \Gamma''$, как в начале п. 4), из условия (1.24) следует, что Γ' , как и Λ' , имеет конечную верхнюю плотность. Подпоследовательность Γ'' удовлетворяет условию (1.27) и тем более имеет конечную (даже нулевую) плотность, подпоследовательность $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \Gamma_\infty$ конечна. Следовательно, определена целая функция не выше первого порядка

$$\begin{aligned} G(z) &= R(z) \prod_{\gamma \in \Gamma_0} (z - \gamma) \prod_{\gamma \in \Gamma_\infty} E\left(\frac{z}{\gamma}, 1\right) \exp\left(\sum_{\gamma_k \in \Gamma_\infty} \left(\frac{z}{\lambda_k} - \frac{z}{\gamma_k}\right)\right) \\ &= R(z) \prod_{\gamma_k \in \Gamma_0} (z - \gamma_k) \prod_{\gamma_k \in \Gamma_\infty} \left(1 - \frac{z}{\gamma_k}\right) \exp \frac{z}{\lambda_k}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

где в силу условия (1.2) сумма под экспонентой конечна.

Из построения (1.1) канонической последовательности $\{L_n(z)\}$ легко вывести, что эта последовательность функций поточечно сходится к $G(z)$. Следовательно, в силу равномерных оценок (1.3) по теореме Витали о сходимости³ [21] последовательность функций $\{L_n(z)\}$ сходится к G равномерно на компактах в $\mathbb{C}$. Отсюда согласно тем же равномерным оценкам (1.3) G – ц.ф.э.т. и ее индикатор роста $h_G \leq h_L$.

Поменяв ролями последовательности Λ и Γ и взяв в качестве отправной точки построения (1.1) канонической последовательности функций G_n , сдвигающей Γ в Λ , ц.ф.э.т. G вида (1.37), придем к функции (1.36). Это доказывает неравенство $h_L \leq h_G$, т.е. $h_G = h_L$.

Теорема доказана.

§ 2. Устойчивость нуль-последовательностей, последовательностей неединственности и полноты систем экспонент

Из аппроксимационной теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ и $\Gamma = \{\gamma_n\}$ – последовательности в $\mathbb{C}$. Если справедливо

$$\sum_{\lambda_n \cdot \gamma_n \neq 0} \left| \frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\gamma_n} \right| < +\infty, \quad (2.1)$$

³ Напомним, что для ее применимости достаточно проверить поточечную сходимость на множестве, имеющем предельную точку в $\mathbb{C}$.

то последовательности Λ и Γ могут быть нуль-последовательностями или последовательностями неединственности для $E[1, h]$ только одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если Λ — нуль-последовательность (соответственно последовательность неединственности) для $E[1, h]$, то существует ц.ф.э.т. $L \neq 0$ с последовательностью нулей $\text{Zero}_L = \Lambda$ (соответственно, обращающаяся в нуль на Λ , т.е. $L(\Lambda) = 0$) и такая, что для ее индикатора роста выполнено $h_L \leq h$. Из теоремы 1 в силу условия (2.1), совпадающего с (1.2), следует существование ц.ф.э.т. $G \neq 0$ с последовательностью нулей $\text{Zero}_G = \Gamma$ (соответственно $G(\Gamma) = 0$) и такой, что $h_G \leq h_L \leq h$. Следовательно, Γ — нуль-последовательность (соответственно последовательность неединственности) для $E[1, h]$. Ввиду симметричности условия (2.1) относительно Λ и Γ рассуждения обратимы.

Относительно устойчивости только последовательностей неединственности для $E[1, h]$ один из результатов работы [12] дает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [12; Теорема 7.2]. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ и $\Gamma = \{\gamma_n\}$ — последовательности в $\mathbb{C}$, h — тригонометрически выпуклая функция. Если выполнено соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_n - \gamma_n|}{|\lambda_n|} = 0, \quad (2.2)$$

то последовательности Λ и Γ могут быть последовательностями неединственности для $E[1, h]$ только одновременно.

Легко показать, что ни одно из условий (2.1) или (2.2) не содержится в другом. Таким образом, следствие 1 дополняет предложение 1 и содержательно и в вопросах устойчивости последовательностей неединственности для $E[1, h]$.

Для выпуклого компакта $B \subset \mathbb{C}$ по следствию теоремы Хана–Банаха [22; теорема 2.3.1 (а)] система $\text{Exp } \Lambda$ не полна в $H(B)$ тогда и только тогда, когда Λ — последовательность неединственности для $E[1, h]$ (см., например, [14; гл. III, § 12] вместе с теоремой Пойа о сопряженной диаграмме [1], [2]). Таким образом, предложение 1 и следствие 1 влекут

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть B — выпуклый компакт, $\Lambda = \{\lambda_n\}$ и $\Gamma = \{\gamma_n\}$ — последовательности в $\mathbb{C}$. Если конечна сумма (2.1) или выполнено условие (2.2), то системы экспонент $\text{Exp } \Lambda$ и $\text{Exp } \Gamma$ полны или не полны в $H(B)$ одновременно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аппроксимационная теорема 1 может служить первым шагом на пути к реализации не раз отмечавшейся Р. М. Редхеффером, например, в [23], [24] (и даже много ранее в 1961 г., а также совсем недавно [20]) важности и актуальности элементарного (в разумном смысле) прямого доказательства замечательной в своей завершенности теоремы Берлинга–Мальявена о радиусе полноты [25] без использования их же знаменитой теоремы о мультипликаторе для ц.ф.э.т. [26] (подробнее о теоремах Берлинга–Мальявена см. монографии П. Кусиса [27], [28] и В. П. Хавина и Б. Ёрикке [29]).

Конкретнее, пусть $h(\theta) \equiv |\sin \theta|$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\Lambda = \{\lambda_n\}$ и $\Gamma = \{\gamma_n\}$ — последовательности в $\mathbb{C}$ и конечна сумма (2.1). По проекту Р. М. Редхеффера необходимо показать, что если ц.ф.э.т. $L \in E[1, h]$, $L \neq 0$, $L(\Lambda) = 0$, ограничена на $\mathbb{R}$, то для

любого числа $\varepsilon > 0$ найдется ц.ф.э.т. $G \in E[1, h + \varepsilon]$, $G \not\equiv 0$, $G(\Gamma) = 0$, также ограниченная на $\mathbb{R}$. Справедливость этого факта была установлена Р. М. Редхеффером еще в 1967 г. [23; п. 1], [30], но с использованием глубокой теоремы Берлинга–Мальявена о мультипликаторе. Для реализации проекта Р. М. Редхеффера на пути аппроксимационных теорем для ц.ф.э.т. типа теоремы 1, если это вообще возможно, конечно же необходимо каким-либо образом дополнительно “подправлять” каноническую последовательность $\{L_n\}$ из (1.1) для ц.ф.э.т. L , сдвигающей Λ в Γ . Одна из серьезных возможных, но не гарантированных, кандидатур – рекуррентная последовательность

$$L_1^{\sin} = L, \quad L_{n+1}^{\sin}(z) = \frac{\sin(|1/\lambda_n - 1/\gamma_n|z)}{|1/\lambda_n - 1/\gamma_n|z} \frac{1 - z/\gamma_n}{1 - z/\lambda_n} L_n^{\sin}(z)$$

с указанной в начале замечания исходной функцией L при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\gamma_k} \right| < \varepsilon. \quad (2.3)$$

Пока как одно из следствий из аппроксимационной теоремы 1 вместе с [31], [24; теорема 39] отметим, что условие (2.3) влечет сходимость последовательности ц.ф.э.т. $\{L_n^{\sin}(z)\}$ к ц.ф.э.т. $G \not\equiv 0$, $G(\Gamma) = 0$, с индикатором роста $h_G(\theta) \leq |\sin \theta| + \varepsilon$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Список литературы

1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Физматгиз, 1956.
2. Levin B. Ya. Lectures on entire functions. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. (Transl. Math. Monogr. V. 150.)
3. Красичков И. Ф. Сравнение целых функций конечного порядка по распределению их корней // Матем. сб. 1966. Т. 70(112). №2. С. 198–230.
4. Красичков-Терновский И. Ф. Сравнение целых функций целого порядка по распределению их корней // Матем. сб. 1966. Т. 71(113). №3. С. 405–419.
5. Гришин А. Ф. О регулярности роста субгармонических функций. I–II // Теория функций, функц. анализ и их прилож. 1968. Т. 6. С. 3–29.
6. Азарин В. С. О лучах вполне регулярного роста целой функции // Матем. сб. 1969. Т. 79(121). №4. С. 463–476.
7. Азарин В. С. Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка // Матем. сб. 1979. Т. 108 (150). №2. С. 147–167.
8. Хабибуллин Б. Н. Сравнение субгармонических функций по их ассоциированным мерам // Матем. сб. 1984. Т. 125 (167). №4. С. 522–538.
9. Хабибуллин Б. Н. Разложение целых функций конечного порядка на эквивалентные множители // Вопросы аппроксимации функций вещественного и комплексного переменных. Уфа: Изд-во Башкирского отд. АН СССР, 1983. С. 161–181.
10. Напалков В. В., Соломещ М. И. Оценка изменения целой функции при сдвигах ее нулей // Докл. РАН. 1995. Т. 342. №6. С. 739–741.
11. Hayman W. K. Subharmonic functions. V. II. London: Academic Press, 1989.
12. Хабибуллин Б. Н. Неконструктивные доказательства теоремы Берлинга–Мальявена о радиусе полноты и теоремы неединственности для целых функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. №4. С. 125–148.
13. Köthe G. Dualität in der Funktionentheorie // J. Reine Angew. Math. 1953. V. 191. №1–2. P. 30–49.
14. Напалков В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.

15. *Ибрагимов И. И.* Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М.: Наука, 1971.
16. *Sedletskiĭ A. M.* Fourier transforms and approximations. Amsterdam: GBS Publ, 2000.
17. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем целых функций в пространствах голоморфных функций // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 4. С. 603–616.
18. *Khabibullin B. N.* Completeness of sets of complex exponentials in convex sets // Труды международной конференции “Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы”. III. Анализ и дифференциальные уравнения. Уфа (июнь, 2000). Уфа: ИМ с ВЦ УНЦ РАН, 2000. Р. 56–63.
19. *Khabibullin B. N.* Closeness of subharmonic and entire functions, stability of completeness of exponential systems, spectral synthesis // Second International Conference “Mathematical Analysis and Economics”. Sumy (april, 2003). Sumy–Kharkiv–Kiev: UAB, KGNU, VILPE of NASU, IM of NASU, 2003. Р. 24–25.
20. *Redheffer R. M.* Private communication. May 2001.
21. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980.
22. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.
23. *Redheffer R. M.* Two consequences of the Beurling–Malliavin theory // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. V. 16. № 1. Р. 116–122.
24. *Redheffer R. M.* Completeness of sets of complex exponentials // Adv. Math. 1977. V. 24. Р. 1–62.
25. *Beurling A., Malliavin P.* On the closure of characters and the zeros of entire functions // Acta Math. 1967. V. 118. Р. 79–93.
26. *Beurling A., Malliavin P.* On Fourier transforms of measures with compact support // Acta Math. 1962. V. 107. Р. 291–309.
27. *Koosis P.* The logarithmic integral. V. I, II. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988, 1992.
28. *Koosis P.* Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin. Montréal: Les Publications CRM, 1996.
29. *Havin V. P., Jöricke B.* The uncertainty principle in harmonic analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
30. *Redheffer R. M.* A note on completeness // Notices Amer. Math. Soc. 1967. V. 16. Р. 830.
31. *Redheffer R. M.* Ganze Funktionen und Vollständigkeit // Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1957. V. 6. Р. 96–99.

Башкирский государственный университет, г. Уфа,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа
E-mail: algeom@bsu.bashedu.ru

Поступила в редакцию
30.08.2001 и 12.05.2003