Общероссийский математический портал

Е. М. Семёнов, Ф. А. Сукочев, Индекс Банаха–Сакса, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 2, 117–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm802>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:32:30

УДК 517.982

Е. М. Семёнов, Ф. А. Сукочев

Индекс Банаха–Сакса

Изучены свойства индекса Банаха–Сакса в классе перестановочно-инвариантных пространств. Вычислен индекс Банаха–Сакса пространств $L_{p,q}$ и некоторых пространств Орлича. Получено обобщение теорем Банаха–Сакса.

Библиография: 25 названий.

§ 1. Введение

Классическая теорема Банаха–Сакса [1] утверждает, что для любой слабо сходящейся к нулю последовательности функций x_n из $L_p[0, 1]$, где $1 < p < \infty$, существуют возрастающая последовательность целых чисел n_k и $C > 0$ такие, что

$$\left\| \sum_{k=1}^m x_{n_k} \right\|_{L_p} \leq C m^{\max(1/2, 1/p)} \quad (1.1)$$

для всех $m \in \mathbb{N}$. Через $\mathbb{N}$ мы будем обозначать множество натуральных чисел. Очевидно, показатель $1/p$ в (1.1) является точным, достаточно рассмотреть любую нормированную последовательность функций с дизъюнктными носителями. Эта теорема приводит к следующим определениям.

Пусть E – банахово пространство и $p \geq 1$; ограниченная последовательность $\{x_n\} \subset E$ называется p -BS-последовательностью (BS-последовательностью), если существует такая подпоследовательность $\{y_k\} \subset \{x_n\}$, что

$$C = \sup_{m \in \mathbb{N}} m^{-1/p} \left\| \sum_{k=1}^m y_k \right\|_E < \infty \quad (1.2)$$

$$\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \left\| \sum_{k=1}^m y_k \right\|_E = 0 \right).$$

Следуя [2], [3], будем говорить, что E обладает p -BS-свойством (BS-свойством), и записывать $E \in \text{BS}(p)$ ($E \in \text{BS}$), если всякая слабо сходящаяся к нулю последовательность содержит p -BS-последовательность (BS-последовательность). Очевидно, всякое банахово пространство обладает 1-BС-свойством. Множество $\Gamma(E) = \{p : p \geq 1, E \in \text{BS}(p)\}$ есть либо $[1, \alpha]$, либо $[1, \alpha)$ для некоторого $\alpha \in [1, \infty]$. Мы будем называть индексом Банаха–Сакса число α и писать

Первый автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 02-01-00146) и программой “Университеты России” (грант № УР 04.01.051), второй автор поддержан Австралийским исследовательским советом.

$\gamma(E) = \alpha$, если $\Gamma(E) = [1, \alpha]$, и $\gamma(E) = \alpha - 0$, если $\Gamma(E) = [1, \alpha)$. Близкое понятие было введено в работе С. А. Ракова [4], где описаны координатные пространства Орлича, обладающие p -BS-свойством, и доказано, что

$$E \in \text{BS}(p), \quad (1.3)$$

где p – тип пространства E (определение см. ниже). Кадец и Пелчинский [5] также доказали, что в наших обозначениях $\gamma(L_p) = 2$ для $2 \leq p < \infty$. Таким образом, $\gamma(L_p) = \min(p, 2)$ для всех $p \in (1, \infty)$. Слабо сходящиеся к нулю последовательности элементов из l_p , $1 \leq p < \infty$, имеют довольно простую структуру [6; 2.a]. Используя эти результаты, нетрудно показать, что $\gamma(l_p) = p$ для $1 < p < \infty$ и $\gamma(l_1) = \gamma(c_0) = \infty$. Целью настоящей работы является нахождение индекса Банаха–Сакса для наиболее важных классов перестановочно-инвариантных (г.и.-) пространств (определение см. ниже) и изучение этой характеристики. Полученные результаты показывают, что индекс Банаха–Сакса тесно связан с другими важными характеристиками банаховых пространств. Формула $\gamma(L_p) = \min(p, 2)$ обобщена в двух различных направлениях – в классе пространств Орлича и в классе пространств $L_{p,q}$.

При нахождении $\gamma(L_{p,q})$ появляются новые эффекты, которые отсутствовали в классическом случае пространств L_p . Тип пространства $L_{p,q}$ не всегда совпадает с его индексом, $\Gamma(L_{p,q})$ есть полуоткрытый интервал для некоторых p, q , функция $\gamma(\Gamma_{p,q})$ разрывна при $q = 1$. Множество г.и.-пространств, имеющих индекс $\geq \alpha$ для любого $\alpha \in (1, 2]$, не устойчиво относительно комплексного и вещественного методов интерполяции.

Заметим, если известно, что $\alpha - \varepsilon < \gamma(E) < \alpha + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, то $\gamma(E) = \alpha$ или $\gamma(E) = \alpha - 0$. Неравенство $\gamma(E) \leq \alpha$ ($\gamma(E) \geq \alpha$) означает, что $\Gamma(E) \subset [1, \alpha]$ ($\alpha \in \Gamma(E)$). Если E_1, E_2 – г.и.-пространства, то неравенство $\gamma(E_1) \leq \gamma(E_2)$ ($\gamma(E_1) < \gamma(E_2)$) означает, что $\Gamma(E_1) \subset \Gamma(E_2)$ ($\Gamma(E_1) \subsetneq \Gamma(E_2)$). Для оценки $\gamma(E)$ сверху мы будем пользоваться следующим простым замечанием. Если E, F – банаховы пространства и E изоморфно вкладывается в F , то $\gamma(F) \leq \gamma(E)$.

Всякое несепарабельное г.и.-пространство содержит подпространство, изоморфное l_∞ [7; 1.a.7], которое в силу своей универсальности не обладает свойством Банаха–Сакса. Следовательно, исходное пространство также не обладает свойством Банаха–Сакса и тем более $\gamma(E) = 1$. Поэтому мы будем изучать индекс только сепарабельных г.и.-пространств.

§ 2. Предварительные сведения

По определению банахово пространство E имеет тип p для некоторого $p \in [1, 2]$, если существует такое $C > 0$, что

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(s) x_k \right\|_E ds \leq C \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_E^p \right)^{1/p} \quad (2.1)$$

для любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ и любого $n \in \mathbb{N}$, где $r_k(t) = \text{sign} \sin 2^k \pi t$, $k \in \mathbb{N}$, – функции Радемахера.

Банахова решетка E называется p -выпуклой (q -вогнутой), если существует такое $C > 0$, что

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \right\|_E \leq C \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_E^p \right)^{1/p} \quad (2.2)$$

$$\left(\left\| \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^q \right)^{1/q} \right\|_E \right) \geq \frac{1}{C} \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_E^q \right)^{1/q} \quad (2.3)$$

для всех $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ и любого $n \in \mathbb{N}$. Если же (2.2) (или (2.3)) выполнено для любых последовательностей $x_1, x_2, \dots, x_n$ с дизъюнктными носителями, то E имеет верхнюю p -оценку (нижнюю q -оценку).

Банахова решетка с дополнительным свойством инвариантности относительно сохраняющих меру преобразований аргумента называется перестановочно-инвариантным пространством. Более точно, банахово пространство E измеримых на $[0, 1]$ функций называется *перестановочно-инвариантным* (г.и.) или *симметричным*, если

- 1) $|x(t)| \leq |y(t)|$ п.в., $y \in E \Rightarrow x \in E, \|x\|_E \leq \|y\|_E$;
- 2) функции $x(t)$ и $y(t)$ равноизмеримы, $y \in E \Rightarrow x \in E, \|x\|_E = \|y\|_E$.

Следуя [7; 2.а], мы будем предполагать, что E сепарабельно или максимально. Последнее означает, что E изометрически совпадает с сопряженным к некоторому сепарабельному г.и.-пространству F . Это пространство F определяется однозначно по E , и его нетрудно описать. Обозначим через E' множество всех измеримых функций, для которых

$$\|x\|_{E'} = \sup_{\|y\|_E \leq 1} \int_0^1 x(t)y(t) dt < \infty.$$

Вложение $E \subset E''$ изометрично. Обозначим через E^0 замыкание L_∞ в E . Мы предполагаем, что E совпадает с E^0 или $((E')^0)'$ с равенством норм. Равенство двух г.и.-пространств $E = F$ означает, что эти два пространства совпадают как множества. В этом случае по теореме о замкнутом графике их нормы эквивалентны. Если $E \neq L_\infty$, то E^0 сепарабельно. Сепарабельность г.и.-пространства E эквивалентна абсолютной непрерывности нормы E , т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\text{mes } e \leq \varepsilon} \|x\chi_e\|_E = 0$$

для любого $x \in E$, где через $\chi_e(t)$ мы будем обозначать характеристическую функцию измеримого множества $e \subset [0, 1]$.

Функция $\varphi_E(s) = \|\chi_e\|_E$, $\text{mes } e = s$, называется *фундаментальной функцией* г.и.-пространства E . Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что $\varphi_E(1) = 1$. В любом г.и.-пространстве ограничено действует семейство операторов

$$\sigma_\tau x(t) = \begin{cases} x(t/\tau), & 0 \leq t \leq \min(\tau, 1), \\ 0 & \text{для остальных } t \in [0, 1], \end{cases}$$

$\min(1, \tau) \leq \|\sigma_\tau\|_E \leq \max(1, \tau)$ для любого $\tau > 0$. Числа

$$\alpha_E = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau}, \quad \beta_E = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau}$$

называются *индексами Бойда* пространства E , причем всегда $0 \leq \alpha_E \leq \beta_E \leq 1$. Для любого г.и.-пространства E справедливо вложение $L_\infty \subset E \subset L_1$ и

$$\|x\|_{L_1} \leq \|x\|_E \leq \|x\|_{L_\infty} \quad (2.4)$$

для всех $x \in L_\infty$.

Хорошо известно, что существует взаимно однозначное сохраняющее меру отображение ω отрезка $[0, 1]$ на квадрат $[0, 1] \times [0, 1] = K$. Зафиксировав ω , мы определяем изометрическое отображение $E[0, 1]$ на $E(K)$. Поэтому эти два пространства мы будем обозначать одной буквой E . Именно в этом смысле мы будем понимать выражение $(x \otimes y)(t, s) = x(t)y(s)$. Например, по теореме Фубини $\|x \otimes y\|_{L_p} = \|x\|_{L_p} \|y\|_{L_p}$ для любых $x, y \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$.

Если E – сепарабельное г.и.-пространство, то всякий линейный непрерывный функционал $f \in E^*$ может быть представлен в виде

$$f(x) = \int_0^1 x(t)y(t) dt,$$

где $y \in E'$ и $\|f\|_{E^*} = \|y\|_{E'}$. Это означает, что $E^* = E'$.

Понятие г.и.-пространства на $[0, \infty)$ вводится аналогичным образом.

Приведем основные примеры г.и.-пространств. Функция $M(u)$, определенная на полуоси $[0, \infty)$, называется *функцией Орлича*, если $M(0) = 0$, $M(u)$ положительна и выпукла на $(0, \infty)$. Всякая функция Орлича порождает пространство Орлича L_M с нормой

$$\|x\|_{L_M} = \inf \left\{ \lambda : \lambda > 0, \int_0^1 M\left(\frac{|x(t)|}{\lambda}\right) dt \leq 1 \right\}.$$

Пространство Орлича, соответствующее функции $M(u) = e^{u^p} - 1$, где $1 \leq p < \infty$, обычно обозначается через $\text{exr } L_p$. Эти пространства несепарабельны.

В теории интерполяции линейных операторов важную роль играют пространства $L_{p,q}$. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Положим

$$\|x\|_{L_{p,q}} = \begin{cases} \left(\frac{q}{p} \int_0^1 (x^*(t)t^{1/p})^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & q < \infty, \\ \sup_{0 < t \leq 1} x^*(t)t^{1/p}, & q = \infty, \end{cases}$$

где $x^*(t)$ – перестановка $|x(t)|$ в убывающем порядке, выражение $\|\cdot\|_{L_{p,q}} = \|\cdot\|_{p,q}$ есть норма при $q \leq p$ и эквивалентно норме при $q > p$. Пространства $L_{p,q}$ сепарабельны, если $q < \infty$, и рефлексивны, если $1 < q < \infty$. Норма в пространстве последовательностей $l_{p,q}$ определяется аналогичным образом. Если $x = (x_1, x_2, \dots)$, то

$$\|x\|_{l_{p,q}} = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^*)^q k^{q/p-1} \right)^{1/q}, & q < \infty, \\ \sup_k x_k^* k^{1/p}, & q = \infty, \end{cases}$$

где x_k^* – перестановка $|x_k|$ в убывающем порядке. Хорошо известно, что $l_{p,1} \subset l_{p,q} \subset l_{p,\infty} \subset l_{r,1}$ для любых $1 < p < r < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и

$$\|x\|_{l_{p,\infty}} \leq \sup_{I \subset \mathbb{N}} \frac{\sum_{k \in I} |x_k|}{|I|^{1-1/p}} \leq \frac{p}{p-1} \|x\|_{l_{p,\infty}}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|x\|_{l_{p,1}} \leq C_{p,q} \sup_{I \subset \mathbb{N}} \frac{\sum_{k \in I} |x_k|}{|I|^{1/q}} \quad (2.5)$$

для $q > p/(p-1)$.

Как обычно, $x_n \xrightarrow{w} 0$ означает, что x_n сходится к нулю слабо. Более подробно о свойствах г.и.-пространств, интерполяции линейных и квазилинейных операторов, понятиях типа и котипа, p -выпуклых и q -вогнутых решетках, верхних и нижних оценках см. [7], [8]. В работе будут существенно использованы свойства последовательностей независимых функций и мартингалов, см. [9], [10].

§ 3. Слабо сходящиеся к нулю последовательности

Прежде чем приступить к изложению основных результатов, мы приведем вспомогательные утверждения об ограниченных последовательностях в сепарабельных г.и.-пространствах. В частности, изучим структуру слабо сходящихся к нулю последовательностей.

ЛЕММА 3.1. Пусть E – сепарабельное г.и.-пространство, и пусть $x_n \in E$, $\|x_n\|_E \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = 0$ почти при всех $t \in [0, 1]$, то существуют последовательность $k_n \in \mathbb{N}$ и функции $v_n, w_n \in E$ такие, что $x_{k_n} = v_n + w_n$, где носители функций v_n дизъюнкты, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|_E = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем такие множества $e(n) \subset [0, 1]$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes } e(n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n \chi_{[0,1] \setminus ce(n)}\|_E = 0$$

(ce здесь и в дальнейшем означает дополнение множества $e \subset [0, 1]$). Тогда найдется такое $k_1 \in \mathbb{N}$, что $\|x_{k_1} \chi_{ce(k_1)}\|_E \leq 1/4$. В силу абсолютной непрерывности нормы E существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что $\|x_{k_1} \chi_e\|_E < 2^{-2}$ для всех $e \subset [0, 1]$, $\text{mes } e \leq \varepsilon_1$. Затем найдем такое $k_2 > k_1$, что $\text{mes } e(k_2) < \varepsilon_1/2$ и $\|x_{k_2} \chi_{ce(k_2)}\|_E < 2^{-3}$, и $\varepsilon_2 > 0$ такое, что $\|x_{k_2} \chi_e\|_E < 2^{-3}$ для всех $e \subset [0, 1]$, $\text{mes } e \leq \varepsilon_2$. Продолжая этот процесс, мы найдем такое $k_n \in \mathbb{N}$, что

$$\text{mes } e(k_n) \leq \min\left(\frac{\varepsilon_{n-1}}{2}, \frac{\varepsilon_{n-2}}{4}, \dots, \frac{\varepsilon_1}{2^{n-1}}\right),$$

$$\|x_{k_n} \chi_{ce(k_n)}\|_E \leq 2^{-n-1},$$

и такое $\varepsilon_n > 0$, что $\|x_{k_n} \chi_e\|_E \leq 2^{-n-1}$ для всех $e \subset [0, 1]$, $\text{mes } e \leq \varepsilon_n$. Рассмотрим последовательность множеств

$$f_n = e(k_n) \setminus \bigcup_{i=n+1}^{\infty} e(k_i), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что f_n попарно дизъюнкты, $f_n \subset e(k_n)$ и

$$\text{mes } e(k_n) - \text{mes } f_n \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \text{mes } e(k_i) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^{i-n}} = \varepsilon_n.$$

Поэтому

$$\|x_{k_n} \chi_{cf_n}\|_E \leq 2^{-n-1} + 2^{-n-1} = 2^{-n}.$$

Функции

$$v_n = x_{k_n} \chi_{f_n}, \quad w_n = x_{k_n} \chi_{cf_n}$$

обладают всеми необходимыми свойствами.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть E – сепарабельное максимальное пространство, и пусть $x_n \in E$, $\|x_n\|_E \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Существуют такие последовательности $\{y_n\} \subset \{x_n\}$, $u_n, v_n, w_n \in E$, что $y_n = u_n + v_n + w_n$, $n \in \mathbb{N}$, и

- 1) $u_n^* = u_1^*$, $n \in \mathbb{N}$,
- 2) носители функций v_n дизъюнкты,
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|_E = 0$.

2. Если, кроме того, x_n слабо сходится к нулю, то u_n, v_n также можно выбрать слабо сходящимися к нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \in E$, то

$$\|x\|_E = \|x^*\|_E \geq \|x^* \chi_{(0,s)}\|_E \geq x^*(s) \varphi_E(s)$$

для всех $s \in (0, 1]$. Тогда $x^*(s) \leq \|x\|_E / \varphi_E(s)$ и $x_n^*(t) \leq 1 / \varphi_E(t)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $t \in (0, 1]$. В силу теоремы Хелли существует такая возрастающая последовательность $m(1, n) \in \mathbb{N}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{m(1,n)}^*(t)$ существует для почти всех $t \in [1/2, 1]$. Из последовательности $\{m(1, n)\}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{m(2, n)\}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{m(2,n)}^*(t)$ существует для почти всех $t \in [1/3, 1]$ и т.д. Тогда диагональная подпоследовательность $m(n, n)$ обладает тем свойством, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{m(n,n)}^*(t)$ существует для почти всех $t \in [0, 1]$. Обозначим предельную функцию через $y(t)$ и положим $y_n = x_{m(n,n)}$. Максимальность E влечет $y \in E$ и $\|y\|_E \leq 1$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют сохраняющее меру преобразование $\omega_n(t)$ отрезка $[0, 1]$ в себя и функция $\alpha_n(t)$, $|\alpha_n(t)| = 1$, такие, что оператор $T_n x(t) = \alpha_n(t) x(\omega_n(t))$ переводит y_n^* в y_n . Положим $u_n = T_n y$. Тогда $\|u_n\|_E = \|y\|_E \leq 1$ и функции

$$y_n - u_n = T_n y_n^* - T_n y = T_n (y_n^* - y) \quad (3.1)$$

сходятся к нулю по мере. Так как из любой сходящейся по мере к нулю последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к нулю почти везде, то без ограничения общности можно предполагать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n(t) - u_n(t)) = 0$ почти при всех $t \in [0, 1]$. Из (3.1) также вытекает, что $\|y_n - u_n\| \leq 2$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Применение леммы 3.1 завершает доказательство первой части теоремы.

Докажем вторую часть теоремы. В силу [11; предложение 2.1] множество $\{u_n\}$ слабо компактно. Поэтому без ограничения общности можно считать, что u_n слабо сходится к некоторой функции $u \in E$. Так как $u_n + v_n \xrightarrow{w} 0$, то $v_n \xrightarrow{w} -u$. Тем более v_n сходится к $-u$ в топологии $\sigma(E, L_\infty)$. Для любой $z \in L_\infty$

$$\left| \int_0^1 v_n z \, dt \right| \leq \|v_n\|_E \|z\|_{\mathcal{K}_{\text{supp } v_n}} \|z\|_{E'}.$$

Если $E \neq L_1$, то $E' \neq L_\infty$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z\|_{\mathcal{K}_{\text{supp } v_n}} \|z\|_{E'} \leq \|z\|_{L_\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{K}_{\text{supp } v_n}\|_{E'} = 0.$$

Если же $E = L_1$, то критерий слабой компактности множеств в L_1 показывает, что $\|v_n\|_E \rightarrow 0$. В обоих случаях v_n сходится к нулю в топологии $\sigma(E, L_\infty)$. Так как топология $\sigma(E, L_\infty)$ отделима, то $u = 0$. Это означает, что u_n и v_n слабо сходятся к нулю.

Последовательности независимых функций – удобный инструмент при изучении индекса Банаха–Сакса. Следующие две леммы дают полезные примеры слабо сходящихся к нулю последовательностей.

ЛЕММА 3.3. Пусть $\{x_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, – последовательность независимых одинаково распределенных функций из сепарабельного г.и.-пространства E с нулевым средним, $x_1 \in L_2$. Тогда $x_k \xrightarrow{w} 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $x_k^* = x_1^*$, $k \in \mathbb{N}$, то в силу [11; предложение 2.1] множество $\{x_k\}$ слабо компактно. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что x_k слабо сходится к некоторой функции $z \in E$. Покажем, что $z = 0$.

Без ограничения общности $\|x_1\|_{L_2} = 1$. Тогда $\|x_k\|_{L_2} = 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Независимость системы $\{x_k\}$ влечет, что $\{x_k\}$ – ортонормированная система [10; гл. 2, теорема 4]. По неравенству Бесселя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 x(t) x_k(t) \, dt = 0$$

для любой функции $x \in L_\infty$. Это означает, что x_k сходится к нулю в топологии $\sigma(E, L_\infty)$. Так как эта топология отделима, то $z = 0$.

ЛЕММА 3.4. Пусть E – сепарабельное г.и.-пространство, $x_n \in E$, $x_n^* = x_1$ для $n \in \mathbb{N}$. Тогда $x_n \otimes r_n \xrightarrow{w} 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая как и в предыдущей лемме, мы видим, что некоторая подпоследовательность $\{x_n \otimes r_n\}$ слабо сходится к элементу $z \in E$.

Если $u, v \in L_\infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 x_n(t) r_n(s) u(t) v(s) \, dt \, ds = 0$$

по теореме Фубини. Так как $L_\infty \otimes L_\infty$ плотно в любом сепарабельном г.и.-пространстве, то $x_n \otimes r_n \rightarrow 0$ в топологии $\sigma(E, L_\infty)$. Эта топология отделима, поэтому $z = 0$.

Если E – сепарабельное г.и.-пространство и $E^* = E'$ также сепарабельно, то всякая нормированная в E последовательность функций x_n с дизъюнктивными носителями слабо сходится к нулю. Действительно, всякий непрерывный линейный функционал на E имеет представление

$$F(x) = \int_0^1 f(t)x(t) dt,$$

где $f \in E'$. Если $e_n = \text{supp } x_n$, то

$$|F(x_n)| = \left| \int_0^1 f(t)x_n(t) dt \right| \leq \|f\|_{E'} \|x_n\|_E = \|f\|_{E'}.$$

Сепарабельность E' влечет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f\|_{E'} = 0.$$

§ 4. Свойства индекса Банаха–Сакса

Во введении было показано, что индекс банахова пространства может принимать любые значения из $[1, \infty]$. Для г.и.-пространств ситуация иная.

ЛЕММА 4.1. *Если E – сепарабельное г.и.-пространство, то $1 \leq \gamma(E) \leq 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как система Радемахера равномерно ограниченная и ортонормированная, то коэффициенты Фурье любой функции $x \in L_1$ по системе Радемахера стремятся к нулю. Всякий линейный непрерывный функционал на сепарабельном г.и.-пространстве имеет интегральное представление. Следовательно, r_n слабо сходится к нулю в E . Используя вложение (2.4) и неравенство Хинчина в L_1 [6; 2.b.3], получаем

$$\left\| \sum_{i=1}^m r_{n_i} \right\|_E \geq \left\| \sum_{i=1}^m r_{n_i} \right\|_{L_1} \geq \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}}$$

для любого $m \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что $\gamma(E) \leq 2$.

Так как $\gamma(L_p) = 1/p$ для $1 \leq p \leq 2$, то лемма 4.1 дает точные границы изменения индекса Банаха–Сакса на множестве г.и.-пространств.

В определении индекса Банаха–Сакса константа C из (1.2), вообще говоря, зависит от последовательности $x_n \in E$, $x_n \xrightarrow{w} 0$, $\|x_n\|_E \leq 1$. Оказывается, что C зависит только от пространства.

ЛЕММА 4.2. *Пусть E – сепарабельное г.и.-пространство и $p \in \Gamma(E)$. Существует такая константа $C > 0$, что для любой последовательности $x_n \in E$, $x_n \xrightarrow{w} 0$, $\|x_n\|_E \leq 1$, найдется возрастающая последовательность целых чисел n_k такая, что выполнено (1.2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда для любого $r \in \mathbb{N}$ существует такая последовательность $x_{r,i} \in E$, что $x_{r,i} \xrightarrow{w} 0$ при $i \rightarrow \infty$, $\|x_{r,i}\|_E \leq 1$ и

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^{-1/p} \left\| \sum_{i=1}^k y_{r,i} \right\|_E \geq 2^{3r} \quad (4.1)$$

для любой подпоследовательности $\{y_{r,i}\} \subset \{x_{r,i}\}$, $r, i \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим последовательность функций

$$z_{r,i}(t) = \begin{cases} 2^{-r} x_{r,i}(\omega_r(t)), & 2^{-r} < t < 2^{-r+1}, \\ 0, & t \notin (2^{-r}, 2^{-r+1}), \end{cases}$$

где $\omega_r(t) = 2^r t - 1$. Так как $\tau \leq \|\sigma_\tau\|_E \leq 1$ для всех $\tau \in (0, 1)$ [8; 2.4.16], то $2^{-2r} \leq \|z_{r,i}\|_E \leq 2^{-r}$. Обозначим

$$z_i = \sum_{r=1}^{\infty} z_{r,i}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|z_i\|_E &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \|z_{r,i}\|_E \leq \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-r} = 1, \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 z_i(t) u(t) dt \right| &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \sum_{r=1}^n \int_{2^{-r}}^{2^{-r+1}} x_{r,i}(\omega_r(t)) u(t) dt \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=n+1}^{\infty} 2^{-r} \|u\|_{E'} \right| \leq 2^{-n+1} \|u\|_{E'} \end{aligned}$$

для любых $u \in E$, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $z_i \xrightarrow{w} 0$.

Пусть $\{u_i\}$ – некоторая подпоследовательность $\{z_i\}$. Используя (4.1), для любого $r \in \mathbb{N}$ и некоторой подпоследовательности $\{y_{r,i}\} \subset \{x_{r,i}\}$ получаем

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} k^{-1/p} \left\| \sum_{i=1}^k u_i \right\|_E &\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} k^{-1/p} \left\| 2^{-r} \sigma_{2^{-r}} \left(\sum_{i=1}^k y_{r,i} \right) \right\|_E \\ &\geq 2^{-2r} \limsup_{k \rightarrow \infty} k^{-1/p} \left\| \sum_{i=1}^k y_{r,i} \right\|_E \geq 2^{-2r+3r} = 2^r, \quad r \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^{-1/p} \left\| \sum_{i=1}^k u_i \right\|_E = \infty$$

для любой последовательности $\{u_i\} \subset \{z_i\}$. Это противоречит предположению $p \in \Gamma(E)$.

Близкое по смыслу утверждение для другого варианта p -BS-свойства и для произвольных банаховых пространств было доказано в работе [12].

Один из основных результатов настоящей работы – получение нижних оценок индекса Банаха–Сакса.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть сепарабельное г.и.-пространство E p -выпукло для некоторого $p > 1$ и $\alpha_E > 0$. Тогда $\gamma(E) \geq \min(p, 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4.1 достаточно доказать теорему при дополнительном предположении $p \leq 2$. Обозначим через B_m σ -алгебру, порожденную интервалами $((k-1)2^{-m}, k2^{-m})$, $1 \leq k \leq 2^m$, а через P_m – оператор условного математического ожидания по σ -алгебре B_m , $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m x - x\|_E = 0$$

для любого $x \in E$.

Пусть $x_n \in E$, $\|x_n\|_E = 1$, $n \in \mathbb{N}$, и $x_n \xrightarrow{w} 0$. Отсюда

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m x_n - x_n\|_E &= 0, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_m x_n\|_E &= 0, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Существует такая возрастающая последовательность $j_i \in \mathbb{N}$, что $x_{j_i} = u_i + v_i$, где $\{u_1, u_2, \dots\}$ – мартингалльные разности и $\|v_i\|_E \leq 2^{-i}$, $i \in \mathbb{N}$. Согласно [13; теорема 3] существует такая константа $C > 0$, зависящая только от пространства E , что

$$\left\| \sum_{i=1}^n u_i \right\|_E \leq C \left\| \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 \right)^{1/2} \right\|_E \quad (4.2)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через C_1 константу p -выпуклости пространства E . Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n u_i \right\|_E &\leq C \left\| \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 \right)^{1/2} \right\|_E \leq C \left\| \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{1/p} \right\|_E \leq C C_1 \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_E^p \right)^{1/p}, \\ \left\| \sum_{i=1}^n x_{j_i} \right\| &\leq C C_1 \left(\left(\sum_{i=1}^n (1 + 2^{-i})^p \right)^{1/p} + 1 \right) \leq C C_1 (n^{1/p} + 2) \leq 3 C C_1 n^{1/p}. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Если сепарабельное г.и.-пространство E 2-выпукло и $\alpha_E > 0$, то $\gamma(E) = 2$.

Теорему 4.3 и следствие 4.4 можно применять для г.и.-пространств, имеющих тривиальный тип. Для таких пространств (1.3) дает лишь тривиальную оценку $\gamma(E) \geq 1$.

Условие $\alpha_E > 0$ в теореме 4.3 существенно. Действительно, пространство Орлича $(\exp L_1)^0$ сепарабельно, p -выпукло для любого $p < \infty$ и $\gamma((\exp L_1)^0) = 1$. Более того, можно показать, что это пространство не обладает BS-свойством.

Следующая теорема показывает, что условие p -выпуклости можно заменить на менее ограничительное предположение о существовании верхней p -оценки за счет более жестких ограничений на индексы Бойда.

Всякое г.и.-пространство $E[0, \infty)$ на $[0, \infty)$ естественным образом порождает г.и.-пространство E на $[0, 1]$: функция $x(t)$, определенная на $[0, 1]$, продолжается на $(1, \infty)$ нулем; обозначая продолженную функцию через $\tilde{x}$, полагаем $\|x\|_E = \|\tilde{x}\|_{E[0, \infty)}$. Ясно, что E изометрично вкладывается в $E[0, \infty)$.

ТЕОРЕМА 4.5. *Если сепарабельное г.и.-пространство $E(0, \infty)$ удовлетворяет верхней p -оценке для некоторого $p \in (1, 2)$ и $\alpha_E > 1/2$, то $\gamma(E) \geq p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предположению существует константа $C > 0$ такая, что

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|_E \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_E^p \right)^{1/p}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ с дизъюнктными носителями. Отсюда

$$\|\sigma_n x\|_E \leq C n^{1/p} \|x\|_E$$

для любого $x \in E, n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\beta_E \leq 1/p$ и $1/2 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим квазилинейный оператор

$$B_n x(t) = \left(\sum_{k=1}^n x^2(t+k-1) \right)^{1/2}, \quad t \in [0, 1],$$

действующий из пространства функций, определенных на полуоси, в пространство функций, определенных на $[0, 1]$. Ясно, что B_n непрерывен из $L_2[0, \infty)$ в $L_2[0, 1]$ и из $L_1[0, \infty)$ в $L_1[0, 1]$ и его нормы в этих парах пространств равны единице. В силу интерполяционной теоремы (см. [8; 2.6.1]) существует такая константа $C_1 > 0$, что

$$\|B_n x\|_E \leq C_1 \|x\|_{E(0, \infty)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Более точно, в указанной теореме идет речь о линейных операторах. Однако доказательство переносится на квазилинейные операторы без всяких изменений.

Установленное выше неравенство можно переписать эквивалентным образом:

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \right\|_E \leq C_1 \left\| \sum_{i=1}^n \oplus x_i \right\|_{E(0, \infty)}, \quad (4.3)$$

где $x_i \in E$ и

$$\left(\sum_{i=1}^n \oplus x_i \right)(t) = x_i(t-i+1), \quad t \in (i-1, i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Пусть $x_i \in E$, $\|x_i\|_E = 1$, $i \in \mathbb{N}$, $x_i \xrightarrow{w} 0$. Повторяя рассуждения из теоремы 4.3, мы получаем возрастающую последовательность $j_i \in \mathbb{N}$ и разложение $x_{j_i} = u_i + v_i$, где $\|v_i\|_E \leq 2^{-i}$, $i \in \mathbb{N}$, и выполнено (4.2). Тогда

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_{j_i} \right\|_E \leq C \left\| \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 \right)^{1/2} \right\|_E + 1. \quad (4.4)$$

В силу (4.3)

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 \right)^{1/2} \right\|_E \leq C_1 \left\| \sum_{i=1}^n \oplus u_i \right\|_{E(0, \infty)}. \quad (4.5)$$

Так как $E[0, \infty)$ удовлетворяет верхней p -оценке, то

$$\left\| \sum_{i=1}^n \oplus u_i \right\|_{E(0, \infty)} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_E^p \right)^{1/p} \leq C \left(\sum_{i=1}^n (1 + 2^{-i})^p \right)^{1/p} \leq C(n^{1/p} + 1). \quad (4.6)$$

Из (4.4)–(4.6) получаем

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_{j_i} \right\|_E \leq C^2 C_1 (n^{1/p} + 1) + 1 \leq C_2 n^{1/p}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и некоторой константы $C_2 > 0$, не зависящей от $n \in \mathbb{N}$.

Предположим, что задана последовательность $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ сохраняющих меру преобразований отрезка $[0, 1]$ в себя. Рассмотрим квазилинейный оператор

$$A_n x(t) = \left(\sum_{k=1}^n x^2(\omega_k(t)) \right)^{1/2}. \quad (4.7)$$

ЛЕММА 4.6. Пусть г.и.-пространство E интерполяционно в паре (L_2, L_∞) относительно множества квазилинейных операторов. Тогда $\|A_n\|_E \leq C\sqrt{n}$, где C не зависит от n и последовательности преобразований $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить, что $\|A_n\|_{L_2} = \|A_n\|_{L_\infty} = \sqrt{n}$. Отсюда вытекает требуемая оценка.

Заметим, что условия леммы выполнены для г.и.-пространства E , если $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1/2$. Для доказательства достаточно использовать аналог теоремы 2.6.1 из [8] для квазилинейных операторов.

В следующей теореме содержится еще одно достаточное условие для того, чтобы г.и.-пространство имело максимальный индекс Банаха–Сакса.

ТЕОРЕМА 4.7. Пусть сепарабельное г.и.-пространство E обладает следующими свойствами:

- 1) E q -вогнуто для некоторого $q < \infty$;
- 2) $\beta_E < 1/2$;
- 3) 2-свойство Банаха–Сакса выполнено для дизъюнктивных последовательностей, т.е. если $x_k \in E$, $\|x_k\|_E \leq 1$, $k \in \mathbb{N}$, $x_k \xrightarrow{w} 0$, $\supp x_k$ попарно дизъюнктивны, то существуют возрастающая последовательность $k_i \in \mathbb{N}$ и $C_1 > 0$ такие, что

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_{k_i} \right\|_E \leq C_1 \sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\gamma(E) = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 4.1 показывает, что достаточно доказать 2-BS-свойство пространства E . Пусть $x_k \in E$, $\|x_k\|_E = 1$, $k \in \mathbb{N}$, $x_k \xrightarrow{w} 0$. Согласно теореме 3.2 существует такая подпоследовательность $\{y_k\} \subset \{x_k\}$, что $y_k = u_k + v_k + w_k$, $k \in \mathbb{N}$, и $u_k^* = u_1$, $u_k \xrightarrow{w} 0$, $v_k \xrightarrow{w} 0$, носители функций v_k дизъюнкты и $\|w_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Как видно из доказательства теоремы 3.2, $\|u_k\|_E \leq 1$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому можно предполагать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|w_k\|_E < 1 \quad (4.8)$$

и $\|v_k\|_E < 3$, $k \in \mathbb{N}$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно в силу условия 3) считать, что

$$\left\| \sum_{k=1}^n v_k \right\| \leq 3C_1 n^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.9)$$

Хорошо известно [7; 2.b], что q -вогнутость г.и.-пространства E влечет неравенство $\alpha_E \geq 1/q$. В силу леммы 4.6 и замечания к ней

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^n u_k^2 \right)^{1/2} \right\|_E \leq C n^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.10)$$

где константа C зависит только от пространства E . В сепарабельном г.и.-пространстве с нетривиальными индексами Бойда существует безусловный базис, а именно система Хаара [7; 2.c.6]. Тогда согласно теореме Бессаги–Пелчинского [14] всякая слабо сходящаяся к нулю последовательность содержит безусловную подпоследовательность. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\{u_k\}$ – безусловная подпоследовательность. В силу теоремы Марэ [7; 1.d.6]

$$\frac{1}{C_2} \left\| \left(\sum_{k=1}^n u_k^2 \right)^{1/2} \right\|_E \leq \left\| \sum_{k=1}^n u_k \right\|_E \leq C_2 \left\| \left(\sum_{k=1}^n u_k^2 \right)^{1/2} \right\|_E \quad (4.11)$$

для некоторой константы $C_2 > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Учитывая (4.8)–(4.11), получаем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n y_k \right\| &\leq \left\| \sum_{k=1}^n u_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^n v_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^n w_k \right\| \\ &\leq C C_2 n^{1/2} + 3C_1 n^{1/2} + 1 \leq (C C_2 + 3C_1 + 1) n^{1/2} \end{aligned}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

Как показывают теоремы Банаха–Сакса, в шкале пространств L_p максимальный индекс 2 достигается при $p \in [2, \infty)$. Это утверждение допускает следующее частичное обращение.

ТЕОРЕМА 4.8. Пусть E – сепарабельное г.и.-пространство и $\gamma(E) = 2$. Тогда $L_p \subset E \subset L_2$ для некоторого $p \in [2, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in L_\infty$, $\int_0^1 x ds = 0$, $\|x\|_E = 1$. Построим последовательность независимых равноизмеримых с x функций x_k , $k \in \mathbb{N}$. В силу леммы 3.3 $x_k \xrightarrow{w} 0$, и тогда в силу леммы 4.2 найдется такая константа $C > 0$, что

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_{i_k} \right\|_E \leq C\sqrt{n}$$

для некоторой возрастающей последовательности $i_k \in \mathbb{N}$. Согласно (4.1) $E \subset L_1$ с константой вложения 1. Поэтому

$$\sup_n \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \sum_{k=1}^n x_{i_k} \right\|_{L_1} \leq C < \infty.$$

Применяя [15; лемма 2.6], получаем $x \in L_2$ и

$$\|x\|_{L_2} \leq C_1,$$

где константа C_1 зависит только от C . Таким образом, если $x \in E$, $\|x\|_E \leq 1$, то

$$\|\min(n, |x|)\|_{L_2} \leq C_1$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Переходя в неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем $x \in L_2$ и $\|x\|_{L_2} \leq C_1$. Следовательно, $E \subset L_2$.

Докажем левое включение. Пусть $\tau \in (0, 1)$. Последовательность функций $\sigma_\tau r_n(t)$ слабо сходится к нулю и $\|\sigma_\tau r_n\|_E = \|\chi_{(0, \tau)}\|_E = \varphi_E(\tau)$. В силу леммы 4.2

$$\left\| \sum_{k=1}^n \sigma_\tau r_k \right\|_E \leq Cn^{1/2} \varphi_E(\tau),$$

где константа C не зависит от τ и n . Обозначим $\tilde{\varphi}_E(t) = t/\varphi_E(t)$. Так как $E \subset M(\tilde{\varphi}_E)$ с константой вложения 1 [8; 2.5.7], то

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n \sigma_\tau r_k \right\|_{M(\tilde{\varphi}_E)} &\leq Cn^{1/2} \varphi_E(\tau), \\ \frac{\varphi_E(s)}{s} \int_e \left| \sigma_\tau \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n r_k(t) \right) \right| dt &\leq C\varphi_E(\tau) \end{aligned}$$

для любого $s \in (0, \tau]$ и любого множества $e \subset [0, \tau]$, $\text{mes } e = s$. Перейдем в этом неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, воспользуемся центральной предельной теоремой [9; 1.5.5] и известной формулой [8; формула (2.2.12)]

$$\sup_{\text{mes } e = s} \int_e |x(t)| dt = \int_0^s x^*(t) dt, \quad x \in L_1.$$

Тогда

$$\frac{\varphi_E(s)}{s} \int_0^s z\left(\frac{t}{s}\right) dt \leq C \varphi_E(\tau),$$

где $z(t) = z^*(t)$ эквивалентна функции $\ln^{1/2}(e/t)$. Делая замены $t = \tau u$ и $s = \varepsilon \tau$, получаем

$$\varphi_E(\varepsilon \tau) \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon z(u) du \leq C \varphi_E(\tau)$$

для любых $\varepsilon, \tau \in (0, 1)$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon z(u) du > 2C.$$

Тогда $\varphi_E(\varepsilon \tau) \leq \frac{1}{2} \varphi_E(\tau)$ для всех $\tau \in [0, 1]$. В частности, $\varphi_E(\varepsilon^n) \leq 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда $\varphi_E(t) \leq q t^{1/q}$ для некоторого $q > 1$ и всех $t \in [0, 1]$. В силу [8; 2.5.5] $E \supset L_{q,1}$. Так как $L_{q,1} \supset L_p$ для $p > q$, то $E \supset L_p$.

СЛЕДСТВИЕ 4.9. Пусть E – г.и.-пространство. Если $\gamma(E^0) = \gamma((E')^0) = 2$, то $E = L_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из теоремы 4.8 непосредственно вытекает, что $E^0 \subset L_2$ и $(E')^0 \subset L_2$. Из второго вложения и леммы Фату следует, что $E' \subset L_2$. Отсюда $E'' \supset L_2$. Так как вложение $E \subset E''$ изометрично, то это означает, что на E^0 нормы E и L_2 эквивалентны. Следовательно, $E = L_2$.

Тем более справедливо следующее утверждение. Если E – г.и.-пространство и $\gamma(E) = \gamma(E') = 2$, то $E = L_2$.

Следствие 4.9 характеризует пространство L_2 в классе г.и.-пространств в терминах индекса Банаха–Сакса.

ТЕОРЕМА 4.10. Если E – сепарабельное г.и.-пространство, $1 < p < 2$ и $\gamma(E) = p$, то $\exp L_q \subset E \subset L_{p,\infty}^0$, где $q > p/(p-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $x_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, – последовательность независимых функций, принимающих значения 1 и -1 на множествах меры $1/(2m)$. Очевидно, $\|x_k\|_E = \|\chi_{(0,1/m)}\|_E = \varphi_E(1/m)$. Согласно леммам 3.3 и 4.2 существует такое $C > 0$, что для некоторой последовательности $k_i \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_{k_i} \right\|_E \leq C n^{1/p} \varphi_E\left(\frac{1}{m}\right)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. В силу независимости $\{x_k\}$

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|_E \leq C n^{1/p} \varphi_E\left(\frac{1}{m}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

В частности,

$$\left\| \sum_{k=1}^m x_k \right\|_E \leq C m^{1/p} \varphi_E\left(\frac{1}{m}\right), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (4.12)$$

По неравенству Леви [16; гл. 4, § 2.2]

$$\text{mes}\left\{t : \max_{1 \leq k \leq m} |x_k(t)| > \tau\right\} \leq 2 \text{mes}\left\{t : \left|\sum_{k=1}^m x_k(t)\right| > \tau\right\} \quad (4.13)$$

для всех $\tau > 0$. Так как функции $|x_k(t)|$ также независимы [10; § 2.2] и

$$\sum_{k=1}^m m(\text{supp } x_k) = 1,$$

то в силу [17; лемма 3]

$$\text{mes}\left\{t : \sum_{k=1}^m \tilde{x}_k(t) > \tau\right\} \leq 2 \text{mes}\left\{t : \max_{1 \leq k \leq m} |x_k(t)| > \tau\right\} \quad (4.14)$$

для всех $\tau > 0$, где $\tilde{x}_k$ равноизмеримы с x_k и $\text{supp } \tilde{x}_k$ попарно дизъюнкты, $k \in \mathbb{N}$. Можно считать, что $\tilde{x}_k(t) = \chi_{\left(\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right)}(t)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^m \tilde{x}_k(t) = 1$$

почти везде на $[0, 1]$. Из (4.13), (4.14) вытекает

$$1 = \|1\|_E \leq \left\| \sigma_4 \left(\sum_{k=1}^m x_k \right) \right\|_E.$$

Так как $\|\sigma_\tau\|_E \leq \max(1, \tau)$ для любого г.и.-пространства E и любого $\tau > 0$ [8; формула (2.4.16)], то, учитывая (4.12), получаем

$$1 \leq 4C m^{1/p} \varphi_E\left(\frac{1}{m}\right).$$

Отсюда

$$\varphi_E\left(\frac{1}{m}\right) \geq \frac{1}{4C} m^{-1/p}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Стандартные оценки, связанные с монотонными функциями, приводят к неравенству $\varphi_E(t) \geq \frac{1}{8C} t^{1/p}$ для всех $t \in [0, 1]$. В силу [8; теорема 2.5.7] $E \subset L_{p,\infty}$ и

$$\|x\|_{L_{p,\infty}} \leq 8C \|x\|_E$$

для всех $x \in E$. Сепарабельность E влечет вложение $E \subset L_{p,\infty}^0$.

Так как $r_k \xrightarrow{w} 0$, $\|r_k\|_E = 1$, $k \in \mathbb{N}$, то

$$\left\| \sum_{k=1}^n r_k \right\|_E \leq C n^{1/p},$$

где C не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Применяя аналог леммы 2.5.2 из [8] для пространства $l_{p,1}$ к этому неравенству, мы видим, что

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k r_k \right\|_E \leq C \|a\|_{l_{p,1}},$$

где $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Отсюда в силу (2.5)

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k r_k \right\|_E \leq C_1 \max_{I \subset \{1,2,\dots,n\}} \frac{\sum_{k \in I} |a_k|}{|I|^{1/q}},$$

где C_1 зависит только от C, q ; $q > p/(p-1)$. Применяя теорему 4 из [18], мы получаем $\ln^{1/q}(1/t) \in E$. Тогда вложение $\text{exr } L_q \subset E$ вытекает из [8; теорема 2.5.3].

В лемме 5.6 будет доказано, что $\gamma(L_{p,\infty}^0) = p$ для $p \in (1, 2)$. Таким образом, из теорем 4.10 и 4.8 следует, что максимальным элементом относительно вложения в множестве г.и.-пространств, имеющих индекс Банаха–Сакса p , $1 < p \leq 2$, является $L_{p,\infty}^0$, если $1 < p < 2$, и L_2 , если $p = 2$. Минимального элемента в множестве г.и.-пространств с индексом Банаха–Сакса 2 не существует. Это непосредственно вытекает из теоремы о том, что $\gamma(L_p) = 2$, $2 \leq p < \infty$, и теоремы 4.8.

§ 5. Нахождение индекса Банаха–Сакса для конкретных пространств

Вычисление $\gamma(L_{p,q})$ и $\gamma(L_{p,\infty}^0)$ оказалось весьма сложной и трудоемкой задачей. Поэтому доказательство основного результата этого параграфа будет разбито на 7 частей. Норму в пространствах $L_{p,q}$ и L_p мы будем обозначать через $\|\cdot\|_{p,q}$ и $\|\cdot\|_p$ соответственно.

ЛЕММА 5.1. *Если $1 < p, q < \infty$, $p \neq 2$, то*

$$\gamma(L_{p,q}) = \min(p, q, 2). \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тип пространства $L_{p,q}$ был найден независимо в работах [19], [20]. Там было доказано, что тип $L_{p,q}$ равен $\min(p, q, 2)$, если $p \neq 2$, равен q , если $p = 2$, $1 < q \leq 2$, и равен $2 - \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, если $p = 2$, $q > 2$. Применяя (1.3), получаем

$$\gamma(L_{p,q}) \geq \min(p, q, 2). \quad (5.2)$$

Пространство $L_{p,q}$ содержит дополняемое подпространство, изоморфное l_q [21; лемма 3.1]. Поэтому

$$\gamma(L_{p,q}) \leq \gamma(l_q) = q \quad (5.3)$$

для всех $q \in (1, \infty)$. В силу леммы 4.1 неравенство $\gamma(L_{p,q}) \leq p$ достаточно доказать при дополнительном предположении $p < 2$. Если $r \in (p, 2)$, то $t^{-1/r} \in L_{p,q}$. Согласно [7; 2.f.4] $L_{p,q}$ содержит подпространство, изоморфное L_r . Отсюда $\gamma(L_{p,q}) \leq r$ и, следовательно,

$$\gamma(L_{p,q}) \leq p. \quad (5.4)$$

Неравенства (5.2)–(5.4) и лемма 4.1 дают требуемый результат.

ЛЕММА 5.2. Если $1 < q < \infty$, то

$$\gamma(L_{2,q}) = \begin{cases} q, & q \leq 2, \\ 2 - 0, & q > 2. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечалось в лемме 5.1, пространство $L_{2,q}$ имеет тип q при $q \leq 2$ и $2 - \varepsilon$ для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ при $q > 2$. В силу (1.3) $\gamma(L_{2,q}) \geq q$ для $q \leq 2$ и $\gamma(L_{2,q}) \geq 2 - \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, если $q > 2$. Неравенство (5.3) справедливо для всех $q \in (1, \infty)$. Поэтому $\gamma(L_{2,q}) = q$, если $q \leq 2$.

Точно так же доказывается, что $\gamma(L_{2,q}) \geq r$ для любого $r < 2$, если $q > 2$. Покажем, что $L_{2,q}$ не обладает 2-BS-свойством. Пусть $x_1 \in L_{2,q} \setminus L_2$ и $x_k, k \in \mathbb{N}$, — последовательность независимых одинаково распределенных функций. Функции $y_k = x_k \otimes r_k, k \in \mathbb{N}$, образуют последовательность независимых одинаково распределенных функций с нулевым средним. В силу [22; предложение 3.11]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|_{2,q} = \infty.$$

То же самое справедливо и для любой подпоследовательности x_{k_i} . Лемма 3.4 показывает, что $x_k \xrightarrow{w} 0$. Следовательно, $L_{2,q}$ не обладает 2-BS-свойством и $\gamma(L_{2,q}) = 2 - 0$.

Продолжим начатое в лемме 4.6 изучение операторов

$$A_n x(t) = \left(\sum_{k=1}^n x^2(\omega_k(t)) \right)^{1/2},$$

где $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ — сохраняющие меру преобразования отрезка $[0, 1]$ в себя. Обозначим через $\|A_n\|_{p,q}$ и $\|A_n\|_p$ норму оператора A_n в пространствах $L_{p,q}$ и L_p соответственно.

ЛЕММА 5.3. Пусть $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty, \varepsilon > 0$. Существуют константы C_p, D_ε такие, что

- 1) $\|A_n\|_{p,q} \leq C_p n^{1/2}, \quad 2 \leq p < \infty,$
- 2) $\|A_n\|_{p,q} \leq C_p n^{1/p}, \quad 1 < p \leq 2,$
- 3) $\|A_n\|_{2,q} \leq D_\varepsilon n^{1/2+\varepsilon}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что норма оператора A_n в пространствах L_1, L_2, L_∞ равна $n, \sqrt{n}, \sqrt{n}$ соответственно. Используя интерполяционную теорему для действительного метода интерполяции [23; 3.1.2] и известную формулу [23; 5.3.1]

$$(L_{p_0}, L_{p_1})_{\theta,q} = L_{p,q}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad 0 < \theta < 1, \quad (5.6)$$

для пар (L_2, L_∞) и (L_1, L_2) , получаем первую и вторую оценки.

Найдем такие $p_0 < 2 < p_1$, что

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{2} < \varepsilon.$$

Применим снова формулу (5.6) с $\theta = 1/2$ и воспользуемся тем, что в силу 1) и 2) $\|A_n\|_{p_0} \leq C_0 n^{1/2}$, $\|A_n\|_{p_1} \leq C_1 n^{1/2+\varepsilon}$. Тогда мы получим третью оценку.

Заметим, неравенство (5.5) дает наилучшую из возможных оценок. Действительно, если $\omega_1(t) = \omega_2(t) = \dots = \omega_n(t) = t$, то $A_n x(t) = \sqrt{n}|x(t)|$ и $\|A_n\|_{p,q} \geq \sqrt{n}$ для любых $n \in \mathbb{N}$, $p, q \in (1, \infty)$.

Приступая к нахождению $\gamma(L_{p,1})$, заметим, что пространство $L_{p,1}$ имеет тривиальный тип, так как содержит подпространство, изоморфное l_1 , и формула (1.3) дает лишь тривиальную оценку $\gamma(L_{p,1}) \geq 1$. Потому здесь мы будем применять другие методы.

ЛЕММА 5.4. 1) Если $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, то $\gamma(L_{p,1}) = \min(p, 2)$.

2) $2 - \varepsilon \leq \gamma(L_{2,1}) \leq 2$ для любого $\varepsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство $L_{p,1}$ r -вогнуто для $r > p$ [21; лемма 2.1]. Очевидно, $\alpha_{L_{p,1}} = \beta_{L_{p,1}} = 1/p$. Из всякой нормированной в $L_{p,1}$ последовательности с дизъюнктными носителями можно выделить подпоследовательность, эквивалентную стандартному базису l_1 [21; лемма 3.1]. В l_1 слабая сходимость совпадает с сильной. Поэтому можно считать, что выделенная подпоследовательность стремится к нулю сколь угодно быстро. Все условия теоремы 4.7 выполнены для $L_{p,1}$, $p > 2$. Следовательно, $\gamma(L_{p,1}) = 2$, если $2 < p < \infty$, $\gamma(L_{2,1}) \geq 2 - \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$.

Оценка $\gamma(L_{p,1})$ снизу для $p \in (1, 2)$ и $p = 2$ проводится точно так же, как и в теореме 4.7. Единственное отличие состоит в использовании леммы 5.3, 2) для $p \in (1, 2)$ и леммы 5.3, 3) для $p = 2$ вместо леммы 4.6.

Как видно из доказательства леммы 5.1, неравенство (5.4) справедливо для всех $q \in [1, \infty]$, в частности $\gamma(L_{p,1}) \leq p$. Отсюда и из леммы 4.1 вытекает, что $\gamma(L_{p,1}) \leq \min(p, 2)$ для всех $1 < p < \infty$. Поэтому $\gamma(L_{p,1}) = \min(p, 2)$ для $p \neq 2$.

ЛЕММА 5.5. Пространство $L_{2,1}$ не обладает 2-BS-свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq l$, $A(k)$ – попарно дизъюнктные множества из отрезка $[0, 1]$, $\text{mes } A(k) = 2^{-k-l}$. Найдём последовательность измеримых множеств $e(k, m) \subset A(k)$ таких, что $\text{mes } e(k, m) = 2^{-2l}$ для всех $k, m \in \mathbb{N}$ и $\{\chi_{e(k, m)}\}$ – последовательность независимых функций на $A(k)$ для любого $k = 1, 2, \dots, l$. Если обозначить $g(m) = \bigcup_{k=1}^l e(k, m)$, то $\text{mes } g(m) = l2^{-2l}$.

В силу [24; 2.5] последовательность функций

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \chi_{g(m)}$$

сходится по мере к функции

$$\sum_{k=1}^l \frac{\text{mes } e(k, m)}{\text{mes } A(k)} \chi_{A(k)} = \sum_{k=1}^l 2^{k-l} \chi_{A(k)}.$$

Отсюда

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \chi_{g(m)} \right)^{1/2} \right\|_{2,1} \geq \left\| \sum_{k=1}^l 2^{\frac{k-l}{2}} \chi_{A(k)} \right\|_{2,1}.$$

Нетрудно посчитать, что

$$\left(\sum_{k=1}^l 2^{\frac{k-l}{2}} \varkappa_{A(k)} \right)^* (t) = \sum_{j=1}^l 2^{-\frac{j-1}{2}} \varkappa_{(\tau_j, \tau_{j+1})}(t),$$

где

$$\tau_j = \sum_{i=2l-j+2}^{2l} 2^{-i}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^l 2^{\frac{k-l}{2}} \varkappa_{A(k)} \right\|_{2,1} &= \sum_{j=1}^l 2^{-\frac{j-1}{2}} \left(\sqrt{\tau_{j+1}} - \sqrt{\tau_j} \right) \\ &> \sum_{j=1}^l 2^{-\frac{j-1}{2}} \left(\sqrt{2\tau_j} - \sqrt{\tau_j} \right) = (\sqrt{2} - 1) \sum_{j=1}^l 2^{-\frac{j-1}{2}} \cdot 2^{-\frac{2l-j+2}{2}} > \frac{1}{4} l 2^{-l}, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \varkappa_{g(m)} \right)^{1/2} \right\|_{2,1} &\geq \frac{1}{4} l 2^{-l}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Рассмотрим последовательность функций

$$x_m = \frac{\varkappa_{g(m)}}{(\text{mes } g(m))^{1/2}} \otimes r_m = \frac{2^l}{\sqrt{l}} \varkappa_{g(m)} \otimes r_m,$$

где r_m — функции Радемахера. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n x_m^2 &= \frac{2^{2l}}{l} \sum_{m=1}^n \varkappa_{g(m)} \otimes 1 = \frac{2^{2l}}{l} \left(\sum_{m=1}^n \varkappa_{g(m)} \right) \otimes 1, \\ \left\| \left(\sum_{m=1}^n x_m^2 \right)^{1/2} \right\|_{2,1} &= \frac{2^l}{\sqrt{l}} \left\| \sum_{m=1}^n \varkappa_{g(m)} \right\|_{2,1}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

В силу леммы 3.4 имеем $x_i \xrightarrow{w} 0$. Докажем, что

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_{m_i} \right\|_{2,1} = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|_{2,1}$$

для любой возрастающей последовательности m_i . В силу независимости множеств $e(k, m)$ функции $\left(\sum_{i=1}^m x_{m_i} \right) \varkappa_{A(k)}$ и $\left(\sum_{i=1}^m x_i \right) \varkappa_{A(k)}$ равноизмеримы для любого $k = 1, 2, \dots, l$. Так как множества $A(k)$ попарно дизъюнкты, то отсюда вытекает равноизмеримость функций $\sum_{i=1}^m x_{m_i}$ и $\sum_{i=1}^m x_i$. Поэтому равны и их нормы.

Если бы пространство $L_{2,1}$ обладало 2-BS-свойством, то, как показывает лемма 4.2,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \sum_{m=1}^n x_m \right\|_{2,1} < \infty. \quad (5.9)$$

Так как $L_{2,1}$ r -вогнуто для любого $r > 2$ [21; лемма 2.1] и последовательность x_i безусловна, то согласно теореме Марэ [7; 1.d.6]

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \sum_{m=1}^n x_m \right\|_{2,1} \geq C \left\| \left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n x_m^2 \right)^{1/2} \right\|_{2,1}.$$

Учитывая (5.7), (5.8), получаем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \sum_{m=1}^n x_m \right\|_{2,1} \geq \frac{C}{4} \sqrt{l}.$$

Полученное неравенство в силу произвольности l противоречит (5.9).

ЛЕММА 5.6. Если $1 < p < 2$, то $\gamma(L_{p,\infty}^0) = p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $L_{p,\infty}^0(0, \infty)$ сепарабельно и удовлетворяет верхней p -оценке [21; лемма 2.1], то в силу теоремы 4.5 $\gamma(L_{p,\infty}^0) \geq p$.

Очевидно, $t^{-1/r} \in L_{p,\infty}^0$ для любого $r \in (p, 2)$. Согласно [7; 2.f.4] пространство L_r вкладывается в $L_{p,\infty}^0$ изометрично. Отсюда $\gamma(L_{p,\infty}^0) \leq \gamma(L_r) = r$ и, следовательно, $\gamma(L_{p,\infty}^0) \leq p$.

ЛЕММА 5.7. Если $2 < p < \infty$, то $\gamma(L_{p,\infty}^0) = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\alpha_{L_{p,\infty}^0} = 1/p > 0$ и пространство $L_{p,\infty}^0$ 2-выпукло [20; лемма 2.1.], то достаточно применить следствие 4.4.

ЛЕММА 5.8. $\gamma(L_{2,\infty}^0) = 2 - 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство $L_{2,\infty}^0$ p -выпукло для любого $p < 2$ [21; лемма 2.1] и $\alpha_{L_{2,\infty}^0} = 1/2$. Теорема 4.3 показывает, что $\gamma(L_{2,\infty}^0) \geq p$ для любого $p < 2$. Так как $L_2 \subsetneq L_{2,\infty}$, то в силу теоремы 4.8 $\gamma(L_{2,\infty}) \neq 2$. Следовательно, $\gamma(L_{2,\infty}^0) = 2 - 0$.

Объединяя леммы 5.1, 5.2, 5.4–5.8, мы приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 5.9. 1) Если $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, то

$$\gamma(L_{p,q}) = \begin{cases} \min(p, q, 2), & p \neq 2, q \neq 1 \text{ или } p = 2, 1 < q \leq 2, \\ \min(p, 2), & p \neq 2, q = 1, \\ 2 - 0, & p = 2, q = 1 \text{ или } q > 2; \end{cases}$$

$$2) \gamma(L_{p,\infty}^0) = \begin{cases} \min(p, 2), & p \neq 2, \\ 2 - 0, & p = 2. \end{cases}$$

Для $p = q$ пространство $L_{p,q}$ совпадает с L_p . Поэтому из теоремы 5.9 вытекают теоремы Банаха–Сакса для $p \leq 2$ и $p \geq 2$. Заметим, что функция $\gamma(L_{p,q})$ непрерывна в бесконечной точке и разрывна при $q = 1$. Теорема 5.9 также говорит о неустойчивости множества г.и.-пространств, имеющих индекс Банаха–Сакса $\geq p$ ($p \in (1, 2]$), относительно вещественного или комплексного метода интерполяции.

Действительно, $\gamma(L_{p,1}) = \gamma(L_p) = \min(p, 2)$, если $1 < p < \infty$, $p \neq 2$. В силу [23; 4.7.2, 5.3.1]

$$[L_{p,1}, L_p]_\theta = L_{p,q},$$

где $1/q = 1 - \theta + \theta/p$, $0 < \theta < 1$ и $[\cdot, \cdot]_\theta$ – пространство, построенное с помощью комплексного метода интерполяции. Теорема 5.9 показывает, что $\gamma([L_{p,1}, L_p]_\theta) < \min(p, 2)$ при достаточно малых θ . Аналогичные рассуждения можно провести и для вещественного метода интерполяции.

Разрывность функции $\gamma(L_{p,q})$ в точке $q = 1$ связана с упомянутым во введении фактом о разрывности функции $\gamma(l_q)$ в точке $q = 1$.

Пусть E – г.и.-пространство. Обозначим через $T(E)$ множество тех $p \in [1, 2]$, для которых E имеет тип p . В силу (1.3) $\Gamma(E) \supset T(E)$. Всякое г.и.-пространство с нетривиальным типом рефлексивно. Поэтому $T(L_{p,1}) = T(L_{p,\infty}^0) = \{1\}$. Теорема 5.9 показывает, что $T(L_{p,1}) \neq \Gamma(L_{p,1})$ и $T(L_{p,\infty}^0) \neq \Gamma(L_{p,\infty}^0)$ для всех $p \in (1, \infty)$. Если же $1 < p, q < \infty$, то $T(L_{p,q}) = \Gamma(L_{p,q})$. Таким образом, если $E \in \{L_{p,q}, 1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty, L_{p,\infty}^0, 1 < p < \infty\}$, то равенство $T(E) = \Gamma(E)$ эквивалентно рефлексивности E .

Переходим к задаче о нахождении индекса пространства Орлича. Хорошо известно, что сепарабельность пространства Орлича L_M эквивалентна условию $M \in \Delta_2$:

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{M(2u)}{M(u)} < \infty.$$

Важными характеристиками пространства L_M являются числа

$$a_M = \sup \left\{ p : \inf_{\lambda, t \geq 1} \frac{M(\lambda t)}{M(\lambda)t^p} > 0 \right\}, \quad b_M = \inf \left\{ q : \sup_{\lambda, t \geq 1} \frac{M(\lambda t)}{M(\lambda)t^q} < \infty \right\}.$$

Известно [7; 2.b.5], что $1 \leq a_M \leq b_M \leq \infty$ и

$$\begin{aligned} a_M &= \sup \{ p : L_M \text{ удовлетворяет верхней } p\text{-оценке} \}, \\ b_M &= \inf \{ q : L_M \text{ удовлетворяет нижней } q\text{-оценке} \}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 5.10. Пусть функция Орлича $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию. Тогда

- 1) $\gamma(L_M) \leq \min(a_M, 2)$,
- 2) если M p -выпукла для некоторого $p > 1$, т.е. $M(u^{1/p})$ эквивалентна выпуклой функции, то $\gamma(L_M) \geq \min(p, 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [25; предложение 2] L_M содержит подпространство, изоморфное l_r , где $r \in [a_M, b_M] \cup \{2\}$. Как отмечалось во введении, $\gamma(l_r) = r$ для $1 < r < \infty$. Поэтому $\gamma(L_M) \leq \gamma(l_r)$ для всех $r \in (a_M, b_M] \cup \{2\}$ и $\gamma(L_M) \leq \min(a_M, 2)$.

Хорошо известно, что Δ_2 -условие функции M влечет $\alpha_{L_M} > 0$ [7; 2.b.5]. Так как p -выпуклость функции M эквивалентна p -выпуклости пространства Орлича L_M [7; 1.d], то вторая часть теоремы непосредственно следует из теоремы 4.3.

Очевидно, если $M(u) = u^p$, $1 < p < \infty$, то $a_M = b_M = p$ и $\gamma(L_M) = \min(p, 2)$. Таким образом, теорема 5.10, так же как и теорема 5.9, обобщает теоремы Банаха–Сакса.

Рассмотрим в качестве примера семейство функций

$$M_{p,\alpha}(u) = u^p \ln^\alpha(e + u), \quad u \geq 0,$$

где $1 < p < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Функция $M_{p,\alpha}$ выпукла при $\alpha \geq 0$ и эквивалентна выпуклой при $\alpha < 0$. Обозначим через $L(p, \alpha)$ соответствующее пространство Орлича, построенное по выпуклой функции, эквивалентной $M_{p,\alpha}$. Нетрудно подсчитать, что $a_{M_{p,\alpha}} = b_{M_{p,\alpha}} = 1/p$. Функция $M_{p,\alpha}(u)$ p -выпукла, если $\alpha \geq 0$, и r -выпукла для любого $1 \leq r < p$, если $\alpha < 0$. В силу теоремы 4.3 $\gamma(L(p, \alpha)) \geq \min(p, 2)$ при $\alpha \geq 0$ и $\gamma(L(p, \alpha)) \geq \min(r, 2)$ для любого $r \in (1, p)$ при $\alpha < 0$. Если $p < 2$, $\alpha < 0$, то $L(p, \alpha)$ не вложено в $L_{p,\infty}^0$, так как $\varphi_{L_{p,\infty}^0}(t) = t^{1/p}$ и

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_{L(p,\alpha)}(t)}{t^{1/p}} = 0.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что $L(2, \alpha)$ не вложено в L_2 , если $\alpha < 0$. Теоремы 4.8 и 4.10 показывают, что $\gamma(L(p, \alpha)) \neq p$, если $p \leq 2$, $\alpha < 0$. Таким образом, справедливо

СЛЕДСТВИЕ 5.11. Если $1 < p < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$\gamma(L(p, \alpha)) = \begin{cases} \min(p, 2), & \text{если } p > 2 \text{ или } \alpha \geq 0, \\ p - 0, & \text{если } p \leq 2, \alpha < 0. \end{cases}$$

Функция $M_{1,\alpha}$ выпукла, если $\alpha \geq 0$. При этом предположении $\gamma(L(1, \alpha)) = 1$. Действительно, достаточно повторить рассуждения из леммы 5.1.

Список литературы

1. Банах С. Теория линейных операций. Ижевск: Регуляр. и хаот. динамика, 2001.
2. Johnson W. B. On quotients of L_p which are quotients of l_p // Compositio Math. 1977. V. 34. P. 69–89.
3. Beauzamy B. Banach–Saks properties and spreading models // Math. Scand. 1979. V. 44. P. 357–384.
4. Раков С. А. О показателе Банаха–Сакса некоторых банаховых пространств последовательностей // Матем. заметки. 1982. Т. 32. № 5. С. 613–626.
5. Kadec M. I., Pelczynski A. Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p // Studia Math. 1962. V. 21. P. 161–176.
6. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. I. Sequence spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
7. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. II. Function spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1979.
8. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
9. Гапошкин В. Ф. Лакунарные ряды и независимые функции // УМН. 1966. Т. 21. № 6. С. 3–82.
10. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.

11. *Dodds P. G., Schlüchtermann G., Sukochev F. A.* Weak compactness in rearrangement invariant operator spaces // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 2001. V. 131. P. 363–384.
12. *Knaust H., Odell E.* Weakly null sequences with upper l_p -estimates // *Functional analysis. Proc. Semin., Austin/TX (USA), 1987–89* / ed. E. Odell, H. Rosenthal. Berlin: Springer-Verlag, 1991. P. 85–107.
13. *Johnson W. B., Schechtman G.* Martingale inequalities in rearrangement invariant function spaces // *Israel J. Math.* 1988. V. 64. №3. P. 267–275.
14. *Bessaga G., Pelczyński A.* On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces // *Studia Math.* 1958. V. 17. P. 151–164.
15. *Braverman M. Sh.* Independent random variables and rearrangement invariant spaces. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1994.
16. *Важанія Н. Н., Таричеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985.
17. *Johnson W. B., Schechtman G.* Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces // *Ann. Probab.* 1989. V. 17. №2. P. 789–806.
18. *Rodin V. A., Semjonov E. M.* Rademacher series in symmetric spaces // *Anal. Math.* 1975. V. 1. №4. P. 207–222.
19. *Новиков С. Я.* Котип и тип функциональных пространств Лоренца // *Матем. заметки.* 1982. Т. 32. №4. С. 213–221.
20. *Creekmore J.* Type and cotype in Lorentz $L_{p,q}$ spaces // *Indag. Math. (N.S.).* 1981. V. 43. P. 145–152.
21. *Carothers N. L., Dilworth S. J.* Geometry of Lorentz spaces via interpolation // *Functional analysis. Proc. 4th. Annu. Semin., Austin/TX (USA), 1985–86.* Austin, TX: University of Texas, 1986. P. 107–133.
22. *Carothers N. L., Dilworth S. J.* Equidistributed random variable in $L_{p,q}$ // *J. Funct. Anal.* 1989. V. 84. P. 146–159.
23. *Берг И., Лёфстрём И.* Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
24. *Ламберти Д.* Вероятность. М.: Наука, 1973.
25. *Hernandez F. L., Rodriguez-Salinas B.* Lattice-embedding scales of L^p spaces into Orlicz spaces // *Israel J. Math.* 1998. V. 104. P. 191–220.

Воронежский государственный университет,
 Университет Флиндерс, Аделаиде, Австралия
E-mail: semenov@func.vsu.ru
sukochev@infoeng.flinders.edu.au

Поступила в редакцию
 23.06.2003