Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Б. Воробец, О равномерном распределении орбит конечно порожденных групп и полугрупп изометрий плоскости, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 2, 17–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm799>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:31:54

УДК 517.987.5

Я. Б. Воробец

О равномерном распределении орбит конечно порожденных групп и полугрупп изометрий плоскости

В статье рассматриваются действия на евклидовой плоскости изометриями свободных групп и свободных полугрупп с произвольным числом образующих, а также свободных произведений групп порядка 2. Показано, что в типичном случае все орбиты действия равномерно распределены на плоскости. Действия, для которых нет равномерного распределения орбит, описаны явно.

Библиография: 5 названий.

§ 1. Введение

Пусть P – аффинная евклидова плоскость. Обозначим через $\mathcal{G}$ группу изометрий плоскости P , т.е. преобразований, сохраняющих расстояния между точками. Каждый элемент группы $\mathcal{G}$ является аффинным преобразованием. Через $\mathcal{G}_+$ обозначим группу изометрий плоскости P , сохраняющих ориентацию, а через $\mathcal{G}_0$ – группу параллельных переносов. Повороты (вращения) плоскости образуют множество $\mathcal{G}_+ \setminus \mathcal{G}_0$, а осевые и скользящие симметрии – множество $\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_+$. Группа $\mathcal{G}_+$ является подгруппой группы $\mathcal{G}$ индекса 2. Группа $\mathcal{G}_0$ является нормальной подгруппой групп $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}_+$.

Пусть G – счетная группа или полугруппа. Действием (полу)группы G на плоскости P посредством изометрий называется (полу)групповой гомоморфизм $d: G \rightarrow \mathcal{G}$. Орбитой $O_d(x)$ точки $x \in P$ относительно действия d называется последовательность $\{d(g)x\}_{g \in G}$ точек плоскости, индексированная элементами (полу)группы G . Орбитой действия d называется орбита какой-либо точки $x \in P$ относительно d .

В настоящей статье предполагается, что группа или полугруппа G является конечно порожденной и, более того, снабжена фиксированным набором образующих $a_1, \dots, a_k$. Это позволяет ввести на G функцию длины. Длиной $|g|$ произвольного элемента $g \in G$ называется минимальное m такое, что g разлагается в произведение $g_1 g_2 \dots g_m$, где сомножители берутся из последовательности $a_1, \dots, a_k$, если G – полугруппа, и из последовательности $a_1, a_1^{-1}, \dots, a_k, a_k^{-1}$, если G – группа. Длина единичного элемента принимается равной нулю. Функция длины задает на (полу)группе G частичный порядок, который переносится на каждую орбиту действия d этой (полу)группы. Мы используем этот порядок для определения понятия равномерно распределенной орбиты. Пусть x – точка, а E – подмножество плоскости P . Для любого натурального n обозначим через $N_{d,x}^{(n)}(E)$ отношение числа элементов $g \in G$ длины n , для которых $d(g)x \in E$, к числу всех элементов

длины n в G . Орбита $O_d(x)$ называется *равномерно распределенной* на плоскости, если для любой пары E_1, E_2 измеримых по Жордану подмножеств плоскости, мера которых положительна,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{d,x}^{(n)}(E_1)}{N_{d,x}^{(n)}(E_2)} = \frac{\mu(E_1)}{\mu(E_2)},$$

где μ – мера Лебега на плоскости P .

Поскольку элементы $a_1, \dots, a_k$ порождают (полу)группу G , действие d однозначно определено изометриями $A_1 = d(a_1), \dots, A_k = d(a_k)$ и мы обозначаем его $G[A_1, \dots, A_k]$. В качестве G далее выступают свободная полугруппа FSG_k и свободная группа FG_k с k образующими, а также свободное произведение k групп порядка 2 $\mathbb{Z}_2^{*k} = \langle a_1, \dots, a_k \mid a_1^2 = \dots = a_k^2 = 1 \rangle$. Заметим, что действия $\text{FG}_k[A_1, \dots, A_k]$ и $\text{FSG}_k[A_1, \dots, A_k]$ существуют для любых $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{G}$. Действие $\mathbb{Z}_2^{*k}[A_1, \dots, A_k]$ существует, если $A_1, \dots, A_k$ – инволюции. В настоящей статье исследуются асимптотические свойства средних $N_{d,x}^{(n)}(E)$, в частности вопрос о равномерном распределении орбит, для перечисленных выше действий d . Соответствующая задача была поставлена (в ряду других задач) в статье В.И. Арнольда и А.Л. Крылова [1]. Исследования были начаты Л. Кажданом [2] и И. Гиваршем [3], а затем продолжены автором в работах [4], [5]; полученные результаты подытоживаются сформулированными ниже теоремами 1.1 и 1.2.

Для формулировки теорем понадобится еще одно определение. Пусть Q обозначает полосу (область, ограниченную двумя параллельными прямыми), квадрат или правильный треугольник на плоскости P . Отразим фигуру Q относительно каждой из ограничивающих ее прямых, потом проделаем то же с отражениями фигуры Q и так далее до бесконечности. В итоге получим разбиение плоскости P посредством счетного числа прямых на фигуры, конгруэнтные Q . Мы будем называть это разбиение *решеткой*, порожденной фигурой Q , и обозначать $\mathcal{L}_Q$. Скажем, что изометрия $A \in \mathcal{G}$ переводит решетку $\mathcal{L}_Q$ в себя, если она переводит друг в друга прямые, определяющие разбиение $\mathcal{L}_Q$.

ТЕОРЕМА 1.1 [5]. Пусть $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{G}$. Положим

$$d = \text{FSG}_{2k}[A_1, A_1^{-1}, \dots, A_k, A_k^{-1}],$$

или $d = \text{FG}_k[A_1, \dots, A_k]$, или (при условии, что $A_1, \dots, A_k$ – инволюции) $d = \mathbb{Z}_2^{*k}[A_1, \dots, A_k]$. Если изометрии $A_1, \dots, A_k$ не имеют общей неподвижной точки и не переводят в себя одну и ту же решетку вида $\mathcal{L}_Q$, где Q – полоса, квадрат или правильный треугольник, то все орбиты действия d равномерно распределены на плоскости. Более того, для любого измеримого по Жордану множества E положительной меры и любой точки x при достаточно больших значениях n имеют место оценки

$$I_1 \mu(E) n^{-1} \leq N_{d,x}^{(n)}(E) \leq I_2 \mu(E) n^{-1},$$

где I_1, I_2 – положительные постоянные, зависящие лишь от действия d .

ТЕОРЕМА 1.2 [4]. Пусть $A_1, A_2 \in \mathcal{G}_+$. Если изометрии A_1, A_2 не имеют общей неподвижной точки и не переводят в себя одну и ту же решетку вида $\mathcal{L}_Q$, где Q – полоса, квадрат или правильный треугольник, то все орбиты действия $d = \text{FSG}_2[A_1, A_2]$ равномерно распределены на плоскости.

Основным результатом настоящей работы являются следующие две теоремы, первая из которых усиливает теорему 1.1, а вторая обобщает теорему 1.2.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{G}$. Положим

$$d = \text{FSG}_{2k}[A_1, A_1^{-1}, \dots, A_k, A_k^{-1}],$$

или $d = \text{FG}_k[A_1, \dots, A_k]$, или (при условии, что $A_1, \dots, A_k$ – инволюции) $d = \mathbb{Z}_2^k[A_1, \dots, A_k]$. Если изометрии $A_1, \dots, A_k$ не имеют общей неподвижной точки и не переводят в себя одну и ту же решетку вида $\mathcal{L}_Q$, где Q – полоса, квадрат или правильный треугольник, то найдется $I_0 > 0$ такое, что $\lim_{n \rightarrow \infty} nN_{d,x}^{(n)}(E) = I_0\mu(E)$ для любого измеримого по Жордану множества $E \subset P$ и любой точки $x \in P$. При этом все орбиты действия d равномерно распределены на плоскости.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{G}$. Если изометрии $A_1, \dots, A_k$ не имеют общей неподвижной точки и не переводят в себя одну и ту же решетку вида $\mathcal{L}_Q$, где Q – полоса, квадрат или правильный треугольник, то действие $d = \text{FSG}_k[A_1, \dots, A_k]$ удовлетворяет одному из следующих двух условий:

- 1) найдется $I_0 > 0$ такое, что $\lim_{n \rightarrow \infty} nN_{d,x}^{(n)}(E) = I_0\mu(E)$ для любого измеримого по Жордану множества $E \subset P$ и любой точки $x \in P$; при этом все орбиты действия d равномерно распределены на плоскости;
- 2) найдется $I_0 > 0$ такое, что для любого ограниченного множества $E \subset P$ и любой точки $x \in P$ последовательность $\{\exp(I_0 n)N_{d,x}^{(n)}(E)\}$ ограничена.

Условие 2) выполнено лишь в следующих случаях:

- (i) $A_1, \dots, A_k$ – параллельные переносы на векторы, сумма которых не равна нулю;
- (ii) каждая из изометрий $A_1, \dots, A_k$ является либо параллельным переносом, либо осевой или скользящей симметрией, ось которой параллельна фиксированной прямой l , причем для некоторой (и тогда для любой) точки $x \in P$ сумма векторов $A_j x - x$, $j = 1, \dots, k$, не ортогональна прямой l .

Доказательству теорем 1.3 и 1.4 посвящены §§ 2, 3 настоящей статьи, а пока что прокомментируем эти утверждения. Если изометрии $A_1, \dots, A_k$ имеют общую неподвижную точку, то каждая орбита действия d лежит на окружности с центром в этой точке. Если изометрии $A_1, \dots, A_k$ переводят в себя решетку, порожденную полосой, то каждая орбита содержится в объединении счетного числа параллельных прямых, расстояния между которыми не менее некоторого $\varepsilon > 0$. Если же эти изометрии переводят в себя решетку, порожденную квадратом или правильным треугольником, то точки каждой орбиты образуют дискретное подмножество плоскости. Во всех перечисленных случаях орбиты действия d нигде не плотны на

плоскости. С другой стороны, если орбиты действия d равномерно распределены на плоскости P , то они всюду плотны на P . Согласно общей гипотезе, высказанной в работе [1], *произвольная орбита действия d равномерно распределена на плоскости, как только она всюду плотна там*. Как видим, теорема 1.3 (как и теорема 1.1) подтверждает эту гипотезу для действий групп FG_k и $\mathbb{Z}_2^{*k}$, а теорема 1.4 подтверждает ее для действий полугруппы FSG_k во всех случаях, кроме случаев (i) и (ii).

Автор благодарен Р.И. Григорчуку за обсуждение результатов работы и постоянную поддержку.

§ 2. Равномерное распределение

Для каждой изометрии $A \in \mathcal{G}$ обозначим через $u[A]$ линейный оператор, действующий на функции на плоскости P по формуле $(u[A]f)(x) = f(Ax)$, $x \in P$. Ограничение $u[A]$ на пространство $L_2(P, \mu)$ является унитарным оператором. Через $\mathcal{U}$ обозначим класс операторов, образованный конечными линейными комбинациями операторов вида $u[A]$. Поскольку $u[A]u[B] = u[BA]$ для любых $A, B \in \mathcal{G}$, класс $\mathcal{U}$ является алгеброй операторов.

Обозначим через F преобразование Фурье в $\mathbb{R}^2$. Мы рассматриваем F как унитарный автоморфизм пространства $L_2(\mathbb{R}^2)$. Действие операторов F и F^{-1} на функцию $f \in L_1(\mathbb{R}^2) \cap L_2(\mathbb{R}^2)$ задается формулами

$$(Ff)(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\lambda, x)} f(x) dx,$$

$$(F^{-1}f)(x) = (Ff)(-x).$$

Пусть $\mathcal{F}$ обозначает класс функций $f \in L_1(\mathbb{R}^2) \cap L_2(\mathbb{R}^2)$, для которых Фурье-образ Ff дифференцируем и финитен. Введем на плоскости P декартовы координаты ξ . Мы рассматриваем ξ как изометричное отображение P на евклидово пространство $\mathbb{R}^2$. Координаты ξ позволяют рассматривать произвольную функцию f на плоскости P как функцию на $\mathbb{R}^2$ (отождествив ее с функцией $f\xi^{-1}$). В частности, можно рассматривать $\mathcal{F}$ как класс функций на плоскости P .

ЛЕММА 2.1 [5]. *Класс $\mathcal{F}$ не зависит от выбора декартовых координат на плоскости P и инвариантен относительно операторов из алгебры $\mathcal{U}$. Для любого измеримого по Жордану множества $E \subset P$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется пара функций $f_+, f_- \in \mathcal{F}$ таких, что $f_- \leq \chi_E \leq f_+$ на всей плоскости и $\int (f_+ - f_-) d\mu < \varepsilon$.*

Символом окружности S^1 мы обозначаем факторпространство $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, снабженное естественной топологией и мерой Лебега. Важную роль в дальнейшем играет отображение $\Phi: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданное формулой $\Phi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Для любого $R > 0$ отображение $R\Phi$ осуществляет гомеоморфизм S^1 на окружность радиуса R в $\mathbb{R}^2$ с центром в начале координат. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}^2) \cap L_2(\mathbb{R}^2)$. Фурье-образ Ff функции f непрерывен. Для каждого $R > 0$ обозначим через f_R непрерывную функцию на S^1 , задаваемую формулой $f_R(t) = (Ff)(R\Phi(t))$, $t \in S^1$.

Функцию f_R назовем *радиальной компонентой* функции f , соответствующей радиусу R .

Декартовы координаты ξ позволяют рассматривать изометрии из группы $\mathcal{G}$ как преобразования $\mathbb{R}^2$, а операторы из алгебры $\mathcal{U}$, соответственно, как операторы, действующие на функции на $\mathbb{R}^2$. *Радиальным оператором* u_R , соответствующим оператору $u \in \mathcal{U}$ и радиусу $R > 0$, назовем ограниченный линейный оператор в $L_2(S^1)$, который для любой функции $f \in L_1(\mathbb{R}^2) \cap L_2(\mathbb{R}^2)$ переводит ее радиальную компоненту f_R в радиальную компоненту $(uf)_R$ функции uf . Отметим, что определение оператора u_R зависит от системы координат ξ .

ЛЕММА 2.2 [5]. *Для любого оператора $u \in \mathcal{U}$ и числа $R > 0$ радиальный оператор u_R существует и единственен. Для каждого $R > 0$ соответствие $u \mapsto u_R$ является гомоморфизмом алгебры $\mathcal{U}$ в алгебру линейных операторов в $L_2(S^1)$. Для любого $A \in \mathcal{G}$ и любого $R > 0$ радиальный оператор $u[A]_R$ унитарен. Если изометрия A оставляет неподвижным начало координат, то $u[A]_R h = h \Phi^{-1} A \Phi$ для любого $R > 0$ и $h \in L_2(S^1)$. Если A – параллельный перенос на вектор $v \in \mathbb{R}^2$, то $u[A]_R$ есть оператор умножения на функцию $e^{iR(\Phi, v)}$.*

Пусть G – конечно порожденная группа или полугруппа с выделенным набором образующих, а d – действие G на плоскости P посредством изометрий. Сопоставим действию d последовательность *усредняющих* операторов $C^{(0)}, C^{(1)}, C^{(2)}, \dots$, принадлежащих алгебре $\mathcal{U}$. Оператор $C^{(n)}$ задается равенством

$$C^{(n)} = m_n^{-1} \sum_{|g|=n} u[d(g)],$$

где m_n – число элементов длины n в G . Если G – полугруппа без единичного элемента, то оператор $C^{(0)}$ не определен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Пусть $C_R^{(n)}$, $R > 0$, $n = 0, 1, \dots$, – радиальные операторы, соответствующие усредняющим операторам $C^{(0)}, C^{(1)}, \dots$ в некоторой системе координат ξ . Предположим, что операторы $C_R^{(n)}$ обладают следующими свойствами:*

(P1) *найдутся положительные постоянные I_1, I_2 и R_0 такие, что*

$$\|C_R^{(n)}\| \leq I_1(1 - I_2 R^2)^n, \quad 0 < R \leq R_0;$$

(P1b) *найдутся положительные постоянные I_0 и R_0 такие, что*

$$n \int_0^{R_0} R(C_R^{(n)} 1, 1) dR \rightarrow I_0, \quad n \rightarrow \infty;$$

(P2) *для любых R_1 и R_2 , $0 < R_1 < R_2$, найдутся постоянные $I > 0$ и $\rho \in (0, 1)$ такие, что $\|C_R^{(n)}\| \leq I \rho^n$ при $R_1 \leq R \leq R_2$.*

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n N_{d,x}^{(n)}(E) = (2\pi)^{-2} I_0 \mu(E)$$

для любого измеримого по Жордану множества $E \subset P$ и любой точки $x \in P$. Как следствие, каждая орбита действия d равномерно распределена на плоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $|(C_R^{(n)}1, 1)| \leq 2\pi\|C_R^{(n)}\|$, из свойства (P2) следует, что для любого $R_1 > 0$ величина $n \int_{R_0}^{R_1} R(C_R^{(n)}1, 1) dR$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Тем самым, свойство (P1b) не нарушится, если постоянную R_0 выбрать произвольным образом, причем значение постоянной I_0 от этого произвола не зависит. Это позволяет считать, что постоянная R_0 в условиях (P1) и (P1b) одна и та же, причем $I_2 R_0^2 < 1$. Тогда при $0 < R \leq R_0$ имеют место оценки $0 < 1 - I_2 R^2 \leq \exp(-I_2 R^2)$; как следствие, $\|C_R^{(n)}\| \leq I_1 \exp(-I_2 n R^2)$.

Покажем, что наличие свойств (P1), (P1b), (P2) не зависит от системы координат, в которой вычисляются радиальные операторы $C_R^{(n)}$, как не зависит от нее и значение постоянной I_0 в условии (P1b). Пусть ξ_1 – декартовы координаты на плоскости P , отличные от ξ . Пусть $\tilde{C}_R^{(n)}$, $R > 0$, $n = 0, 1, \dots$, – семейство радиальных операторов, соответствующих операторам $C^{(0)}, C^{(1)}, \dots$ в системе координат ξ_1 . Положим $A = \xi^{-1}\xi_1$. Очевидно, $A \in \mathcal{G}$. Легко проверить, что оператор $C^{(n)}$ действует на функции на $\mathbb{R}^2$ относительно координат ξ_1 точно так же, как оператор $u[A]^{-1}C^{(n)}u[A]$ действует на них относительно координат ξ . Отсюда следует, что $\tilde{C}_R^{(n)} = u[A]^{-1}C_R^{(n)}u[A]_R$, где оператор $u[A]_R$ вычисляется в системе координат ξ . Поскольку оператор $u[A]_R$ унитарен, имеем $\|\tilde{C}_R^{(n)}\| = \|C_R^{(n)}\|$ и $(\tilde{C}_R^{(n)}1, 1) = (C_R^{(n)}(u[A]_R1), u[A]_R1)$. Ввиду первого равенства наличие свойств (P1) и (P2) не зависит от выбора системы координат. Из второго равенства следует, что

$$|(\tilde{C}_R^{(n)}1, 1) - (C_R^{(n)}1, 1)| \leq 4\pi\|C_R^{(n)}\| \sup |u[A]_R1 - 1|.$$

Согласно лемме 2.2 $u[A]_R1 = e^{iR(\Phi, v)}$, где вектор $v \in \mathbb{R}^2$ зависит лишь от A и ξ . Тогда при $0 < R \leq R_0$ имеем $\sup |u[A]_R1 - 1| \leq I_* R$, где постоянная $I_* > 0$ зависит лишь от A , ξ и R_0 . При этом $|(\tilde{C}_R^{(n)}1, 1) - (C_R^{(n)}1, 1)| \leq 4\pi I_* R \|C_R^{(n)}\| \leq 4\pi I_* I_1 R \exp(-I_2 n R^2)$. Как следствие,

$$\begin{aligned} n \int_0^{R_0} R |(\tilde{C}_R^{(n)}1, 1) - (C_R^{(n)}1, 1)| dR &\leq 4\pi I_* I_1 n \int_0^{R_0} R^2 \exp(-I_2 n R^2) dR \\ &= 4\pi I_* I_1 n^{-1/2} \int_0^{n^{1/2}R_0} R^2 \exp(-I_2 R^2) dR \\ &\leq 4\pi I_* I_1 n^{-1/2} \int_0^\infty R^2 \exp(-I_2 R^2) dR, \end{aligned}$$

что стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Тем самым, операторы $\tilde{C}_R^{(n)}$, как и операторы $C_R^{(n)}$, обладают свойством (P1b), причем с тем же значением постоянной I_0 .

Выберем точку $x \in P$. Ввиду сказанного выше можно считать, не ограничивая общности, что x – начало координат в системе ξ . Возьмем произвольную функцию $f \in \mathcal{F}$. Для любого натурального n положим

$$\begin{aligned} \alpha_n &= (2\pi)^{-2} n \int_0^{R_0} R(C_R^{(n)}1, 1) dR, \\ \beta_n(f) &= n^{3/2} \left((C^{(n)}f)(x) - n^{-1}\alpha_n \int f d\mu \right). \end{aligned}$$

При этом

$$(C^{(n)}f)(x) = n^{-1}\alpha_n \int f d\mu + n^{-3/2}\beta_n(f).$$

Согласно лемме 2.1 $C^{(n)}f \in \mathcal{F}$. Рассматривая функцию $C^{(n)}f$ как функцию на $\mathbb{R}^2$ (относительно координат ξ), имеем:

$$(C^{(n)}f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (F(C^{(n)}f))(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty R(C_R^{(n)}f_R, 1) dR.$$

Учитывая то, что $\int f d\mu = 2\pi(Ff)(0)$ и $|(C_R^{(n)}h, 1)| \leq 2\pi\|C_R^{(n)}\| \sup |h|$ для любой функции $h \in L_2(S^1)$, приходим к оценке $|\beta_n(f)| \leq J_{1,n} + J_{2,n}$, где

$$\begin{aligned} J_{1,n} &= n^{3/2} \int_0^{R_0} R\|C_R^{(n)}\| \sup |f_R - (Ff)(0)| dR, \\ J_{2,n} &= n^{3/2} \int_{R_0}^\infty R\|C_R^{(n)}\| \sup |f_R| dR. \end{aligned}$$

Поскольку $f \in \mathcal{F}$, найдутся постоянные $R_1 > R_0$ и $I_f > 0$ такие, что $f_R = 0$ при $R \geq R_1$ и $\sup |f_R - (Ff)(0)| \leq I_f R$ при $0 < R \leq R_0$. Так как

$$\sup |f_R| \leq \sup |Ff| \leq \frac{1}{2\pi} \int |f| d\mu$$

для любого $R > 0$, из свойства (P2) следует, что $J_{2,n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Далее,

$$J_{1,n} \leq n^{3/2} \int_0^{R_0} I_f I_1 R^2 \exp(-I_2 n R^2) dR \leq I_f I_1 \int_0^\infty R^2 \exp(-I_2 R^2) dR.$$

Тем самым, последовательность $\{\beta_n(f)\}$ ограничена. Согласно свойству (P1b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = (2\pi)^{-2} I_0 > 0$. Тогда

$$n(C^{(n)}f)(x) = \alpha_n \int f d\mu + n^{-1/2}\beta_n(f) \rightarrow (2\pi)^{-2} I_0 \int f d\mu, \quad n \rightarrow \infty.$$

Из леммы 2.1 следует, что для любого измеримого по Жордану множества $E \subset P$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся функции $f_+, f_- \in \mathcal{F}$ такие, что $f_- \leq \chi_E \leq f_+$ на всей плоскости,

$$\int f_+ d\mu < \mu(E) + \varepsilon, \quad \int f_- d\mu > \mu(E) - \varepsilon.$$

Очевидно, $(C^{(n)}\chi_E)(x) = N_{d,x}^{(n)}(E)$ для любого натурального n , поэтому

$$(C^{(n)}f_-)(x) \leq N_{d,x}^{(n)}(E) \leq (C^{(n)}f_+)(x).$$

Согласно сказанному выше

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n(C^{(n)} f_+)(x) &= (2\pi)^{-2} I_0 \int f_+ d\mu, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n(C^{(n)} f_-)(x) &= (2\pi)^{-2} I_0 \int f_- d\mu.\end{aligned}$$

Как следствие, все предельные точки последовательности $\{(2\pi)^2 I_0^{-1} n N_{d,x}^{(n)}(E)\}$ лежат на отрезке

$$\left[\int f_- d\mu, \int f_+ d\mu \right] \subset [\mu(E) - \varepsilon, \mu(E) + \varepsilon].$$

Поскольку ε выбиралось произвольно, $\lim_{n \rightarrow \infty} n N_{d,x}^{(n)}(E) = (2\pi)^{-2} I_0 \mu(E)$. Ввиду произвольности выбора множества E отсюда следует равномерная распределенность орбиты $O_d(x)$ на плоскости. Наконец, как было отмечено ранее, постоянная I_0 не зависит от выбора системы координат ξ , в частности от точки x , а зависит от действия d .

Далее в этом параграфе будут получены достаточные условия того, что абстрактное семейство $C_R^{(n)}$, $R > 0$, $n = 0, 1, \dots$, линейных ограниченных операторов в пространстве $L_2(S^1)$ обладает свойствами (P1), (P1b) и (P2). Мы рассмотрим случай, когда $C_R^{(n)} = p_n(C_R)$, где $\{C_R\}_{R>0}$ – некое семейство ограниченных операторов в пространстве $L_2(S^1)$, а $p_0, p_1, \dots$ – многочлены с вещественными коэффициентами. Свойства операторов C_R , $R > 0$, полезные для наших целей, таковы:

(V1) найдутся положительные постоянные I_1 и R_0 такие, что $\|C_R\| \leq 1 - I_1 R^2$ при $0 < R \leq R_0$;

(V1') найдутся положительные постоянные I_1 , R_0 и натуральное число m такие, что $\|C_R^m\| \leq 1 - I_1 R^2$ при $0 < R \leq R_0$;

(V1b) найдутся постоянные $I_0 > 1$, $R_0 > 0$, измеримая функция g на S^1 и отображение $(0, R_0] \ni R \mapsto h_R \in L_2(S^1)$ такие, что $I_0^{-1} \leq g \leq I_0$ на всей окружности, $\|h_R - 1\| \leq I_0 R$ и $\|C_R h_R - (1 - g R^2) h_R\| \leq I_0 R^3$ при $0 < R \leq R_0$, а кроме того, для любого $R \in (0, R_0]$ оператор C_R коммутирует с оператором умножения на функцию g ;

(V2) $\|C_R\| < 1$ для любого $R > 0$;

(V2') для любого $R_1 > 0$ найдется натуральное M такое, что $\|C_R^M\| < 1$ при $0 < R \leq R_1$.

Пусть многочлены $p_0, p_1, p_2, \dots$ удовлетворяют следующим условиям:

(W1) найдутся положительные постоянные I_2, I_3 и ε такие, что

$$\max(|p_n(1 - z)|, |p_n(-1 + z)|) \leq I_2(1 - I_3 z)^n, \quad 0 \leq z \leq \varepsilon;$$

(W1b) найдутся положительные постоянные I_4, I_5, I_6 и ε такие, что

$$|p_n(1 - z) - I_4(1 - I_5 z)^n| \leq I_6(z + n z^2), \quad 0 \leq z \leq \varepsilon;$$

(W2) для любого $z_0 \in (0, 1)$ найдутся положительные постоянные I и ρ такие, что $|p_n(z)| \leq I \rho^n$, $-z_0 \leq z \leq z_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $\{C_R\}_{R>0}$ – семейство ограниченных самосопряженных операторов в $L_2(S^1)$, непрерывно зависящих от параметра R , а $p_0, p_1, \dots$ – последовательность многочленов с вещественными коэффициентами. Если семейство $\{C_R\}_{R>0}$ обладает свойствами (V1), (V1b) и (V2), а многочлены $p_0, p_1, \dots$ удовлетворяют условиям (W1), (W1b) и (W2), то семейство операторов $C_R^{(n)} = p_n(C_R)$, $R > 0$, $n = 0, 1, \dots$, обладает свойствами (P1), (P1b) и (P2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наличие свойств (P1) и (P2) устанавливается дословно так же, как и в доказательстве предложения 2.4 из [5]. Нужно отметить, что сослаться непосредственно на упомянутое предложение нельзя, так как в нем, в отличие от доказываемого предложения, вместо условий (V1b) и (W1b) налагаются другие условия, обозначаемые (V1a) и (W1a). Однако при проверке свойств (P1), (P2) используются лишь условия (V1), (V2) и (W1), (W2).

Проверим наличие свойства (P1b). Будем придерживаться тех же обозначений, что и в формулировках условий (V1), (V1b), (V2) и (W1), (W1b), (W2). Не ограничивая общности, можно считать, что постоянная R_0 в условиях (V1) и (V1b) одна и та же, постоянная ε в условиях (W1) и (W1b) одна и та же и $R_0^{3/2} \leq \varepsilon < 1$, $\max(I_1 R_0^{1/2}, I_5 R_0^{3/2}, I_0 I_5 R_0^2) < 1$. Кроме того, ввиду свойства (P1) можно считать, что при $0 < R \leq R_0$ для любого целого $n \geq 0$ верна оценка $\|p_n(C_R)\| \leq I_7 \exp(-I_8 n R^2)$, где I_7, I_8 – положительные постоянные.

Пусть $R \in (0, R_0]$. Поскольку оператор C_R самосопряжен и $\|C_R\| < 1$, его спектр содержится внутри отрезка $[-1, 1]$. Из спектральной теоремы следует, что гильбертово пространство $L_2(S^1)$ разлагается в прямую сумму двух подпространств H_R^+ и H_R^- , инвариантных относительно оператора C_R , причем спектры ограничений оператора C_R на эти подпространства заключены внутри отрезков $[1 - R^{3/2}, 1]$ и $[-1, 1 - R^{3/2}]$ соответственно. Более того, пространства H_R^+ и H_R^- инвариантны относительно любого ограниченного оператора, коммутирующего с C_R . В частности, эти пространства инвариантны относительно умножения на функцию g . Функция h_R представляется в виде $h_R^+ + h_R^-$, где $h_R^+ \in H_R^+$, $h_R^- \in H_R^-$. При этом $C_R h_R^+ - (1 - gR^2)h_R^+ \in H_R^+$, $C_R h_R^- - (1 - gR^2)h_R^- \in H_R^-$, откуда следует, что

$$\|C_R h_R^+ - (1 - gR^2)h_R^+\| \leq \|C_R h_R - (1 - gR^2)h_R\| \leq I_0 R^3.$$

Далее, $(C_R h_R^+, h_R^+) \leq (h_R^+, h_R^+)$ и $(C_R h_R^-, h_R^-) \leq (1 - R^{3/2})(h_R^-, h_R^-)$, поэтому

$$(C_R h_R, h_R) = (C_R h_R^+, h_R^+) + (C_R h_R^-, h_R^-) \leq (h_R, h_R) - R^{3/2}(h_R^-, h_R^-).$$

В то же время, $|(C_R h_R, h_R) - ((1 - gR^2)h_R, h_R)| \leq I_0 R^3 \|h_R\|$, поэтому

$$(C_R h_R, h_R) \geq (1 - I_0 R^2)(h_R, h_R) - I_0 R^3 \|h_R\|.$$

Как следствие,

$$\|h_R^-\|^2 \leq I_0 R^{1/2} \|h_R\|^2 + I_0 R^{3/2} \|h_R\|.$$

Учитывая то, что $\|h_R\| \leq \|1\| + \|h_R - 1\| \leq (2\pi)^{1/2} + I_0 R_0$, приходим к оценке вида $\|h_R^-\| \leq I_9 R^{1/4}$, где I_9 – положительная постоянная, выражающаяся через

I_0 и R_0 . Наконец, $\|h_R^+ - 1\| \leq \|h_R - 1\| + \|h_R^-\| \leq (I_0 R_0^{3/4} + I_9) R^{1/4}$. Очевидно, найдется $R_1 \in (0, R_0]$ такое, что $\|h_R^+ - 1\| < \|1\|$ при $0 < R \leq R_1$. При этом $h_R^+ \neq 0$, в частности пространство H_R^+ нетривиально.

Пусть $R \in (0, R_1]$. Обозначим через C_R^+ ограничение оператора C_R на пространство H_R^+ . Положим $D_R = 1 - I_5(1 - C_R^+)$. Поскольку $\|C_R\| \leq 1 - I_1 R^2$, спектр σ_R^+ оператора C_R^+ лежит на отрезке $[1 - R^{3/2}, 1 - I_1 R^2]$ ($1 - R^{3/2} < 1 - I_1 R^2$, так как $I_1 R_0^{1/2} < 1$). Тогда спектр оператора D_R лежит на отрезке $[1 - I_5 R^{3/2}, 1 - I_1 I_5 R^2] \subset [0, 1]$, в частности $\|D_R\| \leq 1 - I_1 I_5 R^2$. Заметим, что

$$\|D_R h_R^+ - (1 - I_5 g R^2) h_R^+\| = I_5 \|C_R^+ h_R^+ - (1 - g R^2) h_R^+\| \leq I_0 I_5 R^3.$$

Поскольку оператор умножения на функцию g коммутирует с C_R и оставляет инвариантным пространство H_R^+ , он коммутирует с оператором D_R . Тогда

$$\|D_R^m h_R^+ - (1 - I_5 g R^2) D_R^{m-1} h_R^+\| \leq I_0 I_5 R^3 \|D_R^{m-1}\|$$

для любого натурального m , причем $\|D_R^{m-1}\| = \|D_R\|^{m-1}$, так как оператор D_R самосопряжен. Ввиду неравенства $I_0 I_5 R_0^2 < 1$ функция $1 - I_5 g R^2$ положительна, в частности

$$\sup |1 - I_5 g R^2| = 1 - I_5 R^2 \inf g \leq 1 - I_0^{-1} I_5 R^2.$$

В итоге для любого натурального n получаем:

$$\begin{aligned} \|D_R^n h_R^+ - (1 - I_5 g R^2)^n h_R^+\| &\leq I_0 I_5 R^3 \sum_{j=1}^n \|D_R\|^{j-1} \sup |1 - I_5 g R^2|^{n-j} \\ &\leq I_0 I_5 R^3 \sum_{j=0}^{n-1} (1 - I_1 I_5 R^2)^j \leq I_0 I_1^{-1} R. \end{aligned}$$

Далее, оператор $p_n(C_R^+) - I_4 D_R^n$ на пространстве H_R^+ самосопряжен, а его спектр является образом спектра σ_R^+ под действием многочлена $p_n(z) - I_4(1 - I_5(1 - z))^n$. Поскольку $\sigma_R^+ \subset [1 - R^{3/2}, 1] \subset [1 - \varepsilon, 1]$, из условия (W1b) следует, что спектр оператора $p_n(C_R^+) - I_4 D_R^n$ лежит на отрезке $[-I_6(R^{3/2} + nR^3), I_6(R^{3/2} + nR^3)]$. При этом $\|p_n(C_R^+) - I_4 D_R^n\| \leq I_6(R^{3/2} + nR^3)$. Тогда

$$\|p_n(C_R^+) h_R^+ - I_4(1 - I_5 g R^2)^n h_R^+\| \leq I_0 I_1^{-1} I_4 R + I_6(R^{3/2} + nR^3) \|h_R^+\|,$$

причем $\|h_R^+\| \leq \|h_R\| \leq (2\pi)^{1/2} + I_0 R_0$. Таким образом,

$$\|p_n(C_R^+) h_R^+ - I_4(1 - I_5 g R^2)^n h_R^+\| \leq I_{10}(R + nR^3),$$

где I_{10} – положительная постоянная, не зависящая от R и n . Отсюда следует, что

$$\|p_n(C_R) 1 - I_4(1 - I_5 g R^2)^n\| \leq I_{10}(R + nR^3) + (I_4 + I_7) \|h_R^+ - 1\| \leq I_{11}(R^{1/4} + nR^3),$$

где $I_{11} = \max(I_{10}, I_{10} R_0^{3/4} + (I_4 + I_7)(I_0 R_0^{3/4} + I_9))$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \|p_n(C_R) 1 - I_4(1 - I_5 g R^2)^n\| &\leq (2\pi)^{1/2} (\|p_n(C_R)\| + I_4 \sup |1 - I_5 g R^2|^n) \\ &\leq I_{12} \exp(-I_{13} n R^2), \end{aligned}$$

где $I_{12} = (2\pi)^{1/2}(I_4 + I_7)$, $I_{13} = \min(I_8, I_0^{-1} I_5)$.

Для каждого натурального n определим число $r_n > 0$ из равенства $r_n = \exp(-nr_n^2)$. Очевидно, $r_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Если $r_n < R_1$, то, как следует из полученных оценок,

$$\begin{aligned} & n \int_0^{R_1} R \|p_n(C_R) 1 - I_4(1 - I_5 g R^2)^n\| dR \\ & \leq n \int_0^{r_n} I_{11} R (R^{1/4} + n R^3) dR + n \int_{r_n}^{R_1} I_{12} R \exp(-I_{13} n R^2) dR \\ & \leq \frac{4}{9} I_{11} n r_n^{9/4} + \frac{1}{5} I_{11} n^2 r_n^5 + \frac{1}{2} I_{12} I_{13}^{-1} \exp(-I_{13} n r_n^2). \end{aligned}$$

Поскольку $nr_n^2 = -\log r_n$, заключаем, что $nr_n^2 \rightarrow \infty$, а $nr_n^{9/4} \rightarrow 0$ и $n^2 r_n^5 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тем самым, последовательность функций

$$n \int_0^{R_1} R (C_R^{(n)} 1 - I_4(1 - I_5 g R^2)^n) dR, \quad n = 1, 2, \dots,$$

стремится к нулю в пространстве $L_2(S^1)$. В то же время, последовательность функций

$$n \int_0^{R_1} R (1 - I_5 g R^2)^n dR = \frac{n}{2(n+1)I_5 g} (1 - (1 - I_5 g R_1^2)^{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно сходится к функции $(2I_5 g)^{-1}$. Отсюда следует, что

$$n \int_0^{R_1} R (C_R^{(n)} 1, 1) dR \rightarrow (I_4(2I_5 g)^{-1}, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

причем

$$(I_4(2I_5 g)^{-1}, 1) = I_4 \int_{S^1} (2I_5 g(t))^{-1} dt \geq \pi I_0^{-1} I_4 I_5^{-1} > 0.$$

Свойство (P1b) установлено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть $\{C_R\}_{R>0}$ – семейство сжимающих операторов в $L_2(S^1)$, непрерывно зависящих от параметра R . Если это семейство обладает свойствами (V1'), (V1b) и (V2'), то семейство операторов $C_R^{(n)} = C_R^n$, $R > 0$, $n = 0, 1, \dots$, обладает свойствами (P1), (P1b) и (P2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку оператор C_R является сжимающим, $\|C_R\| \leq 1$, то для любого натурального m и целого $n \geq 0$ имеет место оценка $\|C_R^n\| \leq \|C_R^m\|^{[n/m]}$, где $[n/m]$ – целая часть числа n/m . Ввиду свойства (V1') можно выбрать m так, что $\|C_R^m\| \leq 1 - I_1 R^2$ при $0 < R \leq R_0$, где I_1, R_0 – положительные постоянные. Уменьшив, если нужно, постоянную I_1 , добьемся того, что $1 - I_1 R_0^2 \geq 1/2$. Тогда при $0 < R \leq R_0$ имеет место оценка

$$\|C_R^n\| \leq (1 - I_1 R^2)^{[n/m]} \leq 2(1 - I_1 R^2)^{n/m} \leq 2(1 - m^{-1} I_1 R^2)^n.$$

Свойство (P1) установлено.

Ввиду свойства (V2') для любых R_1 и R_2 , $0 < R_1 < R_2$, найдется натуральное M такое, что $\|C_R^M\| < 1$ при $R_1 \leq R \leq R_2$. Функция $R \mapsto \|C_R^M\|$ непрерывна, так как оператор C_R непрерывно зависит от R , поэтому найдется $\rho \in (0, 1)$ такое, что $\|C_R^M\| \leq \rho$ при $R_1 \leq R \leq R_2$. Тогда для любого целого $n \geq 0$ при $R_1 \leq R \leq R_2$ имеем

$$\|C_R^n\| \leq \|C_R^M\|^{\lfloor n/M \rfloor} \leq \rho^{n/M-1} = \rho^{-1}(\rho^{1/M})^n.$$

Свойство (P2) установлено.

Воспользуемся свойством (V1b). Пусть I_0 и R_0 – постоянные, $R \in (0, R_0]$, а g и h_R – функции, фигурирующие в формулировке этого свойства. Ввиду уже установленного свойства (P1) при малых значениях R имеет место оценка $\|C_R^n\| \leq I_2(1 - I_3R^2)^n$, где I_2, I_3 – положительные постоянные. Уменьшив, если нужно, постоянную R_0 , мы можем считать, что приведенная оценка верна при $0 < R \leq R_0$, а также $R_0^2 \max(I_0, I_3) < 1$. Пусть $R \in (0, R_0]$. Тогда $0 < 1 - I_3R^2 \leq \exp(-I_3R^2)$, кроме того, $0 < 1 - gR^2 \leq 1 - I_0^{-1}R^2 \leq \exp(-I_0^{-1}R^2)$ на всей окружности. Поскольку оператор C_R коммутирует с оператором умножения на функцию g , $\|C_R^m h_R - (1 - gR^2)C_R^{m-1} h_R\| \leq I_0 R^3 \|C_R^{m-1}\|$ для любого натурального m . Тогда для любого натурального n имеет место оценка

$$\|C_R^n h_R - (1 - gR^2)^n h_R\| \leq I_0 R^3 \sum_{j=1}^n \|C_R^{j-1}\| \leq I_0 I_2 R^3 \sum_{j=0}^{n-1} (1 - I_3 R^2)^j \leq I_0 I_2 I_3^{-1} R.$$

Как следствие, $\|C_R^n 1 - (1 - gR^2)^n\| \leq I_4 R$, где $I_4 = 2I_0 + I_0 I_2 I_3^{-1}$. Кроме того, верна оценка

$$\|C_R^n 1 - (1 - gR^2)^n\| \leq (2\pi)^{1/2} (\|C_R^n\| + \sup |(1 - gR^2)^n|) \leq I_5 \exp(-I_6 n R^2),$$

где $I_5 = (2\pi)^{1/2}(I_2 + 1)$, $I_6 = \min(I_3, I_0^{-1})$. Определим число $r_n > 0$ из равенства $I_4 r_n = I_5 \exp(-I_6 n r_n^2)$. Очевидно, $r_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Если $r_n < R_0$, то, как следует из полученных оценок,

$$\begin{aligned} n \left\| \int_0^{R_0} R (C_R^n 1 - (1 - gR^2)^n) dR \right\| &\leq n \int_0^{R_0} R \|C_R^n 1 - (1 - gR^2)^n\| dR \\ &\leq n \int_0^{r_n} I_4 R^2 dR + n \int_{r_n}^{R_0} I_5 R \exp(-I_6 n R^2) dR \\ &\leq \frac{1}{3} I_4 n r_n^3 + \frac{1}{2} I_5 I_6^{-1} \exp(-I_6 n r_n^2). \end{aligned}$$

Поскольку $n r_n^2 = -I_6^{-1} \log(I_4 I_5^{-1} r_n)$, заключаем, что $n r_n^2 \rightarrow \infty$, а $n r_n^3 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тем самым, последовательность функций

$$n \int_0^{R_0} R (C_R^n 1 - (1 - gR^2)^n) dR, \quad n = 1, 2, \dots,$$

стремится к нулю в пространстве $L_2(S^1)$. В то же время, последовательность функций

$$n \int_0^{R_0} R (1 - gR^2)^n dR = \frac{n}{2(n+1)g} (1 - (1 - gR_0^2)^{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно сходится к функции $(2g)^{-1}$. Отсюда следует, что

$$n \int_0^{R_0} R(C_R^n 1, 1) dR \rightarrow ((2g)^{-1}, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

причем $((2g)^{-1}, 1) = \int_{S^1} (2g(t))^{-1} dt \geq \pi I_0^{-1} > 0$. Свойство (P1b) установлено.

§ 3. Действия групп и полугрупп

Нам понадобятся три леммы, доказанные в [5].

ЛЕММА 3.1 [5]. *Подгруппа H группы $\mathbb{R}^2$ всюду плотна в последней тогда и лишь тогда, когда не существует ненулевого линейного функционала на $\mathbb{R}^2$, который принимает целое значение на каждом из элементов H .*

ЛЕММА 3.2 [5]. *Если угол φ не кратен ни $\pi/2$, ни $\pi/3$, то группа, порожденная векторами $v_n = (\cos n\varphi, \sin n\varphi)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, всюду плотна в $\mathbb{R}^2$.*

ЛЕММА 3.3 [5]. *Пусть $\mathcal{H}$ – подгруппа группы $\mathcal{G}$. Если изометрии из $\mathcal{H}$ не имеют общей неподвижной точки и не переводят в себя одну и ту же решетку вида $\mathcal{L}_Q$, где Q – полоса, квадрат или правильный треугольник, то группа $\mathcal{H} \cap \mathcal{G}_0$ всюду плотна в $\mathcal{G}_0$.*

Добавим к ним еще две леммы о свойствах подполугрупп группы $\mathcal{G}$.

ЛЕММА 3.4. *Пусть $\mathcal{H}$ – полугруппа изометрий плоскости P . Если $\mathcal{H}$ содержит хотя бы один поворот на ненулевой угол, но не содержит поворотов на углы, несоизмеримые с π , то полугруппа $\mathcal{H}$ является группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно показать, что для любой изометрии $A \in \mathcal{H}$ обратное преобразование A^{-1} также принадлежит полугруппе $\mathcal{H}$. Это очевидно, если изометрия A имеет конечный порядок. Таковы осевые симметрии, а также, как следует из условия леммы, все содержащиеся в $\mathcal{H}$ повороты. Далее, согласно условию в $\mathcal{H}$ найдется поворот B на ненулевой угол. Этот поворот имеет конечный порядок $m > 1$. Для любого параллельного переноса $A \in \mathcal{H}$ изометрия AB является поворотом плоскости на тот же угол, что и B (но вокруг другой точки), в частности AB имеет порядок m . Как следствие, $A^{-1} = B(AB)^{m-1} \in \mathcal{H}$. Наконец, если $A \in \mathcal{H}$ – скользящая симметрия, то A^2 – параллельный перенос. Как уже показано, полугруппа $\mathcal{H}$ содержит изометрию $(A^2)^{-1}$, а тем самым, и изометрию $(A^2)^{-1}A = A^{-1}$.

ЛЕММА 3.5. *Пусть $\mathcal{H}$ – полугруппа, порожденная изометриями*

$$A_1, \dots, A_k \in \mathcal{G}.$$

Если полугруппа $\mathcal{H}$ не содержит поворотов и не является группой, то изометрии $A_1, \dots, A_k$ удовлетворяют одному из условий (i), (ii) теоремы 1.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P_0 – векторное евклидово пространство, ассоциированное с аффинной плоскостью P . Параллельный перенос плоскости P на вектор $v \in P_0$ обозначим T_v . Вначале предположим, что каждая из изометрий A_j , $1 \leq j \leq k$, имеет вид T_{v_j} , где $v_j \in P_0$. Если сумма векторов $v_1, \dots, v_k$ ненулевая, то изометрии $A_1, \dots, A_k$ удовлетворяют условию (i) теоремы 1.4. В противном случае $A_1 A_2 \dots A_k$ – тождественное преобразование. Отсюда следует, что изометрии $A_1, \dots, A_k$ обратимы в полугруппе $\mathcal{H}$. Тогда любой элемент полугруппы $\mathcal{H}$ обратим в ней, т.е. $\mathcal{H}$ – группа.

Теперь рассмотрим случай, когда среди изометрий $A_1, \dots, A_k$ есть изометрии, не принадлежащие $\mathcal{G}_0$. Пусть, для определенности, таковы изометрии $A_1, \dots, A_{k_1}$, $1 \leq k_1 \leq k$. Поскольку полугруппа $\mathcal{H}$ не содержит поворотов, все они суть осевые или скользящие симметрии, оси которых параллельны некоторой фиксированной прямой l . Пусть S – осевая симметрия относительно прямой l . Возьмем произвольную точку $x \in l$. Для любого j , $1 \leq j \leq k$, обозначим через v_j вектор $A_j x - x \in P_0$. Тогда $A_j = T_{v_j} S$ при $1 \leq j \leq k_1$ и $A_j = T_{v_j}$ при $k_1 < j \leq k$. Преобразование $A_1^2 A_2^2 \dots A_k^2$ является параллельным переносом на вектор

$$w = \sum_{1 \leq j \leq k_1} (v_j + S v_j) + 2 \sum_{k_1 < j \leq k} v_j,$$

где $S v_j$ обозначает вектор, симметричный v_j относительно прямой l . Ортогональная проекция вектора $w/2$ на направление прямой l такая же, как и у суммы векторов $v_1, \dots, v_k$. Тем самым, если вектор w не ортогонален прямой l , то изометрии $A_1, \dots, A_k$ удовлетворяют условию (ii) теоремы 1.4. Если же вектор w ортогонален l , то $S T_w = T_{-w} S$, тогда $T_w A_1 T_w = A_1$. Как следствие, $A_1 A_2^2 \dots A_k^2 A_1^3 A_2^2 \dots A_k^2$ – тождественное преобразование. Таким образом, полугруппа $\mathcal{H}$ содержит изометрию $A_k^{-2} \dots A_2^{-2} A_1^{-3} A_k^{-2} \dots A_2^{-2} A_1^{-1}$. Тогда она содержит изометрии $A_1^{-1}, \dots, A_k^{-1}$, откуда следует, что $\mathcal{H}$ – группа.

Теперь разберем вырожденные случаи (i) и (ii) теоремы 1.4.

ЛЕММА 3.6. *Если изометрии $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{G}$ удовлетворяют одному из условий (i), (ii) теоремы 1.4, то действие $d = \text{FSG}_k[A_1, \dots, A_k]$ удовлетворяет условию 2) той же теоремы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале докажем вспомогательное комбинаторное утверждение. Пусть $a_1, \dots, a_k$ – образующие полугруппы FSG_k . Произвольный элемент $g \in \text{FSG}_k$ длины $n > 0$ имеет единственное представление вида $a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_n}$, где $1 \leq j_s \leq k$, $s = 1, \dots, n$. Для каждого $j \in \{1, \dots, k\}$ обозначим через $m_j(g)$ число элементов последовательности $j_1, \dots, j_n$, равных j . Пусть $\varepsilon \in (0, k^{-1})$. Обозначим через $\tilde{N}_{\varepsilon, j}^{(n)}$, $1 \leq j \leq k$, отношение числа элементов g длины n , для которых $m_j(g) \leq (k^{-1} - \varepsilon)n$, к числу k^n всех элементов длины n в FSG_k . Через $\tilde{N}_{\varepsilon}^{(n)}$ обозначим отношение к k^n числа тех элементов $g \in \text{FSG}_k$ длины n , для которых хотя бы одно из чисел $m_1(g), \dots, m_k(g)$ не превосходит $(k^{-1} - \varepsilon)n$. Очевидно, величины $\tilde{N}_{\varepsilon, 1}^{(n)}, \dots, \tilde{N}_{\varepsilon, k}^{(n)}$ равны и $\tilde{N}_{\varepsilon}^{(n)} \leq k \tilde{N}_{\varepsilon, 1}^{(n)}$. Как нетрудно увидеть,

$$\tilde{N}_{\varepsilon, 1}^{(n)} = k^{-n} \sum_{0 \leq j \leq (k^{-1} - \varepsilon)n} \binom{n}{j} (k-1)^{n-j},$$

здесь $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ — биномиальный коэффициент. Заметим, что неравенство $j \leq (k^{-1} - \varepsilon)n$ влечет неравенство $(k-1+k\varepsilon)j \leq (1-k\varepsilon)(n-j)$. Как следствие, для любого $\delta > 0$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{\varepsilon,1}^{(n)} &\leq k^{-n} \sum_{0 \leq j \leq (k^{-1}-\varepsilon)n} \binom{n}{j} e^{-\delta(k-1+k\varepsilon)j} e^{\delta(1-k\varepsilon)(n-j)} (k-1)^{n-j} \\ &\leq k^{-n} (e^{-\delta(k-1+k\varepsilon)} + (k-1)e^{\delta(1-k\varepsilon)})^n. \end{aligned}$$

Если δ достаточно мало, то число $e^{-\delta(k-1+k\varepsilon)} + (k-1)e^{\delta(1-k\varepsilon)}$ меньше k . Тем самым, найдется $I_\varepsilon > 0$ такое, что последовательность $\{\exp(I_\varepsilon n) \tilde{N}_{\varepsilon,1}^{(n)}\}$ ограничена. При этом последовательность $\{\exp(I_\varepsilon n) \tilde{N}_\varepsilon^{(n)}\}$ также ограничена.

Пусть $A_1, \dots, A_k$ — изометрии, удовлетворяющие условию (i). Все они суть параллельные переносы на некоторые векторы $v_1, \dots, v_k$, причем сумма $v = v_1 + \dots + v_k$ ненулевая. Выберем $\varepsilon \in (0, k^{-1})$ такое, что $2k^2\varepsilon(|v_1| + \dots + |v_k|) \leq |v|$. Пусть $x \in P$, а E — ограниченное подмножество P . Выберем натуральное n_0 такое, что расстояние от точки x до любой точки множества E не больше $n_0|v|/(2k)$. Пусть g — произвольный элемент FSG_k длины $n \geq n_0$. Изометрия $d(g)$ является параллельным переносом на вектор $w_g = m_1(g)v_1 + \dots + m_k(g)v_k$. Предположим, что $m_j(g) > (k^{-1} - \varepsilon)n$ для любого j , $1 \leq j \leq k$. Поскольку $m_1(g) + \dots + m_k(g) = n$, отсюда следует, что $|m_j(g) - n/k| < k\varepsilon n$, $j = 1, \dots, k$. Тогда $|w_g - (n/k)v| < k\varepsilon n(|v_1| + \dots + |v_k|) \leq n|v|/(2k)$. При этом $|w_g| > n|v|/(2k)$, в частности $d(g)x \notin E$. Таким образом, $d(g)x \in E$ лишь в том случае, когда хотя бы одно из чисел $m_1(g), \dots, m_k(g)$ не превосходит $(k^{-1} - \varepsilon)n$. Отсюда следует, что $N_{d,x}^{(n)}(E) \leq \tilde{N}_\varepsilon^{(n)}$ при $n \geq n_0$. Тогда последовательность $\{\exp(I_\varepsilon n) N_{d,x}^{(n)}(E)\}$ ограничена.

Теперь предположим, что изометрии $A_1, \dots, A_k$ удовлетворяют условию (ii). При этом каждая из них является либо параллельным переносом, либо осевой или скользящей симметрией, ось которой параллельна некоторой фиксированной прямой l . Выберем точку $x \in P$. Для любого j , $1 \leq j \leq k$, обозначим через w_j ортогональную проекцию вектора $A_j x - x$ на направление прямой l . Заметим, что векторы $w_1, \dots, w_k$ не зависят от выбора точки x . Ввиду условия (ii) их сумма ненулевая. Положим $d_1 = \text{FSG}_k[B_1, \dots, B_k]$, где $B_1, \dots, B_k$ — параллельные переносы на векторы $w_1, \dots, w_k$ соответственно. Изометрии $B_1, \dots, B_k$ удовлетворяют условию (i), поэтому, как уже доказано, найдется $I_0 > 0$ такое, что для любого ограниченного множества $E_0 \subset P$ и любой точки $x_0 \in P$ последовательность $\{\exp(I_0 n) N_{d_1, x_0}^{(n)}(E_0)\}$ ограничена. Пусть $x \in P$, а E — ограниченное подмножество P . Обозначим через E_1 ортогональную проекцию множества E на прямую l , а через x_1 — ортогональную проекцию точки x на l . Легко видеть, что для любого $g \in \text{FSG}_k$ точка $d_1(g)x_1$ является ортогональной проекцией точки $d(g)x$ на прямую l . Тем самым, $d_1(g)x_1 \in E_1$, как только $d(g)x \in E$. Отсюда следует, что $N_{d,x}^{(n)}(E) \leq N_{d_1, x_1}^{(n)}(E_1)$ при $n = 0, 1, \dots$. Множество E_1 ограничено, так как ограничено множество E . Тогда последовательность $\{\exp(I_0 n) N_{d_1, x_1}^{(n)}(E_1)\}$ ограничена, а с ней ограничена и последовательность $\{\exp(I_0 n) N_{d,x}^{(n)}(E)\}$.

Пусть $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{G}$. Обозначим через $\mathcal{H}$ полугруппу, порожденную изометриями $A_1, \dots, A_k$. Положим $C = k^{-1}(u[A_1] + \dots + u[A_k])$. Пусть $\{C_R\}_{R>0}$ – семейство радиальных операторов, соответствующих оператору C в некоторой декартовой системе координат. Следующие три леммы определяют условия, при которых это семейство обладает свойствами (V1'), (V1b) и (V2'), сформулированными в §2.

ЛЕММА 3.7. *Если изометрии $A_1, \dots, A_k$ не имеют общей неподвижной точки, а полугруппа $\mathcal{H}$ содержит поворот на угол, не кратный ни $\pi/2$, ни $\pi/3$, то семейство операторов C_R , $R > 0$, обладает свойствами (V1') и (V2').*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \in \mathcal{H}$ – поворот на угол, не кратный ни $\pi/2$, ни $\pi/3$. Пусть x – центр поворота A . Покажем, что полугруппа $\mathcal{H}$ содержит поворот B , не коммутирующий с A , т.е. имеющий другой центр. Если $\mathcal{H}$ содержит нетривиальный параллельный перенос T , то можно положить $B = TA$. Если в $\mathcal{H}$ имеется осевая симметрия, ось которой не проходит через точку x , то можно положить $B = SAS$. Отсюда следует, что если в полугруппе $\mathcal{H}$ нет требуемого поворота, то она состоит из поворотов и осевых симметрий, переводящих в себя точку x . Последнее противоречит условию леммы.

Пусть $d = \text{FSG}_k[A_1, \dots, A_k]$. Поскольку полугруппа $\mathcal{H}$ содержит повороты A и B , найдутся элементы $g_1, g_2 \in \text{FSG}_k$ такие, что $d(g_1) = A$, $d(g_2) = B$. Положим $m_1 = |g_1|$, $m_2 = |g_2|$. Пусть n – натуральное число, которое не больше порядка поворота A . Изометрии $A, A^2, \dots, A^{n-1}$ суть нетривиальные повороты вокруг точки x , поэтому ни одна из них не коммутирует с поворотом B . Отсюда следует, что изометрии $A^j B A^{n-1-j}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, попарно различны. Элементы $g_1^j g_2 g_1^{n-1-j}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, полугруппы FSG_k имеют одну и ту же длину $m = (n-1)m_1 + m_2$ и различны, так как $d(g_1^j g_2 g_1^{n-1-j}) = A^j B A^{n-1-j}$. Тем самым, оператор $(kC)^m = \sum_{|g|=m} u[d(g)]$ имеет вид $nD + Y$, где $D = n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} u[A^j B A^{n-1-j}]$, а Y – сумма $k^m - n$ операторов вида $u[X]$, $X \in \mathcal{G}$. Согласно лемме 2.2 $(kC_R)^m = nD_R + Y_R$ для любого $R > 0$, причем Y_R – сумма $k^m - n$ унитарных операторов в $L_2(S^1)$. Как следствие, $1 - \|C_R^m\| \geq nk^{-m}(1 - \|D_R\|)$. Поворот B можно представить в виде $T_0 B_0$, где T_0 – нетривиальный параллельный перенос, а B_0 – поворот вокруг точки x . При этом $nD = u[A^{n-1} B_0] \sum_{j=0}^{n-1} u[A^j T_0 A^{-j}]$. Относительно декартовых координат, в которых вычисляются радиальные операторы, T_0 есть параллельный перенос на ненулевой вектор $v \in \mathbb{R}^2$. При этом изометрия $A^j T_0 A^{-j}$ есть параллельный перенос на вектор $A_0^j v$, где A_0 – линейно однородная часть поворота A . Тогда для любого $R > 0$ радиальный оператор $u[A^{n-1} B_0]_R^{-1} D_R = n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} u[A^j T_0 A^{-j}]_R$ есть оператор умножения на функцию $h_{n,R} = n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} \exp(iR(\Phi, A_0^j v))$. Поскольку оператор $u[A^{n-1} B_0]_R$ унитарен, $\|D_R\| = \sup |h_{n,R}|$. В итоге, $1 - \|C_R^m\| \geq nk^{-m}(1 - \sup |h_{n,R}|)$.

Выберем $I_1 > 0$ такое, что $|e^{iy} - (1 + iy - y^2/2)| \leq I_1 |y|^3$ при $|y| \leq 1$. Тогда при $0 < R \leq |v|^{-1}$ для любого натурального n имеет место оценка

$$\sup |h_{n,R} - (1 + iRh_n^{(1)} - R^2 h_n^{(2)})| \leq I_1 |v|^3 R^3,$$

где

$$h_n^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\Phi, A_0^j v), \quad h_n^{(2)} = \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} (\Phi, A_0^j v)^2.$$

Положим $I_0 = \inf ((\Phi, v)^2 + (\Phi, A_0 v)^2)$. Векторы v и $A_0 v$ неколлинеарны, поэтому скалярные произведения $(\Phi(t), v)$ и $(\Phi(t), A_0 v)$ не равны нулю одновременно. Учитывая непрерывность отображения Φ , заключаем, что $I_0 > 0$. Для любого $t \in S^1$ и целого $j \geq 0$ верно равенство $(\Phi(t), A_0^j v) = (\Phi(t - j\varphi), v)$, где φ — угол поворота A . Отсюда следует, что $\inf ((\Phi, A_0^j v)^2 + (\Phi, A_0^{j+1} v)^2) = I_0$ при $j = 0, 1, \dots$. Таким образом, если $n \geq 2$, то

$$\inf \sum_{j=0}^{n-1} (\Phi, A_0^j v)^2 \geq \frac{(n-1)I_0}{2} \geq \frac{nI_0}{4},$$

т.е. $\inf h_n^{(2)} \geq I_0/8$. Заметим, что отношение длин векторов $v_n = \sum_{j=0}^{n-1} A_0^j v$ и v равно $|1 + e^{i\varphi} + \dots + e^{i(n-1)\varphi}| = |1 - e^{in\varphi}|/|1 - e^{i\varphi}|$, тем самым, в последовательности $v_1, v_2, \dots$ есть векторы сколь угодно малой длины. Если порядок поворота A конечен, положим n равным этому порядку, при этом $v_n = 0$. Если порядок A бесконечен, выберем $n \geq 2$ такое, что $|v_n| \leq I_0^{1/2}/4$. В любом случае $\sup |h_n^{(1)}| = n^{-1}|v_n| \leq I_0^{1/2}/4$. Далее, $\inf h_n^{(2)} \geq I_0/8$, так как $n \geq 2$. Наконец, n не больше порядка поворота A , поэтому найдутся натуральное число m и постоянная $I_2 > 0$ такие, что $1 - \|C_R^m\| \geq I_2(1 - \sup |h_{n,R}|)$ для любого $R > 0$. Возьмем произвольное $R \in (0, |v|^{-1})$. Поскольку $\sup h_n^{(2)} \leq |v|^2/2$, функция $1 - R^2 h_n^{(2)}$ положительна. При этом

$$\sup |1 - R^2 h_n^{(2)}| \leq \sup |1 - R^2 h_n^{(2)}| = 1 - R^2 \inf h_n^{(2)} \leq 1 - \frac{I_0 R^2}{8}.$$

Поскольку функции $h_n^{(1)}$ и $h_n^{(2)}$ вещественнозначны,

$$\sup |1 + iR h_n^{(1)} - R^2 h_n^{(2)}|^2 = \sup |1 - R^2 h_n^{(2)}|^2 + R^2 \sup |h_n^{(1)}|^2 \leq 1 - \frac{I_0 R^2}{16},$$

тогда $\sup |1 + iR h_n^{(1)} - R^2 h_n^{(2)}| \leq 1 - I_0 R^2/32$. Наконец,

$$\sup |h_{n,R}| \leq \sup |1 + iR h_n^{(1)} - R^2 h_n^{(2)}| + I_1 |v|^3 R^3 \leq 1 - \frac{I_0 R^2}{32} + I_1 |v|^3 R^3.$$

Отсюда вытекает, что при достаточно малых значениях R имеет место оценка $\sup |h_{n,R}| \leq 1 - I_0 R^2/64$; при этом $\|C_R^m\| \leq 1 - I_0 I_2 R^2/64$. Свойство (V1') установлено.

Выберем произвольное $R_1 > 0$. Векторы $A_0 v - v$ и $A_0(A_0 v - v)$ неколлинеарны, поэтому каждый линейный функционал на $\mathbb{R}^2$, принимающий на них целые значения, является целочисленной линейной комбинацией функционалов l_0 и l_1 , заданных соотношениями $l_0(A_0 v - v) = l_1(A_0(A_0 v - v)) = 1$, $l_0(A_0(A_0 v - v)) = l_1(A_0 v - v) = 0$. Лишь конечное число таких функционалов имеет норму, не превышающую $(2\pi)^{-1} R_1$. Поскольку A есть поворот на угол, не кратный ни $\pi/2$, ни $\pi/3$,

из леммы 3.2 следует, что векторы $A_0^{j+1}v - A_0^jv = A_0^j(A_0v - v)$, $j = 0, 1, \dots$, порождают подгруппу группы $\mathbb{R}^2$, всюду плотную в $\mathbb{R}^2$. Тогда из леммы 3.1 следует, что произвольный ненулевой линейный функционал на пространстве $\mathbb{R}^2$ принимает нецелое значение на некотором векторе $A_0^{j+1}v - A_0^jv$, $j \geq 0$. Тем самым, найдется натуральное n такое, что каждый ненулевой линейный функционал на $\mathbb{R}^2$, норма которого не больше $(2\pi)^{-1}R_1$, принимает нецелое значение хотя бы на одном из $n - 1$ векторов $A_0^{j+1}v - A_0^jv$, $j = 0, 1, \dots, n - 2$. Если поворот A имеет конечный порядок n_0 , то n можно выбрать не превышающим $n_0 + 1$, так как тогда $A_0^{n_0+j+1}v - A_0^{n_0+j}v = A_0^{j+1}v - A_0^jv$ для любого целого $j \geq 0$. Более того, n можно выбрать не превышающим n_0 , так как сумма векторов $A_0^{j+1}v - A_0^jv$, $j = 0, 1, \dots, n_0 - 1$, равна нулю. При этом, как показано выше, найдутся натуральное число M и постоянная $I_3 > 0$ такие, что для любого $R > 0$ имеет место неравенство $1 - \|C_R^M\| \geq I_3(1 - \sup |h_{n,R}|)$. Если $|h_{n,R}(t)| = 1$ для некоторого $t \in S^1$, то числа $\exp(iR(\Phi(t), A_0^jv))$, $j = 0, 1, \dots, n - 1$, равны. Тогда числа $(2\pi)^{-1}R(\Phi(t), A_0^{j+1}v - A_0^jv)$, $j = 0, 1, \dots, n - 2$, являются целыми. Отображение $w \mapsto (2\pi)^{-1}R(\Phi(t), w)$ есть ненулевой линейный функционал на $\mathbb{R}^2$, норма которого равна $(2\pi)^{-1}R$. Тем самым, при $0 < R \leq R_1$ имеем $|h_{n,R}| < 1$ на всей окружности. Поскольку функция $h_{n,R}$ непрерывна, $\sup |h_{n,R}| < 1$ при $0 < R \leq R_1$. Как следствие, $\|C_R^M\| < 1$ при $0 < R \leq R_1$. Ввиду произвольности выбора R_1 семейство операторов $\{C_R\}_{R>0}$ обладает свойством (V2').

ЛЕММА 3.8. *Если изометрии $A_1, \dots, A_k$ не имеют общей неподвижной точки и не переводят в себя одну и ту же решетку вида $\mathcal{L}_Q$, где Q – полоса, квадрат или правильный треугольник, а полугруппа $\mathcal{H}$ является группой, то семейство операторов C_R , $R > 0$, обладает свойствами (V1') и (V2').*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d = \text{FSG}_k[A_1, \dots, A_k]$. Поскольку полугруппа $\mathcal{H}$ является группой, найдется элемент $g_0 \in \text{FSG}_k$ положительной длины m_0 такой, что $d(g_0)$ – тождественное преобразование.

Декартовы координаты, в которых вычислялись радиальные операторы C_R , $R > 0$, позволяют рассматривать произвольный элемент группы $\mathcal{G}_0$ как параллельный перенос на некоторый вектор $v \in \mathbb{R}^2$; мы обозначаем этот элемент T_v . Положим $H_0 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid T_v \in \mathcal{H}\}$. Через H_1 обозначим множество векторов $v \in \mathbb{R}^2$ таких, что каждый из параллельных переносов T_v и T_{-v} можно представить в виде $d(g)$, где g – элемент полугруппы FSG_k , длина $|g|$ которого делится на m_0 . Множество H_0 является подгруппой $\mathbb{R}^2$, так как $\mathcal{H}$ – группа. Множество H_1 также является подгруппой $\mathbb{R}^2$, что следует непосредственно из его определения. Согласно лемме 3.3 группа $\mathcal{H} \cap \mathcal{G}_0$ всюду плотна в $\mathcal{G}_0$, откуда следует, что группа H_0 всюду плотна в $\mathbb{R}^2$. Группа H_1 также всюду плотна в $\mathbb{R}^2$, поскольку она содержит группу $m_0H_0 = \{m_0v \mid v \in H_0\}$.

Пусть векторы $v_1, \dots, v_n \in H_1$ таковы, что среди векторов $v_1, -v_1, \dots, v_n, -v_n$ нет двух одинаковых. Согласно определению множества H_1 найдутся элементы $g_1^+, g_1^-, \dots, g_n^+, g_n^-$ полугруппы FSG_k , длины которых делятся на m_0 , такие, что $d(g_j^+) = T_{v_j}$, $d(g_j^-) = T_{-v_j}$, $j = 1, \dots, n$. Поскольку $d(g_0^p g) = d(g)$ для любого $g \in \text{FSG}_k$ и натурального p , причем $|g_0^p g| = pm_0 + |g|$, элементы $g_1^+, g_1^-, \dots, g_n^+, g_n^-$ можно выбрать таким образом, чтобы все они имели одну и ту же длину $m > 0$.

При этом все выбранные элементы различны, так как различны параллельные переносы $T_{v_1}, T_{-v_1}, \dots, T_{v_n}, T_{-v_n}$. Отсюда следует, что оператор

$$(kC)^m = \sum_{|g|=m} u[d(g)]$$

имеет вид $2nD + Y$, где $D = (2n)^{-1}(u[T_{v_1}] + u[T_{-v_1}] + \dots + u[T_{v_n}] + u[T_{-v_n}])$, а Y – сумма $k^m - 2n$ операторов вида $u[A]$, $A \in \mathcal{G}$. Согласно лемме 2.2 $(kC_R)^m = 2nD_R + Y_R$ для любого $R > 0$, причем Y_R – сумма $k^m - 2n$ унитарных операторов в $L_2(S^1)$. Как следствие, $1 - \|C_R^m\| \geq 2nk^{-m}(1 - \|D_R\|)$. Из леммы 2.2 вытекает, что оператор D_R есть оператор умножения на функцию $h_R = n^{-1} \sum_{j=1}^n \cos(R(\Phi, v_j))$. При этом $\|D_R\| = \sup |h_R|$.

Поскольку группа H_1 плотна в $\mathbb{R}^2$, она содержит пару неколлинеарных векторов v_1 и v_2 . При этом векторы $v_1, -v_1, v_2, -v_2$ попарно различны. Из сказанного выше следует, что найдутся натуральное число m и постоянная $I_1 > 0$ такие, что для любого $R > 0$ имеет место оценка $\|C_R^m\| \leq 1 - I_1(1 - \sup |h_R|)$, где $h_R = (\cos(R(\Phi, v_1)) + \cos(R(\Phi, v_2)))/2$. Выберем постоянную $R_0 > 0$ такую, что $R_0|v_1| \leq \pi/2$ и $R_0|v_2| \leq \pi/2$. При $0 < R \leq R_0$ на всей окружности S^1 имеем $0 \leq h_R \leq 1 - \frac{1}{4}R^2((\Phi, v_1)^2 + (\Phi, v_2)^2)$. Тогда $1 - \sup |h_R| \geq I_0R^2/4$, где $I_0 = \inf((\Phi, v_1)^2 + (\Phi, v_2)^2)$. Поскольку векторы v_1 и v_2 неколлинеарны, скалярные произведения $(\Phi(t), v_1)$ и $(\Phi(t), v_2)$ не равны нулю одновременно. Как следствие, постоянная I_0 положительна. При этом семейство $\{C_R\}_{R>0}$ обладает свойством (V1').

Выберем произвольное $R_1 > 0$. Каждый линейный функционал на $\mathbb{R}^2$, принимающий целые значения на векторах v_1 и v_2 , является целочисленной линейной комбинацией функционалов l_1 и l_2 , заданных соотношениями $l_1(v_1) = l_2(v_2) = 1$, $l_1(v_2) = l_2(v_1) = 0$. Лишь конечное число таких функционалов имеет норму, не превышающую $\pi^{-1}R_1$. Из леммы 3.1 следует, что произвольный ненулевой линейный функционал на пространстве $\mathbb{R}^2$ принимает нецелое значение на некотором векторе $v \in H_1$. Тем самым, найдутся векторы $v_3, \dots, v_n \in H_1$ такие, что каждый ненулевой линейный функционал на $\mathbb{R}^2$, норма которого не больше $\pi^{-1}R_1$, принимает нецелое значение хотя бы на одном из векторов $v_1, \dots, v_n$. Векторы можно выбрать таким образом, чтобы среди векторов $v_1, -v_1, \dots, v_n, -v_n$ не было двух одинаковых. При этом, как следует из сказанного выше, найдутся натуральное число M и постоянная $I_2 \geq 0$ такие, что для любого $R > 0$ имеет место неравенство $1 - \|C_R^M\| \geq I_2(1 - \sup |\tilde{h}_R|)$, где $\tilde{h}_R = n^{-1} \sum_{j=1}^n \cos(R(\Phi, v_j))$. Если $|\tilde{h}_R(t)| = 1$ для некоторого $t \in S^1$, то числа $\pi^{-1}R(\Phi(t), v_1), \dots, \pi^{-1}R(\Phi(t), v_n)$ целые. Отображение $v \mapsto \pi^{-1}R(\Phi(t), v)$ является ненулевым линейным функционалом, норма которого равна $\pi^{-1}R$. Тем самым, при $0 < R \leq R_1$ имеем $|\tilde{h}_R| < 1$ на всей окружности. Поскольку функция $\tilde{h}_R$ непрерывна, $\sup |\tilde{h}_R| < 1$ при $0 < R \leq R_1$. Как следствие, $\|C_R^M\| < 1$ при $0 < R \leq R_1$. Ввиду произвольности выбора R_1 семейство операторов $\{C_R\}_{R>0}$ обладает свойством (V2').

ЛЕММА 3.9. *Если изометрии $A_1, \dots, A_k$ не удовлетворяют условиям (i), (ii) теоремы 1.4, а семейство операторов C_R , $R > 0$, обладает свойством (V1'), то это же семейство обладает и свойством (V1b).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду свойства (V1') найдутся положительные постоянные I_1 , R_0 и натуральное число m такие, что $\|C_R^m\| \leq 1 - I_1 R^2$ при $0 < R \leq R_0$.

Декартовы координаты, в которых вычислялись радиальные операторы C_R , $R > 0$, позволяют рассматривать произвольную изометрию из группы $\mathcal{G}$ как преобразование $\mathbb{R}^2$. Каждую из изометрий A_j , $1 \leq j \leq k$, представим в виде $A_j = B_j T_j$, где B_j – изометрия, переводящая в себя начало координат, а T_j – параллельный перенос на некоторый вектор $v_j \in \mathbb{R}^2$. Отображение $b_j = \Phi^{-1} B_j \Phi$ является корректно определенным преобразованием окружности S^1 вида $t \mapsto t + \varphi$ или $t \mapsto \varphi - t$, где $\varphi \in S^1$. Обозначим через U_j унитарный оператор в пространстве $L_2(S^1)$, действующий по правилу $h \mapsto h \circ b_j$. Согласно лемме 2.2 $u[B_j]_R = U_j$ для любого $R > 0$, а радиальный оператор $u[T_j]_R$ является оператором умножения на функцию $e^{iR(\Phi, v_j)}$. Отсюда следует, что $C_R h = k^{-1} \sum_{j=1}^k e^{iR(\Phi, v_j)} U_j h$ для любого $R > 0$ и функции $h \in L_2(S^1)$. Определим операторы D_0, D_1, D_2 в пространстве $L_2(S^1)$ посредством формул $D_0 h = k^{-1} \sum_{j=1}^k U_j h$, $D_1 h = k^{-1} \sum_{j=1}^k (\Phi, v_j) U_j h$, $D_2 h = -(2k)^{-1} \sum_{j=1}^k (\Phi, v_j)^2 U_j h$, $h \in L_2(S^1)$. Очевидно, найдется постоянная $I_2 > 0$ такая, что $\|C_R - (D_0 + iR D_1 + R^2 D_2)\| \leq I_2 R^3$ при $0 < R \leq R_0$.

Пусть H_1, H_2, H_2^+ – вещественные линейные подпространства пространства $L_2(S^1)$, первое из которых порождено функциями $t \mapsto \cos t$ и $t \mapsto \sin t$, второе – функциями $t \mapsto \cos 2t$ и $t \mapsto \sin 2t$, а третье – функцией 1 и пространством H_2 . Легко видеть, что пространства H_1, H_2 и H_2^+ инвариантны относительно оператора D_0 . Произвольная ненулевая функция $f \in H_1$ достигает своего максимального значения в единственной точке $t_0 \in S^1$. Для любого целого j , $1 \leq j \leq k$, равенство $U_j f = f$ имеет место в том и лишь том случае, когда $b_j(t_0) = t_0$. Равенство $D_0 f = f$ имеет место в том и лишь том случае, когда t_0 – общая неподвижная точка отображений $b_1, \dots, b_k$. Далее, ненулевая функция $f \in H_2$ принимает свое максимальное значение в двух точках $t_1, t_2 \in S^1$, расстояние между которыми равно π . При этом равенство $U_j f = f$, $1 \leq j \leq k$, имеет место в том и лишь том случае, когда отображение b_j переводит в себя множество $\{t_1, t_2\}$. Равенство $D_0 f = f$ имеет место в том и лишь том случае, когда множество $\{t_1, t_2\}$ инвариантно относительно каждого из отображений $b_1, \dots, b_k$. Таким образом, если ограничение оператора $1 - D_0$ на одно из пространств H_1, H_2 вырождено, то каждое из отображений $b_1, \dots, b_k$ имеет неподвижную точку или меняет местами две точки, расстояние между которыми равно π . В любом случае отображения $b_1, \dots, b_k$ инволютивны. Тогда операторы $U_1, \dots, U_k$ самосопряжены, а с ними самосопряжен и оператор D_0 .

Очевидно, $D_1 1 = k^{-1}(\Phi, v_1 + \dots + v_k) \in H_1$. Покажем, что найдется функция $f_1 \in H_1$ такая, что $(1 - D_0)f_1 = D_1 1$. Это очевидно, если ограничение оператора $1 - D_0$ на пространство H_1 невырождено. В противном случае отображения $b_1, \dots, b_k$ имеют общую неподвижную точку $t_0 \in S^1$. При этом каждая из изометрий $B_1, \dots, B_k$ либо тождественна, либо является осевой симметрией, ось l которой проходит через начало координат и точку $\Phi(t_0)$. Вначале предположим, что все преобразования $B_1, \dots, B_k$ тождественны. Если сумма векторов $v_1, \dots, v_k$ ненулевая, то изометрии $A_1, \dots, A_k$ удовлетворяют условию (i) теоремы 1.4. Если же эта сумма равна нулю, то $D_1 1 = 0$, тогда можно положить $f_1 = 0$. Теперь обратимся к случаю, когда среди изометрий $B_1, \dots, B_k$ есть хотя бы одна осевая

симметрия. Для любой точки $x \in \mathbb{R}^2$ ортогональная проекция вектора $A_j x - x$, $1 \leq j \leq k$, на прямую l такая же, как и у вектора v_j . Тем самым, если сумма векторов $v_1, \dots, v_k$ не ортогональна прямой l , то изометрии $A_1, \dots, A_k$ удовлетворяют условию (ii) теоремы 1.4. Если же эта сумма ортогональна l , т.е. $(D_1 1)(t_0) = 0$, то $D_0(D_1 1) = k^{-1}(k - 2k_1)D_1 1$, где k_1 — число осевых симметрий среди изометрий $B_1, \dots, B_k$, и мы можем положить $f_1 = k(2k_1)^{-1}D_1 1$.

Очевидно, $D_2 1 \in H_2^+$ и $D_1 H_1 \subset H_2^+$, поэтому функция $h_0 = D_2 1 - D_1 f_1$ принадлежит пространству H_2^+ . Обозначим через $\tilde{D}$ ограничение оператора $1 - D_0$ на это пространство. Пусть $\tilde{H}_0$ — ядро, а $\tilde{H}_2$ — образ оператора $\tilde{D}$. Легко видеть, что $1 \in \tilde{H}_0$ и $\tilde{D} H_2 = \tilde{H}_2$. Если ограничение оператора $1 - D_0$ на пространство H_2 невырождено, то $\tilde{H}_2 = H_2$, а пространство $\tilde{H}_0$ состоит из постоянных функций. Если же это ограничение вырождено, то, как показано выше, оператор D_0 самосопряжен, и тогда пространства $\tilde{H}_0$ и $\tilde{H}_2$ ортогональны. В любом случае пространство H_2^+ разлагается в прямую сумму своих подпространств $\tilde{H}_0$ и $\tilde{H}_2$. Как следствие, найдутся функции $g \in \tilde{H}_0$ и $f_2 \in H_2$ такие, что $(1 - D_0)f_2 - g = h_0$. При этом $D_0 g = g$.

Для каждого $R > 0$ положим $h_R = 1 + iRf_1 + R^2 f_2$. Очевидно, найдется постоянная $I_3 > 0$ такая, что $\|h_R - 1\| \leq I_3 R$ и $\|h_R\| \leq I_3$ при $0 < R \leq R_0$. Из соотношений $(1 - D_0)1 = 0$, $(1 - D_0)f_1 = D_1 1$, $(1 - D_0)f_2 - g = D_2 1 - D_1 f_1$ следует, что

$$\|(D_0 + iRD_1 + R^2 D_2)h_R - (1 - gR^2)h_R\| \leq I_4 R^3$$

при $0 < R \leq R_0$, где I_4 — некоторая положительная постоянная. Тогда

$$\|C_R h_R - (1 - gR^2)h_R\| \leq (I_2 I_3 + I_4) R^3$$

при $0 < R \leq R_0$.

Произвольные функции $h, \tilde{h} \in L_2(S^1)$ удовлетворяют тождеству

$$\|h + \tilde{h}\|^2 + \|h - \tilde{h}\|^2 = 2\|h\|^2 + 2\|\tilde{h}\|^2.$$

Тем самым, если $\|h\| = \|\tilde{h}\|$ и $\|h + \tilde{h}\| = \|h\| + \|\tilde{h}\|$, то $h = \tilde{h}$. Это соображение приводит к следующему выводу: для любой функции $h \in L_2(S^1)$ равенство норм $\|D_0 h\| = \|h\|$ равносильно тому, что функции $U_1 h, \dots, U_k h$ совпадают. Тогда равенство функций $D_0 h = h$ равносильно тому, что $U_j h = h$ при $j = 1, \dots, k$. Таким образом, функция g инвариантна относительно операторов $U_1, \dots, U_k$. Это влечет перестановочность оператора умножения на функцию g с операторами $U_1, \dots, U_k$, что, в свою очередь, влечет перестановочность умножения на g с каждым из операторов C_R , $R > 0$. Кроме того, функция g непрерывна и вещественнозначна, так как $g \in H_2^+$.

Для завершения доказательства осталось убедиться, что функция g всюду положительна. Очевидно, $\|C_R\| \leq 1$ для каждого $R > 0$. Поскольку оператор умножения на функцию g коммутирует с оператором C_R , при $0 < R \leq R_0$ для любого натурального n имеет место оценка

$$\|C_R^n h_R - (1 - gR^2)C_R^{n-1} h_R\| \leq (I_2 I_3 + I_4) R^3,$$

откуда следует, что

$$\|C_R^m h_R - (1 - gR^2)^m h_R\| \leq I_5 R^3,$$

где $I_5 = m(1 + R_0^2 \sup |g|)^{m-1}(I_2 I_3 + I_4)$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $E_\varepsilon = \{t \in S^1 \mid g(t) < I_1 - \varepsilon\}$. Пусть χ_ε — функция на S^1 , являющаяся характеристической функцией множества E_ε . Для любого $R \in (0, R_0]$ имеет место оценка $\|\chi_\varepsilon C_R^m h_R - (1 - gR^2)^m \chi_\varepsilon h_R\| \leq I_5 R^3$. Поскольку функция g инвариантна относительно операторов $U_1, \dots, U_k$, функция χ_ε также инвариантна относительно них. Как следствие, оператор C_R коммутирует с оператором умножения на χ_ε . В частности, $\chi_\varepsilon C_R^m h_R = C_R^m(\chi_\varepsilon h_R)$. Тогда $\|\chi_\varepsilon C_R^m h_R\| \leq (1 - I_1 R^2) \|\chi_\varepsilon h_R\|$. Кроме того,

$$\|(1 - gR^2)\chi_\varepsilon h_R\| \geq (1 - (I_1 - \varepsilon)R^2) \|\chi_\varepsilon h_R\|,$$

так как $1 - gR^2 \geq 1 - (I_1 - \varepsilon)R^2$ на множестве E_ε . Отсюда следует, что

$$\varepsilon R^2 \|\chi_\varepsilon h_R\| \leq \|(1 - gR^2)\chi_\varepsilon h_R\| - \|\chi_\varepsilon C_R^m h_R\| \leq I_5 R^3.$$

Тогда $\|\chi_\varepsilon\| \leq \|\chi_\varepsilon h_R\| + \|h_R - 1\| \leq (\varepsilon^{-1} I_5 + I_3)R$ при $0 < R \leq R_0$. Это значит, что $\chi_\varepsilon = 0$ почти всюду на S^1 . При этом множество E_ε пусто, так как оно открытое. Поскольку ε можно было выбрать сколь угодно малым, $\inf g \geq I_1 > 0$.

Для каждого $a \in (0, 1)$ определим последовательность $p_{0,a}, p_{1,a}, \dots$ многочленов рекуррентными соотношениями $p_{0,a}(z) = 1$, $p_{1,a}(z) = z$, $p_{n+1,a}(z) = (1+a) \times z p_{n,a}(z) - a p_{n-1,a}(z)$ при $n \geq 1$.

ЛЕММА 3.10. *Многочлены $p_{0,a}, p_{1,a}, \dots$ удовлетворяют условиям (W1), (W1b) и (W2), сформулированным в §2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [5; лемма 3.6] семейство многочленов $p_{n,a}$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяет условиям (W1) и (W2). Добавление к семейству многочлена $p_{0,a}$ эти условия не нарушает. Проверим выполнение условия (W1b). Пусть $z_a = 2a^{1/2}(1+a)^{-1}$. Для каждого $z \in (z_a, 1]$ и целого $n \geq 0$ положим

$$q_n(z) = K_1(z)\lambda_1^n(z) + K_2(z)\lambda_2^n(z),$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1(z) &= (1+a)\frac{z}{2} + \left((1+a)^2\frac{z^2}{4} - a\right)^{1/2}, \\ \lambda_2(z) &= (1+a)\frac{z}{2} - \left((1+a)^2\frac{z^2}{4} - a\right)^{1/2}, \\ K_1(z) &= \frac{z - \lambda_2(z)}{\lambda_1(z) - \lambda_2(z)}, \quad K_2(z) = \frac{\lambda_1(z) - z}{\lambda_1(z) - \lambda_2(z)}. \end{aligned}$$

При этом $q_n(z) = p_{n,a}(z)$. В самом деле, выполнение условий $q_0(z) = 1$ и $q_1(z) = z$ обеспечено выбором функций K_1, K_2 , а рекуррентные соотношения $q_{n+1}(z) = (1+a)zq_n(z) - aq_{n-1}(z)$ следуют из того, что $\lambda_1(z), \lambda_2(z)$ — корни уравнения $\lambda^2 = (1+a)z\lambda - a$.

Функции $\lambda_1, \lambda_2, K_1, K_2$ бесконечно дифференцируемы на промежутке $(z_a, 1]$. Непосредственный подсчет показывает, что $\lambda_1(1) = 1$, $\lambda_1'(1) = (1+a)/(1-a) > 0$,

$\lambda_2(1) = a$, $K_1(1) = 1$, $K_2(1) = 0$. Как следствие, найдутся постоянные $I_1 > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1 - z_a)$ такие, что при $0 \leq z \leq \varepsilon$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} 0 < \lambda_2(1 - z) < \lambda_1(1 - z) \leq 1, \quad 0 < 1 - \lambda'_1(1)z \leq 1, \\ |\lambda_1(1 - z) - 1 + \lambda'_1(1)z| \leq I_1 z^2, \\ |K_1(1 - z) - 1| \leq I_1 z, \quad |K_2(1 - z)| \leq I_1 z. \end{aligned}$$

Тогда для любого целого $n \geq 0$ на отрезке $[1 - \varepsilon, 1]$ имеет место оценка

$$|p_{n,a} - \lambda_1^n| \leq |K_1 - 1| + |K_2|,$$

кроме того, $|\lambda_1^n(1 - z) - (1 - \lambda'_1(1)z)^n| \leq n|\lambda_1(1 - z) - 1 + \lambda'_1(1)z| \leq I_1 n z^2$ при $0 \leq z \leq \varepsilon$. Тем самым, $|p_{n,a}(1 - z) - (1 - \lambda'_1(1)z)^n| \leq 2I_1 z + I_1 n z^2$ при $0 \leq z \leq \varepsilon$. Условие (W1b) проверено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Пусть $A_1, \dots, A_k$ — изометрии плоскости P , которые не имеют общей неподвижной точки и не переводят в себя одну и ту же решетку вида $\mathcal{L}_Q$, где Q — полоса, квадрат или правильный треугольник. Обозначим через $\mathcal{H}$ полугруппу, порожденную изометриями $A_1, \dots, A_k$. Положим $C = k^{-1}(u[A_1] + \dots + u[A_k])$. Введем на плоскости P декартовы координаты ξ . Пусть $\{C_R\}_{R>0}$ — семейство радиальных операторов, соответствующих оператору C в системе координат ξ . Если изометрии $A_1, \dots, A_k$ удовлетворяют одному из условий (i), (ii) теоремы 1.4, то ввиду леммы 3.6 действие $\text{FSG}_k[A_1, \dots, A_k]$ удовлетворяет условию 2) той же теоремы. В противном случае из лемм 3.4 и 3.5 следует, что полугруппа $\mathcal{H}$ содержит поворот на угол, несоизмеримый с π , или является группой. Тогда из лемм 3.7 и 3.8 следует, что семейство операторов $\{C_R\}_{R>0}$ обладает свойствами (V1') и (V2'). Наличие у этого семейства свойства (V1b) следует из леммы 3.9. Далее, из леммы 2.2 следует, что оператор C_R непрерывно зависит от параметра R . Кроме того, $\|C_R\| \leq 1$, так как C_R — среднее арифметическое нескольких унитарных операторов. Тем самым, семейство операторов $\{C_R\}_{R>0}$ удовлетворяет всем условиям предложения 2.5. Согласно этому предложению семейство операторов C_R^n , $R > 0$, $n = 0, 1, \dots$, обладает свойствами (P1), (P1b) и (P2). Заметим, что операторы C_R^n , $R > 0$, суть радиальные операторы, соответствующие оператору C^n в системе координат ξ . В свою очередь, операторы $1, C, C^2, \dots$ суть усредняющие операторы, сопоставляемые действию $\text{FSG}_k[A_1, \dots, A_k]$. Ввиду предложения 2.3 это действие удовлетворяет условию 1) теоремы 1.4. Этим завершено доказательство теоремы 1.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Каковы бы ни были изометрии $A_1, \dots, A_k$, преобразования $A_1, A_1^{-1}, \dots, A_k, A_k^{-1}$ не удовлетворяют условиям (i), (ii) теоремы 1.4. Тем самым, утверждение теоремы 1.3 в части, касающейся действий вида $\text{FSG}_{2k}[A_1, A_1^{-1}, \dots, A_k, A_k^{-1}]$, является следствием теоремы 1.4. Рассмотрим действие $d = G[A_1, \dots, A_k]$, где $G = \text{FG}_k$ или (при условии, что $A_1, \dots, A_k$ — инволюции) $G = \mathbb{Z}_2^{*k}$. Положим $a = (2k - 1)^{-1}$, если действует группа FG_k , и $a = (k - 1)^{-1}$, если действует $\mathbb{Z}_2^{*k}$. Заметим, что $k \geq 2$, а если $A_1, \dots, A_k$ — инволюции, то $k \geq 3$, так как иначе изометрии $A_1, \dots, A_k$ имеют общую неподвижную

точку или переводят в себя некоторую решетку, порожденную полосой. В частности, $0 < a < 1$. Усредняющие операторы, сопоставляемые действию d , имеют вид $C^{(n)} = p_{n,a}(D)$, где $D = (2k)^{-1}(u[A_1] + u[A_1^{-1}] + \dots + u[A_k] + u[A_k^{-1}])$ (если $A_1, \dots, A_k$ — инволюции, то $D = C = k^{-1}(u[A_1] + \dots + u[A_k])$). В самом деле, равенства $C^{(0)} = 1$ и $C^{(1)} = D$ очевидны, рекуррентные же соотношения $C^{(n+1)} = (1+a)DC^{(n)} - aC^{(n-1)}$, $n = 1, 2, \dots$, проверяются без особых затруднений (ср. доказательство теорем 1.1 и 1.2 из [5]). Ввиду леммы 2.2 $C_R^{(n)} = p_{n,a}(D_R)$ для любого $R > 0$ и целого $n \geq 0$. Изометрии $A_1, A_1^{-1}, \dots, A_k, A_k^{-1}$ не удовлетворяют ни одному из условий (i), (ii) теоремы 1.4, а порожденная ими полугруппа изометрий, естественно, является группой. Тогда из лемм 3.8 и 3.9 следует, что семейство операторов $\{D_R\}_{R>0}$ обладает свойствами (V1'), (V1b) и (V2'). Оператор D_R непрерывно зависит от параметра R и самосопряжен, так как $D_R = (C_R + C_R^*)/2$. При этом $\|D_R^n\| = \|D_R\|^n$ для любого натурального n . Отсюда следует, что для семейства $\{D_R\}_{R>0}$ свойство (V1') эквивалентно свойству (V1), а свойство (V2') — свойству (V2). Таким образом, это семейство удовлетворяет всем условиям предложения 2.4. Многочлены $p_{0,a}, p_{1,a}, \dots$ имеют вещественные коэффициенты и удовлетворяют условиям (W1), (W1b), (W2) ввиду леммы 3.10. Согласно предложению 2.4 семейство радиальных операторов $C_R^{(n)}$, $R > 0, n = 0, 1, \dots$, обладает свойствами (P1), (P1b) и (P2). Применив предложение 2.3, мы завершаем доказательство теоремы 1.3.

Список литературы

1. Арнольд В. И., Крылов А. Л. Равномерное распределение точек на сфере и некоторые эргодические свойства решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. №1. С. 9–12.
2. Каждан Д. А. Равномерное распределение на плоскости // Труды ММО. 1965. Т. 14. С. 299–305.
3. Guivarc'h Y. Équidistribution dans les espaces homogènes // Lecture Notes in Math. 1976. V. 532. P. 131–142.
4. Воробец Я. Б. О равномерном распределении орбит действий свободных групп и полугрупп на плоскости // Труды МИАН. 2000. Т. 231. С. 64–95.
5. Воробец Я. Б. О действиях конечно порожденных групп и полугрупп на плоскости посредством изометрий // Матем. заметки. 2004. (в печати).

Институт прикладных проблем механики
и математики им. Я.С. Пидstryгача
НАН Украины, Львов
E-mail: vorobets@complex.lviv.ua

Поступила в редакцию
18.04.2003