Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Филимонова, Асимптотика решений полулинейного параболического уравнения в цилиндрической области, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 2, 141–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm803>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 13:08:33

УДК 517.95

И. В. Филимонова

Асимптотика решений полулинейного параболического уравнения в цилиндрической области

В работе найдена асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решений полулинейного параболического уравнения второго порядка в цилиндрической области, удовлетворяющих нулевому граничному условию Неймана на боковой поверхности цилиндрической области.

Библиография: 8 названий.

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматривается полулинейное параболическое уравнение

$$u_t = \Delta u - a(x)|u|^\sigma u \quad (1)$$

в цилиндре $\Pi_0 = \{(x, t) \mid x \in \Omega, t > 0\}$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой класса C^2 границей.

Изучается асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ решений уравнения (1), удовлетворяющих условию:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (2)$$

где ν – вектор единичной внешней нормали к $\partial\Omega$.

Предполагается, что σ – положительная константа, $a(x)$ – неотрицательная ограниченная функция в $\overline{\Omega}$ со средним значением

$$\bar{a} = (\text{mes } \Omega)^{-1} \int_{\Omega} a(x) dx > 0.$$

Будем использовать обозначения $\Pi_{a,b} = \{(x, t) \mid x \in \Omega, a < t < b\}$, $S_{a,b} = \{(x, t) \mid x \in \partial\Omega, a < t < b\}$, $\Pi_a = \Pi_{a,\infty}$, $S_a = S_{a,\infty}$.

Под решением в Π_0 уравнения (1), удовлетворяющим условию (2), понимается обобщенное решение в стандартном определении, т.е. функция $u(x, t)$, принадлежащая $W_2^{1,1}(\Pi_{a,b}) \cap L_\infty(\Pi_{a,b})$ при любых $0 < a < b$ и удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_{\Pi_{a,b}} u_t \psi dx dt + \sum_{i=1}^n \int_{\Pi_{a,b}} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx dt + \int_{\Pi_{a,b}} a(x)|u|^\sigma u \psi dx dt = 0$$

для любой функции $\psi(x, t) \in W_2^{1,0}(\Pi_{a,b})$.

Работа выполнена при поддержке фонда INTAS (грант № 03-51-5007) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1464.2003.1).

Из теории линейных параболических уравнений, изложенной, например, в [1], следует, что обобщенные решения уравнения (1), удовлетворяющие (2), непрерывны в Π_0 вплоть до S_0 , принадлежат $W_2^{2,1}(\Pi_{a,b})$ и удовлетворяют уравнению (1) почти всюду.

Исследованию асимптотического поведения решений уравнения (1), удовлетворяющих условию (2), посвящены работы [2]–[4] и др.

В работе [3] доказано, что все решения уравнения (1), удовлетворяющие условию (2), стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, и найден первый член асимптотики решения при $t \rightarrow \infty$. А именно доказано, что для любого решения существует равномерный по Ω предел при $t \rightarrow \infty$:

$$t^{1/\sigma} u(x, t) \rightrightarrows_{\Omega} \Lambda \in \{-c_0, 0, c_0\}, \quad c_0 = (\sigma \bar{a})^{-1/\sigma}.$$

В работе [4] установлено, что если $a(x) \equiv a_0 = \text{const} > 0$, то любое решение уравнения (1), удовлетворяющее граничному условию (2), имеет вид

$$u(x, t) = C(t + \tau)^{-1/\sigma} + o(e^{-\alpha t}), \quad t \rightarrow \infty,$$

где либо $C = 0$, либо $|C| = (\sigma a_0)^{-1/\sigma}$; константа τ зависит от u , а константа $\alpha > 0$ от u не зависит. Более того, $C = 0$ тогда и только тогда, когда решение обращается в нуль при сколь угодно больших t .

В настоящей работе доказывается, что:

1) осциллирующее, т.е. обращающееся в нуль при сколь угодно больших t , решение уравнения (1), для которого выполнено условие (2), экспоненциально убывает при $t \rightarrow \infty$ (отметим, что при любом α уравнение (1) имеет решение, удовлетворяющее условию (2) и убывающее быстрее, чем $\exp(\alpha t)$);

2) для любых двух положительных при $t \rightarrow \infty$ решений $u(x, t)$ и $v(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющих условию (2), существует такая константа τ , что $u(x, t) - v(x, t + \tau) = o(e^{-\alpha t})$, где константа $\alpha > 0$ не зависит от u, v ;

3) для любого положительного решения $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию (2), можно при любом N подобрать непрерывные в $\bar{\Omega}$ функции $\varphi_{ki}(x)$, $k = 0, \dots, N$, $i = 0, \dots, k$, такие, что

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^N t^{-1/\sigma-k} \sum_{i=0}^k \varphi_{ki}(x) \ln^i t + o(t^{-1/\sigma-N}), \quad t \rightarrow \infty,$$

причем $\varphi_{00} = (\sigma \bar{a})^{-1/\sigma}$.

§ 2. Предварительные сведения

Для доказательства теорем об асимптотическом поведении решений уравнения (1), удовлетворяющих условию (2), используется ряд результатов об асимптотическом поведении решений линейных уравнений.

Сформулируем их.

Пусть $u(x, t)$ – решение уравнения

$$u_t = \Delta u + a(x, t)u + f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

такое, что

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega \times \mathbb{R}} = 0. \quad (4)$$

Доказательства следующих двух утверждений изложены в работе [5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} a^2(x, t) dx \right)^{1/2} &= O(t^{-1}), & t \rightarrow \infty, \\ \int_{\Omega} a(x, t) dx &= a_0 t^{-1} + o(t^{-1-\varepsilon}), & t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $a_0 = \text{const}$, $\varepsilon > 0$. Пусть функция $f(x, t)$ равна нулю при $t < 1$ и такова, что при некотором $\sigma > 1/2 - a_0$ выполнено

$$\int_1^{\infty} \int_{\Omega} |f(x, t)|^2 t^{2\sigma} dx dt < \infty.$$

Пусть константа $\delta > 0$ такова, что в полосе $|\text{Re } \lambda| < \delta$ нет точек спектра задачи

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad (5)$$

отличных от $\lambda = 0$.

Тогда решение $u(x, t)$ задачи (3), (4) такое, что

$$\int_1^{\infty} \int_{\Omega} (|u|^2 + |\Delta u|^2 + |u_t|^2) e^{-2\delta t} dx dt < \infty,$$

имеет вид

$$u(x, t) = ct^{a_0} + o(t^{a_0}), \quad t \rightarrow \infty,$$

где $c = \text{const}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть выполнены условия предложения 1. Найдется $t_0(\sigma)$ такое, что существует решение задачи (3), (4), удовлетворяющее условию

$$\int_{t_0}^{\infty} \int_{\Omega} [|u|^2 t^{2\sigma-2} + (|\Delta u|^2 + |u_t|^2) t^{2\sigma-2}] dx dt < \infty.$$

Будет также использоваться следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Каково бы ни было α , $0 < \alpha < \lambda_1$, где λ_1 – первое ненулевое собственное значение задачи (5), найдется такое $\nu > 0$, что если $|a(x, t)| < \nu$, $a(x, t) = 0$ при $t < 1$ и $f(x, t)$ – финитная по t функция, то существует решение уравнения (3), удовлетворяющее условию (4), такое, что

$$u(x, t) = \begin{cases} o(e^{-\alpha t}), & t \rightarrow +\infty, \\ C + o(e^{\alpha t}), & t \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функциональные пространства $L_{2,q}$ и $W_{2,q}^{2,1}$ с нормами

$$\|f\|_{L_{2,q}}^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} f^2 e^{2qt} dx dt < \infty,$$

$$\|u\|_{W_{2,q}^{2,1}}^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} (u_t^2 + |\Delta u|^2 + u^2) e^{2qt} dx dt < \infty$$

соответственно.

Пусть α — произвольная положительная константа, меньшая чем λ_1 — первое ненулевое собственное значение задачи (5). Введем оператор $Q: L_{2,\alpha} \rightarrow W_{2,\alpha}^{2,1}$, переводящий $f(x, t) \in L_{2,\alpha}$ в решение $u(x, t)$ уравнения $u_t = \Delta u + f(x, t)$ в $\Omega \times \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию (4) и принадлежащее $W_{2,\alpha}^{2,1}$. Такое решение существует, единственно и может быть построено методом преобразования Фурье по t . Действительно, рассмотрим задачу с вещественным параметром ξ :

$$i\xi \hat{w} = (\Delta + \alpha) \hat{w} + \hat{f}_1, \quad x \in \Omega, \quad \left. \frac{\partial \hat{w}}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad (7)$$

где $f_1 = f \exp(\alpha t)$, а $\hat{f}_1$ — образ функции f_1 при преобразовании Фурье по t .

Так как на прямой $\operatorname{Re} \lambda = \alpha$ нет точек спектра задачи (5), то при любом $\xi \in \mathbb{R}$ существует единственное решение $\hat{w}(\xi) = R(\alpha - i\xi) \hat{f}_1$ задачи (7) из $W_2^2(\Omega)$, где $R(\lambda)$ — резольвента задачи (5). В [6] показано, что

$$\|R(\alpha - i\xi)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C(1 + |\xi|)^{-1},$$

поэтому $\hat{w}(\xi), \xi \hat{w}(\xi) \in L_{2,0}$ и обратное преобразование Фурье по ξ от $\hat{w}(\xi)$ существует и удовлетворяет уравнению $u_t = \Delta u + f(x, t)$ и условию (4).

Единственность решения, принадлежащего $W_{2,\alpha}^{2,1}$, следует из того, что к таким решениям, умноженным на $\exp(\alpha t)$, применимо преобразование Фурье, а однородная задача (7) при любом значении параметра $\xi \in \mathbb{R}$ имеет только нулевое решение.

Таким образом, оператор Q определен. Из оценки нормы оператора $R(\alpha - i\xi)$ в $L_2(\Omega)$ и равенства Парсеваля следует, что оператор Q ограничен как оператор из $L_{2,\alpha}$ в $L_{2,\alpha}$.

Пусть $g \in L_{2,\alpha}$. Если $g + a(x, t)Qg + f(x, t) = 0$, то функция Qg будет решением задачи (3), (4). Применяя теорему об обратимости оператора, мало отличающегося по норме от единичного, находим, что при $\sup |a(x, t)| < 1/(2\|Q\|) \doteq \nu$ решением $u_1(x, t)$ уравнения (3), удовлетворяющим условию (4), является функция Qg .

Так как $f(x, t)$ финитна по t , то при достаточно больших N функция $u = u_1 e^{\alpha t}$ является в $\Pi_{N-2, N+2}$ решением уравнения $u_t = \Delta u + \alpha u + a(x, t)u$, удовлетворяющим условию (4). Из классической оценки Нэша [1] следует, что

$$\max_{(x,t) \in \Pi_{N-1, N+1}} u_1(x, t) e^{\alpha t} \leq C \left(\int_{\Pi_{N-2, N+2}} u_1^2 e^{2\alpha t} dx dt \right)^{1/2},$$

при этом константа $C = C(\alpha, \nu)$ не зависит от N . Так как $u_1(x, t) \in L_{2,\alpha}$, то при $N \rightarrow +\infty$ получим, что $u_1(x, t) = o(e^{-\alpha t})$, $t \rightarrow +\infty$.

Пусть $\zeta(t) = 1$ при $t < 0$ и $\zeta(t) = 0$ при $t > 1$. Тогда $u_2 = u_1\zeta(t)$ – решение задачи вида (3), (4) с $a(x, t) \equiv 0$ и некоторой финитной по t функцией $f(x, t)$.

Так как корневое подпространство, отвечающее $\lambda = 0$, одномерно и порождено собственной функцией, равной константе, то для резольвенты $R(\lambda)$ задачи (5) в некоторой окрестности $\lambda = 0$ имеет место представление

$$R(\lambda)f = \lambda^{-1}\bar{f} + \Gamma(\lambda)f, \quad (8)$$

где $\bar{f}$ – среднее значение функции f в области Ω , $\Gamma(\lambda)$ – аналитическая операторнозначная функция [7]. Так как в полосе $|\operatorname{Re} \lambda| < \alpha + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \lambda_1 - \alpha$, задача (5) имеет только нулевое собственное значение, то в этой полосе при $\lambda \neq 0$ резольвента $R(\lambda)$ аналитична, если же $|\lambda| > \mu$, где μ произвольно мало, то она равномерно ограничена в этой полосе. Следовательно, представление (8) имеет место во всей полосе $|\operatorname{Re} \lambda| < \alpha + \varepsilon$ с аналитической и ограниченной функцией $\Gamma(\lambda)$.

Из результатов Агмона, Ниренберга [8] и из представления (8) следует, что $u_2(x, t)$ при $t \rightarrow -\infty$ имеет вид $u_2(x, t) = C + v$, где $C = \text{const}$, $v \in W_{2, -\alpha}^{2,1}$.

Аналогично предыдущему, рассматривая уравнение для v и используя оценку Нэша, получаем, что $v = o(e^{\alpha t})$ при $t \rightarrow -\infty$.

Таким образом, $u_1(x, t)$ имеет вид (6) и предложение 3 доказано.

Прежде чем перейти к последовательному изложению результатов, отметим следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Для любого решения $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющего граничному условию (2), выполнена оценка*

$$|u(x, t)| < kt^{-1/\sigma}, \quad t > 0, \quad (9)$$

где константа k зависит от u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как $\bar{a} > 0$, то при достаточно большом k $\eta = k/\sigma - \bar{a}k^{\sigma+1} < 0$. Определим непрерывную в $\bar{\Omega}$ функцию $\varphi(x)$ как решение задачи

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sigma}k - a(x)k^{\sigma+1} - \eta, \quad x \in \Omega, \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \right|_{\partial\Omega} = 0.$$

Эта задача разрешима в силу выбора η , и у нее существует положительное в $\bar{\Omega}$ решение $\varphi(x)$. Функция $w_{\text{sup}}(x, t) = kt^{-1/\sigma} + \varphi(x)t^{-2-1/\sigma} > 0$ является при $t > t_1$ суперрешением уравнения (1), поскольку

$$\Delta w_{\text{sup}} - a(x)w_{\text{sup}}^{\sigma+1} - (w_{\text{sup}})_t = \eta t^{-1-1/\sigma} + O(t^{-2-1/\sigma}) < 0$$

для достаточно больших $t > t_1$. Следовательно, функция $w_{\text{sup}}(x, t + t_1)$ является при $t > 0$ суперрешением уравнения (1), удовлетворяющим условию (2). Так как $a(x) \geq 0$, то при любом $c > 1$ функция $cw_{\text{sup}}(x, t + t_1)$ – также суперрешение уравнения (1). Отсюда следует, что для любого решения $u(x, t)$ можно так подобрать $c_u > 1$, что $u(x, t) \leq c_u w_{\text{sup}}(x, t + t_1)$ при $t = 0$, $x \in \Omega$. Из принципа максимума и вида $w_{\text{sup}}(x, t)$ заключаем, что для любого решения имеет место оценка (9).

§ 3. Экспоненциальное убывание осциллирующих решений

ТЕОРЕМА 1. Если решение $u(x, t)$ в Π_0 уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), обращается в нуль в точках (x_N, t_N) , $t_N \rightarrow +\infty$, то

$$|u(x, t)| \leq c \exp(-\alpha t),$$

где c и α – положительные константы, причем α не зависит от u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\zeta(t)$ – гладкая класса C^1 функция, $\zeta(t) = 0$ при $t < t_0$ и $\zeta(t) = 1$ при $t > t_0 + 1$, константа $t_0 > 1$ будет выбрана позже.

Функция

$$u_1(x, t) = \begin{cases} u(x, t)\zeta(t), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

удовлетворяет в $\Omega \times \mathbb{R}$ уравнению

$$(u_1)_t = \Delta u_1 - Q(x, t)u_1 + F(x, t) \quad (10)$$

и условию

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega \times \mathbb{R}} = 0.$$

Здесь $F(x, t) = u\zeta_t$, $Q(x, t) = a(x)|u(x, t)|^\sigma \zeta(t)$. Функции $F(x, t)$, $Q(x, t)$ по определению полагаются равными нулю при $t \leq t_0$.

Так как $u(x, t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ [3], то константу t_0 можно выбрать так, чтобы $|Q| < \nu$ при $t > t_0$, где ν определено в предложении 3.

Следовательно, применив предложение 3, найдем, что уравнение (10) имеет решение $u_2(x, t)$ такое, что

$$u_2(x, t) = \begin{cases} o(e^{-\alpha t}), & t \rightarrow +\infty, \\ C + o(e^{\alpha t}), & t \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

где C и α – константы, причем $\alpha > 0$.

Функция $w = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнению $w_t = \Delta w - Q(x, t)w$ и $w = C + o(e^{\alpha t})$ при $t \rightarrow -\infty$. Если $C > 0$, то из принципа максимума следует, что w положительна.

Уравнение $w_t = \Delta w - Q(x, t)w$ имеет положительное субрешение $w_{\text{sub}}(t)$, зависящее только от t и убывающее при $t \rightarrow \infty$ степенным образом. Действительно, так как из (9) имеем оценку $|Q| = |a(x)||u(x, t)|^\sigma \zeta(t) \leq c_2 k^\sigma t^{-1}$, где c_2 – такая постоянная, что $a(x) < c_2$, то

$$\Delta w_{\text{sub}} - Q(x, t)w_{\text{sub}} - (w_{\text{sub}})_t \geq -(w_{\text{sub}})_t - c_2 k_u^\sigma t^{-1} w_{\text{sub}}.$$

Следовательно, в качестве искомого субрешения можно взять любое решение уравнения $(w_{\text{sub}})_t + c_2 k_u^\sigma t^{-1} w_{\text{sub}} = 0$, например $w_{\text{sub}} = ct^{-c_2 k_u^\sigma}$ с произвольной константой c .

Определим теперь константу c , входящую в w_{sub} , так, чтобы при $t = 1$, $x \in \Omega$ было выполнено неравенство $w \geq w_{\text{sub}}$. По принципу максимума такая же оценка

будет верна и при $t > 1, x \in \Omega$. Это противоречит тому, что $w(x_N, t_N) = o(e^{-\alpha t_N})$, где (x_N, t_N) – такая последовательность, что $u_1(x_N, t_N) = 0$ и $t_N \rightarrow \infty$.

Таким образом, допущение $C > 0$ неверно; аналогично, неверно и допущение $C < 0$. Следовательно, $C = 0$. Поэтому функция $w(x, t)$, являющаяся решением уравнения (10) в случае $F(x, t) = 0$, стремится к нулю как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$. Из принципа максимума $w(x, t) \equiv 0$ и, следовательно, при больших значениях t имеем $u(x, t) = u_1(x, t) = u_2(x, t) = o(e^{-\alpha t})$, что и требовалось доказать.

В случае $a(x) = \text{const}$ теорема 1 совпадает с леммой 2 работы [4].

Переходим к изучению решений, которые сохраняют знак при $t > T$. Не нарушая общности, можно ограничиться рассмотрением положительных решений.

§ 4. Асимптотическая эквивалентность положительных решений

Сначала покажем, что в формуле

$$u_N(x, t) = \sum_{k=0}^N t^{-1/\sigma-k} \sum_{i=0}^k \varphi_{ki}(x) \ln^i t \quad (11)$$

можно так подобрать непрерывные в $\bar{\Omega}$ функции $\varphi_{ki}(x)$, $\varphi_{00}(x) > 0$, что

$$f_N(x, t) \equiv (u_N)_t - \Delta u_N + a(x)|u_N|^\sigma u_N = o(t^{-1/\sigma-N}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Вычислим все члены, входящие в левую часть (12). Ясно, что

$$(u_N)_t(x, t) = \sum_{k=0}^N t^{-1/\sigma-k-1} \sum_{i=0}^k \varphi_{ki}(x) \left(i \ln^{i-1} t - \left(k + \frac{1}{\sigma} \right) \ln^i t \right). \quad (13)$$

Для вычисления $(u_N)^{\sigma+1}$ используем разложение Тейлора

$$(c+h)^{\sigma+1} = c^{\sigma+1} + \sum_{l=1}^N \binom{\sigma+1}{l} c^{\sigma+1-l} h^l + o(h^N), \quad h \rightarrow 0,$$

где $c > 0$, $\binom{\sigma+1}{l} = \frac{(\sigma+1)\sigma \cdots (\sigma-l+2)}{l!}$ – биномиальные коэффициенты.

Для удобства введем обозначение

$$\tilde{u}_N(x, t) = \sum_{k=1}^N t^{-k} \sum_{i=0}^k \varphi_{ki}(x) \ln^i t.$$

Проведем теперь вычисление $(u_N)^{\sigma+1}$:

$$\begin{aligned} (u_N)^{\sigma+1} &= [t^{-1/\sigma}(\varphi_{00} + \tilde{u}_N)]^{\sigma+1} \\ &= t^{-1/\sigma-1} \left[\varphi_{00}^{\sigma+1} + \sum_{l=1}^N \binom{\sigma+1}{l} \varphi_{00}^{\sigma+1-l} (\tilde{u}_N)^l + o(\tilde{u}_N^N) \right]. \end{aligned}$$

Заметим, что $t^{N-1}\tilde{u}_N^N$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ и, следовательно,

$$(u_N)^{\sigma+1} = t^{-1/\sigma-1} \left[\varphi_{00}^{\sigma+1} + (\sigma+1)\varphi_{00}^\sigma \tilde{u}_N \right. \\ \left. + \sum_{l=2}^{N-1} \binom{\sigma+1}{l} \varphi_{00}^{\sigma+1-l} (\tilde{u}_N)^l + o(t^{1-N}) \right]$$

при $t \rightarrow \infty$. Отметим, что при $l \geq 2$

$$(\tilde{u}_N)^l = \sum_{k=l}^N t^{-k} \sum_{i=0}^k \psi_{lki}(x) \ln^i t + o(t^{-N}), \quad t \rightarrow \infty,$$

где функции $\psi_{lki}(x)$ – линейные комбинации произведений нескольких функций φ_{sj} , $1 \leq s \leq k-l+1 < k$, $0 \leq j \leq k$. Следовательно, при $t \rightarrow \infty$

$$u_N^{\sigma+1} = t^{-1/\sigma-1} \varphi_{00}^{\sigma+1} + \varphi_{00}^\sigma \left[\sum_{k=1}^N t^{-1/\sigma-k-1} \sum_{i=0}^k ((\sigma+1)\varphi_{ki} + \Phi_{ki}) \ln^i t \right] \\ + o(t^{-1/\sigma-N}), \quad (14)$$

где

$$\Phi_{ki}(x) = \sum_{l=2}^{N-1} \binom{\sigma+1}{l} \varphi_{00}^{-l+1} \psi_{lki}.$$

Подставив (13), (14) в (12), получим, что коэффициент при $t^{-1/\sigma-k-1} \ln^i t$ в случае $i = k+1$ при произвольном k , $-1 \leq k \leq N-1$, равен $\Delta\varphi_{k+1,k+1}$; если $0 < k \leq N-1$, $0 \leq i \leq k$, этот коэффициент равен

$$(1+i)\varphi_{k,i+1} - \left(k + \frac{1}{\sigma}\right)\varphi_{k,i} - \Delta\varphi_{k+1,i} + a(x)\varphi_{00}^\sigma [(\sigma+1)\varphi_{k,i} + \Phi_{k,i}],$$

а при $k = i = 0$ он оказывается следующим:

$$\frac{1}{\sigma}\varphi_{00} - \Delta\varphi_{10} + a(x)\varphi_{00}^{\sigma+1}.$$

Приравнявая эти коэффициенты к нулю, получаем уравнения для $\varphi_{k+1,i}$, $0 \leq i \leq k+1$, с нулевым граничным условием Неймана:

– при $i = k+1$ и $-1 \leq k \leq N-1$

$$\Delta\varphi_{k+1,k+1} = 0,$$

следовательно, $\varphi_{k+1,k+1} = \text{const}$, константу φ_{00} далее обозначаем c_0 ;

– при $k = i = 0$

$$\Delta\varphi_{10} = -\frac{1}{\sigma}c_0 + a(x)c_0^{\sigma+1};$$

– при $1 \leq k \leq N-1$ и $0 \leq i \leq k$

$$\Delta\varphi_{k+1,i} = -\left(k + \frac{1}{\sigma}\right)\varphi_{k,i} + (1+i)\varphi_{k,i+1} \\ + a(x)c_0^\sigma ((\sigma+1)\varphi_{k,i} + \Phi_{k,i}).$$

Поскольку $\Phi_{ki}(x) = 0$ при $k = 1$, то уравнения для $\varphi_{20}, \varphi_{21}$ таковы:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{20} &= -\left(\frac{1}{\sigma} + 1\right)\varphi_{10} + \varphi_{11} + a(x)(\sigma + 1)c_0^\sigma\varphi_{10}, \\ \Delta\varphi_{21} &= -\left(\frac{1}{\sigma} + 1\right)\varphi_{11} + a(x)(\sigma + 1)c_0^\sigma\varphi_{11}.\end{aligned}$$

Покажем, что из этой системы уравнений можно последовательно определить все функции $\varphi_{ki}(x)$, $i \leq k$. Пусть при фиксированном k выполнены условия разрешимости для уравнений, определяющих φ_{ki} , т.е. среднее значение их правых частей равно нулю. Тогда φ_{ki} можно записать в виде $\varphi_{ki} = \psi_{ki} + c_{ki}$, где $\overline{\psi_{ki}} = 0$, а c_{ki} — пока еще не определенные постоянные. Константы c_{ki} надо подобрать так, чтобы были выполнены условия разрешимости для уравнений, определяющих $\varphi_{k+1,i}$.

Проверим, что такой выбор возможен при любом k .

При $k = 0$ из условия разрешимости уравнения для φ_{10}

$$\int_{\Omega} \left(-\frac{1}{\sigma}c_0 + a(x)c_0^{\sigma+1} \right) dx = 0$$

находим

$$c_0 = (\sigma\bar{a})^{-1/\sigma}. \quad (15)$$

При $k > 0$ уравнения для c_{ki} будут получаться линейными, причем если при фиксированном k условия разрешимости выписывать последовательно, в убывающем порядке от $i = k$ до $i = 0$, то в выражении для $\Delta\varphi_{k+1,i}$ останется не определенной только константа c_{ki} , коэффициент при которой равен

$$\overline{a(x)(\sigma + 1)c_0^\sigma} - k - \frac{1}{\sigma} \equiv 1 - k.$$

Поэтому c_{ki} при $k > 1$ находятся однозначно. Осталось подобрать c_{10}, c_{11} . Так как $\varphi_{11} = c_{11} = \text{const}$, то условие разрешимости уравнения, определяющего φ_{21} :

$$c_{11} \int_{\Omega} \left(-\left(\frac{1}{\sigma} + 1\right) + a(x)(\sigma + 1)c_0^\sigma \right) dx = 0,$$

выполнено в силу (15). Из условия разрешимости уравнения для φ_{20}

$$c_{11} \text{mes } \Omega = \int_{\Omega} (\sigma + 1)\varphi_{10}(x) \left(\frac{1}{\sigma} - a(x)c_0^\sigma \right) dx \quad (16)$$

находится c_{11} . Константу c_{10} можно считать произвольной. Тем самым, требуемый выбор констант c_{ki} возможен. Итак, при фиксированном произволе в выборе φ_{10} все коэффициенты φ_{ki} при $k \neq N$ определяются однозначно, а при $k = N$ — с точностью до произвольной константы.

Отметим следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Константа c_{11} равна нулю тогда и только тогда, когда $a(x) \equiv \text{const}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, условие (15) можно переписать следующим образом:

$$c_{11} \operatorname{mes}(\Omega) = - \int_{\Omega} \frac{\sigma + 1}{c_0} \varphi_{10} \Delta \varphi_{10} dx = 0 \iff \nabla \varphi_{10} = 0 \iff \varphi_{10} = \operatorname{const}.$$

Из уравнения для функции φ_{10} следует, что $\Delta \varphi_{10} = 0$ тогда и только тогда, когда $-\frac{1}{\sigma} c_0 + a(x) c_0^{\sigma+1} = 0$, т.е. $a(x) \equiv (c_0^{\sigma} \sigma)^{-1}$.

ЛЕММА 1. Все положительные при $t > T$ решения уравнения (1), удовлетворяющие условию (2), имеют вид

$$u(t, x) = c_0 t^{-1/\sigma} + c_{11} t^{-(\sigma+1)/\sigma} \ln t + o(t^{-(\sigma+1)/\sigma} \ln t), \quad t \rightarrow +\infty,$$

где c_0, c_{11} определены в (15), (16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующую систему для определения функций $\varphi_{10}(x), \varphi_{20}(x), \varphi_{21}(x)$, удовлетворяющих условию (2):

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_{10} &= -\frac{1}{\sigma} c_0 + a(x) c_0^{\sigma+1}, \\ \Delta \varphi_{20} &= \varepsilon - \left(\frac{1}{\sigma} + 1 \right) \varphi_{10} + c_{11}(\varepsilon) + a(x)(\sigma + 1) c_0^{\sigma} \varphi_{10}, \\ \Delta \varphi_{21} &= -\left(\frac{1}{\sigma} + 1 \right) c_{11}(\varepsilon) + a(x)(\sigma + 1) c_0^{\sigma} c_{11}(\varepsilon). \end{aligned}$$

В силу (15) условия разрешимости уравнений для $\varphi_{10}(x), \varphi_{21}(x)$ выполнены. Из условия разрешимости уравнения для $\varphi_{20}(x)$ следует, что $c_{11}(\varepsilon) = c_{11} - \varepsilon$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} w(x, t) &= c_0 t^{-1/\sigma} + c_{11}(\varepsilon) t^{-(1+1/\sigma)} \ln t + \varphi_{10}(x) t^{-(1+1/\sigma)} \\ &\quad + \varphi_{21}(x) t^{-(2+1/\sigma)} \ln t + \varphi_{20}(x) t^{-(2+1/\sigma)}, \end{aligned} \quad (17)$$

где константы, с точностью до которых определены функции $\varphi_{10}(x), \varphi_{20}(x), \varphi_{21}(x)$, произвольно зафиксированы. Так как

$$\Delta w - a(x) |w|^{\sigma} w - w_t = \varepsilon t^{-2-1/\sigma} + O(t^{-3-1/\sigma} \ln^2 t),$$

то при достаточно большом $t > t_0$ выполнено

$$\Delta w - a(x) |w|^{\sigma} w - w_t > 0.$$

Выберем $\tau > 0$ так, что $w(x, t_0 + \tau) < u(x, t_0)$; это возможно, поскольку $w(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, а $u(x, t_0)$ положительна. Из принципа максимума получаем, что $u(x, t) > w(x, t + \tau)$ при $t > t_0$. Учитывая явный вид $w(x, t)$ (16), можно переписать это неравенство:

$$u(x, t) > c_0 t^{-1/\sigma} + c_{11}(\varepsilon) t^{-(1+1/\sigma)} \ln t + O(t^{-(1+1/\sigma)}). \quad (18)$$

Аналогично, если $\varepsilon < 0$, то при достаточно большом $t > t_0$ функция w положительна и удовлетворяет неравенству

$$\Delta w - a(x)|w|^\sigma w - w_t < 0.$$

Поскольку $u(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то существует такое $\tau > 0$, что $u(x, t_0 + \tau) < w(x, t_0)$, а значит, при $t > t_0 + \tau$ из принципа максимума следует, что $u(x, t) < w(x, t - \tau)$. Учитывая (17), последнее неравенство можно записать в виде:

$$u(x, t) < c_0 t^{-1/\sigma} + c_{11}(\varepsilon) t^{-(1+1/\sigma)} \ln t + O(t^{-(1+1/\sigma)}). \quad (19)$$

Докажем, что

$$u(t, x) \sim c_0 t^{-1/\sigma} + c_{11} t^{-(\sigma+1)/\sigma} \ln t.$$

Из неравенств (18), (19) для $\varepsilon = \pm \varepsilon_0$ при $t > t_1$ получаем

$$\begin{aligned} (c_{11}(\varepsilon_0) - c_{11}) t^{-(1+1/\sigma)} \ln t + O(t^{-(1+1/\sigma)}) &< u(x, t) - c_0 t^{-1/\sigma} - c_{11} t^{-(\sigma+1)/\sigma} \ln t \\ &< (c_{11}(-\varepsilon_0) - c_{11}) t^{-(1+1/\sigma)} \ln t + O(t^{-(1+1/\sigma)}). \end{aligned}$$

Разделив это неравенство на $t^{-(\sigma+1)/\sigma} \ln t$ и учитывая, что $c_{11}(\varepsilon) = c_{11} - \varepsilon$, получим

$$\left| \frac{u(x, t) - c_0 t^{-1/\sigma} - c_{11} t^{-(\sigma+1)/\sigma} \ln t}{t^{-(\sigma+1)/\sigma} \ln t} \right| < \varepsilon_0 + O((\ln t)^{-1}).$$

Увеличив, если надо, t_1 , найдем, что при $t > t_1$ имеет место

$$\left| \frac{u(x, t) - c_0 t^{-1/\sigma} - c_{11} t^{-(\sigma+1)/\sigma} \ln t}{t^{-(\sigma+1)/\sigma} \ln t} \right| < 2\varepsilon_0,$$

тем самым лемма доказана.

§ 5. Асимптотическое разложение положительных решений

ТЕОРЕМА 2. Положительное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), имеет вид

$$u(x, t) = u_N(x, t) + o(t^{1+3/4-1/\sigma-N}), \quad t \rightarrow \infty,$$

где $u_N(x, t)$ определено в (11) с константой c_{10} , зависящей от $u(x, t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Делая в уравнении (1) замену $u = v + u_N$, где u_N определено в (11) с произвольно выбранной константой c_{10} , получим

$$v_t = \Delta v - a(x) \frac{(v + u_N)^{\sigma+1} - (u_N)^{\sigma+1}}{v} v + f_N, \quad (20)$$

f_N определено в (12).

Учитывая, что по лемме 1 $v = o(t^{-(\sigma+1)/\sigma} \ln t)$, и воспользовавшись формулой Тейлора, получим, что

$$\begin{aligned} a(x)[(v + u_N)^{\sigma+1} - (u_N)^{\sigma+1}] &= a(x)(\sigma + 1)(u_N)^\sigma v + O(u_N^{\sigma-1} v^2) \\ &= a(x)v[(\sigma + 1)c_0^\sigma t^{-1} + (\sigma + 1)\sigma c_0^{\sigma-1} c_{11} t^{-2} \ln t + o(t^{-2} \ln t)] = Qv, \end{aligned} \quad (21)$$

поэтому уравнение (20) можно записать в виде

$$v_t = \Delta v - Qv + f_N.$$

Уравнение, которому в $\Omega \times \mathbb{R}$ удовлетворяет функция $v_1(x, t) = v(x, t)\zeta(t)$, где $\zeta(t)$ — гладкая класса C^1 функция, $\zeta(t) = 0$ при $t < 0$ и $\zeta(t) = 1$ при $t > 1$, имеет вид

$$(v_1)_t = \Delta v_1 - Q(x, t)v_1 + F + f_N, \quad x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (22)$$

где функция F финитна, при $t < 0$ $Q(x, t) = 0$, при $t > 1$ $Q(x, t)$ определяется в (21), а v_1 удовлетворяет нулевому условию Неймана на границе цилиндра $\partial\Omega \times \mathbb{R}$.

Проверим, что для уравнения (22) верны условия предложения 2. Произвольно выбирая ε , $0 < \varepsilon < 1$, из (21) получаем, что при $t \rightarrow \infty$

$$\left(\int_{\Omega} Q^2(x, t) dx \right)^{1/2} = O(t^{-1}), \quad \int_{\Omega} -Q(x, t) dx = -\frac{\sigma + 1}{\sigma} t^{-1} + o(t^{-1-\varepsilon}).$$

Осталось показать, что

$$\int_1^\infty \int_{\Omega} |f_N(x, t) + F(x, t)|^2 t^{2q} dx dt < \infty \quad (23)$$

при

$$q > \frac{1}{2} + \frac{\sigma + 1}{\sigma}. \quad (24)$$

Так как функция F финитна, то достаточно проверить сходимость интеграла

$$\int_1^\infty \int_{\Omega} |f_N(x, t)|^2 t^{2q} dx dt < \infty.$$

В силу (12) для этого необходимо, чтобы $2q - 2N - 2/\sigma < -1$, т.е.

$$N > q + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma}. \quad (25)$$

Значит, если $q = N - 1/2 + 1/\sigma - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — маленькое положительное число, а $N > 2 + \varepsilon$, то (24) и (25) верны и, следовательно, получили, что (23) выполнено. Поэтому из предложения 2 следует, что уравнение (22) имеет решение v'_1 , удовлетворяющее нулевым условиям Неймана, такое, что

$$v'_1 = o(t^{1-q}) = o(t^{1-N-1/\sigma+1/2+\varepsilon}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Обозначая $v_2 = v_1 - v'_1$, находим, что v_2 удовлетворяет уравнению вида (22), где функция F финитна, $f_N = 0$.

Применяя теперь предложение 1, получаем асимптотическое представление

$$v_2(x, t) = ct^{-(\sigma+1)/\sigma} + o(t^{-(\sigma+1)/\sigma})$$

при $t \rightarrow \infty$. Из формулы (11) следует, что

$$u_N(x, t + \tau) - u_N(x, t) = -\frac{c_0}{\sigma} t^{-(\sigma+1)/\sigma} \tau + o(t^{-(\sigma+1)/\sigma}),$$

поэтому для некоторого τ выполнено

$$v'_2 = (u(x, t) - u_N(x, t + \tau))\zeta_1(t) - v'_1 = o(t^{-(\sigma+1)/\sigma}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Переход от $u_N(x, t)$ к $u_N(x, t + \tau)$ соответствует правильному выбору константы c_{10} .

Так как при $t \rightarrow \infty$ $Q(x, t) \rightarrow 0$, то можно выбрать такое t_0 , что для всех $t > t_0$ выполнено неравенство $|Q(x, t)| < \nu$, где ν определено в предложении 3. Тогда к уравнению, которому удовлетворяет функция $v'_2\zeta_2(t)$, где $\zeta_2(t)$ — гладкая класса C^1 функция, $\zeta_2(t) = 0$ при $t < t_0$ и $\zeta_2(t) = 1$ при $t > t_0 + 1$, применимо предложение 3. Поэтому существует v_3 вида (6) такая, что

$$w = v'_2\zeta_2 - v_3 = \begin{cases} o(t^{-(\sigma+1)/\sigma}), & t \rightarrow +\infty, \\ C + o(e^{\alpha t}), & t \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

— решение однородного уравнения (3), удовлетворяющее условию (4).

Если $C > 0$, то из принципа максимума следует, что $w > 0$. Покажем, что уравнение $\Delta w - Q(x, t)w - w_t = 0$, которому удовлетворяет w , имеет субрешение, асимптотически эквивалентное $t^{-(\sigma+1)/\sigma}$ при $t \rightarrow +\infty$. Подберем константу A , функции $B(x)$, $C(x)$ так, чтобы

$$w_0 = t^{-1-1/\sigma} + At^{-2-1/\sigma} \ln t + B(x)t^{-2-1/\sigma} + C(x)t^{-3-1/\sigma} \ln t$$

было искомым субрешением. После прямых вычислений получаем

$$\Delta w_0 = \Delta B t^{-2-1/\sigma} + \Delta C t^{-3-1/\sigma} \ln t.$$

Вычислим $(w_0)_t$ с точностью до $o(t^{-3-1/\sigma} \ln t)$ при $t \rightarrow +\infty$:

$$(w_0)_t = -\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)t^{-2-1/\sigma} - \left(2 + \frac{1}{\sigma}\right)At^{-3-1/\sigma} \ln t.$$

Найдем $Q(x, t)w_0$, где $Q(x, t) = a(x)((\sigma + 1)c_0^\sigma t^{-1} + (\sigma + 1)\sigma c_0^{\sigma-1}c_{11}t^{-2} \ln t + o(t^{-2} \ln t))$ при $t \rightarrow +\infty$. Получим:

$$\begin{aligned} Q(x, t)w_0 &= \frac{a(x)}{\bar{a}} \frac{\sigma + 1}{\sigma} t^{-2-1/\sigma} + \frac{a(x)}{\bar{a}} \frac{\sigma + 1}{\sigma} At^{-3-1/\sigma} \ln t \\ &+ (\sigma + 1) \frac{a(x)}{\bar{a}} \frac{c_{11}}{c_0} t^{-3-1/\sigma} \ln t + o(t^{-3-1/\sigma} \ln t), \quad t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Коэффициенты $B(x)$, $C(x)$ будем находить из уравнений

$$\begin{aligned}\Delta B &= -\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) + \frac{a(x)}{\bar{a}} \frac{\sigma + 1}{\sigma}, \\ \Delta C &= -\left(2 + \frac{1}{\sigma}\right)A + \frac{a(x)}{\bar{a}} \frac{\sigma + 1}{\sigma}A + (\sigma + 1)\frac{a(x)}{\bar{a}} \frac{c_{11}}{c_0} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Условие разрешимости уравнения для $B(x)$ выполнено, а из условия разрешимости уравнения для $C(x)$ находим, что $A = \varepsilon + (\sigma + 1)c_{11}/c_0$. Определяя теперь функции $B(x)$, $C(x)$ из этих уравнений, находим, что

$$\Delta w_0 - Q(x, t)w_0 - (w_0)_t = \varepsilon t^{-3-1/\sigma} \ln t + o(t^{-3-1/\sigma} \ln t), \quad t \rightarrow +\infty,$$

и, выбрав ε положительным, получим, что $w_0(x, t)$ — субрешение.

Поэтому найдется такое достаточно большое t_1 , что для всех $t \geq t_1$ выполнено $w > k_1 w_0$ с некоторой малой положительной константой k_1 , однако это противоречит тому, что $w = o(t^{-(\sigma+1)/\sigma})$ при $t \rightarrow +\infty$. Поэтому $C = 0$ и, следовательно, $w = 0$, $v_3 = v'_2 \zeta_2$, откуда получается, что функция

$$v'_2 = (u(x, t) - u_N(x, t + \tau))\zeta_1(t) - v'_1$$

экспоненциально убывает. Так как $v'_1 = o(t^{1-N-1/\sigma+1/2+\varepsilon})$, а отличие разности $v = u(x, t) - u_N(x, t + \tau)$ от функции v'_1 экспоненциально мало, то $v = o(t^{1-N-1/\sigma+1/2+\varepsilon})$ при $t \rightarrow +\infty$, и теорема доказана.

Приведенное рассуждение показывает, что если ε выбрано меньшим чем $1/2$, то u обладает асимптотическим разложением, совпадающим с теми слагаемыми суммы u_N , для которых $k < N$. Рассуждение применимо и для $N + 1$, следовательно,

$$u(x, t) = u_N(x, t) + o(t^{-1-1/\sigma-N+\varepsilon}), \quad t \rightarrow \infty, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

§ 6. Оценка разности двух положительных решений

ТЕОРЕМА 3. *Для любых двух положительных решений $u(x, t)$ и $h(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющих условию (2), существует такая константа τ , что*

$$u(x, t) - h(x, t + \tau) = o(e^{-\alpha t}), \quad t \rightarrow \infty,$$

где константа α не зависит от $u(x, t)$, $h(x, t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделав в уравнении (1) замену $u = v + h$, получим

$$v_t = \Delta v - a(x) \frac{(v + h)^{\sigma+1} - h^{\sigma+1}}{v} v. \quad (26)$$

Учитывая, что по лемме 1 имеют место соотношения

$$\begin{aligned}v &= o(t^{-(\sigma+1)/\sigma} \ln t), \quad h^{\sigma-1}v = o(t^{-2} \ln t), \\ h^\sigma &= c_0^\sigma t^{-1} + \sigma c_0^{\sigma-1} c_{11} t^{-2} \ln t + o(t^{-2} \ln t),\end{aligned}$$

воспользовавшись формулой Тейлора, получим

$$\begin{aligned}(v+h)^{\sigma+1} - h^{\sigma+1} &= h^{\sigma+1} \left(\left(1 + \frac{v}{h} \right)^{\sigma+1} - 1 \right) = (\sigma+1)h^{\sigma}v + O(h^{\sigma-1}v^2) \\ &= v[(\sigma+1)c_0^{\sigma}t^{-1} + (\sigma+1)\sigma c_0^{\sigma-1}c_{11}t^{-2}\ln t + o(t^{-2}\ln t)].\end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (26) можно записать в виде

$$v_t = \Delta v - a(x)(c_0^{\sigma}(\sigma+1)t^{-1} + (\sigma+1)\sigma c_0^{\sigma-1}c_{11}t^{-2}\ln t + o(t^{-2}\ln t))v.$$

Пусть $\zeta_1(t)$ — гладкая класса C^1 функция, $\zeta_1(t) = 0$ при $t < 0$ и $\zeta_1(t) = 1$ при $t > 1$. Тогда $v_1(x, t) = v(x, t)\zeta_1(t)$ является удовлетворяющим нулевому условию Неймана на $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ решением уравнения

$$(v_1)_t = \Delta v_1 - Q(x, t)v_1 + F, \quad x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R},$$

где функция F финитна по t , $Q(x, t) = 0$, $t < 0$, и

$$Q(x, t) = a(x)(c_0^{\sigma}(\sigma+1)t^{-1} + (\sigma+1)\sigma c_0^{\sigma-1}c_{11}t^{-2}\ln t + o(t^{-2}\ln t)), \quad t > 1.$$

Следовательно, для любого ε , $0 < \varepsilon < 1$, при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\left(\int_{\Omega} Q^2(x, t) dx \right)^{1/2} &= O(t^{-1}), \\ \int_{\Omega} -Q(x, t) dx &= -\bar{a}c_0^{\sigma}(\sigma+1)t^{-1} + o(t^{-1-\varepsilon}) = -\frac{\sigma+1}{\sigma}t^{-1} + o(t^{-1-\varepsilon}).\end{aligned}$$

Поскольку функция F финитна по t , то для любого q сходится интеграл

$$\int_1^{\infty} \int_{\Omega} |F(x, t)|^2 t^{2q} dx dt < \infty.$$

Таким образом, выполнены условия предложения 1. Из предложения 1 получаем, что

$$v_1(x, t) = ct^{-(\sigma+1)/\sigma} + o(t^{-(\sigma+1)/\sigma}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Из теоремы 2 следует, что $h(x, t + \tau) - h(x, t) = -\frac{c_0}{\sigma}t^{-(\sigma+1)/\sigma}\tau + o(t^{-(\sigma+1)/\sigma})$, и поэтому можно подобрать τ так, что

$$v_2(x, t) = (u(x, t) - h(x, t + \tau))\zeta_1(t) = o(t^{-(\sigma+1)/\sigma}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Поскольку $Q(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, можно выбрать такое t_0 , что для всех $t > t_0$ выполнено неравенство $|Q(x, t)| < \nu$, где ν определено в предложении 3. Для уравнения, которому удовлетворяет функция $v_2\zeta_2(t)$, где $\zeta_2(t)$ — гладкая класса C^1 функция, $\zeta_2(t) = 0$ при $t < t_0$ и $\zeta_2(t) = 1$ при $t > t_0 + 1$, выполнены условия предложения 3. Поэтому найдется v_3 вида (6) такая, что

$$w = v_2\zeta_2 - v_3 = \begin{cases} o(t^{-(\sigma+1)/\sigma}), & t \rightarrow +\infty, \\ C + o(e^{\alpha t}), & t \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

— решение однородного уравнения вида (3), удовлетворяющее условию (4).

Если $C > 0$, то из принципа максимума заключаем, что $w > 0$. Рассуждением, аналогичным проведенному при доказательстве теоремы 2, можно показать, что это уравнение имеет субрешение w_0 , асимптотически эквивалентное $t^{-(\sigma+1)/\sigma}$ при $t \rightarrow +\infty$. Так как при достаточно большом t_1 функция $w_0(x, t)$ положительна, то в силу положительности $w(x, t_1)$ при достаточно малой константе k_1 из принципа максимума получим, что $w > k_1 w_0$ при всех $t > t_1$. Это противоречит тому, что $w = o(t^{-(\sigma+1)/\sigma})$ при $t \rightarrow +\infty$. Аналогично, допущение $C < 0$ приводит к противоречию. Поэтому $C = 0$ и, следовательно, $w = 0$, т.е. $v_3 = v_2 \zeta_2$. Таким образом, разность $u(x, t) - h(x, t + \tau)$ совпадает при больших t с v_3 , а следовательно, экспоненциально убывает.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $a(x)$ — не обязательно положительная ограниченная измеримая функция такая, что $\bar{a} > 0$, то для стремящихся к нулю решений в Π_0 уравнения (1), удовлетворяющих условию (2), будут выполнены теоремы 1–3.

Автор выражает глубокую благодарность В. А. Кондратьеву, под руководством которого были получены эти результаты.

Список литературы

1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
2. *Baras P., Veron L.* Comportement asymptotique de la solution d'une équation d'évolution semi-linéaire de la chaleur // Comm. Partial Differential Equations. 1979. V. 4. P. 795–807.
3. *Kondratiev V. A., Veron L.* Asymptotic behaviour of solutions of some nonlinear parabolic or elliptic equations // Asymptot. Anal. 1997. V. 14. №2. P. 117–156.
4. *Арефьев В. Н., Кондратьев В. А.* Асимптотическое поведение решений в второй краевой задачи для нелинейных параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. №12. С. 2104–2116.
5. *Багиров Л. А., Кондратьев В. А.* Об асимптотических свойствах решений уравнения диффузии // Труды сем. им. И. Г. Петровского. Т. 22. М.: Изд-во МГУ, 2002. С. 37–70.
6. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // УМН. 1964. Т. 19. №3. С. 53–161.
7. *Гохберг И. Ц., Сигал Е. И.* Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше // Матем. сб. 1971. Т. 84(126). №4. С. 607–629.
8. *Agmon S., Nirenberg L.* Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space // Comm. Pure Appl. Math. 1963. V. 16. P. 121–239.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: filimi@yandex.ru

Поступила в редакцию
07.07.2003