Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Арсеньев, Об асимптотике энергии, переданной почти периодическим источником колебаний открытому резонатору за большое время, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 3, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm806>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:57:59

УДК 517.95

А. А. Арсеньев

**Об асимптотике энергии, переданной
почти периодическим источником колебаний
открытому резонатору за большое время**

Доказано, что переданная почти периодическим источником колебаний открытому резонатору энергия при больших временах пропорциональна времени работы источника и в резонансе обратно пропорциональна коэффициенту затухания колебаний в открытом резонаторе.

Библиография: 17 названий.

1. Постановка задачи. Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\| \cdot \|$. Предположим, что в гильбертовом пространстве определена инволюция

$$f \rightarrow \bar{f}, \quad \overline{(\lambda \times f)} = \bar{\lambda} \times (\bar{f}),$$

где λ – комплексное число и $\bar{\lambda}$ – ему сопряженное. Пусть L – неотрицательный самосопряженный оператор в H с плотной в H областью определения $\text{Dom } L$ и

$$f: [0, \infty) \ni t \rightarrow f(t) \in H$$

– функция, которая непрерывна по любой норме

$$\langle f, f \rangle + \langle L^p f, L^p f \rangle, \quad p = 1, 2, \dots$$

Пусть $\mathcal{H}$ – пополнение прямой суммы гильбертовых пространств $H \oplus \text{Dom } L$ по норме

$$\|u \oplus v\|_{\mathcal{H}}^2 = \|u\|^2 + \langle v, Lv \rangle.$$

В пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим абстрактную задачу Коши (понимаемую в смысле определения из [1; гл. 23, п. 23.7])

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= u, & \frac{du}{dt} &= -Lv + f(t), \\ v(t) \oplus u(t) &\in \mathcal{H}, & u(+0) &= v(+0) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Функцию $v(t)$ из (1) мы по определению будем считать решением задачи

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = -Lv(t) + f(t), \quad v(0) = \frac{dv}{dt}(0) = 0. \tag{2}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00271).

Легко подсчитать, что

$$v(t) = \int_0^t (L^{-1/2} \sin((t-\tau)L^{1/2})f(\tau)) d\tau. \quad (3)$$

Предположим, что функция $f(t)$ в (2) имеет вид

$$f(t) = \sum_{0 \leq k \leq m} a_k \cos(\omega_k t + \phi_k), \quad a_k = \bar{a}_k \in \text{Dom}(L^p), \quad p = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Пусть

$$E(t) = \left\| \frac{dv}{dt}(t) \right\|^2 + \langle v(t), Lv(t) \rangle. \quad (5)$$

Подставляя (3) в (5) и выражая тригонометрические функции через экспоненты, мы получаем

$$E(t) = \left\| \int_0^t \exp(i\tau L^{1/2})f(\tau) d\tau \right\|^2. \quad (6)$$

Из (6) следует, что если спектр оператора L дискретен и ни одно из собственных значений оператора L не принадлежит множеству $\{\omega_k^2\}$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(t)}{t} = 0.$$

Если сингулярный спектр оператора L пуст, существует дискретный спектр, хотя бы одно из собственных значений оператора L принадлежит множеству $\{\omega_k^2\}$ и соответствующая собственная функция не ортогональна $\{a_k\}$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(t)}{t} = \infty.$$

Если множество $\{\omega_k^2\}$ принадлежит абсолютно непрерывному спектру оператора L и спектральная функция оператора L достаточно гладка на $\{a_k\}$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(t)}{t} = W(f) < \infty. \quad (7)$$

Для интересующего нас случая функционал $W(f)$ вычислен в лемме 1.

Теперь предположим, что D_n — последовательность областей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, $d > 1$, и выполнены следующие условия:

- 1) область D_n открыта, связна, содержит внешность фиксированного шара и имеет бесконечно гладкую границу ∂D_n ;
- 2) последовательность $\{D_n\}$ не возрастает: $D_{n+1} \subset D_n$;
- 3) область

$$D_\infty = \text{Int} \left(\bigcap_n D_n \right)$$

имеет бесконечно гладкую границу и является объединением двух связных областей:

$$D_\infty = D_{\text{int}} \cup D_{\text{out}}, \quad \text{dist}(D_{\text{int}}, D_{\text{out}}) > 0,$$

где область D_{int} ограничена, а область D_{out} содержит внешность шара;

4) выполнено условие:

$$d(D_\infty, D_n) \stackrel{\text{def}}{=} \text{mes}_d(D_n \setminus D_\infty) + \text{mes}_{d-1}(\partial D_\infty \setminus \partial D_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Открытый резонатор есть область D_{int} , рассматриваемая как подмножество области D_n при $0 < d(D_\infty, D_n) \ll 1$.

Область D_n можно представить себе как дополнение шарового слоя с малым отверстием, а область D_{int} – как внутренний шар шарового слоя.

Пусть L_n , $n \leq \infty$, – самосопряженное расширение в $L^2(D_n)$ оператора $(-\Delta)$, которое отвечает нулевым граничным условиям на ∂D_n . Символы $\|\cdot\|$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ без указания на пространство в дальнейшем обозначают норму и скалярное произведение в $L^2(D_n)$. При $n < \infty$ спектр оператора L_n абсолютно непрерывен и состоит из полуоси $[0, \infty)$. Оператор L_∞ приводит каждое из пространств $L^2(D_{\text{int}})$ и $L^2(D_{\text{out}})$:

$$\text{Dom } L_\infty = \text{Dom}(L_\infty \downarrow L^2(D_{\text{int}})) \oplus \text{Dom}(L_\infty \downarrow L^2(D_{\text{out}})).$$

Спектр сужения оператора L_∞ на $L^2(D_{\text{int}})$ дискретен:

$$\sigma(L_\infty \downarrow L^2(D_{\text{int}})) = \{\lambda_i, 1 \leq i < \infty\}, \quad (9)$$

а спектр сужения оператора L_∞ на $L^2(D_{\text{out}})$ непрерывен:

$$\sigma(L_\infty \downarrow L^2(D_{\text{out}})) = [0, \infty).$$

Таким образом, каждое собственное значение оператора $L_\infty \downarrow L^2(D_{\text{int}})$ для оператора L_∞ есть собственное значение, погруженное в непрерывный спектр.

Пусть λ_j – простое собственное значение оператора $L_\infty \downarrow L^2(D_{\text{int}})$, и пусть

$$f_n(t) = \sum_{0 \leq k \leq m} a_k \cos(\omega_{k,n}t + \phi_{k,n}), \quad (10)$$

причем выполнены условия:

$$a_k = \bar{a}_k \in C_0^\infty(D_{\text{int}}), \quad 0 < \omega_{\min} < \omega_{k,n} < \omega_{\max} < \infty, \quad (11)$$

$$\text{dist}(\{\lambda_i, i \neq j\}, \{\omega_{k,n}^2, 1 \leq k \leq m\}) > \text{const} > 0, \quad (12)$$

$$|\omega_{0,n}^2 - \lambda_j| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Для каждого оператора L_n и функции $f_n(t)$, $n < \infty$, вычислим правую часть (7) и обозначим полученный функционал через $W_n(f_n)$. Естественно ожидать, что при выполнении условия (13)

$$W_n(f_n) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Наша цель состоит в том, чтобы уточнить соотношение (14). Основной результат работы изложен в теоремах 1 и 2, где обсуждается асимптотика (14) в зависимости от соотношения между бесконечно малыми в (13) и (8).

Известно, что при возмущении погруженного в непрерывный спектр собственного значения происходит концентрация спектра. Описание этого явления есть в [2], [3]. Соотношение (14) может быть истолковано как утверждение о том, что в рассматриваемой ситуации спектральная концентрация приводит к увеличению скорости выделения энергии в открытом резонаторе, а теоремы 1 и 2 – как уточнение этого утверждения.

2. Вспомогательные сведения. Ниже символом D мы обозначим любую из областей D_n , $n \leq \infty$, и при необходимости будем помечать индексом n величины, относящиеся к области D_n и функции $f_n(t)$.

Пусть S – единичная сфера в $\mathbb{R}^d$ с обычной мерой. Мы будем отождествлять точки S и единичные векторы в $\mathbb{R}^d$, скалярное произведение в $L^2(S)$ мы обозначим символом $(\cdot, \cdot)_S$. Положим

$$u_0(x, \theta, \lambda) = \exp(ix \cdot \theta \sqrt{\lambda}), \quad x \in D, \quad \theta \in S, \quad \lambda > 0.$$

Функция $u(x, \theta, \lambda)$ есть решение задачи рассеяния в области D , если

$$-\Delta_x u(x, \theta, \lambda) = \lambda u(x, \theta, \lambda), \quad x \in D; \quad (15a)$$

$$u(x, \theta, \lambda) = 0, \quad x \in \partial D;$$

$$u(x, \theta, \lambda) = u_0(x, \theta, \lambda) + \varphi(x, \theta, \lambda), \quad x \in D; \quad (15b)$$

$$\varphi(x, \theta, \lambda) = O(|x|^{(1-d)/2}); \quad (15c)$$

$$(\partial_{|x|} - i\sqrt{\lambda})\varphi(x, \theta, \lambda) = o(|x|^{(1-d)/2}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (15d)$$

Известно, что условие (15c) есть следствие (15d), но нам удобно сформулировать это условие в явном виде. С помощью решения задачи рассеяния можно [4], [5] построить спектральное разложение оператора L .

Пусть

$$h = L^2([0, \infty) \rightarrow L^2(S))$$

– гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций на $[0, \infty)$ со значениями в $L^2(S)$:

$$\|g \mid h\|^2 = \int_0^\infty \left[\int_S |g(\lambda, \theta)|^2 d\theta \right] d\lambda.$$

Если функция u есть решение задачи рассеяния для области D , то отображение

$$U: L^2(D, dx) \rightarrow h, \quad (16)$$

$$Ug(\lambda, \theta) = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^d \right)^{1/2} \lambda^{d/2-1} \int_D u(x, \theta, \lambda) g(x) dx$$

есть унитарное отображение, которое диагонализует оператор L :

$$\|g \mid L^2(D)\|^2 = \|Ug \mid h\|^2, \quad \langle g, Lg \rangle = \int_0^\infty \lambda (Ug(\lambda, \cdot), ULg(\lambda, \cdot))_S d\lambda. \quad (17)$$

Ниже символом U_n мы обозначим отображение (16), осуществляемое с помощью решения задачи рассеяния u_n для области D_n .

Используя спектральное разложение оператора L , можно вычислить предел (7).

ЛЕММА 1. *Если выполнены условия (11), (12), то предел в (7) существует и*

$$W(f) = \pi \sum_{0 \leq k \leq m} \omega_k \|Ua_k(\omega_k^2, \cdot) \mid L^2(S)\|^2. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$I(t, \lambda, \omega) = \int_0^t \exp(i\tau\sqrt{\lambda}) \cos(\omega\tau + \phi) d\tau. \quad (19)$$

Из (17) следует, что

$$E(t) = \sum_{0 \leq k, p \leq m} \int_0^\infty \bar{I}(t, \lambda, \omega_k) I(t, \lambda, \omega_p) (Ua_k(\lambda, \cdot), Ua_p(\lambda, \cdot))_S d\lambda. \quad (20)$$

Вычисляем интеграл в (19). Подставляем результат в (20) и делим обе части равенства на t . Интеграл в (20) оказывается равным сумме хорошо известных из классической теории интеграла Фурье выражений. Из (11) следует, что функция

$$\lambda \rightarrow (Ua_k(\lambda, \cdot), Ua_p(\lambda, \cdot))_S$$

локально аналитична, поэтому предел находится просто. Подробно соответствующие выкладки приведены в [6].

Формула (18) сводит задачу к исследованию поведения задачи рассеяния при $n \rightarrow \infty$. Для этого исследования мы используем метод, который основан на совпадении собственных функций операторов L_n и $\exp(-\beta L_n)$. Этот метод давно используется в квантовой теории поля (как часть так называемого марковского подхода) и в теории уравнения Шрёдингера. В теории дифракции он применен в [7]. Кратко изложим результаты [7] в нужной нам форме.

Пусть $G(x, y, \beta)$ – функция Грина задачи

$$\begin{aligned} \partial_\beta G(x, y, \beta) &= \Delta_x G(x, y, \beta), \quad x \in D, \quad G(x, y, \beta) = 0, \quad x \in \partial D, \\ G(x, y, +0) &= \delta(x - y). \end{aligned} \quad (21)$$

Продолжим функцию $G(x, y, \beta)$ нулем на дополнение области $D \times D$. Пусть

$$G_0(x, y, \beta) = \left(\frac{1}{4\pi\beta} \right)^{d/2} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4\beta} \right).$$

Пусть $G(\beta)$, $G_0(\beta)$ – интегральные операторы в $L^2(\mathbb{R}^d)$ с соответствующими ядрами и

$$V = G(\beta) - G_0(\beta).$$

Пусть λ_j – то простое собственное значение оператора $L_\infty \downarrow L^2(D_{\text{int}})$, о котором говорится в (13). Выберем $\delta > 0$ так, что на интервале $(\lambda_j - \delta, \lambda_j + \delta)$ нет других собственных значений оператора $L_\infty \downarrow L^2(D_{\text{int}})$, и в дальнейшем будем предполагать, что

$$\lambda \in B_\delta = \{\lambda, |\lambda - \lambda_j| < \delta\}.$$

Введем пространство

$$H_+ = L^2(\mathbb{R}^d, \exp(-|x|) dx).$$

В дальнейшем все функции мы будем рассматривать как зависящие от параметров элементы пространства H_+ , зависимость от переменной x указываться не будет. При $\text{Im } \lambda > 0$ положим

$$\Gamma^+(\lambda) = (\exp(-\beta\lambda) - G_0(\beta))^{-1} V.$$

Доказательства следующих утверждений можно найти в [7].

ЛЕММА 2. При достаточно малых $\delta > 0$ оператор $\Gamma^+(\lambda)$ аналитичен по λ в круге B_δ как функция со значениями в $L(H_+ \rightarrow H_+)$, вполне непрерывен и

$$\|(\Gamma_n^+(\lambda) - \Gamma_\infty^+(\lambda)) \mid L(H_+ \rightarrow H_+)\| < \text{const} \cdot d(D_\infty, D_n)^{1/2}. \quad (22)$$

ЛЕММА 3. Функция φ в (15b) в том и только том случае есть решение задачи рассеяния, если она есть решение уравнения

$$\varphi = \Gamma^+(\lambda)(u_0 + \varphi), \quad \lambda_j - \delta < \lambda < \lambda_j + \delta. \quad (23)$$

Заметим, что уравнение (23) есть уравнение Липмана–Швингера для пары $G(\beta), G_0(\beta)$.

ЛЕММА 4. Функция $\psi_j \in H_+$ в том и только том случае есть отвечающая собственному значению λ_j собственная функция оператора $L_\infty \downarrow L^2(D_{\text{int}})$, если она есть решение уравнения

$$\psi_j = \Gamma_\infty^+(\lambda_j)\psi_j.$$

ЛЕММА 5. Точка $\mu = 1$ есть полюс первого порядка для функции

$$\mu \rightarrow (\mu - \Gamma_\infty^+(\lambda_j))^{-1}.$$

ЛЕММА 6. Существуют такие положительные числа δ, n_0 , что при $\lambda \in B_\delta$, $n > n_0$ справедливо равенство

$$(1 - \Gamma_n^+(\lambda))^{-1} = \frac{1}{1 - \mu_n^+(\lambda)} P_n(\lambda) + R_n(\lambda) \quad (24)$$

и справедливы следующие утверждения:

1. Проектор $P_n(\lambda)$ аналитичен по λ в круге B_δ , удовлетворяет уравнению

$$\Gamma_n^+(\lambda)P_n(\lambda) = P_n(\lambda)\Gamma_n^+(\lambda) = \mu_n^+(\lambda)P_n(\lambda) \quad (25)$$

и может быть вычислен по формуле

$$P_n(\lambda)g = c_n(\lambda)\langle V_n \overline{\psi_{n,j}}(\lambda), g \rangle \psi_{n,j}(\lambda), \quad (26)$$

где

$$\Gamma_n^+(\lambda)\psi_{n,j}(\lambda) = \mu_n^+(\lambda)\psi_{n,j}(\lambda), \quad (27)$$

$$c_n(\lambda) = \langle V_n \overline{\psi_{n,j}}(\lambda), \psi_{n,j}(\lambda) \rangle^{-1}, \quad (28)$$

функция $\psi_{n,j}(\lambda)$ аналитична по λ в круге B_δ и

$$\psi_{n,j}(\lambda) \rightarrow \psi_{\infty,j}(\lambda), \quad n \rightarrow \infty,$$

равномерно по λ , а $\psi_{\infty,j}(\lambda_j) \equiv \psi_j$.

2. Определенная равенством (25) функция $\mu_n^+(\lambda)$ аналитична по λ в круге B_δ , и функция

$$\lambda \rightarrow (1 - \mu_n^+(\lambda))$$

имеет там точно один нуль $\lambda_{n,j}$:

$$\mu_n^+(\lambda_{n,j}) = 1, \quad (29)$$

это нуль первого порядка и

$$\lambda_{n,j} \rightarrow \lambda_j, \quad n \rightarrow \infty.$$

3. Оператор $R_n(\lambda)$ в круге B_δ аналитичен по λ как функция со значениями в $L(H_+ \rightarrow H_+)$ и при $n \rightarrow \infty$ имеет предел равномерно по λ .

Определенное равенством (29) число $\lambda_{n,j}$ есть полюс аналитического продолжения матрицы рассеяния для пары L_n, L_0 . Под оператором L_0 мы понимаем самосопряженное расширение оператора $-\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^d)$. Число $|\operatorname{Im} \lambda_{n,j}|$ в математической физике называют *шириной резонанса*. Математические основания такого толкования и связь величины $\operatorname{Im} \lambda_{n,j}$ с коэффициентом затухания колебаний в резонаторе обсуждаются в работах [8]–[16].

При вычислении асимптотики величины $W_n(f_n)$ мы выделим два случая:

- 1) последовательность $|\omega_{0,n}^2 - \operatorname{Re} \lambda_{n,j}|$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю быстрее, чем $|\operatorname{Im} \lambda_{n,j}|$;
- 2) последовательность $|\omega_{0,n}^2 - \operatorname{Re} \lambda_{n,j}|$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю медленнее, чем $|\operatorname{Im} \lambda_{n,j}|$.

Постановка задачи в этих двух случаях несколько отличается. Первый случай мы назовем случаем *широкого резонанса*, второй – случаем *узкого резонанса*.

3. Асимптотика в случае широкого резонанса. В дальнейшем мы будем считать, что параметр $\beta > 0$ удовлетворяет условию

$$\langle \psi_j, (\exp(-\lambda_j \beta) - G_0(\beta)) \psi_j \rangle \neq 0. \quad (30)$$

Возможность выбора такого параметра β очевидна. Действительно, справедливо равенство

$$\langle \psi_j, (\exp(-\lambda_j \beta) - G_0(\beta)) \psi_j \rangle = \exp(-\beta \lambda_j) - \int \exp(-\beta k^2) |\widehat{\psi(k)}|^2 dk, \quad (31)$$

где $\widehat{\psi(k)}$ – преобразование Фурье функции $\psi_j(x)$. В силу единственности преобразования Лапласа и аналитичности правой части (31) по β правая часть (31) отлична от нуля всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек. Условие (30) мы в дальнейшем будем считать выполненным.

ЛЕММА 7. *Справедливо равенство*

$$\left. \frac{d\mu_\infty^+(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_j} = \frac{\beta \exp(-\beta \lambda_j)}{\langle \psi_j, (\exp(-\beta \lambda_j) - G_0(\beta)) \psi_j \rangle}. \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнения (27) следует, что при $\text{Im } \lambda > 0$

$$\mu_{\infty}^{+}(\lambda)(\exp(-\beta\lambda) - G_0(\beta))\psi_{\infty,j}(\lambda) = (G_{\infty}(\beta) - G_0(\beta))\psi_{\infty,j}(\lambda). \quad (33)$$

Умножим обе части (33) скалярно на ψ_j , продифференцируем по λ и положим $\lambda = \lambda_j + i0$. Получим (32).

ЛЕММА 8. При $\lambda_j - \delta < \lambda < \lambda_j + \delta$ справедливо равенство

$$\|U_0(V_n\psi_{n,j}(\lambda))(\lambda, \cdot) \mid L^2(S)\|^2 = \frac{\beta \exp(-\lambda\beta)}{\pi} \text{Im } \mu_n^{+}(\lambda) \langle \psi_{n,j}(\lambda), V_n\psi_{n,j}(\lambda) \rangle. \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в (27) $\text{Im } \lambda > 0$, скалярно умножим обе части равенства на $V_n\psi_{n,j}(\lambda)$, вычтем комплексно-сопряженное выражение и перейдем к пределу $\text{Im } \lambda \rightarrow +0$. Получим

$$\begin{aligned} 2i \text{Im } \mu_n^{+}(\lambda) \langle \psi_{n,j}(\lambda), V_n\psi_{n,j}(\lambda) \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{\infty} [(\exp(-\beta(\lambda + i\varepsilon)) - \exp(-\beta s))^{-1} \\ &\quad - (\exp(-\beta(\lambda - i\varepsilon)) - \exp(-\beta s))^{-1}] \|U_0(V_n\psi_{n,j}(\lambda))(s, \cdot) \mid L^2(S)\|^2 ds \\ &= \frac{2\pi i \exp(\beta\lambda)}{\beta} \|U_0(V_n\psi_{n,j}(\lambda))(\lambda, \cdot) \mid L^2(S)\|^2, \end{aligned}$$

что эквивалентно (34).

ЛЕММА 9. При $n > n_0$, $\lambda \in B_{\delta}$ решение задачи рассеяния представимо в виде

$$u_n(\lambda, \theta) = \frac{c_n(\lambda)\mu_n^{+}(\lambda)}{1 - \mu_n^{+}(\lambda)} \langle V_n\bar{\psi}_{n,j}(\lambda), u_0(\lambda, \theta) \rangle \psi_{n,j}(\lambda) + u_{n,\text{reg}}(\lambda), \quad (35)$$

где $u_{n,\text{reg}}(\lambda)$ — аналитическая в круге B_{δ} функция со значениями в $H_{+} \times L^2(S)$, которая имеет предел при $n \rightarrow \infty$ равномерно по λ , а остальные величины описаны в лемме 6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (23) следует, что

$$u_n(\lambda, \theta) = u_0(\lambda, \theta) + (1 - \Gamma_n^{+}(\lambda))^{-1} \Gamma_n^{+}(\lambda) u_0(\lambda, \theta). \quad (36)$$

В (36) подставим правую часть (24), воспользуемся леммой 6 и получим нужное утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть последовательность областей D_n удовлетворяет условиям 1)–4), последовательность $\omega_{k,n}$ удовлетворяет условиям (12), (13) $\forall k$: $a_k \in C_0^{\infty}(D_{\text{int}})$, и пусть

$$|\text{Re } \lambda_{n,j} - \omega_{0,n}^2| = O(|\text{Im } \lambda_{n,j}|^{1+\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0. \quad (37)$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\text{Im } \lambda_{n,j}| W_n(f_n) = \sqrt{\lambda_j} |\langle a_0, \psi_j \rangle|^2, \quad (38)$$

где a_0 — входящая в (10) функция, а ψ_j — отвечающая собственному значению λ_j собственная функция оператора $L_{\infty} \downarrow L^2(D_{\text{int}})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (18) следует, что

$$|\operatorname{Im} \lambda_{n,j}| W_n(f_n) = \pi \omega_{0,n} |\operatorname{Im} \lambda_{n,j}| \|U_n a_0(\omega_{0,n}^2, \cdot) \mid L^2(S)\|^2 + O(|\operatorname{Im} \lambda_{n,j}|), \quad (39)$$

$$n \rightarrow \infty.$$

Из (35) следует, что

$$U_n a_0(\lambda, \theta) = \frac{c_n(\lambda) \mu_n^+(\lambda)}{1 - \mu_n^+(\lambda)} \langle a_0, \psi_{n,j}(\lambda) \rangle U_0(\overline{V_n \psi_{n,j}(\lambda)})(\lambda, \theta) + a_{n,\text{reg}}(\lambda, \theta), \quad (40)$$

где последнее слагаемое – аналитическая по λ функция со значениями в $L^2(S)$, которая имеет предел при $n \rightarrow \infty$.

Поэтому

$$|\operatorname{Im} \lambda_{n,j}| \|U_n a_0(\omega_{0,n}^2, \cdot) \mid L^2(S)\|^2 = |\operatorname{Im} \lambda_{n,j}| \left| \frac{c_n(\omega_{0,n}^2) \mu_n^+(\omega_{0,n}^2)}{1 - \mu_n^+(\omega_{0,n}^2)} \langle a_0, \psi_{n,j}(\omega_{0,n}^2) \rangle \right|^2$$

$$\times \|U_0(\overline{V_n \psi_{n,j}(\omega_{0,n}^2)})(\omega_{0,n}^2, \cdot) \mid L^2(S)\|^2 + \dots, \quad (41)$$

причем, очевидно, если существует конечный предел у первого слагаемого в (41), то остальные стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Используя (34), мы получаем

$$|\operatorname{Im} \lambda_{n,j}| \|U_n a_0(\omega_{0,n}^2, \cdot) \mid L^2(S)\|^2 = |\operatorname{Im} \lambda_{n,j}| \left| \frac{c_n(\lambda) \mu_n^+(\lambda)}{1 - \mu_n^+(\lambda)} \langle a_0, \psi_{n,j}(\lambda) \rangle \right|^2$$

$$\times \frac{\beta \exp(-\lambda \beta)}{\pi} \operatorname{Im} \mu_n^+(\lambda) \langle \psi_{n,j}(\lambda), V_n \psi_{n,j}(\lambda) \rangle \Big|_{\lambda=\omega_{0,n}^2} + \dots. \quad (42)$$

Далее мы замечаем, что

$$1 - \mu_n^+(\omega_{0,n}^2) = \mu_n^+(\lambda_{n,j}) - \mu_n^+(\omega_{0,n}^2) = i \frac{\partial \mu_n^+(\omega_{0,n}^2)}{\partial \lambda} \operatorname{Im} \lambda_{n,j} + O(|\operatorname{Im} \lambda_{n,j}|^{1+\varepsilon}),$$

$$\operatorname{Im} \mu_n^2(\omega_{0,n}^2) = \operatorname{Im} (1 - \mu_n^2(\omega_{0,n}^2)) = -\operatorname{Im} \left(i \frac{\partial \mu_n^+(\omega_{0,n}^2)}{\partial \lambda} \operatorname{Im} \lambda_{n,j} \right) + O(|\operatorname{Im} \lambda_{n,j}|^{1+\varepsilon}).$$

Подставляем полученные выражения в (41) и учитываем формулы (28), (32) и (34). Получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\operatorname{Im} \lambda_{n,j}| \|U_n a_0(\omega_{0,n}^2, \cdot) \mid L^2(S)\|^2 = \frac{1}{\pi} |\langle a_0, \psi_j \rangle|^2,$$

что и доказывает (38). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предположим, что $\omega_{0,n}$ – случайная величина, которая равномерно распределена на интервале

$$\operatorname{bd}(n) = \{\omega; \operatorname{Re} \lambda_{n,j} - \delta_n < \omega^2 < \operatorname{Re} \lambda_{n,j} + \delta_n\},$$

$$|\operatorname{bd}(n)| = \sqrt{\operatorname{Re} \lambda_{n,j} + \delta_n} - \sqrt{\operatorname{Re} \lambda_{n,j} - \delta_n}.$$

Пусть $M(\cdot)$ – математическое ожидание. Из теоремы 1 следует, что если

$$|\text{bd}(n)| = O(|\text{Im } \lambda_{n,j}|^{1+\varepsilon}), \quad (43)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\text{Im } \lambda_{n,j}| M(W_n(f_n)) = \sqrt{\lambda_j} |\langle a_0, \psi_j \rangle|^2. \quad (44)$$

Отметим, что условие (43) может оказаться очень жестким: в известных примерах [15] справедлива оценка

$$|\text{Im } \lambda_{n,j}| = O(\exp(-b/l_n)),$$

где l_n – описанный в [15] характерный малый параметр отверстия (грубо говоря, его диаметр), соединяющего области D_{int} и D_{out} .

4. Асимптотика в случае узкого резонанса. Пусть $U_n \psi_j(\lambda, \theta)$ – преобразование (16) собственной функции ψ_j .

ЛЕММА 10. Пусть $G_n(\beta)$ – функция Грина уравнения теплопроводности для области D_n , которая продолжена нулем на все пространство, $G_\infty(\beta)$ – функция Грина уравнения теплопроводности для области D_∞ , которая также продолжена нулем на все пространство. Если числовая последовательность δ_n такова, что

$$\delta_n \rightarrow 0, \quad \frac{\|G_n(\beta) - G_\infty(\beta)\|}{\delta_n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (45)$$

то при $\beta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|\lambda - \lambda_j| \leq \delta_n} \|U_n \psi_j(\lambda, \cdot) \mid L^2(S)\|^2 d\lambda = 1. \quad (46)$$

В (45) входит операторная норма в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенств

$$\begin{aligned} \exp(-\beta \lambda_j) \psi_j &= G_\infty(\beta) \psi_j, \\ \exp(-\beta \lambda) u_n(\lambda, \theta) &= G_n(\beta) u_n(\lambda, \theta) \end{aligned}$$

и компактности носителя ψ_j следует равенство

$$(\exp(-\beta \lambda_j) - \exp(-\beta \lambda)) \langle \psi_j, u_n(\lambda, \theta) \rangle = \langle \psi_j, (G_\infty(\beta) - G_n(\beta)) u_n(\lambda, \theta) \rangle,$$

поэтому в силу равенства Парсеваля

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty |(\exp(-\beta \lambda_j) - \exp(-\beta \lambda))|^2 \|U_n \psi_j(\lambda, \cdot) \mid L^2(S)\|^2 d\lambda \\ &= \|(G_n(\beta) - G_\infty(\beta)) \psi_j\|^2. \end{aligned} \quad (47)$$

Но

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{|\lambda - \lambda_j| \leq \delta_n} \|U_n \psi_j(\lambda, \cdot) \mid L^2(S)\|^2 d\lambda + \int_{|\lambda - \lambda_j| > \delta_n} \|U_n \psi_j(\lambda, \cdot) \mid L^2(S)\|^2 d\lambda, \\
\left| 1 - \int_{|\lambda - \lambda_j| \leq \delta_n} \|U_n \psi_j(\lambda, \cdot) \mid L^2(S)\|^2 d\lambda \right| &\leq \max_{|\lambda - \lambda_j| > \delta_n} (|\exp(-\beta \lambda_j) - \exp(-\beta \lambda)|^{-2}) \\
&\quad \times \int_0^\infty |\exp(-\beta \lambda_j) - \exp(-\beta \lambda)|^2 \|U_n \psi_j(\lambda, \cdot) \mid L^2(S)\|^2 d\lambda \\
&\leq \text{const} \cdot \left(\frac{\|G_n(\beta) - G_\infty(\beta)\|}{\delta_n} \right)^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть частота $\omega_{0,n}$ – случайная величина, которая равномерно распределена на интервале

$$\text{sp}(n) = \{\omega; |\lambda_j - \omega^2| < \delta_n\}, \quad |\text{sp}(n)| = \sqrt{\lambda_j + \delta_n} - \sqrt{\lambda_j - \delta_n}.$$

ТЕОРЕМА 2. Если

$$|\text{sp}(n)| \rightarrow 0$$

и при удовлетворяющем условию (30) параметре $\beta > 0$

$$\frac{\|G_n(\beta) - G_\infty(\beta)\|}{|\text{sp}(n)|} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (48)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\text{sp}(n)| \mathbf{M}(W_n(f_n)) = \frac{\pi}{2} |\langle a_0, \psi_j \rangle|^2, \quad (49)$$

где a_0 – входящая в (10) функция, а ψ_j – отвечающая собственному значению λ_j собственная функция оператора $L_\infty \downarrow L^2(D_{\text{int}})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как показано в [7], достаточным условием для выполнения (48) является условие

$$\frac{d(D_n, D_\infty)^{1/2}}{|\text{sp}(n)|} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $E_n(\lambda_j - \delta_n, \lambda_j + \delta_n)$ – спектральный проектор оператора L_n на интервал $(\lambda_j - \delta_n, \lambda_j + \delta_n)$. Воспользовавшись формулой (18), мы получаем

$$\begin{aligned}
|\text{sp}(n)| \mathbf{M}(W_n(f_n)) &= \pi \int_{\text{sp}(n)} \omega \|U_n a_0(\omega^2, \cdot) \mid L^2(S)\|^2 d\omega + O(|\text{sp}(n)|) \\
&= \frac{\pi}{2} \|E_n(\lambda_j - \delta_n, \lambda_j + \delta_n) a_0 \mid L^2(D_n)\|^2 + O(|\text{sp}(n)|).
\end{aligned} \quad (51)$$

Воспользуемся равенством

$$a_0 = \langle \psi_j, a_0 \rangle \psi_j + a_\perp, \quad \text{где} \quad \langle a_\perp, \psi_j \rangle = 0. \quad (52)$$

Подставим (52) в (51), учтем, что

$$\begin{aligned}
\|E_n(\lambda_j - \delta_n, \lambda_j + \delta_n) a_\perp \mid L^2(D_n)\| &< \|E_n(\lambda_j - \delta_0, \lambda_j + \delta_0) a_\perp \mid L^2(D_n)\| \rightarrow 0, \\
n &\rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

и воспользуемся леммой 10. Теорема доказана.

5. Заключительные замечания. Теоремы 1 и 2 легко обобщаются на случай резонатора в волноводе [17]: если потребовать, чтобы спектр частот $\{\omega_{k,n}^2\}$ располагался на положительном расстоянии от частот захваченных мод и частот отсечки, то теоремы 1, 2 и их доказательства остаются без изменения. Однако для теории волноводов влияние захваченных мод и частот отсечки очень интересно, поэтому мы рассмотрим случай волноводов в отдельной работе. В известных нам примерах функция $E(t)$ при $t \rightarrow \infty$ растет как $O(t^2)$, $O(t^{3/2})$, $O(t)$. Конечно, интересен общий случай, но нам неизвестен метод, который бы давал нужную информацию о гладкости спектральной функции.

Список литературы

1. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
2. Kato T. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
3. Howland J. S. The Livsic matrix in perturbation theory // J. Math. Anal. Appl. 1975. V. 50. P. 415–437.
4. Shenk N., Thoe D. Eigenfunction expansions and scattering theory for perturbations of $-\Delta$ // J. Math. Anal. Appl. 1971. V. 36. P. 313–351.
5. Shenk N., Thoe D. Resonant states and poles of the scattering matrix for perturbation of $-\Delta$ // J. Math. Anal. Appl. 1972. V. 37. P. 467–491.
6. Арсеньев А. А. Об асимптотике энергии, излученной почти периодическим источником колебаний // ЖВМиМФ. 1975. Т. 15. № 4. С. 1062–1066.
7. Арсеньев А. А. Поведение амплитуды рассеяния резонатора Гельмгольца вблизи резонанса // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 9. С. 3–16.
8. Agmon S. A perturbation theory of resonances // Comm. Pure Appl. Math. 1998. V. 51. P. 1255–1309.
9. Costin O., Soffer A. Resonance theory for Schrödinger operators // Comm. Math. Phys. 2001. V. 224. P. 133–152.
10. Merkli M., Sigal I. M. A time-dependent theory of quantum resonances // Comm. Math. Phys. 1999. V. 201. P. 549–576.
11. Soffer A., Weinstein M. I. Time dependent resonance theory // Geom. Funct. Anal. 1998. V. 8. P. 1086–1128.
12. Tang S.-H., Zworski M. Resonance expansions of scattered waves // Comm. Pure Appl. Math. 2000. V. 53. P. 1305–1334.
13. Parravicini G., Gorini V. Resonances, scattering theory, and rigged Hilbert spaces // J. Math. Phys. 1980. V. 21. № 8. P. 2208–2226.
14. Castagnino M., Betan R., Laura R., Liotta R. J. Quantum decay processes and Gamov states // J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 6055–6074.
15. Hislop P. D., Martinez A. Scattering resonances of a Helmholtz resonator // Indiana Univ. Math. J. 1991. V. 40. P. 767–788.
16. Fernandez C. A. Resonances in scattering by a resonator // Indiana Univ. Math. J. 1985. V. 34. P. 115–125.
17. Арсеньев А. А. Резонансное рассеяние в квантовых волноводах // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 1. С. 3–22.