Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. С. Маканин, Конечная параметризация решений уравнений в свободном моноиде. I, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 2, 41–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm800>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 18:12:26

УДК 519.4

Г. С. Маканин

Конечная параметризация решений уравнений в свободном моноиде. I

Выписаны полные решения всех примитивно параметризуемых базисных уравнений в свободном моноиде. Введены параметризующие функции **Fi**, **Th**, **Ro**, зависящие от словарных переменных, натуральных переменных и переменных, значениями которых являются конечные последовательности натуральных переменных. С помощью параметризующих функций выписываются конечные формулы для семейства решений всех **Fi**-, **Th**-, **Ro**-параметризуемых базисных уравнений вида $x_1 x_2 x_3 x_4 = \psi(x_1, x_2, x_3)$ в свободном моноиде.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

Параметризовать решения уравнения в свободном моноиде — это значит выписать общее решение (множество всех решений) уравнения при помощи конечных формул, зависящих от параметров. В 1967 году Хмелевский [1] показал, что общее решение всякого уравнения с тремя неизвестными в свободном моноиде может быть параметризовано конечным числом формул, зависящих от переменных двух типов: словарных переменных и натуральных переменных. Такая параметризация называется *примитивной*. В 1971 году Хмелевский [2] доказал, что общее решение уравнения Маркова

$$x_1 x_2 x_3 = x_3 x_1 x_4$$

с четырьмя неизвестными не допускает примитивной параметризации.

Чтобы преодолеть возникший барьер и расширить класс параметризуемых уравнений, нужно было изыскивать новые возможности, создавать новый метод параметризации решений уравнений. Такой метод был найден, разработан и использован в работах [3]–[11].

Поворотным пунктом в создании новой параметризации явилось понимание необходимости введения переменной третьего типа, а именно переменной, значениями которой являются конечные последовательности натуральных переменных. Вместе с открытием новой переменной возникло понятие параметризующей функции, зависящей от переменных всех трех типов. Параметризующая функция — это рекурсивная функция, рекурсия которой конструируется при помощи последовательности натуральных переменных.

В настоящей работе приведено точное определение параметризующей функции.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Вводятся параметризующие функции

$$\begin{aligned} \mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\lambda_1, \dots, \lambda_s}, & \quad s \geq 0, \\ \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_i^{\lambda_1, \dots, \lambda_{2s}}, & \quad i = 1, 2, 3, \quad s \geq 0, \\ \mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_i^{\mu_1, \dots, \mu_s}, & \quad i = 1, 2, 3, \quad s \geq 0, \end{aligned}$$

зависящие от словарных переменных x_1, x_2, x_3 , натуральных переменных λ_k и переменных μ_k , значениями которых являются последовательности натуральных переменных. Суперпозиции этих функций и примитивно параметризуемых слов конструируют формулы для параметризации решений различных классов уравнений в свободном моноиде.

В §3 выписаны полные решения всех примитивно параметризуемых базисных уравнений.

§2. Определения и обозначения

Пусть Π – свободный моноид (свободная полугруппа с единицей) со счетным алфавитом образующих

$$a_1, a_2, \dots, a_k, \dots \quad (*)$$

Пусть

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (**)$$

– алфавит словарных переменных.

Уравнение в свободном моноиде задается равенством слов $\Phi = \Psi$ в алфавите (*), (**). Слова в алфавите (*), входящие в уравнение, называются *коэффициентами уравнения*. Если Φ, Ψ – пустые слова, то уравнение $\Phi = \Psi$ называется *тривиальным*.

Преобразование

$$T = \begin{cases} x_1 \rightarrow X_1, \\ \dots\dots\dots \\ x_n \rightarrow X_n, \end{cases}$$

где $X_1, \dots, X_n$ – слова в алфавите (*), называется *решением уравнения $\Phi = \Psi$* , если в результате применения этого преобразования мы получаем тождественно равные слова. Объединяя преобразования переменных фигурной скобкой, мы указываем, что в данном преобразовании замена переменных происходит одновременно.

В настоящей работе мы рассматриваем бескоэффициентные уравнения в свободном моноиде. Длина слова A в алфавите (*) обозначается через $|A|$. Пустое слово обозначается через 1.

Дадим совместное индуктивное определение следующих понятий: *параметрическое слово, параметрическое преобразование, параметрическая функция*.

Всякое слово в алфавите $x_1, x_2, \dots, x_n$ является примитивным параметрическим словом. Если P – примитивное параметрическое слово, λ – натуральная переменная, то $(P)^\lambda$ – примитивное параметрическое слово. Если P, Q – примитивные параметрические слова, то PQ – примитивное параметрическое слово.

Примитивное параметрическое слово является параметрическим словом.

[illegible]

Рассмотрим конкретную счетную последовательность параметрических преобразований $T_1, \dots, T_k, \dots$ вида

[illegible]

$$\mathbf{Sc}(x_1, \dots, x_n)_i^{\omega_1, \dots, \omega_s, \dots, \omega_{(k-1)s+1}, \dots, \omega_{ks}},$$
$$W_n(x_1, \dots, x_n, \omega_{(k-1)s+1}, \dots, \omega_{ks}))_i^{\omega_1, \dots, \omega_s, \dots, \omega_{(k-2)s+1}, \dots, \omega_{k(k-1)s}}.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow \mathbf{Sc}(x_1, \dots, x_n)_1^{\omega_1, \dots, \omega_s, \dots, \omega_{(k-1)s+1}, \dots, \omega_{ks}}, \\ \dots \\ x_n \rightarrow \mathbf{Sc}(x_1, \dots, x_n)_n^{\omega_1, \dots, \omega_s, \dots, \omega_{(k-1)s+1}, \dots, \omega_{ks}}. \end{array} \right.$$

Пусть E – некоторое уравнение, возможно, с условиями, и пусть $R_1, \dots, R_m$ – дополнительный список условий. Через (E, R_i) мы обозначаем уравнение E с дополнительным условием R_i . Будем говорить, что *уравнение E разделяется в список уравнений $(E, R_1), \dots, (E, R_m)$* , если каждое решение S уравнения E является решением некоторого уравнения (E, R_i) из списка.

Будем говорить, что *уравнение E_1 переводится параметрическим преобразованием T в уравнение E_2* , если $E_1 T = E_2$ и для каждого решения S_1 уравнения E_1 существует решение S_2 уравнения E_2 такое, что $S_1 = T S_2$. Будем говорить, что решение S_2 является *образом* решения S_1 при преобразовании T .

Пусть уравнение E_1 переводится преобразованием T в уравнение E_2 . Пусть S_1 – решение уравнения E_1 и S_2 – образ решения S_1 при преобразовании T . Если параметрическое решение Q_2 уравнения E_2 содержит решение S_2 уравнения E_2 , то параметрическое решение TQ_2 уравнения E_1 содержит решение S_1 уравнения E_1 .

Пусть уравнение E_1 переводится параметрическим преобразованием T в уравнение E_2 . Если общее решение $\langle E_2 \rangle$ уравнения E_2 есть $Q_1, \dots, Q_r$, то общее решение $\langle E_1 \rangle$ уравнения E_1 есть $TQ_1, \dots, TQ_r$.

Пусть уравнение E разделяется в список уравнений $(E, R_1), \dots, (E, R_m)$. Если общее решение $\langle (E, R_i) \rangle$ уравнения (E, R_i) есть $Q_{i,1}, \dots, Q_{i,r}$, $i = 1, \dots, m$, то общее решение $\langle E \rangle$ уравнения E есть $Q_{1,1}, \dots, Q_{1,r_1}, \dots, Q_{m,1}, \dots, Q_{m,r_m}$.

§ 3. Базисные уравнения

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 = x_2 x_1 \quad (1)$$

описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\alpha, \\ x_2 \rightarrow x_1^\beta, \end{cases}$$

где α, β – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Общее решение уравнения*

$$x_1^2 x_2^2 = x_3^2 \quad (2)$$

описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\alpha, \\ x_2 \rightarrow x_1^\beta, \\ x_3 \rightarrow x_1^{\alpha+\beta}, \end{cases}$$

где α, β – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 = x_2 x_1 \quad (3)$$

описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1, \\ x_2 \rightarrow 1, \\ x_3 \rightarrow 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow (x_1 x_2)^\alpha x_1, \\ x_2 \rightarrow x_1 x_2, \\ x_3 \rightarrow x_2 x_1, \end{cases}$$

где α – натуральный параметр.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 = x_3 x_1 x_2 \quad (4)$$

описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow 1, \\ x_2 \rightarrow 1, \\ x_3 \rightarrow x_3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow (x_1 x_2)^\alpha x_1, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_1)^\beta x_2, \\ x_3 \rightarrow (x_1 x_2)^\gamma, \end{cases}$$

где α, β, γ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 = x_3 x_2 x_1 \quad (5)$$

описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow 1, \\ x_2 \rightarrow 1, \\ x_3 \rightarrow x_3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow x_1, \\ x_2 \rightarrow 1, \\ x_3 \rightarrow 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow (x_1 x_2)^\alpha x_1, \\ x_2 \rightarrow x_2 (x_1 x_2)^\beta, \\ x_3 \rightarrow (x_1 x_2)^\gamma x_1, \end{cases}$$

где α, β, γ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3^2 = x_3^2 x_2 x_1 \quad (6)$$

описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\alpha, \\ x_2 \rightarrow x_1^\beta, \\ x_3 \rightarrow x_1^\gamma, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow (x_3^2 x_2)^\alpha x_3^2, \\ x_2 \rightarrow x_2 (x_3^2 x_2)^\beta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow ((x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1^2 x_2)^\alpha (x_1 x_2)^\gamma x_1, \\ x_2 \rightarrow x_2 x_1^2 x_2 ((x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1^2 x_2)^\beta, \\ x_3 \rightarrow (x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1, \end{cases}$$

где α, β, γ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 = x_2 x_3 x_4 \quad (7)$$

описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow 1, \\ x_2 \rightarrow x_2, \\ x_3 \rightarrow x_3, \\ x_4 \rightarrow 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow x_2 x_3 x_1, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_3 x_1)^\alpha x_2, \\ x_3 \rightarrow (x_3 x_1 x_2)^\beta x_3, \\ x_4 \rightarrow x_1 x_2 x_3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow x_3 x_2 x_1, \\ x_2 \rightarrow (x_3 x_2 x_1)^\alpha x_3 x_2, \\ x_3 \rightarrow (x_1 x_3 x_2)^\beta x_1 x_3, \\ x_4 \rightarrow x_2 x_1 x_3, \end{cases}$$

где α, β – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 x_3 = x_3 x_2 x_3 x_1 \quad (8)$$

описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\alpha, \\ x_2 \rightarrow x_1^\beta, \\ x_3 \rightarrow x_1^\gamma, \end{cases} \quad x_1 \rightarrow x_3 (x_2 x_3^2)^\alpha, \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow ((x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1)^\alpha (x_1 x_2)^\gamma x_1, \\ x_2 \rightarrow x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1)^\beta x_1 x_2, \\ x_3 \rightarrow (x_1 x_2)^\gamma x_1, \end{cases}$$

где α, β, γ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_2 x_3 = x_2 x_3 x_1 x_2 \quad (9)$$

описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\alpha, \\ x_2 \rightarrow x_1^\beta, \\ x_3 \rightarrow x_1^\gamma, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow ((x_1 x_2)^{\alpha+1} x_1)^\beta x_1 x_2, \\ x_2 \rightarrow (x_1 x_2)^\alpha x_1, \\ x_3 \rightarrow (x_2 x_1^2 (x_2 x_1)^\alpha)^\gamma x_2 x_1, \end{cases}$$

где α, β, γ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_1 x_3 x_2 = x_3 x_2 x_1 x_2 x_1 \quad (10)$$

описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\alpha, \\ x_2 \rightarrow x_1^\beta, \\ x_3 \rightarrow x_1^\gamma, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow x_2 x_1, \\ x_2 \rightarrow (x_1 x_2)^\alpha x_1, \\ x_3 \rightarrow (x_2 x_1^2 (x_2 x_1)^{\alpha+1})^\beta x_2 x_1^2 x_2, \end{cases}$$

где α, β, γ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 x_3 x_2^2 = x_3 x_2^2 x_1 x_3 \quad (11)$$

описывается преобразованиями

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow ((x_2 x_1)^{\alpha+2} x_2)^{\beta} (x_2 x_1)^2, \\ x_2 \rightarrow x_1 x_2, \\ x_3 \rightarrow (x_2 x_1)^{\alpha} x_2, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow x_1^{\alpha}, \\ x_2 \rightarrow x_1^{\beta}, \\ x_3 \rightarrow x_1^{\gamma}, \end{array} \right.$$

где α, β, γ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 x_2 = x_2 x_3 x_2 x_1 \quad (12)$$

описывается преобразованиями

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow (x_2 x_1 x_2)^{\alpha}, \\ x_2 \rightarrow x_2, \\ x_3 \rightarrow x_1, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow ((x_1 x_2)^{\alpha+1} x_1)^{\gamma}, \\ x_2 \rightarrow (x_1 x_2)^{\alpha} x_1, \\ x_3 \rightarrow x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\alpha+1} x_1)^{\delta} x_1 x_2, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow x_1^{\alpha}, \\ x_2 \rightarrow x_1^{\beta}, \\ x_3 \rightarrow x_1^{\gamma}, \end{array} \right.$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3^2 = x_2 x_3^2 x_1 \quad (13)$$

описывается преобразованиями

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow x_1^{\alpha}, \\ x_2 \rightarrow x_1^{\beta}, \\ x_3 \rightarrow x_1^{\gamma}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow (x_2 x_3^2)^{\alpha}, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_3^2)^{\beta} x_2, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow (x_2 x_1 (x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1)^{\beta}, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_1 (x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1)^{\alpha} x_2 x_1^2 x_2, \\ x_3 \rightarrow (x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1, \end{array} \right.$$

где α, β, γ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 x_2 x_3 = x_2 x_3 x_3 x_1 \quad (14)$$

описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\alpha, \\ x_2 \rightarrow x_1^\beta, \\ x_3 \rightarrow x_1^\gamma, \end{cases} \quad x_1 \rightarrow (x_2 x_3^2)^\alpha x_2 x_3, \\ \begin{cases} x_1 \rightarrow (x_1 x_2^2 (x_1 x_2)^\alpha)^\beta x_1 x_2, \\ x_2 \rightarrow (x_1 x_2^2 (x_1 x_2)^\alpha)^\gamma x_1 x_2^2 x_1, \\ x_3 \rightarrow x_2 (x_1 x_2)^\alpha, \end{cases}$$

где α, β, γ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 15. *Общее решение уравнения*

$$x_2 x_1 x_3 x_3 x_1^2 = x_3 x_1^2 x_2 x_1 x_3 \quad (15)$$

описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\alpha, \\ x_2 \rightarrow x_1^\beta, \\ x_3 \rightarrow x_1^\gamma, \end{cases}$$

где α, β, γ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 16. *Общее решение уравнения*

$$x_1^\alpha = x_2^\beta, \quad (16)$$

где α, β – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1, \\ x_2 \rightarrow x_2, \\ \alpha \rightarrow 0, \\ \beta \rightarrow 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\gamma, \\ x_2 \rightarrow x_1^\delta, \\ \alpha \rightarrow \alpha, \\ \beta \rightarrow \beta, \end{cases}$$

где γ, δ – натуральные параметры и $\alpha\gamma = \beta\delta$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 17. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 = x_2^\alpha x_1, \quad (17)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\beta, \\ x_2 \rightarrow x_1^\gamma, \\ x_3 \rightarrow x_1^\delta, \end{cases}$$

где β, γ, δ – натуральные параметры и $\gamma + \delta = \alpha\gamma$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 18. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2^{\alpha+1} x_3 = x_2^\beta, \quad (18)$$

где α, β – натуральные параметры, описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\gamma, \\ x_2 \rightarrow x_1^\delta, \\ x_3 \rightarrow x_1^\varepsilon, \end{cases}$$

где $\gamma, \delta, \varepsilon$ – натуральные параметры и $\beta = \gamma + (\alpha + 1)\delta + \varepsilon$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 19. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 x_1 = (x_2 x_3)^{\alpha+2}, \quad (19)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\beta, \\ x_2 \rightarrow x_1^\gamma, \\ x_3 \rightarrow x_1^\delta, \end{cases}$$

где β, γ, δ – натуральные параметры и $2\beta + \delta = (\gamma + \delta)(\alpha + 2)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 20. *Общее решение уравнения*

$$x_3 x_1^2 = (x_2 x_3)^{\alpha+2}, \quad (20)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\beta, \\ x_2 \rightarrow x_1^\gamma, \\ x_3 \rightarrow x_1^\delta, \end{cases}$$

где β, γ, δ – натуральные параметры и $2\beta + \delta = (\gamma + \delta)(\alpha + 2)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 21. *Общее решение уравнения*

$$x_1^{\alpha+2} = (x_2 x_3)^{\beta+2} x_2, \quad (21)$$

где α, β – натуральные параметры, описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\gamma, \\ x_2 \rightarrow x_1^\delta, \\ x_3 \rightarrow x_1^\varepsilon, \end{cases}$$

где $\gamma, \delta, \varepsilon$ – натуральные параметры и $(\alpha + 2)\gamma = (\delta + \varepsilon)(\beta + 2) + \delta$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 22. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 = x_2^\alpha x_1, \quad (22)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1, \\ x_2 \rightarrow x_2, \\ x_3 \rightarrow 1, \\ \alpha \rightarrow 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow x_1, \\ x_2 \rightarrow 1, \\ x_3 \rightarrow 1, \\ \alpha \rightarrow \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow (x_1 x_2)^\beta x_1, \\ x_2 \rightarrow x_1 x_2, \\ x_3 \rightarrow (x_2 x_1)^\alpha, \\ \alpha \rightarrow \alpha, \end{cases}$$

где β – натуральный параметр.

УТВЕРЖДЕНИЕ 23. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3^{\alpha+1} = x_3^{\alpha+1} x_2, \quad (23)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow ((x_1 x_2)^\beta x_1)^\alpha x_1 x_2, \\ x_2 \rightarrow x_2 x_1 ((x_1 x_2)^\beta x_1)^\alpha, \\ x_3 \rightarrow (x_1 x_2)^\beta x_1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\beta, \\ x_2 \rightarrow x_1^\beta, \\ x_3 \rightarrow x_1^\gamma, \end{cases}$$

где β, γ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 24. *Общее решение уравнения*

$$x_1^{\alpha+2} = x_2 x_3 x_2, \quad (24)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow (x_1 x_2)^{\beta+1} x_1, \\ x_2 \rightarrow (x_1 x_2)^\beta x_1, \\ x_3 \rightarrow x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\beta+1} x_1)^\alpha x_1 x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\beta, \\ x_2 \rightarrow x_1^\gamma, \\ x_3 \rightarrow x_1^\delta, \end{cases}$$

где β, γ, δ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 25. *Общее решение уравнения*

$$x_2 (x_3 x_2)^{\alpha+1} x_1 = x_1 x_2 (x_3 x_2)^{\alpha+1}, \quad (25)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow (x_2 (x_3 x_2)^{\alpha+1})^\beta, \\ x_2 \rightarrow x_2, \\ x_3 \rightarrow x_3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow ((x_1 x_2)^{\beta+1} x_1)^\gamma, \\ x_2 \rightarrow (x_1 x_2)^\beta x_1, \\ x_3 \rightarrow x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\beta+1} x_1)^\delta x_1 x_2, \\ \alpha \rightarrow 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\beta, \\ x_2 \rightarrow x_1^\gamma, \\ x_3 \rightarrow x_1^\delta, \end{cases}$$

где β, γ, δ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 26. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3^{\alpha+2} = x_2 x_3^{\alpha+2} x_1, \quad (26)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованиями

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow x_1^\beta, \\ x_2 \rightarrow x_1^\gamma, \\ x_3 \rightarrow x_1^\delta, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow (x_2 x_1^{\alpha+2})^\beta, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_1^{\alpha+2})^\gamma x_2, \\ x_3 \rightarrow x_1, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow (x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1)^{\alpha+1})^\beta, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1)^{\alpha+1})^\delta \\ \quad \times x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1)^\alpha x_1 x_2, \\ x_3 \rightarrow (x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1, \end{array} \right.$$

где β, γ, δ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 27. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3^{\alpha+2} x_2 x_3 = x_2 x_3 x_1 x_2^{\alpha+2}, \quad (27)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованиями

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow x_1^\beta, \\ x_2 \rightarrow x_1^\gamma, \\ x_3 \rightarrow x_1^\delta, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow (x_1 x_2 ((x_1 x_2)^\rho x_1)^{\alpha+2})^\sigma x_1 x_2, \\ x_2 \rightarrow (x_1 x_2)^\rho x_1, \\ x_3 \rightarrow x_2 x_1 ((x_1 x_2)^\rho x_1)^{\alpha+1} (x_1 x_2 ((x_1 x_2)^\rho x_1)^{\alpha+2})^\tau, \end{array} \right.$$

где $\beta, \gamma, \delta, \rho, \sigma, \tau$ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 28. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3^{\alpha+2} x_2 = x_2 x_3^{\alpha+2} x_1, \quad (28)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованиями

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow x_1^\gamma, \\ x_2 \rightarrow x_1^\delta, \\ x_3 \rightarrow x_1^\varepsilon, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow (x_2 x_1 ((x_1 x_2)^\gamma x_1)^{\alpha+1})^\rho x_2 x_1 ((x_1 x_2)^\gamma x_1)^\alpha x_1 x_2, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_1 ((x_1 x_2)^\gamma x_1)^{\alpha+1})^\sigma x_2 x_1 ((x_1 x_2)^\gamma x_1)^\alpha x_1 x_2, \\ x_3 \rightarrow (x_1 x_2)^\gamma x_1, \end{array} \right.$$

где $\gamma, \delta, \varepsilon, \rho, \sigma$ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 29. *Общее решение уравнения*

$$x_1^{\alpha+1} x_3 = x_2^{\beta+1} x_4, \quad (29)$$

где α, β – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\eta, \\ x_2 \rightarrow x_1^\theta, \\ x_3 \rightarrow x_1^{(\beta+1)\theta-(\alpha+1)\eta} x_4, \\ x_2 \rightarrow x_1^{\alpha+1} x_2, \\ x_3 \rightarrow x_2 (x_1^{\alpha+1} x_2)^\beta x_4, \\ x_1 \rightarrow (x_1 x_2)^\gamma x_1, \\ x_2 \rightarrow x_1 x_2, \\ x_3 \rightarrow x_2 (x_1 x_2)^{\beta-\gamma} x_4, \\ \alpha \rightarrow 0, \\ x_1 \rightarrow (x_1 x_2)^{\varepsilon+1} x_1, \\ x_2 \rightarrow ((x_1 x_2)^{\varepsilon+1} x_1)^{\gamma+1} x_1 x_2, \\ x_3 \rightarrow x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\varepsilon+1} x_1)^\gamma x_1 x_2 ((x_1 x_2)^{\varepsilon+1} x_1)^{\gamma+1} x_1 x_2)^\delta x_4, \\ \alpha \rightarrow \gamma + 1, \\ \beta \rightarrow \delta + 1 \end{cases}$$

и преобразованием $T(x_1 \leftrightarrow x_2, x_3 \leftrightarrow x_4, \alpha \leftrightarrow \beta)$, где $\gamma, \delta, \varepsilon, \eta, \theta$ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 30. *Общее решение уравнения*

$$x_1^{\alpha+1} x_2 x_3 = x_2^{\beta+1} x_4, \quad (30)$$

где α, β – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\eta, \\ x_2 \rightarrow x_1^\theta, \\ x_3 \rightarrow x_1^\gamma x_4, \\ x_1 \rightarrow x_2^{\beta+1} x_1, \\ x_4 \rightarrow x_1 (x_2^{\beta+1} x_1)^\alpha x_2 x_3, \\ \beta \rightarrow 0, \\ x_1 \rightarrow x_2 x_1, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_1)^\lambda x_2, \\ x_4 \rightarrow (x_1 x_2)^{\alpha+1} x_3, \\ \alpha \rightarrow 0, \\ \beta \rightarrow \delta + 1, \\ x_1 \rightarrow ((x_2 x_1)^\lambda x_2)^{\delta+1} x_2 x_1, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_1)^\lambda x_2, \\ x_4 \rightarrow x_1 x_2 x_3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\sigma, \\ x_2 \rightarrow x_1^\tau, \\ x_4 \rightarrow x_1^\xi x_3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \rightarrow \gamma + 1, \\ \beta \rightarrow \delta + 1, \\ x_1 \rightarrow ((x_2 x_1)^{\lambda+1} x_2)^{\delta+1} x_2 x_1, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_1)^\lambda x_2, \\ x_4 \rightarrow x_1 x_2 ((x_2 x_1)^{\lambda+1} x_2)^\delta x_2 x_1 (((x_2 x_1)^{\lambda+1} x_2)^{\delta+1} x_2 x_1)^\gamma (x_2 x_1)^{\lambda+1} x_2 x_3, \end{cases}$$

где $\eta, \theta, \kappa, \lambda, \delta, \gamma, \sigma, \tau, \xi$ – натуральные параметры и $(\alpha + 1)\eta + \kappa = \beta\theta$, $(\alpha + 1)\sigma = \beta\tau + \xi$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 31. Общее решение уравнения

$$x_1^{\alpha+1} x_2 x_3 = x_2^{\beta+1} x_1 x_4, \quad (31)$$

где α, β – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\eta, \\ x_2 \rightarrow x_1^\theta, \\ x_3 \rightarrow x_1^\kappa x_4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\sigma, \\ x_2 \rightarrow x_1^\tau, \\ x_4 \rightarrow x_1^\xi x_3, \end{cases}$$

где $\eta, \theta, \kappa, \sigma, \tau, \xi$ – натуральные параметры и $\alpha\eta + \kappa = \beta\theta$, $\beta\tau + \xi = \alpha\sigma$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 32. Общее решение уравнения

$$\begin{aligned} x_1 x_3^{\alpha+2} x_2 x_4 &= x_2 x_3^{\beta+2} x_1 x_5, \\ \partial(x_1) < \partial(x_2) < \partial(x_1 x_3^{\alpha+2}), \quad \alpha > \beta, \end{aligned} \quad (32)$$

где α, β – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\gamma, \\ x_2 \rightarrow x_1^\delta, \\ x_3 \rightarrow x_1^\varepsilon, \\ x_5 \rightarrow x_1^{\varepsilon(\alpha-\beta)} x_4, \quad \gamma < \delta, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow (x_2 x_1)^\gamma x_2, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_1)^\gamma x_2 (x_2 x_1)^\delta, \\ x_3 \rightarrow (x_2 x_1)^\varepsilon, \\ x_5 \rightarrow (x_1 x_2)^{\varepsilon(\alpha-\beta)-\delta} (x_2 x_1)^\delta x_4, \quad \delta > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow (x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1)^{\beta+1})^\delta x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1)^\beta x_1 x_2, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1)^{\beta+1})^{\delta+1} x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1)^\alpha x_1 x_2, \\ x_3 \rightarrow (x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1, \\ x_5 \rightarrow ((x_1 x_2)^\gamma x_1^2 x_2)^{\alpha-\beta} x_4, \end{cases}$$

где $\gamma, \delta, \varepsilon$ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 33. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_1 x_3^{\alpha+2} x_2 x_4 &= x_2 x_3^{\beta+2} x_1 x_5, \\ \partial(x_2) < \partial(x_1) < \partial(x_2 x_3^{\beta+2}), \quad \alpha > \beta, \end{aligned} \quad (33)$$

где α, β – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\gamma, \\ x_2 \rightarrow x_1^\delta, \\ x_3 \rightarrow x_1^\varepsilon, \\ x_5 \rightarrow x_1^{\varepsilon(\alpha-\beta)} x_4, \quad \gamma > \delta, \\ \alpha \rightarrow \beta + \varepsilon + \zeta + 1, \\ x_1 \rightarrow (x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1)^{\alpha+1})^\delta x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1)^{\zeta+\beta+1} x_1 x_2, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1)^{\alpha+1})^\delta x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1)^\zeta, \\ x_3 \rightarrow (x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1, \\ x_5 \rightarrow (x_1 x_2)^\gamma x_1 ((x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1)^\varepsilon x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1)^\zeta x_4, \\ x_1 \rightarrow (x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1)^{\alpha+1})^{\delta+1} x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1)^\beta x_1 x_2, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1)^{\alpha+1})^\delta x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1)^\alpha x_1 x_2, \\ x_3 \rightarrow (x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1, \\ x_5 \rightarrow ((x_1 x_2)^\gamma x_1^2 x_2)^{\alpha-\beta} x_4, \end{cases}$$

где $\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ – натуральные параметры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЙ 1–33. Подставляя в соответствующее уравнение приведенные в утверждения преобразования, легко убеждаемся, что каждое преобразование является параметрическим решением уравнения. С другой стороны, предположим, что список слов $X_1, \dots, X_n$ в алфавите $(*)$ – произвольное решение уравнения. Тогда компоненты решения $X_1, \dots, X_n$ удовлетворяют уравнению, что позволяет найти конкретные условия на структуру компонент решения. Используя эти условия и предыдущие утверждения, легко проверяем, что решение $X_1, \dots, X_n$ содержится в одном из преобразований утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 34. *Параметрическое уравнение*

$$\begin{aligned} x_1 R(x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 &= (P(x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r))^{t+1} x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \\ \partial(P(x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)) &> 0, \end{aligned} \quad (34)$$

где P, Q, R – параметрические слова, t – натуральное число, переводится параметрическим преобразованием $T: x_1 \rightarrow (P(x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r))^\alpha x_1$, где α – натуральный параметр, в параметрическое уравнение E :

$$\begin{aligned} x_1 R(x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 &= (P(x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r))^{t+1} \\ &\times x_1 Q((P(x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r))^\alpha x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \\ \partial(x_1) &< \partial(P(x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что подстановка преобразования T в уравнение (34) преобразует (34) в уравнение E' , которое содержит уравнение E .

С другой стороны, коэффициентное преобразование S_1 :

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow X_1, \\ x_i \rightarrow X_i, \quad i = 2, \dots, 5, \\ \lambda_i \rightarrow \Lambda_i, \quad i = 1, \dots, r, \end{cases}$$

где X_i — слова в алфавите $(*)$, Λ_i — натуральные числа, является решением уравнения (34). Так как $|P(X_2, X_3, \Lambda_1, \dots, \Lambda_r)| > 0$, мы имеем

$$X_1 = (P(X_2, X_3, \Lambda_1, \dots, \Lambda_r))^A Y_1$$

для некоторого слова Y_1 в алфавите $(*)$ и натурального числа A таких, что

$$A|P(X_2, X_3, \Lambda_1, \dots, \Lambda_r)| \leq |X_1| < (A+1)|P(X_2, X_3, \Lambda_1, \dots, \Lambda_r)|.$$

Подставляя решение S_1 в уравнение, мы легко получаем, что коэффициентное преобразование S_2 :

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow Y_1, \\ x_i \rightarrow X_i, \quad i = 2, \dots, 5, \\ \lambda_i \rightarrow \Lambda_i, \quad i = 1, \dots, r, \end{cases}$$

является решением уравнения E . Расширение S_2^* решения S_2 :

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow Y_1, \\ x_i \rightarrow X_i, \quad i = 2, \dots, 5, \\ \lambda_i \rightarrow \Lambda_i, \quad i = 1, \dots, r, \\ \alpha \rightarrow A \end{cases}$$

удовлетворяет условию $S_1 = TS_2$. Следовательно, решение S_2 есть образ решения S_1 при преобразовании T . Таким образом, параметрическое уравнение (34) переводится параметрическим преобразованием T в параметрическое уравнение E .

§ 4. Функция $\mathbf{Fi}_{(x_1, x_2)^{\lambda_1, \dots, \lambda_s}}$

Дадим индуктивное определение функции $\mathbf{Fi}_{(x_1, x_2)^{\lambda_1, \dots, \lambda_s}}$, где $s \geq 0$, x_1 и x_2 — словарные переменные, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — натуральные параметры:

$$\mathbf{Fi}_{(x_1, x_2)} = 1,$$

$$\mathbf{Fi}_{(x_1, x_2)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s}} = (\mathbf{Fi}_{(x_2, x_1)^{\lambda_2, \dots, \lambda_s} x_2})^{\lambda_1} \mathbf{Fi}_{(x_1, x_2)^{\lambda_3, \dots, \lambda_s}}, \quad s \geq 1.$$

В частности,

$$\mathbf{Fi}_{(x_1, x_2)^{\lambda_1}} = (x_2)^{\lambda_1},$$

$$\mathbf{Fi}_{(x_1, x_2)^{\lambda_1, \lambda_2}} = ((x_1)^{\lambda_2} x_2)^{\lambda_1},$$

$$\mathbf{Fi}_{(x_1, x_2)^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}} = (((x_2)^{\lambda_3} x_1)^{\lambda_2} x_2)^{\lambda_1} (x_2)^{\lambda_3},$$

$$\mathbf{Fi}_{(x_1, x_2)^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4}} = (((x_1)^{\lambda_4} x_2)^{\lambda_3} x_1)^{\lambda_2} (x_1)^{\lambda_4} x_2)^{\lambda_1} ((x_1)^{\lambda_4} x_2)^{\lambda_3}.$$

Кроме того, дадим индуктивное определение вспомогательной функции

$$\mathbf{Vt}(x_1, x_2)^{\lambda_1+1, \dots, \lambda_s+1},$$

где $s \geq 1$, x_1 и x_2 – словарные переменные, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ – натуральные параметры:

$$\begin{aligned} \mathbf{Vt}(x_1, x_2)^{\lambda_1+1} &= 1, \\ \mathbf{Vt}(x_1, x_2)^{\lambda_1+1, \lambda_2+1} &= \mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\lambda_1, \lambda_2+1}, \\ \mathbf{Vt}(x_1, x_2)^{\lambda_1+1, \lambda_2+1, \dots, \lambda_s+1} \\ &= \mathbf{Vt}(x_1, x_2)^{\lambda_2+1, \dots, \lambda_s+1} x_2 \mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\lambda_1, \lambda_2+1, \dots, \lambda_s+1}, \quad s \geq 3. \end{aligned}$$

Пусть μ – переменная, значениями которой являются последовательности натуральных параметров. Через $\mu|$ обозначим переменную, связанную с переменной μ следующим образом: если $\mu = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, где $s \geq 1$, то $\mu| = \lambda_2, \dots, \lambda_s$; если μ – пустая последовательность, то $\mu|$ – также пустая последовательность.

ТЕОРЕМА $\mathbf{Fi1}$. *Справедливы следующие тождества:*

$$\begin{aligned} \mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\lambda_1, \dots, \lambda_{2k}} &= \mathbf{Fi}(x_1, x_1^{\lambda_{2k}} x_2)^{\lambda_1, \dots, \lambda_{2k}-1}, \quad k \geq 1, \\ \mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\lambda_1, \dots, \lambda_{2k+1}} &= \mathbf{Fi}(x_2^{\lambda_{2k+1}} x_1, x_2)^{\lambda_1, \dots, \lambda_{2k}} x_2^{\lambda_{2k+1}}, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем совместной индукцией по k . Если $k = 0, 1$, тождества очевидны. Предположим, что $k > 1$. По определению

$$\mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k}} = (\mathbf{Fi}(x_2, x_1)^{\lambda_2, \dots, \lambda_{2k}} x_2)^{\lambda_1} \mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2k}}.$$

В соответствии с индуктивным предположением (второе тождество) последнее выражение равно

$$(\mathbf{Fi}(x_1^{\lambda_{2k}} x_2, x_1)^{\lambda_2, \dots, \lambda_{2k}-1} x_1^{\lambda_{2k}} x_2)^{\lambda_1} \mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2k}},$$

откуда в соответствии с индуктивным предположением (первое тождество) получаем

$$(\mathbf{Fi}(x_1^{\lambda_{2k}} x_2, x_1)^{\lambda_2, \dots, \lambda_{2k}-1} x_1^{\lambda_{2k}} x_2)^{\lambda_1} \mathbf{Fi}(x_1, x_1^{\lambda_{2k}} x_2)^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2k}-1}.$$

Это выражение равно (по определению) $\mathbf{Fi}(x_1, x_1^{\lambda_{2k}} x_2)^{\lambda_1, \dots, \lambda_{2k}-1}$.

Из определения функции $\mathbf{Fi}$ следует, что

$$\mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\lambda_1, \dots, \lambda_{2k+1}} = (\mathbf{Fi}(x_2, x_1)^{\lambda_2, \dots, \lambda_{2k+1}} x_2)^{\lambda_1} \mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2k+1}}.$$

В соответствии с индуктивным предположением (первое тождество) последнее выражение равно

$$(\mathbf{Fi}(x_2, x_2^{\lambda_{2k+1}} x_1)^{\lambda_2, \dots, \lambda_{2k}} x_2)^{\lambda_1} \mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2k+1}},$$

Тогда подпоследовательность первых $2k$ преобразований может быть объединена общим преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_1 P, (x_1 P)^{\lambda_{2k}} x_2 Q)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k-1}} x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}((x_1 P)^{\lambda_{2k}} x_2 Q, x_1 P)^{\lambda_2, \dots, \lambda_{2k-1}} (x_1 P)^{\lambda_{2k}} x_2. \end{cases}$$

В соответствии с теоремой **Fi1** последнее преобразование совпадает с преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_1 P, x_2 Q)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k}} x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_2 Q, x_1 P)^{\lambda_2, \dots, \lambda_{2k}} x_2. \end{cases}$$

Случай 2. Предположим, что последовательность первых $2k$ преобразований может быть объединена общим преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_1 P, x_2 Q)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k}} x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_2 Q, x_1 P)^{\lambda_2, \dots, \lambda_{2k}} x_2. \end{cases}$$

Пусть $(2k+1)$ -е преобразование имеет вид

$$x_1 \rightarrow (x_2 Q)^{\lambda_{2k+1}} x_1.$$

Тогда подпоследовательность первых $2k+1$ преобразований может быть объединена общим преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}((x_2 Q)^{\lambda_{2k+1}} x_1 P, x_2 Q)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k}} (x_2 Q)^{\lambda_{2k+1}} x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_2 Q, (x_2 Q)^{\lambda_{2k+1}} x_1 P)^{\lambda_2, \dots, \lambda_{2k}} x_2. \end{cases}$$

В соответствии с теоремой **Fi1** последнее преобразование совпадает с преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_1 P, x_2 Q)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k+1}} x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_2 Q, x_1 P)^{\lambda_2, \dots, \lambda_{2k+1}} x_2. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА Fi3. *Справедливы следующие тождества:*

$$\begin{aligned} \mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{0, \lambda_2, \dots, \lambda_s} &= \mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\lambda_3, \dots, \lambda_s}, \\ \mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}, 0, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_s} &= \mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1} + \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_s}, \\ \mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\lambda_1, \dots, \lambda_{s-1}, 0} &= \mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\lambda_1, \dots, \lambda_{s-1}}. \end{aligned}$$

Доказательство следует из теоремы **Fi2**.

УТВЕРЖДЕНИЕ 35. *Параметрическое уравнение*

$$\begin{aligned} x_1 x_3^\alpha x_2 U(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 &= x_2 x_3^\beta x_1 V(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \\ \partial(x_1 x_3^\alpha) &> 0, \quad \partial(x_2 x_3^\beta) > 0, \quad \alpha + \beta > 0, \end{aligned} \quad (35)$$

где $\alpha, \beta, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, U, V – параметрические слова, переводится преобразованием T :

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_1 x_3^\alpha, x_2 x_3^\beta)^\mu x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_2 x_3^\beta, x_1 x_3^\alpha)^{\mu|} x_2, \end{cases}$$

где μ – переменная, значениями которой являются последовательности натуральных параметров, в уравнение E :

$$\begin{aligned} x_1 x_3^\alpha x_2 U(\mathbf{Fi}(x_1 x_3^\alpha, x_2 x_3^\beta)^\mu x_1, \mathbf{Fi}(x_2 x_3^\beta, x_1 x_3^\alpha)^{\mu|} x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 \\ = x_2 x_3^\beta x_1 V(\mathbf{Fi}(x_1 x_3^\alpha, x_2 x_3^\beta)^\mu x_1, \mathbf{Fi}(x_2 x_3^\beta, x_1 x_3^\alpha)^{\mu|} x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \\ \partial(x_1) < \partial(x_2 x_3^\beta), \quad \partial(x_2) < \partial(x_1 x_3^\alpha). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что в результате применения преобразования T к уравнению (35) получается уравнение E' , которое содержит уравнение E .

С другой стороны, пусть преобразование S_1 :

$$\begin{cases} x_i \rightarrow X_i, & i = 1, \dots, 5, \\ \lambda_i \rightarrow \Lambda_i, & i = 1, \dots, r, \\ \alpha \rightarrow A, \\ \beta \rightarrow B, \end{cases} \quad (*)$$

где X_i – слова в алфавите $(*)$, Λ_i, A, B – натуральные числа, есть произвольное решение уравнения (35). Мы докажем индукцией по $|X_1 X_2 X_3|$, что преобразование S_1 содержится в параметрическом преобразовании T . Если $|X_1| < |X_2 X_3^B|$ и $|X_2| < |X_1 X_3^A|$, то коэффициентное преобразование S_2 :

$$\begin{cases} x_i \rightarrow X_i, & i = 1, \dots, 5, \\ \lambda_i \rightarrow \Lambda_i, & i = 1, \dots, r, \\ \alpha \rightarrow A, \\ \beta \rightarrow B, \\ \mu \rightarrow \emptyset \end{cases}$$

является решением уравнения E и $S_1 = T S_2$.

Пусть $|X_1| \geq |X_2 X_3^B|$. Так как $|X_2 X_3^B| > 0$, мы имеем $X_1 = X_2 X_3^B Y_1$ для некоторого слова Y_1 в алфавите $(*)$, где $|Y_1| < |X_1|$.

Легко видеть, что уравнение (35) с дополнительным условием $\partial(x_1) > \partial(x_2 x_3^\beta)$ переводится преобразованием $t: x_1 \rightarrow x_2 x_3^\beta x_1$ в уравнение E' :

$$x_1 x_3^\alpha x_2 U(x_2 x_3^\beta x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 = x_2 x_3^\beta x_1 V(x_2 x_3^\beta x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5,$$

$$\partial(x_1 x_3^\alpha) > 0, \quad \partial(x_2 x_3^\beta) > 0, \quad \alpha + \beta > 0.$$

Преобразование S' :

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow Y_1, & i = 1, \dots, s, \\ x_i \rightarrow X_i, & i = 2, 3, 4, 5, \\ \alpha \rightarrow A, \\ \beta \rightarrow B \end{cases}$$

является решением уравнения E' .

Так как $|Y_1| < |X_1|$, по индуктивному предположению получаем, что S' содержится в параметрическом преобразовании T . Следовательно, S_1 содержится в параметрическом решении tT . Используя теорему **Fi2**, можно получить, что преобразование tT имеет вид

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_1 x_3^\alpha, x_2 x_3^\beta)^{1,0,\mu} x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_2 x_3^\beta, x_1 x_3^\alpha)^\mu x_2. \end{cases}$$

Пусть $|X_2| \geq |X_1 X_3^A|$. Так как $|X_1 X_3^A| > 0$, мы имеем $X_2 = X_1 X_3^A Y_2$ для некоторого слова Y_2 в алфавите $(*)$, где $|Y_2| < |X_2|$. Легко видеть, что уравнение (35) с дополнительным условием $\partial(x_2) > \partial(x_1 x_3^\alpha)$ переводится преобразованием $t: x_2 \rightarrow x_1 x_3^\alpha x_2$ в уравнение E' :

$$x_1 x_3^\alpha x_2 U(x_1, x_1 x_3^\alpha x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 = x_2 x_3^\beta x_1 V(x_1, x_1 x_3^\alpha x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_r,$$

$$\partial(x_1 x_3^\alpha) > 0, \quad \partial(x_2 x_3^\beta) > 0, \quad \alpha + \beta > 0.$$

Преобразование S' :

$$\begin{cases} x_2 \rightarrow Y_2, \\ x_i \rightarrow X_i, & i = 1, 3, 4, 5, \\ \alpha \rightarrow A, \\ \beta \rightarrow B \end{cases}$$

является решением уравнения E' .

Так как $|Y_2| < |X_2|$, по индуктивному предположению получаем, что S' содержится в параметрическом преобразовании T . Следовательно, S_1 содержится в параметрическом преобразовании tT . Используя теорему **Fi2**, можно получить, что преобразование tT имеет вид

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_1 x_3^\alpha, x_2 x_3^\beta)^\mu x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_2 x_3^\beta, x_1 x_3^\alpha)^{1,\mu} x_2. \end{cases}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 36. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3^{\alpha+1} x_2 = x_2 x_1 x_4, \quad \partial(x_1) < \partial(x_2) < \partial(x_1 x_3^{\alpha+1}), \quad (36)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_2 \rightarrow x_1 (x_2 x_3)^\beta x_2, \\ x_3 \rightarrow x_2 x_3, \\ x_1 \rightarrow (x_3 (x_2 x_3)^{\alpha-\beta})^\lambda x_1, \end{cases}$$

за которым следуют два преобразования

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow (x_1 x_3 x_2)^\sigma x_1, \\ x_3 \rightarrow x_1 x_3, \\ x_4 \rightarrow x_3 (x_2 x_1 x_3)^{\alpha-\beta-\sigma} (x_1 x_3 x_2)^\sigma x_1 (x_2 x_1 x_3)^\beta x_2, \\ x_1 \rightarrow (x_3 x_1 x_2)^\tau x_3 x_1, \\ x_2 \rightarrow x_1 x_2, \\ x_4 \rightarrow x_2 x_3 (x_1 x_2 x_3)^{\alpha-\beta-\tau-1} (x_3 x_1 x_2)^\tau x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^\beta x_1 x_2, \end{cases}$$

где $\beta, \lambda, \sigma, \tau$ – натуральные параметры и $\beta \leq \alpha, \sigma + \beta \leq \alpha, \tau + \beta + 1 \leq \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (36) переводится преобразованием $x_2 \rightarrow x_1 x_2$ в уравнение E_1 :

$$x_3^{\alpha+1} x_1 x_2 = x_2 x_1 x_4, \quad 0 < \partial(x_2) < \partial(x_3^{\alpha+1}).$$

Уравнение E_1 переводится преобразованием

$$\begin{cases} x_2 \rightarrow (x_2 x_3)^\beta x_2, \\ x_3 \rightarrow x_2 x_3, \end{cases}$$

где β – натуральный параметр и $\beta \leq \alpha$, в уравнение E_2 :

$$x_3 (x_2 x_3)^{\alpha-\beta} x_1 (x_2 x_3)^\beta x_2 = x_1 x_4, \quad \partial(x_3) > 0.$$

Согласно утверждению 34 уравнение E_2 переводится параметрическим преобразованием $x_1 \rightarrow (x_3 (x_2 x_3)^{\alpha-\beta})^\lambda x_1$, где λ – натуральный параметр, в уравнение E_3 , которое является уравнением E_2 с условием $\partial(x_1) < \partial(x_3 (x_2 x_3)^{\alpha-\beta})$.

Уравнение E_3 разделяется в список уравнений

$$\text{j) } E_3, \partial(x_3 x_2)^\sigma \leq \partial(x_1) < \partial((x_3 x_2)^\sigma x_3), \sigma \leq \alpha - \beta,$$

$$\text{jj) } E_3, \partial((x_3 x_2)^\tau x_3) \leq \partial(x_1) < \partial((x_3 x_2)^{\tau+1} x_3), \tau \leq \alpha - \beta - 1.$$

Уравнение j) переводится преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow (x_1 x_3 x_2)^\sigma x_1, \\ x_3 \rightarrow x_1 x_3 \end{cases}$$

в уравнение

$$x_3 (x_2 x_1 x_3)^{\alpha-\beta-\sigma} (x_1 x_3 x_2)^\sigma x_1 (x_2 x_1 x_3)^\beta x_2 = x_4.$$

Уравнение jj) переводится преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow (x_3 x_1 x_2)^\tau x_3 x_1, \\ x_2 \rightarrow x_1 x_2 \end{cases}$$

в уравнение

$$x_2 x_3 (x_1 x_2 x_3)^{\alpha-\beta-\tau-1} (x_3 x_1 x_2)^\tau x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^\beta x_1 x_2 = x_4.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 37. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3^{\alpha+1} x_2 = x_2 x_1 x_4, \quad (37)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_1 x_3^{\alpha+1}, x_2)^\mu x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_2, x_1 x_3^\alpha)^\mu x_2, \end{cases}$$

за которым следуют три преобразования:

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow 1, \\ x_3 \rightarrow 1, \\ x_4 \rightarrow 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \rightarrow 1, \\ x_4 \rightarrow x_3^{\alpha+1}; \end{cases} \quad (36).$$

(Напомним, что $\langle 36 \rangle$ обозначает общее решение уравнения (36).)

Доказательство непосредственно следует из утверждений 35 и 36.

ТЕОРЕМА **Fi4**. *Справедливы следующие тождества:*

$$\begin{aligned} \mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{2k}} &= x_1^{\pi_{2k}} x_2^{\mathbf{Vt}(x_1, x_2)^{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{2k}}}, \quad k \geq 1, \\ \mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{2k+1}} &= x_2^{\pi_{2k+1}} x_1^{\mathbf{Vt}(x_1, x_2)^{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{2k+1}}}, \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

где $\pi_1, \dots, \pi_s$ – переменные, значениями которых являются положительные целые числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем совместной индукцией по k . Если $k = 1$, тождества очевидны. Предположим, что $k > 1$. По определению

$$\mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{2k}} = \mathbf{Fi}(x_2, x_1)^{\pi_2, \dots, \pi_{2k}} x_2^{\mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\pi_1-1, \pi_2, \dots, \pi_{2k}}}.$$

В соответствии с индуктивным предположением (второе тождество) это выражение равно

$$x_1^{\pi_{2k}} x_2^{\mathbf{Vt}(x_2, x_1)^{\pi_2, \dots, \pi_{2k}}} x_2^{\mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\pi_1-1, \pi_2, \dots, \pi_{2k}}},$$

откуда по определению получаем

$$x_1^{\pi_{2k}} x_2^{\mathbf{Vt}(x_1, x_2)^{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{2k}}}.$$

По определению

$$\mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{2k+1}} = \mathbf{Fi}(x_2, x_1)^{\pi_2, \dots, \pi_{2k+1}} x_2^{\mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\pi_1-1, \pi_2, \dots, \pi_{2k+1}}}.$$

В соответствии с индуктивным предположением (первое тождество) последнее выражение равно

$$x_2^{\pi_{2k+1}} x_1^{\mathbf{Vt}(x_2, x_1)^{\pi_2, \dots, \pi_{2k+1}}} x_2^{\mathbf{Fi}(x_1, x_2)^{\pi_1-1, \pi_2, \dots, \pi_{2k+1}}},$$

откуда по определению получаем

$$x_2^{\pi_{2k+1}} x_1^{\mathbf{Vt}(x_1, x_2)^{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{2k+1}}}.$$

ТЕОРЕМА **Fi5**. *Если*

$$\mathbf{Fi}(P, Q)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s} R = T \mathbf{Fi}(P, Q)^{\lambda_2, \dots, \lambda_s} U,$$

где P, Q, R, T, U – примитивные параметрические слова, то s ограничено некоторым натуральным числом, зависящим от P, Q .

§ 5. Функция $\mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_i^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}}$

Дадим совместное индуктивное определение функций $\mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_1^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}}$, $\mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_2^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}}$, $\mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_3^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}}$, где $s \geq 0$, x_1, x_2, x_3 – словарные переменные, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}$ – натуральные параметры:

$$\begin{aligned} \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_i &= 1, \quad i = 1, 2, 3; \\ \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_1^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}} &= (\mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_3^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}} x_3)^{\lambda_1} \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_1^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}}, \\ \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_2^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}} &= (\mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_2^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}} x_2 \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_3^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}} x_3 \\ &\quad \times \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_1^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}} x_1 \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_1^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}} x_1)^{\lambda_2} \\ &\quad \times \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_2^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}}; \\ \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_3^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}} &= \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_1^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}} x_1 \\ &\quad \times \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_2^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}} x_2 \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_3^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}}. \end{aligned}$$

Кроме того, определим по индукции вспомогательную функцию

$$\mathbf{Oc}(x_1, x_2, x_3)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}},$$

где $s \geq 0$, x_1, x_2, x_3 – словарные переменные, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}$ – натуральные параметры:

$$\begin{aligned} \mathbf{Oc}(x_1, x_2, x_3) &= 1; \\ \mathbf{Oc}(x_1, x_2, x_3)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}} &= \mathbf{Oc}(x_1, x_2, x_3)^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}} (\mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_3^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}} x_3 \\ &\quad \times \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_1^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}} x_1 \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_2^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}} x_2)^{\lambda_1}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА Th1. Следующие тождества справедливы для $s \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_1^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s+2}} &= \mathbf{Th}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, \\ &\quad (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, x_1 x_2 x_3)_1^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}} (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}}; \\ \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_2^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s+2}} &= \mathbf{Th}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, \\ &\quad (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, x_1 x_2 x_3)_2^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}} \\ &\quad \times (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}}; \\ \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_3^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s+2}} &= \mathbf{Th}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, \\ &\quad (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, x_1 x_2 x_3)_3^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}} x_1 x_2; \\ \mathbf{Oc}(x_1, x_2, x_3)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s+2}} &= (x_3 x_1 x_2)^{\lambda_{2s+1}} \mathbf{Oc}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, \\ &\quad (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, x_1 x_2 x_3)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}}. \end{aligned}$$

Доказательство проведем совместной индукцией по s . Сначала докажем третье тождество. По определению

$$\begin{aligned} \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_3^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s+2}} &= \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_1^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s+2}} x_1 \\ &\times \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_2^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s+2}} x_2 \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_3^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s+2}}. \end{aligned}$$

По индуктивному предположению последнее выражение равно

$$\begin{aligned} &\mathbf{Th}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, x_1 x_2 x_3)_1^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}} \\ &\times (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1 \\ &\times \mathbf{Th}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, x_1 x_2 x_3)_2^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}} \\ &\times (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2 \\ &\times \mathbf{Th}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, x_1 x_2 x_3)_3^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}} x_1 x_2, \end{aligned}$$

что по определению равно

$$\mathbf{Th}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, x_1 x_2 x_3)_3^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}} x_1 x_2.$$

Докажем первое тождество. По определению

$$\begin{aligned} &\mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_1^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s+2}} \\ &= (\mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_3^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s+2}} x_3)^{\lambda_1} \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}}. \end{aligned}$$

По индуктивному предположению и третьему тождеству последнее выражение равно

$$\begin{aligned} &(\mathbf{Th}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, x_1 x_2 x_3)_3^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}} \\ &\times x_1 x_2 x_3)^{\lambda_1} \\ &\times \mathbf{Th}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, x_1 x_2 x_3)_1^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}} \\ &\times (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}}, \end{aligned}$$

что по определению равно

$$\begin{aligned} &\mathbf{Th}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, x_1 x_2 x_3)_1^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}} \\ &\times (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}}. \end{aligned}$$

Докажем второе тождество. По определению

$$\begin{aligned} &\mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_2^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s+2}} \\ &= (\mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_2^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s+2}} x_2 \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_3^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s+2}} x_3 \\ &\times \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_1^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s+2}} x_1 \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_1^{\lambda_1, \dots, \lambda_{2s+2}} x_1)^{\lambda_2} \\ &\times \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_2^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s+2}}. \end{aligned}$$

По индуктивному предположению и первому тождеству последнее выражение равно

$$\begin{aligned}
& \left(\mathbf{Th}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, x_1 x_2 x_3)_2^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}} \right. \\
& \quad \times (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2 \\
& \times \mathbf{Th}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, x_1 x_2 x_3)_3^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}} \\
& \quad \times x_1 x_2 x_3 \\
& \times \mathbf{Th}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, x_1 x_2 x_3)_1^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}} \\
& \quad \times (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1 \\
& \times \mathbf{Th}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, x_1 x_2 x_3)_1^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}} \\
& \quad \times (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_2} \\
& \times \mathbf{Th}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, x_1 x_2 x_3)_2^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}} \\
& \quad \times (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}},
\end{aligned}$$

что по определению равно

$$\begin{aligned}
& \mathbf{Th}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, x_1 x_2 x_3)_2^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}} \\
& \quad \times (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}}.
\end{aligned}$$

Докажем четвертое тождество. По определению

$$\begin{aligned}
& \mathbf{Oc}(x_1, x_2, x_3)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s+2}} \\
& = \mathbf{Oc}(x_1, x_2, x_3)^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s+2}} \left(\mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_3^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s+2}} x_3 \right. \\
& \quad \times \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_1^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s+2}} x_1 \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_2^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s+2}} x_2 \left. \right)^{\lambda_1}.
\end{aligned}$$

По индуктивному предположению и первому, второму и третьему тождествам последнее выражение равно

$$\begin{aligned}
& (x_3 x_1 x_2)^{\lambda_{2s+1}} \mathbf{Oc}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, \\
& \quad x_1 x_2 x_3)^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}} \\
& \times \left(\mathbf{Th}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, \right. \\
& \quad x_1 x_2 x_3)_3^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}} x_1 x_2 x_3 \\
& \times \mathbf{Th}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, \\
& \quad x_1 x_2 x_3)_1^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}} (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1 \\
& \times \mathbf{Th}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, x_1 x_2 x_3)_2^{\lambda_3, \dots, \lambda_{2s}} \\
& \quad \times (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2 \left. \right)^{\lambda_1}.
\end{aligned}$$

Это выражение равно по определению

$$\begin{aligned}
& (x_3 x_1 x_2)^{\lambda_{2s+1}} \mathbf{Oc}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, \\
& \quad x_1 x_2 x_3)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение $x_1 x_2 x_3 x_4 = x_3 x_1^2 x_2$ и последовательность совместных параметрических преобразований **(Th)**:

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_1} x_1, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_1} x_1)^{\lambda_2} x_2, \\ x_3 \rightarrow x_1 x_2 x_3, \\ x_4 \rightarrow x_4 (x_3 x_1 x_2)^{\lambda_1}, \end{cases} \quad (\mathbf{Th}_1)$$

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_3} x_1, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_3} x_1)^{\lambda_4} x_2, \\ x_3 \rightarrow x_1 x_2 x_3, \\ x_4 \rightarrow x_4 (x_3 x_1 x_2)^{\lambda_3}, \end{cases} \quad (\mathbf{Th}_2)$$

.....

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s-1}} x_1, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s-1}} x_1)^{\lambda_{2s}} x_2, \\ x_3 \rightarrow x_1 x_2 x_3, \\ x_4 \rightarrow x_4 (x_3 x_1 x_2)^{\lambda_{2s-1}}, \end{cases} \quad (\mathbf{Th}_s)$$

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, \\ x_3 \rightarrow x_1 x_2 x_3, \\ x_4 \rightarrow x_4 (x_3 x_1 x_2)^{\lambda_{2s+1}}. \end{cases} \quad (\mathbf{Th}_{s+1})$$

ТЕОРЕМА Th2. Для каждого натурального s подпоследовательность первых s совместных преобразований из последовательности **(Th)** может быть объединена следующим общим преобразованием:

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_1^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}} x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_2^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}} x_2, \\ x_3 \rightarrow \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_3^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}} x_3, \\ x_4 \rightarrow x_4 \mathbf{Oc}(x_1, x_2, x_3)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}}. \end{cases} \quad (\mathbf{Th}^*)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что подпоследовательность первых s преобразований может быть объединена общим преобразованием **(Th*)**. Пусть $(s+1)$ -е преобразование имеет вид **(Th_{s+1})**. Тогда подпоследовательность первых $s+1$ преобразований может быть объединена общим (одновременным) преобразованием

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow \mathbf{Th}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, \\ &\quad x_1 x_2 x_3)_1^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}} (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, \\ x_2 &\rightarrow \mathbf{Th}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, \\ &\quad x_1 x_2 x_3)_2^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}} (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3 &\rightarrow \mathbf{Th}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, \\
&\quad x_1 x_2 x_3)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}} x_1 x_2 x_3, \\
x_4 &\rightarrow x_4 (x_3 x_1 x_2)^{\lambda_{2s+1}} \mathbf{Oc}((x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1, \\
&\quad (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda_{2s+1}} x_1)^{\lambda_{2s+2}} x_2, x_1 x_2 x_3)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}}.
\end{aligned}$$

Согласно теореме **Th1** последнее преобразование совпадает с преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_1^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s+2}} x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_2^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s+2}} x_2, \\ x_3 \rightarrow \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_3^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s+2}} x_3, \\ x_4 \rightarrow x_4 \mathbf{Oc}(x_1, x_2, x_3)^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s+2}}. \end{cases}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 38. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned}
x_2 x_1 x_3 x_4 &= x_3 x_1^2 (x_3 x_1)^\alpha x_2, \\
\partial(x_3) &\leq \partial(x_2) < \partial(x_3 x_1^2 (x_3 x_1)^\alpha),
\end{aligned} \tag{38}$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned}
t: \quad &\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^{\eta+\theta}, \\ x_2 \rightarrow x_3 x_1^\theta, \\ x_4 \rightarrow x_4 (x_1^{\eta+\theta} x_3)^\alpha x_1^\theta, \end{cases} & tt: \quad &\begin{cases} x_2 \rightarrow x_3 x_1 (x_1 x_3)^\gamma x_2, \\ x_1 \rightarrow x_2 x_1, \\ x_4 \rightarrow (x_1 x_3 x_2)^{\alpha-\gamma} x_1 x_2 (x_1 x_3 x_2)^\gamma, \end{cases} \\
&\langle 22 \rangle; & &\langle 4 \rangle; \\
t t t: \quad &\begin{cases} x_2 \rightarrow x_3 x_1 (x_1 x_3)^\delta x_1 x_2, \\ x_3 \rightarrow x_2 x_3, \\ x_4 \rightarrow (x_3 x_1 x_2)^{\alpha-\delta-1} x_3 x_1^2 x_2 (x_3 x_1 x_2)^\delta, \end{cases} \\
&\langle 4 \rangle;
\end{aligned}$$

где $\eta, \theta, \gamma, \delta$ – натуральные параметры и $\gamma \leq \alpha, \delta < \alpha$.

(Напомним, что $\langle 22 \rangle$ и $\langle 4 \rangle$ – это общие решения уравнений (22) и (4) соответственно.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что уравнение (38) разделяется в следующий список уравнений:

- j) (38), $\partial(x_3) \leq \partial(x_2) < \partial(x_3 x_1)$;
- jj) (38), $\partial(x_3 x_1 (x_1 x_3)^\gamma) \leq \partial(x_2) < \partial(x_3 x_1 (x_1 x_3)^\gamma x_1)$;
- jjj) (38), $\partial(x_3 x_1 (x_1 x_3)^\delta x_1) \leq \partial(x_2) < \partial(x_3 x_1 (x_1 x_3)^{\delta+1})$;

где γ, δ – натуральные параметры и $\gamma \leq \alpha, \delta < \alpha$. Очевидно, что уравнение j) переводится параметрическим преобразованием

$$\begin{cases} x_2 \rightarrow x_3 x_2, \\ x_1 \rightarrow x_2 x_1, \\ x_4 \rightarrow x_4 x_2 (x_1 x_3 x_2)^\alpha \end{cases}$$

в уравнение $x_2 x_1 x_3 x_4 = x_1 x_2 x_1 x_3$ с условием $\partial(x_2) < \partial(x_1)$. Последнее уравнение распадается в систему

$$\begin{cases} x_2 x_1 = x_1 x_2, \\ x_3 x_4 = x_1 x_3 \end{cases}$$

с условием $\partial(x_2) < \partial(x_1)$. По утверждению 1 эта система переводится параметрическим преобразованием

$$\begin{cases} x_1 = x_1^\eta, \\ x_2 = x_1^\theta \end{cases}$$

в уравнение $x_3 x_4 = x_1^\eta x_3$ с условием $\theta > \eta$, т.е. в уравнение (22).

Уравнение jj) переводится параметрическим преобразованием tt в уравнение (4).
Уравнение jjj) переводится параметрическим преобразованием ttt в уравнение (4).

УТВЕРЖДЕНИЕ 39. *Параметрическое уравнение*

$$x_2 x_1 x_3 x_4 = x_3 x_1^2 (x_3 x_1)^\alpha x_2, \quad \partial(x_2) < \partial(x_3), \quad (39)$$

где α – натуральный параметр, переводится преобразованием t :

$$\begin{cases} x_3 \rightarrow x_2 x_3, \\ x_4 \rightarrow x_4 (x_3 x_1 x_2)^\alpha \end{cases}$$

в параметрическое уравнение (40).

Доказательство очевидно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 40. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_3 x_1^2 x_2, \quad \partial(x_3) > 0, \quad (40)$$

описывается преобразованием

$$\begin{aligned} T : & \begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_1^\xi x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_2^\xi x_2, \\ x_3 \rightarrow \mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_3^\xi x_3, \\ x_4 \rightarrow x_4 \mathbf{Oc}(x_1, x_2, x_3)^\xi, \end{cases} \\ t : & \begin{cases} x_1 \rightarrow (x_1 x_3)^\sigma x_1, \\ x_2 \rightarrow (x_3 x_1^2 (x_3 x_1)^\sigma)^\rho x_2, \\ x_3 \rightarrow x_1 x_3, \\ x_4 \rightarrow x_4, \end{cases} \\ & \langle 38 \rangle, \end{aligned}$$

где ξ – переменная, значениями которой являются четные последовательности натуральных параметров, σ, ρ – натуральные параметры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя определение функции $\mathbf{Th}(x_1, x_2, x_3)_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2s}}$, легко убедиться, что преобразование $Tt\langle 38 \rangle$ является параметрическим решением уравнения (40). Согласно утверждению 34 уравнение (40) переводится параметрическим преобразованием $x_1 \rightarrow x_3^\sigma x_1$, где σ – натуральный параметр, в уравнение E_1 :

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_3 x_1 x_3^\sigma x_1 x_2, \quad \partial(x_1) \leq \partial(x_3).$$

Согласно условию $\partial(x_1) < \partial(x_3)$ уравнение E_1 переводится преобразованием $x_3 \rightarrow x_1 x_3$ в уравнение E_2 :

$$x_2 x_1 x_3 x_4 = x_3 x_1 (x_1 x_3)^\sigma x_1 x_2.$$

Согласно утверждению 34 уравнение E_2 переводится параметрическим преобразованием $x_2 \rightarrow (x_3 x_1 (x_1 x_3)^\sigma x_1)^\rho x_2$, где ρ – натуральный параметр, в уравнение E_3 :

$$x_2 x_1 x_3 x_4 = x_3 x_1^2 (x_3 x_1)^\sigma x_2, \quad \partial(x_2) < \partial(x_3 x_1^2 (x_3 x_1)^\sigma).$$

Легко видеть, что уравнение E_3 разделяется в следующий список уравнений:

- j) $E_3, \partial(x_3) \leq \partial(x_2)$;
- jj) $E_3, \partial(x_3) > \partial(x_2)$.

Уравнение j) совпадает с уравнением (38). Согласно утверждению 39 уравнение jj) переводится преобразованием

$$\begin{cases} x_3 \rightarrow x_2 x_3, \\ x_4 \rightarrow x_4 (x_3 x_1 x_2)^\sigma \end{cases}$$

в уравнение (40). Последовательность преобразований

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_3^\sigma x_1, \\ x_3 &\rightarrow x_1 x_3, \\ x_2 &\rightarrow (x_3 x_1 (x_1 x_3)^\sigma x_1)^\rho x_2, \\ x_3 &\rightarrow x_2 x_3, \\ x_4 &\rightarrow x_4 (x_3 x_1 x_2)^\sigma \end{aligned}$$

может быть объединена следующим общим преобразованием r :

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow (x_1 x_2 x_3)^\sigma x_1, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_3 x_1 (x_1 x_2 x_3)^\sigma x_1)^\rho x_2, \\ x_3 \rightarrow x_1 x_2 x_3, \\ x_4 \rightarrow x_4 (x_3 x_1 x_2)^\sigma. \end{cases}$$

Используя теорему **Th2**, легко показать, что преобразование rT может быть получено из преобразования T заменой переменной для последовательностей ξ на последовательность σ, ρ, ξ .

§ 6. Функция $\mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_{i}^{\mu_1, \dots, \mu_t}$

Дадим совместное индуктивное определение функций

$$\mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_1^{\mu_1, \dots, \mu_t}, \quad \mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_2^{\mu_1, \dots, \mu_t}, \quad \mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_3^{\mu_1, \dots, \mu_t},$$

где $t \geq 0$, x_1, x_2, x_3 – словарные переменные, $\mu_1, \dots, \mu_t$ – переменные, значениями которых являются конечные последовательности натуральных параметров:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_i &= 1, \quad i = 1, 2, 3; \\ \mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_1^{\mu_1, \dots, \mu_t} &= \mathbf{Fi}(\mathbf{Ro}(x_2, x_1, x_3)_3^{\mu_2, \dots, \mu_t} x_3 \\ &\quad \times \mathbf{Ro}(x_2, x_1, x_3)_1^{\mu_2, \dots, \mu_t} x_2, \mathbf{Ro}(x_2, x_1, x_3)_2^{\mu_2, \dots, \mu_t} x_1 \\ &\quad \times \mathbf{Ro}(x_2, x_1, x_3)_3^{\mu_2, \dots, \mu_t} x_3 \mathbf{Ro}(x_2, x_1, x_3)_1^{\mu_2, \dots, \mu_t} x_2 \\ &\quad \times (\mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_3^{\mu_1, \dots, \mu_t} x_3)^2)^{\mu_1} \mathbf{Ro}(x_2, x_1, x_3)_3^{\mu_2, \dots, \mu_t} x_3 \\ &\quad \times \mathbf{Ro}(x_2, x_1, x_3)_1^{\mu_2, \dots, \mu_t} x_2 \mathbf{Ro}(x_2, x_1, x_3)_2^{\mu_2, \dots, \mu_t}; \\ \mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_2^{\mu_1, \dots, \mu_t} &= \mathbf{Fi}(\mathbf{Ro}(x_2, x_1, x_3)_3^{\mu_2, \dots, \mu_t} x_3 \\ &\quad \times \mathbf{Ro}(x_2, x_1, x_3)_1^{\mu_2, \dots, \mu_t} x_2 (\mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_3^{\mu_1, \dots, \mu_t} x_3)^2, \\ &\quad \mathbf{Ro}(x_2, x_1, x_3)_3^{\mu_2, \dots, \mu_t} x_3 \mathbf{Ro}(x_2, x_1, x_3)_1^{\mu_2, \dots, \mu_t} x_2 \\ &\quad \times \mathbf{Ro}(x_2, x_1, x_3)_2^{\mu_2, \dots, \mu_t} x_1)^{\mu_1} \mathbf{Ro}(x_2, x_1, x_3)_3^{\mu_2, \dots, \mu_t} x_3 \\ &\quad \times \mathbf{Ro}(x_2, x_1, x_3)_2^{\mu_2, \dots, \mu_t}; \\ \mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_3^{\mu_1, \dots, \mu_t} &= \mathbf{Ro}(x_2, x_1, x_3)_2^{\mu_2, \dots, \mu_t} x_1 \\ &\quad \times \mathbf{Ro}(x_2, x_1, x_3)_3^{\mu_2, \dots, \mu_t}. \end{aligned}$$

Введем по индукции вспомогательную функцию $\mathbf{Re}(x_1, x_2, x_3)^{\mu_1, \dots, \mu_t}$, где $t \geq 0$, x_1, x_2, x_3 – словарные переменные, $\mu_1, \dots, \mu_t$ – переменные, значениями которых являются последовательности натуральных параметров:

$$\begin{aligned} \mathbf{Re}(x_1, x_2, x_3) &= 1; \\ \mathbf{Re}(x_1, x_2, x_3)^{\mu_1, \dots, \mu_t} &= \mathbf{Re}(x_2, x_1, x_3)^{\mu_2, \dots, \mu_t} \mathbf{Ro}(x_2, x_1, x_3)_2^{\mu_2, \dots, \mu_t} x_1. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2 x_3^2 x_1$$

и последовательность преобразований ($\mathbf{Ro}$):

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_3 x_2 x_1, x_3 x_2 (x_1 x_3)^2)^{\mu_1} x_3 x_2 x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_3 x_2 (x_1 x_3)^2, x_3 x_2 x_1)^{\mu_1} x_3 x_2, \\ x_3 \rightarrow x_1 x_3, \\ x_4 \rightarrow x_4 x_1, \end{cases} \quad (\mathbf{Ro}_1)$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_3 x_1 (x_2 x_3)^2, x_3 x_1 x_2)^{\mu_2} | x_3 x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_3 x_1 x_2, x_3 x_1 (x_2 x_3)^2)^{\mu_2} x_3 x_1 x_2, \\ x_3 \rightarrow x_2 x_3, \\ x_4 \rightarrow x_4 x_2, \end{array} \right. \quad (\mathbf{Ro}_2) \\
& \dots\dots\dots \\
& \left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_3 x_2 x_1, x_3 x_2 (x_1 x_3)^2)^{\mu_{2k+1}} x_3 x_2 x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_3 x_2 (x_1 x_3)^2, x_3 x_2 x_1)^{\mu_{2k+1}} | x_3 x_2, \\ x_3 \rightarrow x_1 x_3, \\ x_4 \rightarrow x_4 x_1, \end{array} \right. \quad (\mathbf{Ro}_{2k+1}) \\
& \left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_3 x_1 (x_2 x_3)^2, x_3 x_1 x_2)^{\mu_{2k+2}} | x_3 x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_3 x_1 x_2, x_3 x_1 (x_2 x_3)^2)^{\mu_{2k+2}} x_3 x_1 x_2, \\ x_3 \rightarrow x_2 x_3, \\ x_4 \rightarrow x_4 x_2, \end{array} \right. \quad (\mathbf{Ro}_{2k+2}) \\
& \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА **Ro1**. Для каждого натурального t подпоследовательность первых t совместных преобразований из последовательности $(\mathbf{Ro})$ может быть объединена следующим общим преобразованием:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow \mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_1^{\mu_1, \dots, \mu_t} x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_2^{\mu_1, \dots, \mu_t} x_2, \\ x_3 \rightarrow \mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_3^{\mu_1, \dots, \mu_t} x_3, \\ x_4 \rightarrow x_4 \mathbf{Re}(x_1, x_2, x_3)^{\mu_1, \dots, \mu_t}. \end{array} \right. \quad (\mathbf{Ro}^*)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $t = 0$, теорема очевидна. Пусть $t = 1$. Тогда по определению функции $\mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_i^{\mu_1, \dots, \mu_t}$ мы имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_1^{\mu_1} &= \mathbf{Fi}(x_3 x_2 x_1, x_3 x_2 (x_1 x_3)^2)^{\lambda_1, \dots, \lambda_s} x_3 x_2, \\
\mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_2^{\mu_1} &= \mathbf{Fi}(x_3 x_2 (x_1 x_3)^2, x_3 x_2 x_1)^{\lambda_2, \dots, \lambda_s} x_3, \\
\mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_3^{\mu_1} &= x_1, \\
\mathbf{Re}(x_1, x_2, x_3)^{\mu_1} &= x_1,
\end{aligned}$$

и преобразование $(\mathbf{Ro}^*)$ совпадает с преобразованием $(\mathbf{Ro}_1)$. Пусть $t > 1$. По индуктивному предположению подпоследовательность преобразований $(\mathbf{Ro}_2), \dots, (\mathbf{Ro}_t)$ может быть объединена следующим общим преобразованием:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow \mathbf{Ro}(x_2, x_1, x_3)_2^{\mu_2, \dots, \mu_t} x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Ro}(x_2, x_1, x_3)_1^{\mu_2, \dots, \mu_t} x_2, \\ x_3 \rightarrow \mathbf{Ro}(x_2, x_1, x_3)_3^{\mu_2, \dots, \mu_t} x_3, \\ x_4 \rightarrow x_4 \mathbf{Re}(x_2, x_1, x_3)^{\mu_2, \dots, \mu_t}. \end{array} \right. \quad (\mathbf{Ro}^{**})$$

Подставляя преобразование $(\mathbf{Ro}^{**})$ в преобразование $(\mathbf{Ro}_1)$, мы получаем формулу $(\mathbf{Ro}^*)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 41. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2 x_3^2 x_1 \quad (41)$$

описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_1, x_2 x_3^2)^\mu x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_2 x_3^2, x_1)^{\mu|} x_2, \end{cases}$$

где μ – переменная, значениями которой являются последовательности натуральных параметров, за которым следуют три преобразования

$$\begin{cases} x_2 \rightarrow 1, \\ x_3 \rightarrow 1, \\ x_4 \rightarrow 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow 1, \\ x_4 \rightarrow x_3; \end{cases} \quad (42).$$

Доказательство непосредственно следует из утверждений 35 и 42.

УТВЕРЖДЕНИЕ 42. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2 x_3^2 x_1, \quad \partial(x_2) < \partial(x_1) < \partial(x_2 x_3^2), \quad (42)$$

описывается преобразованиями $\langle 43 \rangle$, $\langle 44 \rangle$, $\langle 45 \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (42) разделяется в список уравнений:

- j) (42), $\partial(x_1) \leq \partial(x_3)$;
- jj) (42), $\partial(x_2 x_3) \leq \partial(x_1)$;
- jjj) (42), $\partial(x_3) \leq \partial(x_1) \leq \partial(x_2 x_3)$.

По определению уравнение j) есть (43), jj) совпадает с (44), jjj) – с (45).

УТВЕРЖДЕНИЕ 43. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2 x_3^2 x_1, \quad \partial(x_2) < \partial(x_1) < \partial(x_2 x_3^2), \quad \partial(x_1) \leq \partial(x_3), \quad (43)$$

описывается преобразованием t :

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_2 x_1, \\ x_3 &\rightarrow x_1 x_2 x_3, \\ x_4 &\rightarrow x_3 x_2 x_1, \\ (4). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (43) переводится преобразованием $x_1 \rightarrow x_2 x_1$ в уравнение E_1 :

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_3^2 x_2 x_1, \quad 0 < \partial(x_1) < \partial(x_3^2), \quad \partial(x_2 x_1) \leq \partial(x_3).$$

Уравнение E_1 переводится преобразованием $x_3 \rightarrow x_1 x_2 x_3$ в уравнение E_2 :

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_3 x_1 x_2 x_3 x_2 x_1, \quad \partial(x_1) > 0.$$

Уравнение E_2 переводится преобразованием $x_4 \rightarrow x_3 x_2 x_1$ в уравнение $x_1 x_2 x_3 = x_3 x_1 x_2$, $\partial(x_1) > 0$, т.е. в уравнение (4) с условием $\partial(x_1) > 0$.

С другой стороны, преобразование t является решением уравнения (43).

УТВЕРЖДЕНИЕ 44. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 x_4 &= x_2 x_3^2 x_1, \\ \partial(x_2) < \partial(x_1) < \partial(x_2 x_3^2), \quad \partial(x_2 x_3) &\leq \partial(x_1), \end{aligned} \quad (44)$$

описывается преобразованием t :

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_2 x_3 x_1, \\ x_3 &\rightarrow x_1 x_3, \\ x_4 &\rightarrow x_3 x_1, \\ (4). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (44) переводится преобразованием $x_1 \rightarrow x_2 x_3 x_1$ в уравнение E_1 :

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_3 x_2 x_3 x_1, \quad 0 < \partial(x_1) < \partial(x_3).$$

Уравнение E_1 переводится преобразованием $x_3 \rightarrow x_1 x_3$ в уравнение E_2 :

$$x_2 x_1 x_3 x_4 = x_3 x_2 x_1 x_3 x_1, \quad \partial(x_1) > 0, \quad \partial(x_3) > 0.$$

Уравнение E_2 переводится преобразованием $x_4 \rightarrow x_3 x_1$ в уравнение $x_2 x_1 x_3 = x_3 x_2 x_1$, $\partial(x_1) > 0$, $\partial(x_3) > 0$, т.е. в уравнение (4) с условием $\partial(x_1) > 0$, $\partial(x_3) > 0$.

С другой стороны, преобразование t является параметрическим решением уравнения (44).

УТВЕРЖДЕНИЕ 45. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 x_4 &= x_2 x_3^2 x_1, \\ \partial(x_2) < \partial(x_1) < \partial(x_2 x_3^2), \quad \partial(x_2) &\leq \partial(x_1) \leq \partial(x_2 x_3), \end{aligned} \quad (45)$$

описывается преобразованием t :

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_2 x_1, \\ x_3 &\rightarrow x_1 x_3, \\ x_2 &\rightarrow x_3 x_2, \\ x_4 &\rightarrow x_4 x_1, \\ \begin{cases} x_1 \rightarrow x_2, \\ x_2 \rightarrow x_1, \end{cases} \\ (41). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (45) переводится преобразованием $x_1 \rightarrow x_2 x_1$ в уравнение E_1 : $x_1 x_2 x_3 x_4 = x_3^2 x_2 x_1$, $0 < \partial(x_1) < \partial(x_3^2)$, $\partial(x_3) \leq \partial(x_1 x_2)$. Уравнение E_1 переводится преобразованием $x_3 \rightarrow x_1 x_3$ в уравнение E_2 : $x_2 x_1 x_3 x_4 = x_3 x_1 x_3 x_2 x_1$, $\partial(x_3) \leq \partial(x_2)$, $\partial(x_1) > 0$. Уравнение E_2 переводится преобразованием $x_2 \rightarrow x_3 x_2$, $x_4 \rightarrow x_4 x_1$ в уравнение E_3 : $x_2 x_1 x_3 x_4 = x_1 x_3^2 x_2$, $\partial(x_1) > 0$. Уравнение E_3 переводится преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_2, \\ x_2 \rightarrow x_1 \end{cases}$$

в уравнение (41) с $\partial(x_2) > 0$. С другой стороны, преобразование t является параметрическим решением уравнения (45).

УТВЕРЖДЕНИЕ 46. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2 x_3^2 x_1 \quad (46)$$

описывается преобразованием t :

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_1, x_2 x_3^2)^\mu x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_2 x_3^2, x_1)^{\mu|} x_2, \end{cases}$$

где μ – переменная, значениями которой являются последовательности натуральных параметров, за которым следуют четыре преобразования:

$$\begin{cases} x_2 \rightarrow 1, \\ x_3 \rightarrow 1, \\ x_4 \rightarrow 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow 1, \\ x_4 \rightarrow x_3; \end{cases} \quad \langle 43 \rangle; \quad \langle 44 \rangle;$$

и преобразованием tt :

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_3 x_2 x_1, x_3 x_2 (x_1 x_3)^2)^\mu x_3 x_2 x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_3 x_2 (x_1 x_3)^2, x_3 x_2 x_1)^{\mu|} x_3 x_2, \\ x_3 \rightarrow x_1 x_3, \\ x_4 \rightarrow x_4 x_1, \end{cases}$$

где μ – переменная, значениями которой являются последовательности натуральных параметров, за которым следует преобразование

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_2, \\ x_2 \rightarrow x_1, \end{cases} \quad \langle 41 \rangle.$$

Утверждение 46 непосредственно следует из утверждений 41–45.

УТВЕРЖДЕНИЕ 47. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2 x_3^2 x_1 \quad (47)$$

описывается преобразованием T :

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_1^\nu x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_2^\nu x_2, \\ x_3 \rightarrow \mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_3^\nu x_3, \\ x_4 \rightarrow x_4 \mathbf{Re}(x_1, x_2, x_3)^\nu, \end{cases}$$

где ν – переменная, значениями которой являются четные последовательности вторых параметров, за которым следует преобразование

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_1, x_2 x_3^2)^\mu x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_2 x_3^2, x_1)^{\mu|} x_2, \end{cases}$$

где μ – переменная, значениями которой являются последовательности натуральных параметров, за которым следуют четыре преобразования:

$$\begin{cases} x_2 \rightarrow 1, \\ x_3 \rightarrow 1, \\ x_4 \rightarrow 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow 1, \\ x_4 \rightarrow x_3; \end{cases} \quad \langle 43 \rangle; \quad \langle 44 \rangle;$$

и преобразованием TT :

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_1^\varkappa x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_2^\varkappa x_2, \\ x_3 \rightarrow \mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_3^\varkappa x_3, \\ x_4 \rightarrow x_4 \mathbf{Re}(x_1, x_2, x_3)^\varkappa, \end{cases}$$

где $\varkappa$ – переменная, значениями которой являются нечетные последовательности вторых параметров, за которым следует преобразование

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_1 x_3^2, x_2)^{\mu|} x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_2, x_1 x_3^2)^\mu x_2, \end{cases}$$

где μ – переменная, значениями которой являются последовательности натуральных параметров, за которым следуют четыре преобразования:

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow 1, \\ x_3 \rightarrow 1, \\ x_4 \rightarrow 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \rightarrow 1, \\ x_4 \rightarrow x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow x_2, \\ x_2 \rightarrow x_1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow x_2, \\ x_2 \rightarrow x_1, \end{cases} \quad \langle 43 \rangle; \quad \langle 44 \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя преобразования T и TT к уравнению (47), согласно определению функции $\mathbf{Ro}(x_1, x_2, x_3)_i^{\mu_1, \dots, \mu_t}$, $i = 1, 2, 3$, легко убедиться, что преобразования являются решениями уравнения (47).

С другой стороны, пусть S :

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow X_1, \\ x_2 \rightarrow X_2, \\ x_3 \rightarrow X_3, \\ x_4 \rightarrow X_4, \end{cases}$$

где X_i – слова в алфавите $(*)$, есть произвольное решение уравнения (47). Индуцирующей по $|X_1 X_2 X_3 X_4|$ мы докажем, что S содержится либо в преобразовании T , либо в преобразовании TT . Уравнение (47) разделяется в следующий список уравнений:

- j) (47), $\partial(x_2) \leq \partial(x_1) \leq \partial(x_2 x_3^2)$;
- jj) (47), $\partial(x_1) \leq \partial(x_2)$;
- jjj) (47), $\partial(x_2 x_3^2) \leq \partial(x_1)$.

Пусть S – решение уравнения j). По утверждению 42 решение S содержится в $\langle 43 \rangle, \langle 44 \rangle, \langle 45 \rangle$. Если S содержится в $\langle 43 \rangle, \langle 44 \rangle$, то S содержится в T с $\nu = \emptyset, \mu = \emptyset$.

Пусть S содержится в $\langle 45 \rangle$. Если $|X_1 X_2 X_3| = 0$, то S содержится в T . Пусть $|X_1 X_2 X_3| > 0$. Тогда $X_1 = X_2 Y_1$ для некоторого Y_1 и $Y_1 X_2 X_3 X_4 = X_3^2 X_2 Y_1$. Тогда $X_3 = Y_1 Y_3$ и $X_2 Y_1 Y_3 X_4 = Y_3 Y_1 Y_3 X_2 Y_1$. Следовательно, $X_2 = Y_3 Y_2$ и $Y_2 Y_1 Y_3 X_4 = Y_1 Y_3 Y_3 Y_2 Y_1$. По утверждению 45 уравнение (45) переводится преобразованием

$$\begin{aligned} t : & \begin{cases} x_1 \rightarrow x_3 x_2 x_1, \\ x_2 \rightarrow x_3 x_2, \\ x_3 \rightarrow x_1 x_3, \\ x_4 \rightarrow x_4 x_1, \end{cases} \\ c : & \begin{cases} x_1 \rightarrow x_2, \\ x_2 \rightarrow x_1 \end{cases} \end{aligned}$$

в уравнение (41), т.е. в уравнение (47). Образом решения S при преобразовании t является коэффициентное преобразование S_1 :

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow Y_1, \\ x_2 \rightarrow Y_2, \\ x_3 \rightarrow Y_3, \\ x_4 \rightarrow X_4. \end{cases}$$

Так как $|Y_1 Y_2 Y_3 X_4| < |X_1 X_2 X_3 X_4|$, по индуктивному предположению получаем, что S_1 содержится в параметрических решениях cT, cTT . Следовательно, параметрические решения $tcT, tcTT$ уравнения (47) содержат решение tcS_1 , т.е. решение S .

Согласно теореме **Ro1** преобразования $tcT, tcTT$ могут быть получены из преобразований T, TT заменой параметра ν последовательностью $\emptyset, \nu$.

Пусть S – решение уравнения jj). Если $|X_1| = 0$, то S содержится в T, TT . Пусть $|X_1| > 0$. Тогда $X_2 = X_1 Y_2$ для некоторого Y_2 и $X_1 Y_2 X_3 X_4 = Y_2 X_3^2 X_1$. Уравнение (47) переводится преобразованием $t: x_2 \rightarrow x_1 x_2$ в уравнение (47). Образом решения S при преобразовании t является коэффициентное преобразование S_1 :

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow X_1, \\ x_2 \rightarrow Y_2, \\ x_3 \rightarrow X_3, \\ x_4 \rightarrow X_4. \end{cases}$$

Так как $|Y_2| > |X_2|$, по индуктивному предположению получаем, что S_1 содержится в T, TT . Следовательно, параметрические решения tT, tTT уравнения (47) содержат решение tS_1 , т.е. решение S .

Согласно теоремам **Fi1** и **Ro1** преобразования tT, tTT могут быть получены из преобразований T, TT заменой параметров ν, μ параметрами ν', μ' , причем если

$\nu = \emptyset$, то $\nu' = \emptyset$ и $\mu' = 0, 1, \mu$; если $\nu = \mu_1, \dots, \mu_s, s \geq 1$, то $\nu' = \mu'_1, \dots, \mu_s$, где $\mu'_1 = 0, 1, \mu_1$ и $\mu' = \mu$.

Пусть S – решение уравнения jjj). Если $|X_2 X_3^2| = 0$, то S содержится в T, TT . Пусть $|X_2 X_3^2| > 0$. Тогда $X_1 = X_2 X_3^2 Y_1$ для некоторого Y_1 и $Y_1 X_2 X_3 X_4 = X_2 X_3^2 Y_1$. Уравнение (47) переводится преобразованием t : $x_1 \rightarrow x_2 x_3^2 x_1$ в уравнение (47). Образом решения при преобразовании t является коэффициентное преобразование S_1 :

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow Y_1, \\ x_2 \rightarrow X_2, \\ x_3 \rightarrow X_3, \\ x_4 \rightarrow X_4. \end{cases}$$

Так как $|Y_1| < |X_1|$, по индуктивному предположению получаем, что S_1 содержится в T, TT . Следовательно, параметрические решения tT, tTT уравнения (47) содержат решение tS_1 , т.е. решение S .

Согласно теоремам **F11** и **R01** преобразования tT, tTT могут быть получены из преобразований T, TT заменой параметров ν, μ параметрами ν', μ' , причем если $\nu = \emptyset$, то $\nu' = \emptyset$ и $\mu' = 1, 0, \mu$; если $\nu = \mu_1, \dots, \mu_s, s \geq 1$, то $\nu' = \mu'_1, \dots, \mu_s$, где $\mu'_1 = 0, 1, \mu_1$ и $\mu' = \mu$.

§ 7. Односторонние уравнения

УТВЕРЖДЕНИЕ 48. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 x_4 &= ((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa+1} x_3 x_2 x_1, \\ \partial(x_1) &< \partial(((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa+1} x_3 x_2), \end{aligned} \tag{48}$$

где $\varkappa, \lambda$ – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow ((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^\tau (x_2 x_3)^\sigma x_1, \\ x_2 &\rightarrow x_1 x_2, \\ x_4 &\rightarrow x_2 (x_3 x_1 x_2)^{\lambda-\sigma} ((x_1 x_2 x_3)^{\lambda+1} x_1 x_2)^{\varkappa-\tau} x_3 x_1 x_2 \\ &\quad \times ((x_1 x_2 x_3)^{\lambda+1} x_1 x_2)^\tau (x_1 x_2 x_3)^\sigma x_1, \\ \langle 4 \rangle; \\ x_1 &\rightarrow ((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^\tau (x_2 x_3)^{\lambda+1} x_1, \\ x_2 &\rightarrow x_1 x_2, \\ x_4 &\rightarrow x_4 (x_1 x_2 x_3)^\lambda x_1 x_2 ((x_1 x_2 x_3)^{\lambda+1} x_1 x_2)^{\varkappa-\tau-1} x_3 x_1 x_2, \\ \begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\eta, \\ x_2 \rightarrow x_1^\theta, \end{cases} \\ \langle 22 \rangle; \\ x_1 &\rightarrow ((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^\varkappa (x_2 x_3)^{\lambda+1} x_1, \\ x_2 &\rightarrow x_1 x_2, \\ x_4 &\rightarrow x_2 ((x_1 x_2 x_3)^{\lambda+1} x_1 x_2)^\varkappa (x_1 x_2 x_3)^{\lambda+1} x_1, \\ \langle 4 \rangle; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x_1 \rightarrow ((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^\tau (x_2 x_3)^\sigma x_2 x_1, \\
 & x_3 \rightarrow x_1 x_3, \\
 & x_4 \rightarrow x_3 x_2 (x_1 x_3 x_2)^{\lambda-\sigma-1} ((x_2 x_1 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa-\tau} x_1 x_3 x_2 \\
 & \quad \times ((x_2 x_1 x_3)^{\lambda+1} x_2)^\tau (x_2 x_1 x_3)^\sigma x_2 x_1, \\
 & \langle 4 \rangle; \\
 & x_1 \rightarrow ((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^\tau (x_2 x_3)^\lambda x_2 x_1, \\
 & x_3 \rightarrow x_1 x_3, \\
 & x_4 \rightarrow x_4 x_3 (x_2 x_1 x_3)^\lambda x_2 ((x_2 x_1 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa-\tau-1} x_1 x_3 x_2 \\
 & \quad \times ((x_2 x_1 x_3)^{\lambda+1} x_2)^\tau (x_2 x_1 x_3)^\lambda x_2 x_1, \\
 & \langle 40 \rangle; \\
 & x_1 \rightarrow ((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa} (x_2 x_3)^\lambda x_2 x_1, \\
 & x_3 \rightarrow x_1 x_3, \\
 & x_4 \rightarrow (x_3 x_2 (x_2 x_1 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa} (x_2 x_1 x_3)^\lambda x_2 x_1, \\
 & \langle 4 \rangle; \\
 & x_1 \rightarrow ((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa+1} x_1, \\
 & x_3 \rightarrow x_1 x_3, \\
 & x_4 \rightarrow x_4 x_3 (x_2 x_1 x_3)^\lambda x_2 ((x_2 x_1 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa} x_1, \\
 & \langle 40 \rangle; \\
 & x_1 \rightarrow ((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa+1} x_3 x_1, \\
 & x_2 \rightarrow x_1 x_2, \\
 & x_4 \rightarrow (x_1 x_2 x_3)^\lambda x_1 x_2 ((x_1 x_2 x_3)^{\lambda+1} x_1 x_2)^{\varkappa} x_3 x_1, \\
 & \begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\eta, \\ x_2 \rightarrow x_1^\theta, \end{cases} \\
 & \langle 22 \rangle;
 \end{aligned}$$

где $\sigma, \tau, \eta, \theta$ – натуральные параметры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (48) разделяется в следующий список уравнений:

- j) (48), $\partial(((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^\tau (x_2 x_3)^\sigma) \leq \partial(x_1) < \partial(((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^\tau (x_2 x_3)^\sigma x_2)$,
 $\tau \leq \varkappa, \sigma \leq \lambda + 1$;
- jj) (48), $\partial(((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^\tau (x_2 x_3)^\sigma x_2) \leq \partial(x_1) < \partial(((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^\tau (x_2 x_3)^{\sigma+1})$,
 $\tau \leq \varkappa, \sigma \leq \lambda$;
- jjj) (48), $\partial(((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa+1}) \leq \partial(x_1) < \partial(((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa+1} x_3)$;
- jjjj) (48), $\partial(((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa+1} x_3) \leq \partial(x_1) < \partial(((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa+1} x_3 x_2)$.

Уравнение j) переводится преобразованием

$$\begin{aligned}
 & x_1 \rightarrow ((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^\tau (x_2 x_3)^\sigma x_1, \\
 & x_2 \rightarrow x_1 x_2
 \end{aligned}$$

в уравнение E_1 :

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2 (x_3 x_1 x_2)^{\lambda+1-\sigma} ((x_1 x_2 x_3)^{\lambda+1} x_1 x_2)^{\varkappa-\tau} x_3 x_1 x_2 \\ \times ((x_1 x_2 x_3)^{\lambda+1} x_1 x_2)^{\tau} (x_1 x_2 x_3)^{\sigma} x_1.$$

Уравнение E_1 с $\lambda + 1 > \sigma$ переводится преобразованием

$$x_4 \rightarrow x_2 (x_3 x_1 x_2)^{\lambda-\sigma} ((x_1 x_2 x_3)^{\lambda+1} x_1 x_2)^{\varkappa-\tau} x_3 x_1 x_2 \\ \times ((x_1 x_2 x_3)^{\lambda+1} x_1 x_2)^{\tau} (x_1 x_2 x_3)^{\sigma} x_1$$

в уравнение $x_1 x_2 x_3 = x_2 x_3 x_1$, т.е. в уравнение (4).

Уравнение E_1 с $\lambda + 1 = \sigma$, $\varkappa > \tau$ переводится преобразованием

$$x_4 \rightarrow x_4 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda} x_1 x_2 ((x_1 x_2 x_3)^{\lambda+1} x_1 x_2)^{\varkappa-\tau-1} x_3 x_1 x_2 \\ \times ((x_1 x_2 x_3)^{\lambda+1} x_1 x_2)^{\tau} (x_1 x_2 x_3)^{\tau} x_1$$

в уравнение F_1 :

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2 x_1 x_2 x_3.$$

Уравнение F_1 при помощи утверждения 1 переводится преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^{\eta}, \\ x_2 \rightarrow x_1^{\theta} \end{cases}$$

в уравнение $x_3 x_4 = x_1^{\theta} x_3$, т.е. в уравнение (22).

Уравнение E_1 с $\lambda + 1 = \sigma$, $\varkappa = \tau$ переводится преобразованием

$$x_4 \rightarrow x_2 ((x_1 x_2 x_3)^{\lambda+1} x_1 x_2)^{\gamma} (x_1 x_2 x_3)^{\lambda+1} x_1$$

в уравнение $x_1 x_2 x_3 = x_2 x_3 x_1$, т.е. в уравнение (4).

Уравнение jj) переводится преобразованием

$$x_1 \rightarrow ((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\tau} (x_2 x_3)^{\sigma} x_2 x_1, \\ x_3 \rightarrow x_1 x_3$$

в уравнение E_2 :

$$x_2 x_1 x_3 x_4 = x_3 x_2 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda-\sigma} ((x_2 x_1 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa-\tau} x_1 x_3 x_2 \\ \times ((x_2 x_1 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\tau} (x_2 x_1 x_3)^{\sigma} x_2 x_1$$

с $\partial(x_3) > 0$.

Уравнение E_2 с $\lambda > \sigma$ переводится преобразованием

$$x_4 \rightarrow x_3 x_2 (x_1 x_3 x_2)^{\lambda-\sigma-1} ((x_2 x_1 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa-\tau} x_1 x_3 x_2 \\ \times ((x_2 x_1 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\tau} (x_2 x_1 x_3)^{\sigma} x_2 x_1$$

в уравнение $x_2 x_1 x_3 = x_3 x_2 x_1$, т.е. в уравнение (4).

Уравнение E_2 с $\lambda = \sigma$, $\varkappa > \tau$ переводится преобразованием

$$\begin{aligned} x_4 &\rightarrow x_4 x_3 (x_2 x_1 x_3)^\lambda x_2 ((x_2 x_1 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa-\tau-1} x_1 x_3 x_2 \\ &\times ((x_2 x_1 x_3)^{\lambda+1} x_2)^\tau (x_2 x_1 x_3)^\lambda x_2 x_1 \end{aligned}$$

в уравнение $x_2 x_1 x_3 x_4 = x_3 x_2^2 x_1$ с $\partial(x_3) > 0$, т.е. в уравнение (40).

Уравнение E_2 с $\lambda = \sigma$, $\varkappa = \tau$ переводится преобразованием

$$x_4 \rightarrow x_3 x_2 ((x_2 x_1 x_3)^{\lambda+1} x_2)^\varkappa (x_2 x_1 x_3)^\lambda x_2 x_1$$

в уравнение $x_2 x_1 x_3 = x_3 x_2 x_1$, т.е. в уравнение (4).

Уравнение jjj) переводится преобразованием

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow ((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa+1}, \\ x_3 &\rightarrow x_1 x_3, \\ x_4 &\rightarrow x_4 x_3 (x_2 x_1 x_3)^\lambda x_2 ((x_2 x_1 x_3)^{\lambda+1} x_2)^\varkappa x_1 \end{aligned}$$

в уравнение $x_2 x_1 x_3 x_4 = x_3 x_2^2 x_1$ с $\partial(x_3) > 0$, т.е. в уравнение (40).

Уравнение jjjj) переводится преобразованием

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow ((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa+1} x_3 x_1, \\ x_2 &\rightarrow x_1 x_2, \\ x_4 &\rightarrow (x_1 x_2 x_3)^\lambda x_1 x_2 ((x_1 x_2 x_3)^{\lambda+1} x_1 x_2)^\varkappa x_3 x_1 \end{aligned}$$

в уравнение F_4 :

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2 x_1 x_2 x_3.$$

Уравнение F_4 при помощи утверждения 1 переводится преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\eta, \\ x_2 \rightarrow x_1^\theta \end{cases}$$

в уравнение $x_3 x_4 = x_1^\theta x_3$, т.е. в уравнение (22).

УТВЕРЖДЕНИЕ 49. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = ((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa+1} x_3 x_2 x_1 \quad (49)$$

где $\varkappa, \lambda$ – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_2 \rightarrow 1, & x_1 \rightarrow (((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa+1} x_3 x_2)^\alpha x_1, \\ x_3 \rightarrow 1, & \langle 48 \rangle; \\ x_4 \rightarrow 1; \end{cases}$$

где α – натуральный параметр.

Доказательство непосредственно следует из утверждений 34 и 48.

УТВЕРЖДЕНИЕ 50. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2 ((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa+1} x_3 x_1, \quad (50)$$

где $\varkappa, \lambda$ – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow x_1 x_2, & x_1 &\rightarrow x_2 x_1, \\ x_4 &\rightarrow x_4 (x_1 x_2 x_3)^{\lambda} x_1 x_2 ((x_1 x_2 x_3)^{\lambda+1} x_1 x_2)^{\varkappa} x_3 x_1, & \langle 49 \rangle; \\ \begin{cases} x_1 &\rightarrow x_1^{\eta}, \\ x_2 &\rightarrow x_1^{\theta}, \end{cases} & & \langle 22 \rangle; \end{aligned}$$

где η, θ – натуральные параметры.

Доказательство очевидно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 51. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_3 x_2 ((x_2 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa+1} x_1 \quad (51)$$

где $\varkappa, \lambda$ – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_3 &\rightarrow x_1 x_3, & x_1 &\rightarrow x_3 x_1, \\ x_4 &\rightarrow x_4 x_3 (x_2 x_1 x_3)^{\lambda} x_2 ((x_2 x_1 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa} x_1, & \langle 50 \rangle. \\ \langle 40 \rangle; \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (51) разделяется в список уравнений:

j) (51), $\partial(x_3) > \partial(x_1)$;

jj) (51), $\partial(x_3) \leq \partial(x_1)$.

Уравнение j) переводится преобразованием

$$\begin{aligned} x_3 &\rightarrow x_1 x_3, \\ x_4 &\rightarrow x_4 x_3 (x_2 x_1 x_3)^{\lambda} x_2 ((x_2 x_1 x_3)^{\lambda+1} x_2)^{\varkappa} x_1 \end{aligned}$$

в уравнение $x_2 x_1 x_3 x_4 = x_3 x_2^2 x_1$ с $\partial(x_3) > 0$, т.е. в уравнение (40).

Уравнение jj) переводится преобразованием $x_1 \rightarrow x_3 x_1$ в уравнение (40).

УТВЕРЖДЕНИЕ 52. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = (x_3 x_1)^{\alpha} x_2, \quad (52)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_3 &\rightarrow 1, & \begin{cases} x_1 &\rightarrow (x_1 x_3)^{\beta} x_1, \\ x_3 &\rightarrow x_1 x_3, \end{cases} \\ \langle 22 \rangle; & & \langle 51 \rangle; \end{aligned}$$

где β – натуральный параметр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (52) разделяется в список уравнений:

- j) (52), $\partial(x_3) = 0$;
- jj) (52), $\partial(x_3) > 0$.

Уравнение j) переводится преобразованием $x_3 \rightarrow 1$ в уравнение $x_2 x_4 = x_1^{\alpha+1} x_2$, т.е. в уравнение (22).

Уравнение jj) согласно утверждению 34 переводится преобразованием

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_3^\beta x_1, \\ x_3 &\rightarrow x_1 x_3 \end{aligned}$$

в уравнение (51).

УТВЕРЖДЕНИЕ 53. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 x_4 &= x_3 x_2^{\alpha+2} x_1, \\ \partial(x_1) &< \partial(x_3 x_2^{\alpha+2}), \quad \partial(x_3) < \partial(x_1 x_2), \end{aligned} \tag{53}$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow x_3 (x_1 x_2)^\nu x_1, \\ x_2 \rightarrow x_1 x_2, \\ x_4 \rightarrow x_4 (x_1 x_2)^\nu x_1, \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow x_3 (x_1 x_2)^{\alpha+1} x_1, \\ x_2 \rightarrow x_1 x_2, \\ x_4 \rightarrow (x_2 x_1)^{\alpha+1}, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow x_1^\eta, \\ x_2 \rightarrow x_1^\theta, \end{array} \right. & \langle 4 \rangle; \\ \langle 22 \rangle; & \left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow x_1 x_3, \\ x_2 \rightarrow x_3 x_2, \end{array} \right. \\ & \langle 52 \rangle; \end{aligned}$$

где ν, η, θ – натуральные параметры с $\nu \leq \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (53) разделяется в список уравнений:

- j) (53), $\partial(x_3) \leq \partial(x_1)$;
- jj) (53), $\partial(x_1) < \partial(x_3)$.

Уравнение j) переводится преобразованием $x_1 \rightarrow x_3 x_1$ в уравнение E_1 :

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2^{\alpha+2} x_1, \quad \partial(x_1) < \partial(x_2^{\alpha+2}).$$

Уравнение E_1 переводится преобразованием

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_2^\nu x_1, \\ x_2 &\rightarrow x_1 x_2, \end{aligned}$$

где $\nu \leq \alpha + 1$, в уравнение E_2 :

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2 (x_1 x_2)^{\alpha+1-\nu} x_3 (x_1 x_2)^\alpha x_1.$$

Уравнение E_2 с $\nu < \alpha + 1$ переводится преобразованием $x_4 \rightarrow x_4 (x_1 x_2)^\alpha x_1$ в уравнение E_3 :

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2 (x_1 x_2)^{\alpha+1-\nu} x_3.$$

Уравнение E_3 согласно утверждению 1 переводится параметрическим преобразованием

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow x_1^\eta, \\ x_2 \rightarrow x_1^\theta \end{array} \right.$$

в уравнение (22).

Уравнение E_2 с $\nu = \alpha + 1$ переводится преобразованием $x_4 \rightarrow (x_2 x_1)^{\alpha+1}$ в уравнение (4).

Уравнение jj) переводится преобразованием

$$\begin{aligned} x_3 &\rightarrow x_1 x_3, \\ x_2 &\rightarrow x_3 x_2 \end{aligned}$$

в уравнение (52).

УТВЕРЖДЕНИЕ 54. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_3 x_2^{\alpha+2} x_1, \quad (54)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}_{(x_1 x_2, x_3 x_2^{\alpha+2})^\mu} x_1, \\ x_3 \rightarrow \mathbf{Fi}_{(x_3 x_2^{\alpha+2}, x_1 x_2)^\mu} x_3, \end{cases}$$

где μ – переменная, значениями которой являются последовательности натуральных параметров, за которым следуют три преобразования:

$$\begin{cases} x_2 \rightarrow 1, \\ x_3 \rightarrow 1, \\ x_4 \rightarrow 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow 1, \\ x_2 \rightarrow 1, \\ x_4 \rightarrow 1; \end{cases} \quad \langle 53 \rangle.$$

Доказательство непосредственно следует из утверждений 35 и 53.

УТВЕРЖДЕНИЕ 55. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2^{\alpha+2} x_3 x_1, \quad (55)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} &x_1 \rightarrow x_2^{\alpha+3} x_1, \\ &\langle 54 \rangle; \\ &\begin{cases} x_1 \rightarrow (x_1 x_2)^{\alpha+2} x_1, \\ x_2 \rightarrow x_1 x_2, \\ x_4 \rightarrow (x_2 x_1)^{\alpha+2}, \end{cases} \\ &\langle 4 \rangle; \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\begin{cases} x_1 \rightarrow (x_1 x_2)^\nu x_1, \\ x_2 \rightarrow x_1 x_2, \\ x_4 \rightarrow x_4 (x_1 x_2)^\nu x_1, \end{cases} \\ &\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\eta, \\ x_2 \rightarrow x_1^\theta, \end{cases} \\ &\langle 22 \rangle; \end{aligned}$$

где ν, η, θ – натуральные параметры и $\nu \leq \alpha + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (55) разделяется в список уравнений:

- j) (55), $\partial(x_2^{\alpha+3}) \leq \partial(x_1)$;
- jj) (55), $(x_2^{\alpha+2}) \leq \partial(x_1) < \partial(x_2^{\alpha+3})$;
- jjj) (55), $\partial(x_2^\nu) \leq \partial(x_1) < \partial(x_2^{\nu+1})$, $\nu \leq \alpha + 1$.

Уравнение j) переводится преобразованием $x_1 \rightarrow x_2^{\alpha+3} x_1$ в уравнение (54).

Уравнение jj) переводится преобразованием

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_2^{\alpha+2} x_1, \\ x_2 &\rightarrow x_1 x_2, \\ x_4 &\rightarrow (x_2 x_1)^{\alpha+2} \end{aligned}$$

в уравнение $x_1 x_2 x_3 = x_2 x_3 x_1$, т.е. в уравнение (4).

Уравнение jjj) переводится преобразованием

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_2^\nu x_1, \quad \nu \leq \alpha + 1, \\ x_2 &\rightarrow x_1 x_2, \\ x_4 &\rightarrow x_4 (x_1 x_2)^\nu x_1 \end{aligned}$$

в уравнение E :

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2 (x_1 x_2)^{\alpha+2-\nu} x_3.$$

Уравнение E согласно утверждению 1 переводится параметрическим преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\eta, \\ x_2 \rightarrow x_1^\theta \end{cases}$$

в уравнение (22).

УТВЕРЖДЕНИЕ 56. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_3 x_1^{\alpha+3} x_2, \quad \partial(x_3) < \partial(x_1 x_2), \quad (56)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_3 x_1, & x_3 &\rightarrow x_1 x_3, \\ \langle 52 \rangle; & & x_2 &\rightarrow x_3 x_2, \\ & & \langle 55 \rangle. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (56) разделяется в список уравнений:

- j) (56), $\partial(x_3) \leq \partial(x_1)$;
- jj) (56), $\partial(x_3) > \partial(x_1)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 57. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_3 x_1^{\alpha+3} x_2, \quad (57)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow 1, & x_3 \rightarrow (x_1 x_2)^\beta x_3, \\ x_2 \rightarrow 1, & \langle 56 \rangle; \\ x_4 \rightarrow 1; \end{cases}$$

где β – натуральный параметр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (57) разделяется в список уравнений:

- j) (57), $\partial(x_1 x_2) = 0$;
- jj) (57), $\partial(x_1 x_2) > 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 58. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2^2 x_3 x_1 \quad (58)$$

описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} & x_2 \rightarrow x_1 x_2, & x_1 \rightarrow x_2 x_1, & x_1 \rightarrow x_2^2 x_1, \\ & x_4 \rightarrow x_4 x_1, & x_2 \rightarrow x_1 x_2, & \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow x_1^\eta, \\ x_2 \rightarrow x_1^\theta, \end{array} \right. & x_4 \rightarrow x_2 x_1, & \langle 56 \rangle; \\ & & \langle 4 \rangle; & \\ & & \langle 22 \rangle; & \end{aligned}$$

где η, θ – натуральные параметры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (58) разделяется в список уравнений:

- j) (58), $\partial(x_1) < \partial(x_2)$;
- jj) (58), $\partial(x_2) \leq \partial(x_1) < \partial(x_2^2)$;
- jjj) (58), $\partial(x_2^2) \leq \partial(x_1)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 59. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_3 (x_2 x_3)^{\alpha+1} x_1, \quad \partial(x_1) < \partial(x_3 (x_2 x_3)^{\alpha+1}), \quad (59)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} & x_1 \rightarrow (x_3 x_2)^\tau x_1, \\ & x_3 \rightarrow x_1 x_3, \\ & x_4 \rightarrow (x_3 x_2 x_1)^{\alpha-\tau} x_3 x_1 (x_3 x_2 x_1)^\tau, \\ & \langle 4 \rangle; \\ & x_1 \rightarrow (x_3 x_2)^\tau x_3 x_1, \\ & x_2 \rightarrow x_1 x_2, \\ & x_4 \rightarrow x_2 x_3 (x_1 x_2 x_3)^{\alpha-\tau-1} x_3 x_1 (x_2 x_3 x_1)^\tau, \\ & \langle 4 \rangle; \\ & x_1 \rightarrow x_3 (x_2 x_3)^\alpha x_1, \\ & x_2 \rightarrow x_1 x_2, \\ & x_4 \rightarrow x_4 (x_2 x_3 x_1)^\alpha, \\ & \langle 47 \rangle; \\ & x_1 \rightarrow (x_3 x_2)^{\alpha+1} x_1, \\ & x_3 \rightarrow x_1 x_3, \\ & x_2 \rightarrow x_3 x_2, \\ & x_4 \rightarrow x_4 (x_1 x_3^2 x_2)^\alpha x_1, \\ & \langle 49 \rangle; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow (x_3 x_2)^{\alpha+1} x_1, \\ x_3 &\rightarrow x_1 x_2 x_3, \\ x_4 &\rightarrow x_3 x_2 x_1 (x_2 x_3 x_2 x_1)^\alpha, \\ &\langle 4 \rangle; \end{aligned}$$

где τ – натуральный параметр, $\tau \leq \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (59) разделяется в список уравнений:

- j) (59), $\partial((x_3 x_2)^\tau) \leq \partial(x_1) < \partial(x_3 (x_2 x_3)^\tau)$, $\tau \leq \alpha$;
- jj) (59), $\partial(x_3 (x_2 x_3)^\tau) \leq \partial(x_1) < \partial((x_3 x_2)^{\tau+1})$, $\tau \leq \alpha$;
- jjj) (59), $\partial((x_3 x_2)^{\alpha+1}) \leq \partial(x_1) < \partial(x_3 (x_2 x_3)^{\alpha+1})$.

Уравнение j) переводится преобразованием

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow (x_3 x_2)^\tau x_1, \\ x_3 &\rightarrow x_1 x_3, \\ x_4 &\rightarrow (x_3 x_2 x_1)^{\alpha-\tau} x_3 x_1 (x_3 x_2 x_1)^\tau \end{aligned}$$

в уравнение $x_2 x_1 x_3 = x_3 x_2 x_1$ с $\partial(x_3) > 0$, т.е. в уравнение (4) с $\partial(x_3) > 0$.

Уравнение jj) переводится преобразованием

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_3 (x_2 x_3)^\tau x_1, \\ x_2 &\rightarrow x_1 x_2 \end{aligned}$$

в уравнение E :

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2 x_3 (x_1 x_2 x_3)^{\alpha-\tau} x_3 x_1 (x_2 x_3 x_1)^\tau, \quad \partial(x_2) > 0.$$

Если $\tau < \alpha$, то уравнение E переводится преобразованием

$$x_4 \rightarrow x_2 x_3 (x_1 x_2 x_3)^{\alpha-\tau-1} x_3 x_1 (x_2 x_3 x_1)^\tau$$

в уравнение $x_1 x_2 x_3 = x_2 x_3 x_1$, $\partial(x_2) > 0$, т.е. в уравнение (4) с $\partial(x_2) > 0$. Если $\tau = \alpha$, то уравнение E переводится преобразованием $x_4 \rightarrow x_4 (x_2 x_3 x_1)^\tau$ в уравнение $x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2 x_3^2 x_1$, $\partial(x_2) > 0$, т.е. в уравнение (47) с $\partial(x_2) > 0$.

Уравнение jjj) переводится преобразованием

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow (x_3 x_2)^{\alpha+1} x_1, \\ x_3 &\rightarrow x_1 x_3 \end{aligned}$$

в уравнение E_1 :

$$x_2 x_1 x_3 x_4 = x_3 x_1 (x_3 x_2 x_1)^{\alpha+1}, \quad \partial(x_3) > 0.$$

Уравнение E_1 разделяется посредством условий $\partial(x_2) \geq \partial(x_3)$ и $\partial(x_3) \geq \partial(x_2)$.

Уравнение E_1 с условием $\partial(x_2) \geq \partial(x_3)$ переводится преобразованием

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow x_3 x_2, \\ x_4 &\rightarrow x_4 (x_1 x_3^2 x_2)^\alpha x_1 \end{aligned}$$

в уравнение $x_2 x_1 x_3 x_4 = x_1 x_3^2 x_2$, $\partial(x_3) > 0$, т.е. в уравнение (49).

Уравнение E_1 с условием $\partial(x_3) \geq \partial(x_2)$ переводится преобразованием

$$\begin{aligned} x_3 &\rightarrow x_2 x_3, \\ x_4 &\rightarrow x_3 x_2 x_1 (x_2 x_3 x_2 x_1)^\alpha \end{aligned}$$

в уравнение $x_1 x_2 x_3 = x_3 x_1 x_2$, т.е. в уравнение (4).

УТВЕРЖДЕНИЕ 60. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_3 (x_2 x_3)^{\alpha+1} x_1, \quad (60)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_2 \rightarrow 1, & x_1 \rightarrow (x_3 (x_2 x_3)^{\alpha+1})^\beta x_1, \\ x_3 \rightarrow 1, & \langle 59 \rangle; \\ x_4 \rightarrow 1; \end{cases}$$

где β – натуральный параметр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (60) разделяется в список уравнений посредством условий $\partial(x_2 x_3) = 0$, $\partial(x_2 x_3) > 0$. Уравнение (60) с $\partial(x_2 x_3) = 0$ переводится первым преобразованием к тривиальному уравнению. Уравнение (60) с условием $\partial(x_2 x_3) > 0$ посредством утверждения 34 переводится преобразованием $x_1 \rightarrow (x_3 (x_2 x_3)^{\alpha+1})^\beta x_1$, где β – натуральный параметр, к уравнению (59).

УТВЕРЖДЕНИЕ 61. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2 x_3^{\alpha+3} x_1, \quad \partial(x_2) < \partial(x_1) < \partial(x_2 x_3^{\alpha+3}), \quad (61)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_2 x_3^{\alpha+2} x_1, & x_1 &\rightarrow x_2 x_3^\beta x_1, \\ x_3 &\rightarrow x_1 x_3, & x_3 &\rightarrow x_1 x_3, \\ x_4 &\rightarrow (x_3 x_1)^{\alpha+2}, & x_4 &\rightarrow x_4 (x_1 x_3)^\beta x_1, \\ \langle 4 \rangle; & & \langle 60 \rangle; \end{aligned}$$

где β – натуральный параметр, $\beta < \alpha + 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (61) переводится преобразованием

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_2 x_3^\beta x_1, & \beta &\leq \alpha + 2, \\ x_3 &\rightarrow x_1 x_3 \end{aligned}$$

в уравнение E :

$$x_2 x_1 x_3 x_4 = x_3 (x_1 x_3)^{\alpha+2-\beta} x_2 (x_1 x_3)^\beta x_1.$$

Уравнение E разделяется в список уравнений посредством условий $\beta = \alpha + 2$, $\beta < \alpha + 2$. Уравнение E , $\beta = \alpha + 2$, переводится преобразованием $x_4 \rightarrow (x_3 x_1)^{\alpha+2}$ в уравнение $x_2 x_1 x_3 = x_3 x_2 x_1$, т.е. в уравнение (4). Уравнение E , $\beta < \alpha + 2$, переводится преобразованием $x_4 \rightarrow x_4 (x_1 x_3)^\beta x_1$ в уравнение (60).

УТВЕРЖДЕНИЕ 62. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2 x_3^{\alpha+3} x_1, \quad (62)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_1, x_2 x_3^{\alpha+3})^\mu x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_2 x_3^{\alpha+3}, x_1)^\mu x_2, \end{cases}$$

где μ – переменная, значениями которой являются последовательности натуральных параметров, за которым следуют три преобразования:

$$\begin{cases} x_2 \rightarrow 1, \\ x_3 \rightarrow 1, \\ x_4 \rightarrow 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow 1, \\ x_4 \rightarrow x_3^{\alpha+2}; \end{cases} \quad \langle 61 \rangle.$$

Доказательство непосредственно следует из утверждений 35 и 60.

УТВЕРЖДЕНИЕ 63. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = x_3^2 x_2 x_1 \quad (63)$$

описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_3 x_1, & x_3 &\rightarrow x_1 x_3, \\ \langle 60 \rangle; & & \langle 60 \rangle. \end{aligned}$$

Список литературы

1. Хмелевский Ю. И. Решение уравнений в словах с тремя неизвестными // Докл. АН СССР. 1967. Т. 177. С. 1023–1025.
2. Хмелевский Ю. И. Уравнения в свободной полугруппе // Труды МИАН. 1971. Т. 107.
3. Makanin G. S. On general solution of equations in a free semigroup // Word equations and related topics. 2nd International Workshop. Rouen, France, 1991. Berlin: Springer-Verlag, 1993. P. 1–5. (Lecture Notes in Comput. Sci. V. 677.)
4. Makanin G. S., Abdulrab H., Maksimenko M. Formal parametric equations // Lecture Notes in Comput. Sci. 1995. V. 965. P. 353–362.
5. Makanin G. S. Multiplication of natural number parameters and equations in a free semigroup // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V. 348. №12. P. 4813–4824.
6. Makanin G. S., Abdulrab H., Goralcik P. Functions for the general solution of parametric word equations // Logical foundations of computer science. 4th International Symposium, Yaroslavl, Russia, 1997. Berlin: Springer-Verlag, 1997. P. 189–202. (Lecture Notes in Comput. Sci. V. 1234.)
7. Makanin G. S., Makanina T. A. Functions for parametrization of solutions of an equation in a free monoid // Trans. Amer. Math. Soc. 2000. V. 352. №1. P. 1–54.

8. Маканин Г. С., Маканина Т. А. Параметризация решений некоторых уравнений квадратов в свободном моноиде // Дискрет. матем. 1999. Т. 11. №3. С. 133–148.
9. Makanin G. S., Makanina T. A. Parametrization of solutions of parametric equation in free monoid // Theoret. Comput. Sci. 2000. V. 242. P. 403–475.
10. Маканин Г. С. Параметризация решений уравнения $x^{-1}y^{-1}xyz^{-1}v^{-1}zv = 1$ в свободной группе // Дискрет. матем. 2001. Т. 13. №2. С. 35–88.
11. Маканин Г. С., Савушкина А. Г. Уравнение в свободной группе, определяющее крашенные косы // Матем. заметки. 2001. Т. 70. №4. С. 591–602.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
16.12.2002