Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Романюк, Приближение классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 2, 91–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm801>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 18:09:12

УДК 517.5

А. С. Романюк

Приближение классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения

В работе исследуются некоторые вопросы приближения классов Бесова $B_{1,\theta}^r$ и $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq p < \infty$, периодических функций многих переменных линейными методами, а также их наилучшие приближения соответственно в пространствах L_1 и L_∞ . В качестве аппаратов приближения используются тригонометрические полиномы со спектром из ступенчатого гиперболического креста. Установлены также точные по порядку оценки уклонов ступенчатых гиперболических сумм Фурье на классах $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq p < \infty$, в пространстве L_∞ .

Библиография: 15 названий.

Введение

В настоящей работе изучаются вопросы, связанные с приближениями линейными методами, а также наилучшими приближениями классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных в пространствах L_1 и L_∞ . Для более подробного освещения рассматриваемых вопросов, а также истории их исследования на других функциональных классах приведем необходимые обозначения и определения.

Пусть $\mathbb{R}^d$ обозначает d -мерное пространство с элементами $x = (x_1, \dots, x_d)$, $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$, и $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [-\pi, \pi]$, — пространство 2π -периодических по каждому аргументу функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty,$$

$$L_p^0(\pi_d) = \left\{ f : f \in L_p(\pi_d), \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, j = \overline{1, d} \right\}.$$

Для функции $f \in L_p^0(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, рассмотрим разность первого порядка по j -й переменной с шагом h

$$\Delta_{h,j} f(x) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_d) - f(x)$$

и определим разность l -го порядка

$$\Delta_{h,j}^l f(x) = \overbrace{\Delta_{h,j} \dots \Delta_{h,j}}^l f(x)$$

в точке x_j с шагом h . Далее, если $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, то смешанная разность порядка k с векторным шагом $h = (h_1, \dots, h_d)$ определяется следующим образом:

$$\Delta_h^k f(x) = \Delta_{h_1,1}^{k_1} \dots \Delta_{h_d,d}^{k_d} f(x).$$

Пусть заданы $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, $1 \leq \theta \leq \infty$ и $1 \leq p \leq \infty$. Функция $f \in L_p^0(\pi_d)$ принадлежит классу $B_{p,\theta}^r$, если

$$\left(\int_{\pi_d} \|\Delta_h^k f(x)\|_p^\theta \prod_{j=1}^d \frac{dh_j}{h_j^{1+r_j\theta}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$\sup_h \|\Delta_h^k f(x)\|_p \prod_{j=1}^d h_j^{-r_j} \leq 1, \quad \theta = \infty.$$

При этом для векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$ и $r = (r_1, \dots, r_d)$ предполагаются выполненными условия $k_j > r_j$, $j = \overline{1, d}$.

Классы $B_{p,\theta}^r$ были введены О. В. Бесовым [1]; при $\theta = \infty$ $B_{p,\infty}^r = H_p^r$, где H_p^r — классы, введенные С. М. Никольским (см. [2; гл. 4, § 4.3]).

В последующих рассуждениях нам будет удобно пользоваться определением классов $B_{p,\theta}^r$ в несколько другом виде.

Для векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, и $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, положим

$$\rho(s) = \{k : k = (k_1, \dots, k_d), 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}\}$$

и для $f \in L_p^0(\pi_d)$ обозначим

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k, x)},$$

где $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k, t)} dt$ — коэффициенты Фурье $f(x)$.

Пусть $1 < p < \infty$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$. Тогда классы $B_{p,\theta}^r$ можно определить следующим образом (см., например, [3]):

$$B_{p,\theta}^r = \left\{ f(x) : \|f\|_{B_{p,\theta}^r} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1 \right\}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$B_{p,\infty}^r = \left\{ f(x) : \|f\|_{B_{p,\infty}^r} = \sup_s 2^{(s,r)} \|\delta_s(f, x)\|_p \leq 1 \right\}.$$

Приведенное определение классов $B_{p,\theta}^r$ можно распространить и на крайние значения $p = 1$ и $p = \infty$, несколько видоизменив при этом “блоки” $\delta_s(f, x)$.

Пусть $V_l(t)$, $l \in \mathbb{N}$, обозначает ядро Валле Пуссена порядка $2l - 1$:

$$V_l(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^l \cos kt + 2 \sum_{k=l+1}^{2l-1} \left(1 - \frac{k-l}{l} \right) \cos kt.$$

Сопоставим каждому вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, полином

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^d (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j))$$

и для $f \in L_p^0(\pi_d)$ обозначим

$$A_s(f, x) = f(x) * A_s(x),$$

где “ $*$ ” — операция свертки. Тогда при каждом $1 \leq p \leq \infty$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, классы $B_{p,\theta}^r$ определяются следующим образом:

$$B_{p,\theta}^r = \left\{ f(x) : \|f\|_{B_{p,\theta}^r} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1 \right\}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$B_{p,\infty}^r = \left\{ f(x) : \|f\|_{B_{p,\infty}^r} = \sup_s 2^{(s,r)} \|A_s(f, x)\|_p \leq 1 \right\}.$$

Для удобства напомним также определение классов $W_{p,\alpha}^r$.

Пусть $F_r(x, \alpha)$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, обозначают многомерные аналоги ядер Бернулли, т.е.

$$F_r(x, \alpha) = 2^d \sum_k \prod_{j=1}^d k_j^{-r_j} \cos\left(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}\right), \quad r_j > 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{R},$$

и в сумме участвуют только те векторы $k = (k_1, \dots, k_d)$, для которых $k_j > 0$, $j = \overline{1, d}$. Обозначим (см., например, [4; гл. 2, § 1]) через $W_{p,\alpha}^r$ класс функций $f(x)$, представимых в виде

$$f(x) = \varphi(x) * F_r(x, \alpha) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \varphi(y) F_r(x - y, \alpha) dy,$$

где $\varphi \in L_p(\pi_d)$, $\|\varphi\|_p \leq 1$.

В дальнейшем будем предполагать, что координаты векторов $r = (r_1, \dots, r_d)$, участвующих в приведенных определениях классов, упорядочены в виде $0 < r_1 = r_2 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_d$ и $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ — вектор с координатами $\gamma_j = r_j / r_1$, $j = \overline{1, d}$.

Пусть Q_n^r обозначает множество

$$Q_n^r = \bigcup_{(s,\gamma) \leq n} \rho(s), \quad r = r_1 \gamma.$$

Тогда множество векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$ таких, что $k \in Q_n^r$, называют *ступенчатым гиперболическим крестом*.

Через $S_n^\gamma(f, x)$ будем обозначать частную сумму Фурье функции $f(x)$ вида

$$S_n^\gamma(f, x) = \sum_{(s,\gamma) \leq n} \delta_s(f, x),$$

которую называют *ступенчатой гиперболической суммой Фурье*.

Иногда нам будет удобно рассматривать множество $\Gamma(N, \gamma)$, соответствующее множеству Q_n^r . По определению

$$\Gamma(N, \gamma) = \left\{ k : k = (k_1, \dots, k_d), 0 < \prod_{j=1}^d |k_j|^{\gamma_j} \leq N \right\}$$

и $\Gamma(N, \gamma)$ называют *гиперболическим крестом*. Через $T(N, \gamma)$ будем обозначать множество полиномов вида

$$t(x) = \sum_{k \in \Gamma(N, \gamma)} c_k e^{i(k, x)},$$

а через $T(Q_n^r)$ – множество полиномов вида

$$t(x) = \sum_{k \in Q_n^r} c_k e^{i(k, x)}.$$

В том случае, когда $\gamma = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$, множества $\Gamma(N, \gamma)$ и $T(N, \gamma)$ будем обозначать соответственно через $\Gamma(N)$ и $T(N)$. Отметим, что в принятых обозначениях справедливы включения

$$T(Q_n^r) \subset T(2^n, \gamma) \subset T(Q_{n+\gamma(d)}^r),$$

где $\gamma(d) = \gamma_1 + \dots + \gamma_d$.

Для $f \in L_p^0(\pi_d)$ определим величины

$$\begin{aligned} E_{N, \gamma}(f)_p &= \inf_{t \in T(N, \gamma)} \|f - t\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty, \\ E_{Q_n^r}(f)_p &= \inf_{t \in T(Q_n^r)} \|f - t\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty, \end{aligned}$$

– наилучшие приближения функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами с “номерами” гармоник из гиперболического и ступенчатого гиперболического крестов соответственно. Для функционального класса F полагаем

$$\begin{aligned} E_{N, \gamma}(F)_p &= \sup_{f \in F} E_{N, \gamma}(f)_p, \\ E_{Q_n^r}(F)_p &= \sup_{f \in F} E_{Q_n^r}(f)_p. \end{aligned}$$

Если A – некоторое конечное множество, то через $|A|$ будем обозначать количество его элементов. Все результаты будем формулировать в терминах порядковых соотношений: функции $\mu_1(N)$ и $\mu_2(N)$ называем *функциями одного порядка* и пишем $\mu_1 \asymp \mu_2$, если существуют постоянные $0 < C_1 \leq C_2$ такие, что $C_1 \mu_2(N) \leq \mu_1(N) \leq C_2 \mu_2(N)$. Аналогично определяются порядковые неравенства $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_1 \gg \mu_2$. Все постоянные C_i , $i = 1, 2, \dots$, которые будут встречаться в работе, могут зависеть только от тех параметров, которые присутствуют в определениях классов, метрики и размерности пространства $\mathbb{R}^d$.

Теперь сформулируем несколько известных утверждений, которые будут использоваться при изложении результатов.

ТЕОРЕМА А (Литтлвуда–Пэли [2; гл. 1, § 5.2]). Пусть задано $p \in (1, \infty)$. Существуют положительные числа C_1 и C_2 такие, что для каждой функции $f \in L_p^0(\pi_d)$ справедлива оценка

$$C_1 \|f\|_p \leq \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f, x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C_2 \|f\|_p.$$

ЛЕММА А [4; гл. 1, § 3]. Пусть $1 < p < q \leq \infty$ и $f \in L_p^0(\pi_d)$. Тогда

$$\|f\|_p \gg \left\{ \sum_s \left(\|\delta_s(f, x)\|_q 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right)} \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad \|s\|_1 = s_1 + \dots + s_d.$$

ТЕОРЕМА Б [5]. Пусть $n = (n_1, \dots, n_d)$, n_j — целые неотрицательные числа, $j = \overline{1, d}$, и

$$t(x) = \sum_{|k_j| \leq n_j} c_k e^{i(k, x)}.$$

Тогда при $1 \leq q < p \leq \infty$ имеет место неравенство

$$\|t\|_p \leq 2^d \prod_{j=1}^d n_j^{\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right)} \|t\|_q.$$

Это неравенство было установлено С. М. Никольским и получило название “неравенство разных метрик”. Отметим, что в случае $d = 1$ и $p = \infty$ соответствующее неравенство доказал Джексон [6].

ТЕОРЕМА В [4; гл. 2, § 1]. Для того чтобы $\|\Delta_h^k f\|_p \ll \prod_{j=1}^d |h_j|^{r_j}$, $k_j > r_d$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} \|\delta_s(f, x)\|_p &\ll 2^{-(s, r)}, & 1 < p < \infty, \\ \|A_s(f, x)\|_p &\ll 2^{-(s, r)}, & 1 \leq p \leq \infty. \end{aligned}$$

Теперь остановимся кратко на истории исследования рассматриваемых в работе вопросов.

В работах [7], [8] (см. также [4]) В. Н. Темляковым было установлено, что в многомерном случае ($d \geq 2$) существуют линейные операторы со значениями в $T(Q_n^r)$, обеспечивающие такой же порядок приближения классов $W_{1,\alpha}^r$ и H_1^r в метрике пространства L_1 , который доставляют наилучшие приближения $E_{Q_n^r}(W_{1,\alpha}^r)_1$ и $E_{Q_n^r}(H_1^r)_1$ соответственно. Но при этом важно отметить, что последовательность таких операторов имеет неограниченные нормы. Аналогичная ситуация обнаружилась также и при исследовании наилучших приближений классов H_∞^r в метрике пространства L_∞ . В связи с этим обстоятельством обратим внимание, что в одномерном случае, как показывают результаты Дамена и Герлиха [9], последовательность операторов свертки, реализующая порядок наилучших приближений классов периодических функций W_p^r в метрике пространства L_p , $1 \leq p \leq \infty$, является равномерно ограниченной.

Таким образом, представляется интересным исследовать свойства линейных операторов со значениями в $T(Q_n^r)$, достаточно хорошо приближающих классы $B_{\infty,\theta}^r$ и $B_{1,\theta}^r$ соответственно в метриках пространств L_∞ и L_1 .

Работа состоит из четырех параграфов. В §1 установлены точные по порядку оценки наилучших приближений классов $B_{1,\theta}^r$ в пространстве L_1 полиномами из $T(Q_n^r)$ и $T(Q_n^{r'})$, где $r' = (r'_1, \dots, r'_d)$ – вектор, который будет определен ниже. В процессе получения этих оценок указываются конкретные линейные методы приближения.

В §2 исследуются вопросы приближения классов $B_{p,\theta}^r$ в равномерной метрике. Здесь установлены порядки уклонений ступенчатых гиперболических сумм Фурье $S_n^\gamma(f, x)$, $f \in B_{p,\theta}^r$, $1 \leq p < \infty$, в пространстве L_∞ , а также оценки сверху наилучших приближений $E_{Q_n^r}(B_{p,\theta}^r)_\infty$, $1 \leq p \leq 2$. В §3 получены оценки снизу для норм операторов приближения классов $B_{\infty,\theta}^r$ и $B_{1,\theta}^r$ в пространствах L_∞ и L_1 соответственно. Наконец, в §4 на основании полученной оценки снизу приближения классов $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq p \leq \infty$, линейными методами и результатов предыдущих параграфов (§§1, 2) установлено соотношение между линейными методами приближения и наилучшими приближениями указанных классов в пространстве L_∞ .

При доказательстве основных утверждений нами используются и развиваются методы, которые применялись в [7], [8], [10] (см. также [4]) при исследовании соответствующих вопросов на классах $W_{p,\alpha}^r$ и H_p^r . Более конкретно об этом говорится в замечаниях к полученным результатам.

§1. Наилучшие приближения классов $B_{1,\theta}^r$ в пространстве L_1

Пусть $r' = (r'_1, \dots, r'_d)$ – вектор такой, что $r_1 = r'_1 = \dots = r'_\nu$, $r_1 < r'_j < r_j$, $j = \overline{\nu+1, d}$, и $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_d)$, где $\gamma'_j = r'_j/r'_1$, $j = \overline{1, d}$.

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $r_1 > 0$, $1 \leq \theta < \infty$. Тогда имеют место порядковые соотношения

$$E_{Q_n^r}(B_{1,\theta}^r)_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{\frac{d-1}{\theta}}, \quad (1)$$

$$E_{Q_n^{r'}}(B_{1,\theta}^r)_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{\frac{\nu-1}{\theta}}, \quad (1')$$

где $1/\theta + 1/\theta' = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получим сначала оценку сверху в (1). Пусть $f \in B_{1,\theta}^r$. В качестве приближающего полинома рассмотрим полином

$$t_n(f, x) = \sum_{(s,\gamma) \leq n} A_s(f, x).$$

В таком случае будем иметь

$$\begin{aligned} E_{Q_n^r}(f)_1 &\leq \|f(x) - t_n(f, x)\|_1 \\ &\leq \sum_{(s,\gamma) > n} \|A_s(f, x)\|_1 = \sum_{(s,\gamma) > n} 2^{(s,r)} \|A_s(f, x)\|_1 2^{-(s,r)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Применив к последней сумме в (2) неравенство Гёльдера с показателем θ (с соответствующей модификацией при $\theta = 1$) и воспользовавшись оценкой

$$\sum_{(s,\gamma) > n} 2^{-(s,\gamma)} \asymp 2^{-n} n^{d-1}, \quad (3)$$

получим

$$\begin{aligned} E_{Q_n^r}(f)_1 &\leq \left(\sum_{(s,\gamma) > n} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, x)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{(s,\gamma) > n} 2^{-(s,r)\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \\ &\ll \left(\sum_{(s,\gamma) > n} 2^{-(s,r)\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \|f\|_{B_{1,\theta}^r} \ll 2^{-nr_1} n^{\frac{d-1}{\theta'}}. \end{aligned}$$

Для получения необходимой оценки сверху в (1') нужно в качестве приближающего полинома для $f \in B_{1,\theta}^r$ рассмотреть полином

$$\tilde{t}_n(f, x) = \sum_{(s,\gamma') \leq n} A_s(f, x)$$

и затем после применения неравенства Гёльдера воспользоваться соотношением (см. [4; введение, лемма В])

$$\sum_{(s,\gamma') > n} 2^{-(s,\gamma')} \asymp 2^{-n} n^{\nu-1}. \quad (3')$$

Оценки сверху в (1) и (1') доказаны.

Переходя к соответствующим оценкам снизу, заметим, что достаточно получить нужную оценку при $\nu = d$, т.е. в случае $\gamma = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$.

Как следует из общего результата С. М. Никольского (см., например, [11; гл. 1, § 1.4]), для $g \in L_1(\pi_d)$ имеет место соотношение

$$E_{Q_n^r}(g)_1 = \sup_{\substack{P \in L^\perp(T(Q_n^r)) \\ \|P\|_\infty \leq 1}} \left| \int_{\pi_d} g(x) P(x) dx \right|, \quad (4)$$

где $L^\perp(T(Q_n^r))$ — множество функций, ортогональных пространству тригонометрических полиномов с “номера́ми” гармоник из множества Q_n^r .

Пусть задано $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$F_{r,n}(x) = \sum_{n < (s,1) \leq n+d} \sum_{k \in \rho^+(s)} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1} \cos k_j x_j,$$

где $r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}_+^d$, $\rho^+(s) = \{k : k = (k_1, \dots, k_d), 2^{s_j-1} \leq k_j < 2^{s_j}, j = \overline{1, d}\}$, и покажем, что $g(x) = C_1 n^{-\frac{d-1}{\theta}} F_{r,n}(x) \in B_{1,\theta}^r$, $C_1 > 0$. Известно (см., например, [4; гл. 2, § 4]), что функция

$$F_r(x) = \sum_{k > 0} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1} \cos k_j x_j$$

принадлежит классу H_1^r , и поэтому согласно теореме В для нее выполняется соотношение

$$\|A_s(F_r, x)\|_1 \ll 2^{-(s,r)}.$$

Следовательно, для $\|g\|_{B_{1,\theta}^r}$ можем записать оценку

$$\begin{aligned} \|g\|_{B_{1,\theta}^r} &\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(F_{r,n}, x)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{n < (s,1) \leq n+d} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(F_{r,n}, x)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\ll n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{n < (s,1) \leq n+d} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1, \end{aligned}$$

т.е. $g \in B_{1,\theta}^r$.

Теперь перейдем к построению функции $P(x)$. Положим $\Omega_n = \Gamma(2^{n+d}) \setminus \Gamma(2^n)$ и заметим, что множество Ω_n не содержит векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, d}$, принадлежащих Q_n^r . Следовательно, каждая функция, содержащая гармоники с “номерами” из Ω_n , принадлежит $L^\perp(T(Q_n^r))$.

Далее, пусть

$$P_n(x) = \sum_{k \in \Omega_n} \prod_{j=1}^d a(k_j, x_j) k_j^{-1},$$

где $a(l, t) = \cos lt + \cos(l+1)t - \cos 2lt - \cos(2l+1)t$.

С.А. Теляковским установлено [12], что для функции

$$\varphi_N(x) = \sum_{k \in \Gamma(N)} \prod_{j=1}^d a(k_j, x_j) k_j^{-1}$$

справедливо порядковое неравенство $\|\varphi_N\|_\infty \ll 1$, $N \rightarrow \infty$, из которого следует, что $\|P_n\|_\infty \ll 1$, $n \rightarrow \infty$. Таким образом, выбрав в качестве $P(x)$ функцию $P(x) = C_2 P_n(x)$ с соответствующей постоянной $C_2 > 0$, в силу (4) будем иметь

$$\begin{aligned} E_{Q_n^r}(g)_1 &\gg n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{k \in \Omega_n} \prod_{j=1}^d k_j^{-1} (k_j^{-r_1} + (k_j + 1)^{-r_1} - (2k_j)^{-r_1} - (2k_j + 1)^{-r_1}) \\ &\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{k \in \Omega_n} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1-1} \gg n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{(s,1)=n+d} \prod_{j=1}^d \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}} k_j^{-r_1-1} \\ &\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{(s,1)=n+d} 2^{-\|s\|_1 r_1} \asymp 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{d-1} = 2^{-nr_1} n^{\frac{d-1}{\theta'}}. \end{aligned}$$

Оценки снизу, а вместе с ними и теорема доказаны.

Обратим внимание, что, как следует из доказательства теоремы 1.1, порядки наилучших приближений $E_{Q_n^r}(B_{1,\theta}^r)_1$ и $E_{Q_n^{r'}}(B_{1,\theta}^r)_1$ реализуются при приближении линейными методами.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Порядки величин $E_{Q_n^r}(W_{1,\alpha}^r)_1$ и $E_{Q_n^r}(H_1^r)_1$ установлены В.Н. Темляковым (см. [4; гл. 2, § 4]).

§ 2. Приближение классов $B_{p,\theta}^r$ в равномерной метрике

Здесь мы устанавливаем точные по порядку оценки приближения классов $B_{p,\theta}^r$ ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье $S_n^\gamma(f, x)$ в метрике пространства L_∞ , а также оценки сверху наилучших приближений этих классов тригонометрическими полиномами с “номера́ми” гармоник из гиперболического креста.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $1 \leq p < \infty$, $r_1 > 1/p$, $1 \leq \theta \leq \infty$. Тогда

$$\sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \|f(x) - S_n^\gamma(f, x)\|_\infty \asymp 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p})} n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим сначала оценку сверху. Пусть $f \in B_{p,\theta}^r$ и q_0 — некоторое число, удовлетворяющее условию $p < q_0 < \infty$. Тогда согласно неравенству Минковского и неравенству разных метрик Никольского (теорема Б) можем записать

$$\begin{aligned} \|f(x) - S_n^\gamma(f, x)\|_\infty &= \left\| f(x) - \sum_{(s,\gamma) \leq n} \delta_s(f, x) \right\|_\infty \leq \sum_{(s,\gamma) > n} \|\delta_s(f, x)\|_\infty \\ &\ll \sum_{(s,\gamma) > n} 2^{\frac{\|s\|_1}{q_0}} \|\delta_s(f, x)\|_{q_0} \asymp \sum_{(s,\gamma) > n} 2^{\frac{\|s\|_1}{q_0}} \|A_s(f, x)\|_{q_0} \\ &\ll \sum_{(s,\gamma) > n} 2^{\frac{\|s\|_1}{q_0}} 2^{\|s\|_1(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_0})} \|A_s(f, x)\|_p = \sum_{(s,\gamma) > n} 2^{\frac{\|s\|_1}{p}} \|A_s(f, x)\|_p. \end{aligned} \quad (5)$$

Далее, пусть $1 \leq \theta < \infty$. Тогда, применив к последней сумме в (5) неравенство Гёльдера (с соответствующей модификацией при $\theta = 1$), продолжим оценку (5):

$$\begin{aligned} &\leq \left(\sum_{(s,\gamma) > n} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{(s,\gamma) > n} 2^{-(s,r-\frac{1}{p})\frac{\theta}{\theta-1}} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} \\ &\ll \|f\|_{B_{p,\theta}^r} \left(\sum_{(s,\gamma) > n} 2^{-(s,r-\frac{1}{p})\frac{\theta}{\theta-1}} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} \\ &\leq \left(\sum_{(s,\gamma) > n} 2^{-(s,\bar{\gamma})(r_1-\frac{1}{p})\frac{\theta}{\theta-1}} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} = \mathcal{J}_1, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\bar{\gamma} = (\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_d)$ — вектор с координатами $\bar{\gamma}_j = (r_j - 1/p)/(r_1 - 1/p)$, $j = \overline{1, d}$, а $r - 1/p$ обозначает вектор с координатами $r_j - 1/p$, $j = \overline{1, d}$. Поскольку $\bar{\gamma}_j = \gamma_j = 1$ при $j = \overline{1, \nu}$ и $1 < \gamma_j \leq \bar{\gamma}_j$ при $j = \overline{\nu+1, d}$, то согласно соотношению (3') для величины $\mathcal{J}_1$ получаем оценку

$$\mathcal{J}_1 \ll 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p})} n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \quad (7)$$

Сопоставив (5)–(7), приходим к оценке

$$\sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \|f(x) - S_n^\gamma(f, x)\|_\infty \ll 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p})} n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Пусть теперь $\theta = \infty$. Принимая во внимание, что в таком случае $B_{p,\infty}^r = H_p^r$ и согласно теореме В $\|A_s(f, x)\|_p \ll 2^{-(s,r)}$, $f \in H_p^r$, для последней суммы в (5) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{(s,\gamma) > n} 2^{\frac{\|s\|_1}{p}} \|A_s(f, x)\|_p &\ll \sum_{(s,\gamma) > n} 2^{-(s, r - \frac{1}{p})} \\ &= \sum_{(s,\gamma) > n} 2^{-(s, \overline{\gamma})(r_1 - \frac{1}{p})} \ll 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p})} n^{\nu-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, согласно (5) и (8) приходим к оценке

$$\sup_{f \in B_{p,\infty}^r} \|f(x) - S_n^\gamma(f, x)\|_\infty \ll 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p})} n^{\nu-1},$$

и, следовательно, оценка сверху в теореме установлена.

Теперь перейдем к доказательству оценки снизу, которую достаточно получить для случая $\nu = d$.

Пусть

$$f_s(x) = \prod_{j=1}^d (V_{2^{s_j+1}}(x_j) - V_{2^{s_j}}(x_j)).$$

Поскольку (см., например, [4; гл. 2, §5])

$$\|f_s\|_p \asymp 2^{\|s\|_1(1-\frac{1}{p})}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

легко проверить, что функции

$$f_1(x) = C_3 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{(s,1)=n+1} f_s(x), \quad C_3 > 0,$$

при $1 \leq \theta < \infty$ и

$$f_2(x) = C_4 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p})} \sum_{(s,1)=n+1} f_s(x), \quad C_4 > 0,$$

при $\theta = \infty$ принадлежат соответственно классам $B_{p,\theta}^r$ и $B_{p,\infty}^r$. Кроме того, легко убедиться, что $S_n^\gamma(f_1, x) = 0$ и $S_n^\gamma(f_2, x) = 0$. Таким образом, принимая во внимание, что

$$\left\| \sum_{(s,1)=n+1} f_s(x) \right\|_\infty \asymp 2^n n^{d-1},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \|f_1(x) - S_n^\gamma(f_1, x)\|_\infty &= \|f_1\|_\infty \asymp 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p})} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}, \\ \|f_2(x) - S_n^\gamma(f_2, x)\|_\infty &= \|f_2\|_\infty \asymp 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p})} n^{(d-1)}. \end{aligned}$$

Оценка снизу и вместе с ней теорема доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Порядки величин

$$\sup_{f \in \Phi_p^r} \|f(x) - S_n^\gamma(f, x)\|_\infty,$$

где Φ_p^r – класс H_p^r , $1 \leq p < \infty$, либо $W_{p,\alpha}^r$, $1 < p < \infty$, установлены В. Н. Темляковым [10]. В случае $p = \infty$ порядок уклонений гиперболических сумм Фурье на классах $W_{\infty,\alpha}^r$ в метрике пространства L_∞ установлен И. Р. Лифляндом [13].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В отличие от приближения классов $B_{p,\theta}^r$, $1 < p < \infty$, ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье в метрике пространства L_q , $1 < q < \infty$ [14], при приближении их в равномерной метрике обнаружилось, что при $1 \leq \theta < p$ и $\nu \geq 2$

$$\sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \|f(x) - S_n^\gamma(f, x)\|_\infty \ll \sup_{f \in W_{p,\alpha}^r} \|f(x) - S_n^\gamma(f, x)\|_\infty.$$

Теперь перейдем к установлению оценки сверху наилучшего приближения классов $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq p \leq 2$, в пространстве L_∞ полиномами с “номерами” гармоник из гиперболического креста.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $1 \leq p \leq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $r_1 > 1/p$. Тогда имеет место оценка

$$E_{N,\gamma}(B_{p,\theta}^r)_\infty \ll N^{-(r_1 - \frac{1}{p})} (\log^{\nu-1} N)^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $p = 2$, т.е. пусть $f \in B_{2,\theta}^r$. Обозначим

$$f_n(x) = \sum_{k \in Q_n^r \setminus Q_{n-1}^r} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)}$$

и запишем $f(x)$ в виде

$$f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} f_l(x).$$

Тогда при $2^n \leq N < 2^{n+1}$

$$E_{N,\gamma}(f)_\infty \leq \sum_{l=n}^{\infty} E_{N,\gamma}(f_l)_\infty. \quad (9)$$

Установим оценку сверху величины $E_{N,\gamma}(f_l)_\infty$. С этой целью выберем число ρ_1 исходя из неравенства $1/2 < \rho_1 < r_1$ и рассмотрим вектор $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_d)$ с координатами

$$\rho_j = \rho_1, \quad j = \overline{1, \nu}, \quad \rho_1 \gamma_j - \frac{1}{2}(\gamma_j - 1) < \rho_j < \rho_1 \gamma_j, \quad j = \overline{\nu+1, d}.$$

Заметим, что из неравенства $\rho_j < \rho_1 \gamma_j$ следует неравенство $\gamma_j < (r_j - \rho_j)/(r_1 - \rho_1)$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi_l(x) = f_l(x) * \sum_{\substack{k \in Q_l^r \setminus Q_{l-1}^r \\ k_j > 0}} \prod_{j=1}^d k_j^{\rho_j} \cos k_j x_j. \quad (10)$$

Тогда, воспользовавшись оценкой, полученной в [8]:

$$E_{N,\gamma}(W_2^\rho)_\infty \asymp N^{\frac{1}{2}-\rho_1}, \quad (11)$$

где W_2^ρ обозначает класс $W_{2,\alpha}^\rho$ при $\alpha = 0$, будем иметь

$$E_{N,\gamma}(f_l)_\infty \leq E_{N,\gamma}(W_2^\rho)_\infty \|\varphi_l\|_2 \ll N^{\frac{1}{2}-\rho_1} \|\varphi_l\|_2. \quad (12)$$

Оценим $\|\varphi_l\|_2$. Пусть $2 < \theta < \infty$. В таком случае, принимая во внимание (10) и воспользовавшись неравенством Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} \|\varphi_l\|_2^2 &= \sum_{l-1 < (s,\gamma) \leq l} \|\delta_s(\varphi_l, x)\|_2^2 \ll \sum_{l-1 < (s,\gamma) \leq l} 2^{2(\rho,s)} \|\delta_s(f_l, x)\|_2^2 \\ &= \sum_{l-1 < (s,\gamma) \leq l} 2^{2(\rho,s)} \|\delta_s(f, x)\|_2^2 \\ &\leq \left(\sum_{l-1 < (s,\gamma) \leq l} 2^{\frac{2\theta}{\theta-2}(\rho-r,s)} \right)^{\frac{\theta-2}{\theta}} \left(\sum_{l-1 < (s,\gamma) \leq l} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_2^\theta \right)^{\frac{2}{\theta}} \\ &\leq \left(\sum_{l-1 < (s,\gamma) \leq l} 2^{\frac{2\theta}{\theta-2}(\rho-r,s)} \right)^{\frac{\theta-2}{\theta}} \|f\|_{B_{p,\theta}^r}^2 \leq \left(\sum_{l-1 < (s,\gamma) \leq l} 2^{-\frac{2\theta}{\theta-2}(r-\rho,s)} \right)^{\frac{\theta-2}{\theta}} \\ &= \left(\sum_{l-1 < (s,\gamma) \leq l} 2^{-\frac{2\theta}{\theta-2}(r_1-\rho_1)(\tilde{\gamma},s)} \right)^{\frac{\theta-2}{\theta}}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_d)$, $\tilde{\gamma}_j = (r_j - \rho_j)/(r_1 - \rho_1)$, $j = \overline{1, d}$. Поскольку $\gamma_j = \tilde{\gamma}_j$, $j = \overline{1, \nu}$, и $1 < \gamma_j \leq \tilde{\gamma}_j$, $j = \overline{\nu+1, d}$, то, воспользовавшись оценкой (3'), запишем соотношение (13) в виде

$$\|\varphi_l\|_2^2 \ll 2^{-2l(r_1-\rho_1)} l^{(\nu-1)\frac{\theta-2}{\theta}},$$

т.е.

$$\|\varphi_l\|_2 \ll 2^{-l(r_1-\rho_1)} l^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \quad (14)$$

Если же $\theta = \infty$, то для $f \in B_{2,\infty}^r$ согласно теореме В $\|\delta_s(f, x)\|_2 \ll 2^{-(s,r)}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \|\varphi_l\|_2^2 &\ll \sum_{l-1 < (s,\gamma) \leq l} 2^{2(\rho,s)} \|\delta_s(f, x)\|_2^2 \ll \sum_{l-1 < (s,\gamma) \leq l} 2^{2(\rho-r,s)} \\ &= \sum_{l-1 < (s,\gamma) \leq l} 2^{-2(r_1-\rho_1)(\tilde{\gamma},s)} \ll 2^{-2l(r_1-\rho_1)} l^{\nu-1}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\|\varphi_l\|_2 \ll 2^{-l(r_1-\rho_1)} l^{\frac{\nu-1}{2}}. \quad (15)$$

Пусть теперь $1 \leq \theta \leq 2$. Согласно неравенству

$$\left(\sum_k |a_k|^{\nu_2} \right)^{\frac{1}{\nu_2}} \leq \left(\sum_k |a_k|^{\nu_1} \right)^{\frac{1}{\nu_1}}, \quad 1 \leq \nu_1 \leq \nu_2 < \infty,$$

будем иметь (см. начало неравенства (13))

$$\begin{aligned} \|\varphi_l\|_2 &\ll \left(\sum_{l-1 < (s,\gamma) \leq l} 2^{2(\rho,s)} \|\delta_s(f,x)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{l-1 < (s,\gamma) \leq l} 2^{-2(r_1-\rho_1)(\tilde{\gamma},s)} 2^{2(r,s)} \|\delta_s(f,x)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sup_{s: l-1 < (s,\gamma) \leq l} 2^{-(r_1-\rho_1)(\tilde{\gamma},s)} \left(\sum_{l-1 < (s,\gamma) \leq l} 2^{2(r,s)} \|\delta_s(f,x)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sup_{s: l-1 < (s,\gamma) \leq l} 2^{-(r_1-\rho_1)(\tilde{\gamma},s)} \left(\sum_{l-1 < (s,\gamma) \leq l} 2^{(r,s)\theta} \|\delta_s(f,x)\|_2^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\leq 2^{-l(r_1-\rho_1)} \|f\|_{B_{2,\theta}^r} \leq 2^{-l(r_1-\rho_1)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, подставив (14)–(16) в (12), получим

$$E_{N,\gamma}(f_l)_\infty \ll N^{\frac{1}{2}-\rho_1} 2^{-l(r_1-\rho_1)} l^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, \quad 1 \leq \theta \leq \infty,$$

и, следовательно, согласно (9)

$$\begin{aligned} E_{N,\gamma}(f)_\infty &\ll N^{\frac{1}{2}-\rho_1} \sum_{l=n}^{\infty} 2^{-l(r_1-\rho_1)} l^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \\ &\ll N^{\frac{1}{2}-\rho_1} 2^{-n(r_1-\rho_1)} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \asymp N^{\frac{1}{2}-r_1} (\log^{\nu-1} N)^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \end{aligned} \quad (17)$$

Теорема в случае $p = 2$ доказана.

Искомую оценку в случае $1 \leq p < 2$ получим на основании (17) из следующих соображений. Так, в силу неравенства разных метрик для $f \in B_{p,\theta}^r$, $1 \leq p < 2$, будем иметь

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p,\theta}^r} &= \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f,x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \gg \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} 2^{(s,1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\theta} \|A_s(f,x)\|_2^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= \left(\sum_s 2^{\left(s, r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\right)\theta} \|A_s(f,x)\|_2^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp \|f\|_{B_{2,\theta}^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $r - 1/p + 1/2$ обозначает вектор с координатами $r_j - 1/p + 1/2, j = \overline{1, d}$. Из (18) заключаем, что

$$B_{p, \theta}^r \subset B_{2, \theta}^{r - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}}, \quad 1 \leq p < 2. \quad (19)$$

Таким образом, согласно (17) и (19) приходим к искомой оценке:

$$E_{N, \gamma}(B_{p, \theta}^r)_\infty \ll E_{N, \gamma}\left(B_{2, \theta}^{r - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}}\right)_\infty \ll N^{-r_1 + \frac{1}{p}} (\log^{\nu-1} N)^{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Порядковые оценки сверху для $E_{N, \gamma}(W_{p, \alpha}^r)_\infty$ и $E_{N, \gamma}(H_p^r)_\infty$, $1 < p \leq 2$, получены в [8; теоремы 2.3 и 2.4].

§3. Оценки для норм операторов приближения

В этом параграфе мы исследуем вопрос о нормах последовательностей линейных операторов, наилучшим образом приближающих классы $B_{\infty, \theta}^r$ и $B_{1, \theta}^r$ в метриках пространств L_∞ и L_1 соответственно.

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть на $L_\infty^0(\pi_d)$ определена последовательность ограниченных линейных операторов $\mathcal{L}_{Q_n^r}$, $r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}_+^d$, ставящих в соответствие каждой функции из $L_\infty^0(\pi_d)$ тригонометрический полином из $T(Q_n^r)$ таким образом, что для функций $f(x)$ из класса $B_{\infty, \theta}^r$, $1 \leq \theta < \infty$, выполнено порядковое неравенство

$$\|f - \mathcal{L}_{Q_n^r}(f)\|_\infty \ll E_{Q_n^r}(B_{\infty, \theta}^r)_\infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место оценка

$$\|\mathcal{L}_{Q_n^r}\| \gg n^{(d-1)(1-\varepsilon)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_d)$, $\tau_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, d}$, и I_τ обозначает оператор сдвига аргумента функции $f(x)$ на вектор τ , т.е. $I_\tau f(x) = f(x + \tau)$. Следуя Марцинкевичу [15], рассмотрим ограниченный линейный оператор $T_{Q_n^r}$, действующий на $f(x)$ по правилу

$$(T_{Q_n^r} f)(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} (I_{-\tau} \mathcal{L}_{Q_n^r} I_\tau f)(x) d\tau.$$

Тогда вследствие инвариантности нормы относительно сдвига аргумента справедливо соотношение

$$\|T_{Q_n^r}\| \leq \|\mathcal{L}_{Q_n^r}\|. \quad (20)$$

Легко проверить также, что

$$T_{Q_n^r}(e^{i(k, x)}) = \begin{cases} c_{n, k} e^{i(k, x)}, & k \in Q_n^r, \\ 0, & k \notin Q_n^r. \end{cases}$$

Действительно, если $k \in Q_n^r$, то

$$\begin{aligned} T_{Q_n^r}(e^{i(k,x)}) &= (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} I_{-\tau} \mathcal{L}_{Q_n^r} e^{i(k,x+\tau)} d\tau \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} I_{-\tau} \mathcal{L}_{Q_n^r} e^{i(k,x)} e^{i(k,\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

В силу того что $\mathcal{L}_{Q_n^r}(e^{i(k,x)})$ есть элемент из $T(Q_n^r)$, можем записать

$$\mathcal{L}_{Q_n^r}(e^{i(k,x)}) = \sum_{m \in Q_n^r} c_{n,m} e^{i(m,x)}. \quad (22)$$

Из (21) и (22) находим

$$\begin{aligned} T_{Q_n^r}(e^{i(k,x)}) &= (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} I_{-\tau} \left(e^{i(k,\tau)} \sum_{m \in Q_n^r} c_{n,m} e^{i(m,x)} \right) d\tau \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \left(e^{i(k,\tau)} \sum_{m \in Q_n^r} c_{n,m} e^{i(m,x-\tau)} \right) d\tau = c_{n,k} e^{i(k,x)}. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что если $k \notin Q_n^r$, то $T_{Q_n^r}(e^{i(k,x)}) = 0$. Следовательно, оператор $T_{Q_n^r}$ действует на $f(x)$ следующим образом:

$$(T_{Q_n^r} f)(x) = f(x) * \sum_{k \in Q_n^r} c_{n,k} e^{i(k,x)}. \quad (23)$$

Далее, пусть $f \in B_{\infty,\theta}^r$. Тогда $I_\tau f \in B_{\infty,\theta}^r$ и согласно условию теоремы

$$\|I_\tau f - \mathcal{L}_{Q_n^r}(I_\tau f)\|_\infty \ll E_{Q_n^r}(B_{\infty,\theta}^r)_\infty. \quad (24)$$

Пусть I обозначает единичный оператор. Тогда, воспользовавшись (24), можем записать

$$\begin{aligned} \|f - T_{Q_n^r}(f)\|_\infty &= (2\pi)^{-d} \left\| \int_{\pi_d} I_{-\tau} (I - \mathcal{L}_{Q_n^r})(I_\tau f) d\tau \right\|_\infty \\ &\leq (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \|I_{-\tau} (I_\tau(f) - \mathcal{L}_{Q_n^r}(I_\tau(f)))\|_\infty d\tau \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \|I_\tau(f) - \mathcal{L}_{Q_n^r}(I_\tau(f))\|_\infty d\tau \ll E_{Q_n^r}(B_{\infty,\theta}^r)_\infty. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, как следует из соотношений (20) и (25), доказательство теоремы достаточно провести для оператора, который действует согласно формуле (23).

Итак, пусть

$$\mathcal{L}_{Q_n^r}(f) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(x-y) L_{Q_n^r}(y) dy,$$

где

$$L_{Q_n^r}(y) = \sum_{k \in Q_n^r} c_{n,k} e^{i(k,y)}.$$

Тогда для нормы оператора $\mathcal{L}_{Q_n^r}$ можем записать

$$\|\mathcal{L}_{Q_n^r}\| = \|L_{Q_n^r}\|_1. \quad (26)$$

Для проведения дальнейших рассуждений докажем вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 3.1. *Существует $\delta > 0$ такое, что для всех n выполнено неравенство*

$$\sum_{k \in Q_n^r} |c_{n,k}| \geq \delta |Q_n^r|. \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При установлении оценки (27) будем вести рассуждения от противного, т.е. предположим, что для любого $\delta > 0$ найдется такое n , что

$$\sum_{k \in Q_n^r} |c_{n,k}| < \delta |Q_n^r|. \quad (28)$$

Обозначим $\Omega = \{k : k = (k_1, \dots, k_d), |c_{n,k}| > 1/2\}$. Тогда согласно (28)

$$\begin{aligned} \delta |Q_n^r| &> \sum_{k \in Q_n^r \setminus \Omega} |c_{n,k}| + \sum_{k \in \Omega} |c_{n,k}| > \sum_{k \in Q_n^r \setminus \Omega} |c_{n,k}| + \frac{1}{2} \sum_{k \in \Omega} 1 \\ &= \sum_{k \in Q_n^r \setminus \Omega} |c_{n,k}| + \frac{1}{2} |\Omega| \geq \frac{1}{2} |\Omega|, \end{aligned}$$

т.е.

$$|\Omega| < 2\delta |Q_n^r|. \quad (29)$$

Пусть далее S обозначает множество таких векторов $s = (s_1, \dots, s_d)$, $(s, 1) \leq n$, $\rho(s) \subset Q_n^r$, что для некоторого вектора $k^s = (k_1^s, \dots, k_d^s) \in \rho(s)$ выполнено неравенство $|c_{n,k^s}| \leq 1/2$, и, соответственно, $\bar{S}$ — множество остальных векторов $s = (s_1, \dots, s_d)$ таких, что $\rho(s) \subset Q_n^r$. Тогда, воспользовавшись оценкой

$$\sum_{s \in \bar{S}} 2^{(s,1)} \leq |\Omega|$$

и соотношением (29), можем записать

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \bar{S}} 2^{(s,1)} &< 2\delta |Q_n^r| \asymp \delta 2^n n^{d-1} = 2^{n - \log_2 \frac{1}{\delta}} n^{d-1} \\ &\asymp 2^{n - \log_2 \frac{1}{\delta}} \left(n - \log_2 \frac{1}{\delta} \right)^{d-1} \asymp \sum_{(s,1) \leq n - \log_2 \frac{1}{\delta}} 2^{(s,1)}. \end{aligned}$$

Следовательно, для количества элементов множества $\bar{S}$ должно выполняться соотношение

$$|\bar{S}| \ll \left(n - \log_2 \frac{1}{\delta} \right)^d, \quad \delta > n^{-1}. \quad (30)$$

Далее, поскольку

$$|S| + |\bar{S}| \asymp n^d, \quad (31)$$

согласно (30) и (31) приходим к оценке

$$|S| \geq C(d) \left(n^d - \left(n - \log_2 \frac{1}{\delta} \right)^d \right) \gg n^{d-1} \log_2 \frac{1}{\delta}. \quad (32)$$

Теперь рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{s \in S} \left(\prod_{j=1}^d k_j^s \right)^{-r_1} e^{i(k^s, x)} |S|^{-\frac{1}{\theta}}, \quad (33)$$

где векторы $k^s = (k_1^s, \dots, k_d^s) \in Q_n^r$ такие, что $|c_{n,k^s}| \leq 1/2$. Поскольку функция

$$g(x) = \sum_{s \in S} \left(\prod_{j=1}^d k_j^s \right)^{-r_1} e^{i(k^s, x)}$$

принадлежит классу H_∞^r [4; гл. 2, §5, лемма 5.1], то согласно теореме В

$$\|A_s(g, x)\|_\infty \ll 2^{-r_1 \|s\|_1}$$

и поэтому

$$\|f\|_{B_{\infty,\theta}^r} = |S|^{-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{s \in S} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(g, x)\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll |S|^{-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{s \in S} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1.$$

Таким образом, функция $C_5 f(x)$ с некоторой постоянной $C_5 > 0$ принадлежит классу $B_{\infty,\theta}^r$.

Далее, с одной стороны, выбрав для приближения функции $f \in B_{\infty,\theta}^r$ полином

$$\bar{t}_n(f, x) = \sum_{(s,1) \leq n} A_s(f, x)$$

и воспользовавшись неравенством Гёльдера (с естественной модификацией при $\theta = 1$) и оценкой (3) с $\gamma = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$, будем иметь

$$\begin{aligned} \|f(x) - \bar{t}_n(f, x)\|_\infty &\leq \left\| \sum_{(s,1) > n} A_s(f, x) \right\|_\infty \leq \sum_{(s,1) > n} \|A_s(f, x)\|_\infty \\ &= \sum_{(s,1) > n} 2^{(s,r)} \|A_s(f, x)\|_\infty 2^{-(s,r)} \\ &\leq \left(\sum_{(s,1) > n} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, x)\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1) > n} 2^{-(s,r)\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \\ &\ll \|f\|_{B_{\infty,\theta}^r} 2^{-nr_1} n^{\frac{d-1}{\theta'}} \leq 2^{-nr_1} n^{\frac{d-1}{\theta'}}. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что

$$E_{Q_n^r}(B_{\infty,\theta}^r)_\infty \ll 2^{-nr_1} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \quad (34)$$

С другой стороны, согласно условию теоремы для $f(x)$ из (33) имеем

$$\|f - \mathcal{L}_{Q_n^r}(f)\|_\infty \ll E_{Q_n^r}(B_{\infty,\theta}^r)_\infty.$$

Сопоставив эту оценку с (34), получаем

$$\|f - \mathcal{L}_{Q_n^r}(f)\|_\infty \ll 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \quad (35)$$

Теперь оценим левую часть (35) снизу. Имеем

$$\begin{aligned} \|f - \mathcal{L}_{Q_n^r}(f)\|_\infty &\geq |f(0) - \mathcal{L}_{Q_n^r}(f(0))| \\ &= \left| \sum_{s \in S} (1 - c_{n,k^s}) \left(\prod_{j=1}^d k_j^s \right)^{-r_1} |S|^{-\frac{1}{\theta}} \right| \geq \frac{1}{2} \sum_{s \in S} \left(\prod_{j=1}^d k_j^s \right)^{-r_1} |S|^{-\frac{1}{\theta}} \\ &\gg 2^{-nr_1} |S| |S|^{-\frac{1}{\theta}} = 2^{-nr_1} |S|^{1-\frac{1}{\theta}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Из (35) и (36) получаем соотношение

$$2^{-nr_1} |S|^{1-\frac{1}{\theta}} \ll 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)},$$

из которого следует, что

$$|S| \ll n^{d-1}. \quad (37)$$

Наконец, сопоставив (32) и (37), находим, что

$$n^{d-1} \log_2 \frac{1}{\delta} \ll n^{d-1},$$

т.е. $\log_2(1/\delta) \leq C_6$, где C_6 – некоторая абсолютная постоянная. Легко видеть, что для определенных $\delta > 0$ это неравенство противоречиво. Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы нам понадобится еще одно, уже известное, вспомогательное утверждение [4; гл. 1, § 2, следствие теоремы 2.3], которое нам будет удобно сформулировать по отношению к ступенчатому гиперболическому кресту.

ЛЕММА 3.2. *Для произвольного $\eta > 0$ найдется постоянная $C_\eta > 0$ такая, что для произвольного полинома $t(x) \in T(Q_n^r)$ выполняется неравенство*

$$\sum_{k \in Q_n^r} |\widehat{t}(k)| \leq C_\eta n^\eta 2^n \|t\|_1. \quad (38)$$

Таким образом, записав (38) в виде

$$\|t\|_1 \geq C_\delta n^{-\delta} 2^{-n} \sum_{k \in Q_n^r} |\widehat{t}(k)|$$

и воспользовавшись затем леммой 3.1, где число $\delta > 0$ удовлетворяет ее условиям, будем иметь (см. (26))

$$\|\mathcal{L}_{Q_n^r}\| = \|L_{Q_n^r}\|_1 \gg n^{-\delta} 2^{-n} \delta |Q_n^r| \asymp n^{-\delta} 2^{-n} 2^n n^{d-1} \asymp n^{(d-1)\left(1-\frac{\delta}{d-1}\right)}. \quad (39)$$

Наконец, полагая $\varepsilon = \frac{\delta}{d-1}$, из (39) получаем нужное неравенство. Теорема доказана.

Теперь докажем утверждение, аналогичное теореме 3.1, в пространстве L_1 .

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть на $L_1^0(\pi_d)$ определена последовательность ограниченных линейных операторов $\mathcal{L}_{Q_n^r}$, $r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}_+^d$, ставящих в соответствие каждой функции из $L_1^0(\pi_d)$ тригонометрический полином из $T(Q_n^r)$ таким образом, что для функций из класса $B_{1,\theta}^r$, $1 \leq \theta < \infty$, выполнено неравенство

$$\|f - \mathcal{L}_{Q_n^r}(f)\|_1 \ll E_{Q_n^r}(B_{1,\theta}^r)_1.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\|\mathcal{L}_{Q_n^r}\| \gg n^{(d-1)(1-\varepsilon)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу тех же соображений, что и при доказательстве предыдущей теоремы, достаточно рассмотреть оператор $\mathcal{L}_{Q_n^r}$, который задается формулой

$$\mathcal{L}_{Q_n^r}(f) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(x-y) L_{Q_n^r}(y) dy.$$

Нам также понадобится вспомогательное утверждение:

ЛЕММА 3.3. Для любого $\delta > 0$ существует постоянная $C_\delta > 0$ такая, что для всех n выполняется неравенство

$$\sum_{k \in Q_n^r} |c_{n,k}| \geq C_\delta |Q_n^r| n^{-(d-1)\delta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.3. Пусть число n задано. Рассмотрим функцию

$$v_n(x) = C_7 (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \prod_{j=1}^d V_{2^n}(x_j - y_j) F_r(y, \alpha) dy,$$

которая (с соответствующей постоянной $C_7 > 0$) принадлежит классу $W_{1,\alpha}^r$, а значит, и классу H_1^r . В таком случае в силу теоремы В для каждого вектора $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \geq 0$, $j = \overline{1, d}$, должно быть выполнено неравенство

$$\|A_s(v_n, x)\|_1 \ll 2^{-(s,r)}. \quad (40)$$

Пусть $\tilde{S}_n = \{s : s = (s_1, \dots, s_d), (s, 1) \leq n\}$ и

$$\Delta \tilde{S}_{n,d} = \tilde{S}_{n+d} \setminus \tilde{S}_{n-d}.$$

Рассмотрим функцию

$$g_n(x) = C_8 n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{s \in \Delta \tilde{S}_{n,d}} A_s(v_n, x), \quad C_8 > 0,$$

и покажем, что она принадлежит классу $B_{1,\theta}^r$. Действительно, согласно (40) имеем

$$\begin{aligned} \|g_n\|_{B_{1,\theta}^r} &= \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(g_n, x)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s \in \Delta \tilde{S}_{n,d}} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(v_n, x)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\ll n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s \in \Delta \tilde{S}_{n,d}} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1, \end{aligned}$$

т.е. $g_n \in B_{1,\theta}^r$.

Далее, рассмотрим приближение функции $g_n(x)$ полиномом

$$V_{Q_{n+d}^r}(g_n, x) = \sum_{(s,1) \leq n+d} A_s(g_n, x).$$

Поскольку $g_n \in B_{1,\theta}^r$, то в силу неравенства Гёльдера (с естественной модификацией при $\theta = 1$) будем иметь

$$\begin{aligned} \|g_n(x) - V_{Q_{n+d}^r}(g_n, x)\|_1 &\leq \sum_{(s,1) > n+d} \|A_s(g_n, x)\|_1 \\ &= \sum_{(s,1) > n+d} 2^{(s,r)} \|A_s(g_n, x)\|_1 2^{-(s,r)} \\ &\leq \left(\sum_{(s,1) > n+d} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(g_n, x)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1) > n+d} 2^{-(s,r)\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \\ &\leq \|g_n\|_{B_{1,\theta}^r} \left(\sum_{(s,1) > n+d} 2^{-(s,r)\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \ll 2^{-nr_1} n^{\frac{d-1}{\theta'}}. \end{aligned} \quad (41)$$

Принимая во внимание, что в силу определения полинома $V_{Q_{n+d}^r}(g_n, x)$ для всех $k \in Q_n^r$ выполняется равенство

$$\widehat{g}_n(k) = \widehat{V}_{Q_{n+d}^r}(g_n(k)), \quad (42)$$

в силу (42) можем записать

$$\mathcal{L}_{Q_n^r}(g_n, x) = \mathcal{L}_{Q_n^r}(V_{Q_{n+d}^r}(g_n, x)).$$

Далее, согласно условию теоремы

$$\|g_n(x) - \mathcal{L}_{Q_n^r}(g_n, x)\|_1 \ll E_{Q_n^r}(B_{1,\theta}^r)_1. \quad (43)$$

Покажем, что из (41) и (43) следует оценка

$$\|V_{Q_{n+d}^r}(g_n, x) - \mathcal{L}_{Q_n^r}(g_n, x)\|_1 \ll 2^{-nr_1} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Действительно, в силу (1) имеем

$$E_{Q_n^r}(B_{1,\theta}^r)_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}$$

и согласно (41), (43) можем записать

$$\begin{aligned} 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} &\asymp E_{Q_n^r}(B_{1,\theta}^r)_1 \gg \|g_n(x) - \mathcal{L}_{Q_n^r}(g_n, x)\|_1 \\ &= \|V_{Q_{n+d}^r}(g_n, x) - \mathcal{L}_{Q_n^r}(g_n, x) - V_{Q_{n+d}^r}(g_n, x) + g_n(x)\|_1 \\ &\geq \|V_{Q_{n+d}^r}(g_n, x) - \mathcal{L}_{Q_n^r}(g_n, x)\|_1 - \|V_{Q_{n+d}^r}(g_n, x) - g_n(x)\|_1 \\ &\gg \|V_{Q_{n+d}^r}(g_n, x) - \mathcal{L}_{Q_n^r}(g_n, x)\|_1 - 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\|V_{Q_{n+d}^r}(g_n, x) - \mathcal{L}_{Q_n^r}(g_n, x)\|_1 \ll 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \quad (44)$$

Далее, воспользовавшись неравенством разных метрик для полиномов с “номерами” гармоник из ступенчатого гиперболического креста (см. [4; гл. 1, § 2, теорема 2.3]) и оценкой (44), будем иметь

$$\begin{aligned} \|V_{Q_{n+d}^r}(g_n, x) - \mathcal{L}_{Q_n^r}(g_n, x)\|_q &\ll \|V_{Q_{n+d}^r}(g_n, x) - \mathcal{L}_{Q_n^r}(g_n, x)\|_1 2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)} \\ &\ll 2^{-n\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \end{aligned} \quad (45)$$

(Здесь мы предполагаем, что $1 < q < \min\{1 + r_1, 2\}$, а ниже число q будет подобрано по δ .)

С другой стороны, согласно лемме А неравенство (45) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\left\{ \sum_{s \in \Delta \tilde{S}_{n,d}} \left(\sum_{k \in \rho(s)} |\hat{g}_n(k)|^2 |1 - c_{n,k}|^2 \right)^{\frac{q}{2}} 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) q} \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\ll \|V_{Q_{n+d}^r}(g_n, x) - \mathcal{L}_{Q_n^r}(g_n, x)\|_q \ll 2^{-n\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \end{aligned} \quad (46)$$

Пусть

$$\sum_{k \in Q_n^r} |c_{n,k}| = \alpha_n |Q_n^r| \quad (47)$$

и по-прежнему Ω обозначает множество

$$\Omega = \left\{ k : k = (k_1, \dots, k_d), |c_{n,k}| > \frac{1}{2} \right\}.$$

Из (47) имеем

$$\alpha_n |Q_n^r| = \sum_{k \in \Omega} |c_{n,k}| + \sum_{k \in Q_n^r \setminus \Omega} |c_{n,k}| \geq \sum_{k \in \Omega} |c_{n,k}| > \frac{1}{2} |\Omega|,$$

т.е.

$$|\Omega| < 2\alpha_n |Q_n^r|. \quad (48)$$

Введем обозначение

$$U_s = \{k : k = (k_1, \dots, k_d) \in \rho(s), k \in \Omega\}.$$

Тогда соотношение (48) можно записать в виде

$$\sum_s |U_s| < 2\alpha_n |Q_n^r|,$$

и отсюда, принимая во внимание, что $|Q_n^r| \asymp 2^n n^{d-1}$, находим

$$\begin{aligned} \sum_s |U_s| &< 2\alpha_n 2^n n^{d-1} = 2 \cdot 2^{n+\log_2 \alpha_n} n^{d-1} \\ &\ll 2^{n+\log_2 \alpha_n} (n + \log_2 \alpha_n)^{d-1} \asymp \sum_{(s,1) \leq n+\log_2 \alpha_n} 2^{(s,1)}. \end{aligned} \quad (49)$$

Далее, согласно принятым обозначениям

$$\begin{aligned} &\left\{ \sum_{s \in \Delta \tilde{S}_{n,d}} \left(\sum_{k \in \rho(s)} |\widehat{g}_n(k)|^2 |1 - c_{n,k}|^2 \right)^{\frac{q}{2}} 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)q} \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\gg n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left\{ \sum_{s \in \Delta \tilde{S}_{n,d}} \left(\sum_{k \notin U_s} |\widehat{f}_n(k)|^2 \right)^{\frac{q}{2}} 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)q} \right\}^{\frac{1}{q}} = \mathcal{J}_2. \end{aligned} \quad (50)$$

Чтобы продолжить (50), получим оценку снизу величины $\sum_{k \notin U_s} |\widehat{f}_n(k)|^2$:

$$\begin{aligned} \sum_{k \notin U_s} |\widehat{f}_n(k)|^2 &\gg \sum_{k \notin U_s} \prod_{j=1}^d |k_j|^{-2r_1} = \sum_{k \in \rho(s)} \prod_{j=1}^d |k_j|^{-2r_1} - \sum_{k \in U_s} \prod_{j=1}^d |k_j|^{-2r_1} \\ &\gg 2^{-2r_1 \|s\|_1} (|\rho(s)| - |U_s|) \gg 2^{-(2r_1-1)\|s\|_1} \left(1 - \frac{|U_s|}{2^d |\rho(s)|} \right). \end{aligned} \quad (51)$$

Таким образом, принимая во внимание (49) и (51), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &\gg n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1) > n+\log_2 \alpha_n} \left(1 - \frac{|U_s|}{2^d |\rho(s)|} \right)^{\frac{q}{2}} 2^{-(r_1 q - \frac{q}{2})\|s\|_1} 2^{\left(\frac{q}{2}-1\right)\|s\|_1} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\gg n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1) > n+\log_2 \alpha_n} 2^{-\|s\|_1 (r_1 q - q + 1)} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (52)$$

Далее, поскольку $r_1 q - q + 1 > 0$, то согласно (52)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &\gg n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^{-(n+\log_2 \alpha_n)(r_1-1+\frac{1}{q})} n^{\frac{d-1}{q}} \\ &\gg (\alpha_n 2^n)^{-(r_1-1+\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}. \end{aligned} \quad (53)$$

Сопоставив оценки (53) и (50) с оценкой (46), будем иметь

$$(\alpha_n 2^n)^{-(r_1-1+\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \ll 2^{-n(r_1-1+\frac{1}{q})} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Отсюда

$$\alpha_n^{r_1-1+\frac{1}{q}} \gg n^{-(d-1)(1-\frac{1}{q})},$$

или

$$\alpha_n \gg n^{-(d-1)\frac{1-1/q}{r_1-1+1/q}}.$$

Наконец, считая $\delta > 0$ достаточно малым и находя число q из условия

$$\delta = \frac{1-1/q}{r_1-1+1/q},$$

приходим к требуемой оценке

$$\sum_{k \in Q_n^r} |c_{n,k}| \geq C_\delta |Q_n^r| n^{-(d-1)\delta}.$$

Лемма доказана.

Чтобы завершить доказательство теоремы, воспользуемся сначала леммой 3.2, а затем леммой 3.3. В результате получим

$$\|\mathcal{L}_{Q_n^r}\| = \|L_{Q_n^r}\|_1 \gg n^{-\delta} 2^{-n} 2^n n^{d-1} n^{-(d-1)\delta} = n^{(d-1)(1-\frac{d\delta}{d-1})}$$

и, полагая $\varepsilon = \frac{d\delta}{d-1}$, приходим к утверждению теоремы. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Соответствующие результаты для классов H_∞^r и H_1^r получены В. Н. Темляковым [4; гл. 2, § 5].

§ 4. Соотношение между линейными методами приближения и наилучшими приближениями

В настоящем параграфе устанавливается оценка снизу приближения классов $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq p \leq \infty$, линейными методами в пространстве L_∞ . Эта оценка в сочетании с результатом теоремы 2.2 позволит записать соотношение между приближениями линейными методами и наилучшими приближениями классов $B_{p,\theta}^r$ в пространстве L_∞ .

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\mathcal{L}_N$ — линейный ограниченный оператор, сопоставляющий каждой функции $f \in B_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta < \infty$, $1 \leq p \leq \infty$, $r_1 > 1/p$, тригонометрический полином $\mathcal{L}_N(f, x) \in T(N, \gamma)$. Тогда

$$\sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \|f(x) - \mathcal{L}_N(f, x)\|_\infty \gg N^{-r_1+\frac{1}{p}} (\log^{\nu-1} N)^{1-\frac{1}{\theta}}. \quad (54)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что из тех же соображений, что и при доказательстве теоремы 3.1, оценку (54) достаточно доказать для оператора $\mathcal{L}_N$, который задается формулой

$$\mathcal{L}_N(f) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(x-y) L_N(y) dy,$$

где

$$L_N(y) = \sum_{k \in \Gamma(N, \gamma)} c_{N,k} e^{i(k,y)}.$$

Кроме того, не ограничивая общности, будем считать, что $\nu = d$. В таком случае вектор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ имеет вид $\gamma = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$ и, следовательно, $\mathcal{L}_N(f, x) \in T(N)$.

Пусть по-прежнему $V_m(t)$ обозначает ядро Валле Пуссена. Для вектора $s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{N}^d$ положим

$$f_s(x) = \prod_{j=1}^d (V_{2^{s_j}+1}(x_j) - V_{2^{s_j}}(x_j))$$

и напомним, что

$$\|f_s\|_p \asymp 2^{\|s\|_1 \left(1 - \frac{1}{p}\right)}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Далее, по числу N подберем n из соотношения $2^{n-1} < N \leq 2^n$ и рассмотрим функцию

$$f(x) = C_9 2^{-n \left(r_1 + 1 - \frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{(s,1)=n} f_s(x),$$

где $C_9 > 0$ — некоторая постоянная. Согласно определению множества полиномов $T(N)$ и в силу выбора чисел n и N можем записать

$$f(x) * L_N(x) = 0. \quad (55)$$

Нетрудно убедиться, что $f \in B_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta < \infty$, $1 \leq p \leq \infty$. Таким образом, принимая во внимание (55) и соотношение $2^{n-1} < N \leq 2^n$, получим

$$\begin{aligned} \|f(x) - \mathcal{L}_N(f, x)\|_\infty &= \|f\|_\infty \asymp 2^{-n \left(r_1 - \frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{d-1} \\ &= 2^{-n \left(r_1 - \frac{1}{p}\right)} n^{(d-1) \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)} \asymp N^{-\left(r_1 - \frac{1}{p}\right)} (\log^{d-1} N)^{1 - \frac{1}{\theta}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \|f(x) - \mathcal{L}_N(f, x)\|_\infty \gg N^{-\left(r_1 - \frac{1}{p}\right)} (\log^{d-1} N)^{1 - \frac{1}{\theta}}.$$

Теорема доказана.

Сопоставив оценку (54) с результатом теоремы 2.2, приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}_+^d$, $1 < \theta < \infty$. Тогда при $1 \leq p \leq 2$, $r_1 > 1/p$, для последовательности линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}_N$, действующих из $B_{p,\theta}^r$ в $T(N, \gamma)$, выполнено соотношение

$$E_{N,\gamma}(B_{p,\theta}^r)_\infty = o\left(\sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \|f(x) - \mathcal{L}_N(f, x)\|_\infty\right). \quad (56)$$

Соотношение (56) свидетельствует о том, что приближение классов $B_{p,\theta}^r$, $1 < \theta < \infty$, $1 \leq p \leq 2$, линейными методами в равномерной метрике не реализует порядковых оценок соответствующих наилучших приближений. В связи с этим обстоятельством отметим, что, как установлено В. Н. Темляковым [8], [10] (см. также [4]), для любой последовательности линейных операторов $\mathcal{L}_{Q_n^r}$ со значениями в $T(Q_n^r)$ при $d \geq 2$, $r_1 > 1/p$ справедливы соотношения:

$$E_{Q_n^r}(W_{p,\alpha}^r)_\infty = o\left(\sup_{f \in W_{p,\alpha}^r} \|f(x) - \mathcal{L}_{Q_n^r}(f, x)\|_\infty\right), \quad 1 < p < \infty,$$

$$E_{Q_n^r}(H_p^r)_\infty = o\left(\sup_{f \in H_p^r} \|f(x) - \mathcal{L}_{Q_n^r}(f, x)\|_\infty\right), \quad 1 \leq p < \infty.$$

Что касается классов $W_{1,\alpha}^r$, то здесь ситуация иная. Так, если в качестве аппарата приближения функций $f(x) \in W_{1,\alpha}^r$ брать полиномы

$$\mathcal{L}_{Q_n^r}(f, x) = f(x) * t_n(F_r),$$

где $t_n(F_r)$ — полином из $T(Q_n^r)$, наилучшим образом приближающий в L_∞ ядро Бернулли $F_r(x, \alpha)$, то

$$\sup_{f \in W_{1,\alpha}^r} \|f(x) - \mathcal{L}_{Q_n^r}(f, x)\|_\infty \asymp E_{Q_n^r}(F_r)_\infty \asymp E_{Q_n^r}(W_{1,\alpha}^r)_\infty.$$

В заключение отметим, что, по-видимому, остается открытым вопрос о соотношении между величинами $E_{N,\gamma}(B_{p,1}^r)_\infty$ и $\sup_{f \in B_{p,1}^r} \|f(x) - \mathcal{L}_{Q_n^r}(f, x)\|_\infty$.

Список литературы

1. Бессов О. В. О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126. № 6. С. 1163–1165.
2. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
3. Лизоркин П. И., Никольский С. М. Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Труды МИАН. 1989. Т. 187. С. 143–161.
4. Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды МИАН. 1986. Т. 178. С. 1–112.
5. Никольский С. М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Труды МИАН. 1951. Т. 38. С. 244–278.
6. Jackson D. Certain problem of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. 1933. V. 39. № 12. P. 889–906.
7. Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной разностью тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 1. С. 171–186.

8. Темляков В. Н. Приближение периодических функций нескольких переменных тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 5. С. 986–1030.
9. Dahmen W., Grlich E. A conjecture of M. Golomb on optimal and nearly-optimal approximation // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. V. 80. № 6. P. 1199–1202.
10. Темляков В. Н. Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Труды МИАН. 1988. Т. 189. С. 138–168.
11. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.
12. Теляковский С. А. Об оценках производных тригонометрических полиномов многих переменных // Сиб. матем. журн. 1963. Т. 4. № 6. С. 1404–1411.
13. Лифлянд И. Р. Точный порядок констант Лебега гиперболических частных сумм кратных рядов Фурье // Матем. заметки. 1986. Т. 39. № 5. С. 674–683.
14. Романюк А. С. Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. матем. журн. 1991. Т. 43. № 10. С. 1398–1408.
15. Marcinkiewicz J. Quelques remarques sur l'interpolation // Acta Litt. Sci. Szeged. 1937. V. 8. P. 127–130.

Институт математики НАН Украины
E-mail: funct@imath.kiev.ua

Поступила в редакцию
12.11.2002