Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Кочергин, Невырожденные неподвижные точки и перемешивание в потоках на двумерном торе. II, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 3, 15–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm807>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 08:47:36

УДК 517.987.5+517.938

А. В. Кочергин

Невырожденные неподвижные точки и перемешивание в потоках на двумерном торе. II

Доказана теорема о перемешивании для специального потока, построенного по повороту окружности на любой иррациональный угол и сильно асимметричной функции с логарифмическими особенностями.

Библиография: 8 названий.

§ 1. Введение и формулировка результатов

Эта статья является продолжением [1] и посвящена, в основном, доказательству теоремы 2, сформулированной там.

Ради целостности изложения напомним, о чем идет речь. Здесь мы вынуждены частично процитировать [1].

В работе В. И. Арнольда [2] естественным образом возникли примеры потоков на двумерном торе, фазовое пространство которых распадается на ячейки, ограниченные замкнутыми сепаратрисами невырожденных особых точек и заполненные периодическими траекториями, и эргодическую компоненту, в которой траектория проходит вблизи неподвижной точки с одной стороны чаще, чем с другой.

Поток на эргодической компоненте изоморфен специальному потоку, построенному по повороту окружности и функции, имеющей асимметричные логарифмические особенности. В работе [3] была высказана гипотеза о том, что такие потоки могут перемешивать. Я. Г. Синай и К. М. Ханин [4] доказали это при некотором ограничении на скорость аппроксимации угла поворота.

В [1] и в настоящей работе ослаблены эти ограничения в общем асимметричном случае и доказана теорема о перемешивании для любых иррациональных углов поворота в специальном потоке над поворотом окружности с *сильно асимметричной* функцией с логарифмическими особенностями.

Приведем необходимые определения и точные формулировки.

Будем говорить, что функция $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}_+$, по которой строится специальный поток, имеет логарифмические особенности, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) f имеет K особых точек $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_K$;
- 2) $f \in C^1(\mathbb{S}^1 \setminus \bigcup_{i=1}^K \overline{x}_i)$;
- 3) существует такое $c > 0$, что для любого x из области определения $f(x) \geq c > 0$;

Работа выполнена в рамках Программы поддержки научных школ РФ (грант № НШ-457.2003.1).

4) для каждого $i = 1, \dots, K$

$$f'(x) = -\frac{1}{\{x - \bar{x}_i\}}(A_i + o(1)) \quad \text{при } x \rightarrow \bar{x}_i + 0, \quad (1.1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\{\bar{x}_i - x\}}(B_i + o(1)) \quad \text{при } x \rightarrow \bar{x}_i - 0, \quad (1.2)$$

причем $A_i, B_i \geq 0$.

Обозначим $A = \sum_{i=1}^K A_i$, $B = \sum_{i=1}^K B_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию f назовем *симметричной*, если $A = B \neq 0$, *асимметричной*, если $A \neq B$, и *сильно асимметричной*, если для каждого i $\text{sgn}(A_i - B_i) = \text{sgn}(A - B) \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно показать, что из условий (1.1) и (1.2) на f' следуют условия на f :

$$f(x) = \ln \frac{1}{\{x - \bar{x}_i\}}(A_i + o(1)) \quad \text{при } x \rightarrow \bar{x}_i + 0, \quad (1.3)$$

$$f(x) = \ln \frac{1}{\{\bar{x}_i - x\}}(B_i + o(1)) \quad \text{при } x \rightarrow \bar{x}_i - 0. \quad (1.4)$$

Мы будем рассматривать поворот окружности $\mathbb{S}^1$ на иррациональный угол ρ : $T_\rho x := x + \rho \bmod 1$. Для краткости, если это не вызовет недоразумений, вместо T_ρ будем писать просто T .

Пусть $\rho = [k_1, \dots, k_n, \dots]$ – разложение ρ в цепную дробь [5]. Через p_n/q_n обозначим n -ю подходящую к ρ дробь.

ТЕОРЕМА 1. Если f – асимметричная функция с логарифмическими особенностями, а иррациональный угол ρ удовлетворяет условию

$$\ln k_{n+1} = o(\ln q_n), \quad (*)$$

то специальный поток, построенный по повороту T_ρ и функции f , перемешивает.

В работе [4] Я. Г. Синая и К. М. Ханина на ρ наложено более сильное условие: $k_{n+1} \leq \text{const} \cdot n^{1+\gamma}$, где $0 < \gamma < 1$.

Нетрудно показать, что если для некоторого $\gamma > 0$, может быть и большего единицы, при всех n выполнено неравенство $k_{n+1} \leq \text{const} \cdot n^{1+\gamma}$, то число ρ удовлетворяет условию (*).

ТЕОРЕМА 2. Если f – сильно асимметричная функция с логарифмическими особенностями, а ρ – произвольный иррациональный угол, то специальный поток, построенный по повороту T_ρ и функции f , перемешивает.

Основные определения приведены в [1]. Здесь мы повторим только самое необходимое.

Основным инструментом изучения перемешивающих свойств специального потока будут служить *биркгофовы суммы*: для $r \in \mathbb{N}$

$$f^r(x) = \sum_{k=0}^{r-1} f(T^k x), \quad f^{-r}(x) = -f^r(T^{-r}x), \quad f^0(x) \equiv 0.$$

Доказательство перемешивания опирается на следующие определения и теоремы. Аналогичные, но формально отличающиеся определения и теоремы использованы в работах [6], [7] и др.

Пусть $C \subset \mathbb{S}^1$, φ – вещественная функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию $\varphi|C$ назовем ε -*равномерно распределенной* (ε -р.р.) в отрезке $[a, b]$, если для любого отрезка $[c, d] \subset [a, b]$ выполняется неравенство

$$\mu(\varphi^{-1}([c, d]) \cap C) > \mu(C) \frac{d-c}{b-a} (1 - \varepsilon).$$

(Через $\varphi|C$ обозначено ограничение функции φ на множество C .)

Пусть $\varepsilon > 0$, $H > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $\varphi|C$ называется (ε, H) -*равномерно распределенной*, если существует такой отрезок $[a, b]$, что $b - a > H$ и $\varphi|C$ является ε -р.р. в отрезке $[a, b]$.

Для почти каждого $x \in \mathbb{S}^1$ и $t > 0$ через $\mathcal{R}(t, x)$ обозначим одноточечное множество, в которое входит такое целое r , что

$$f^r(x) \leq t < f^{r+1}(x).$$

Иначе говоря, если $r \in \mathcal{R}(t, x)$, то r – это число скачков, которое совершит точка $(x, 0)$ под действием потока S^t за время t .

Для любого измеримого множества $X \subset \mathbb{S}^1$ обозначим

$$\mathcal{R}(t, X) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{R}(t, x).$$

ТЕОРЕМА 1.1 (достаточное условие перемешивания). Пусть для некоторого $t_0 > 0$ и для любого $t > t_0$ заданы:

- конечное частичное разбиение ξ_t окружности $\mathbb{S}^1$, элементами которого являются отрезки $\xi_t = \{C_i^{(t)}\}$, причем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \max_{C_i^{(t)} \in \xi_t} |C_i^{(t)}| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \mu([\xi_t]) = 1$$

(через $[\xi_t]$ обозначено объединение элементов ξ_t , $|C|$ – длина отрезка C);

- положительные функции $\varepsilon(t) \rightarrow 0$, $H(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

Если при каждом $t > t_0$ для любого номера $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t) \cap \mathcal{R}(t, [\xi_t])$, а также для любого $C \in \xi_t$ биркгофова сумма $f^r|C$ ($\varepsilon(t), H(t)$)-равномерно распределена, то специальный поток, построенный по повороту окружности T и функции f , перемешивает.

Следующая очевидная лемма позволит эффективнее проверять достаточное условие перемешивания.

ЛЕММА 1.1 (достаточное условие (ε, H) -равномерной распределенности гладкой функции). Пусть C – отрезок, $C \subset \mathbb{S}^1$, $\varphi \in C^1(C)$ и для любого $x \in C$

$$|M|\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) < |\varphi'(x)| < |M|\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad M \neq 0, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Тогда для любого H , удовлетворяющего неравенству $0 < H \leq |M| |C| (1 - \varepsilon)$, функция $\varphi|_C$ является (ε, H) -равномерно распределенной.

§ 2. Разложение биркгофовых сумм $(f^r)'$

Рассмотрим вспомогательные функции $u, v: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, которые можно рассматривать как функции $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с периодом 1 и определенные так: $u(x) = 1/x$, если $x \in (0, 1]$, $v(x) = 1/(1 - x)$, если $x \in [0, 1)$. Особая точка этих функций на окружности $x_0 = 0$.

Согласно теореме 3.1 из [1] существует такая бесконечно малая последовательность $\alpha(r)$, что для всех x , кроме особых точек f^r , выполняется равенство

$$(f^r)'(x) = \sum_{i=1}^K (u^r(x - \bar{x}_i)(-A_i + \alpha_i^-(r, x)) + v^r(x - \bar{x}_i)(B_i + \alpha_i^+(r, x))), \quad (2.1)$$

где

$$|\alpha_i^\pm(r, x)| \leq \alpha(r). \quad (2.2)$$

Разложение r по знаменателям q_n подходящих к ρ дробей с целыми неотрицательными коэффициентами вида $r = l_s q_s + \dots + l_0 q_0$ назовем *стандартным*, если

$$\begin{aligned} 1 &\leq l_s \leq k_{s+1}, \\ 0 &\leq l_n \leq k_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, s-1, \\ l_{n-1} q_{n-1} + \dots + l_0 q_0 &< q_n, \quad n = 1, \dots, s, \end{aligned}$$

и *квазистандартным*, если l_s может быть и нулем.

Обозначим также

$$\Delta_n = \min_{0 \leq i < j < q_n} |T^i x_0 - T^j x_0|, \quad \delta_n = q_n \rho - p_n.$$

Справедливы неравенства

$$\begin{aligned} q_{n+1} &< \frac{1}{|\delta_n|} < q_{n+1} \left(1 + \frac{1}{k_{n+1}}\right), \\ \frac{1}{2q_n} &< k_{n+1} |\delta_n| < \Delta_n < \frac{1}{q_n}. \end{aligned}$$

Пусть $q_s \leq r < q_{s+1}$ и $r = l_s q_s + \dots + l_0 q_0$ – стандартное разложение. Тогда

$$u^r(x) = u^{l_s q_s}(x) + \dots + u^{l_n q_n}(T^{r_{n+1}} x) + \dots + u^{l_0 q_0}(T^{r_1} x),$$

где $r_n = l_s q_s + \dots + l_n q_n$. Для каждого n разобьем u на два слагаемых. Положим

$$\begin{aligned} \hat{u}_n(x) &= u(x), & \check{u}_n(x) &= 0 & \text{при } x \in (0, \Delta_n), \\ \hat{u}_n(x) &= 0, & \check{u}_n(x) &= u(x) & \text{при } x \notin (0, \Delta_n). \end{aligned}$$

Тогда $u^{l_n q_n}(T^{r_{n+1}}x) = \hat{u}_n^{l_n q_n}(T^{r_{n+1}}x) + \check{u}_n^{l_n q_n}(T^{r_{n+1}}x)$.

Можно показать [1], что для любого x

$$\check{u}_n^{l_n q_n}(x) = l_n q_n \ln q_n + P_{l_n q_n}^-(T^{r_{n+1}}x), \quad |P_{l_n q_n}^-(T^{r_{n+1}}x)| < 4l_n q_n.$$

Величину $l_n q_n \ln q_n$ можно назвать *эргодической* компонентой в $u^{l_n q_n}$. Эта компонента не зависит от точки x и для заданного q_n пропорциональна l_n .

Слагаемое $\hat{u}_n^{l_n q_n}$ представим в виде

$$\hat{u}_n^{l_n q_n}(T^{r_{n+1}}x) = I_n^-(x) + Z_n^-(x)$$

следующим образом. Обозначим через $x_n^-(x)$ ближайшую к x слева особую точку функции $\hat{u}_n^{l_n q_n}(T^{r_{n+1}}x)$, если она существует (в левой Δ_n -окрестности), и положим

$$I_n^-(x) = u(x - x_n^-(x)), \quad Z_n^-(x) = \hat{u}_n^{l_n q_n}(T^{r_{n+1}}x) - I_n^-(x).$$

Если точки $x_n^-(x)$ не существует, то положим $I_n^-(x) = 0$, $Z_n^-(x) = 0$.

Таким образом, мы получили разложение

$$u^{l_n q_n}(T^{r_{n+1}}x) = l_n q_n \ln q_n + I_n^-(x) + Z_n^-(x) + P_n^-(T^{r_{n+1}}x).$$

Слагаемое $Z_n^-(x)$ условно назовем *резонансным*. Его величина существенно зависит от того, как точка x расположена по отношению к особым точкам функции $\hat{u}_n^{l_n q_n}(T^{r_{n+1}}x)$, а максимальное значение имеет порядок $q_{n+1} \ln k_{n+1}$, т.е. существенно зависит от точности приближения ρ дробью p_n/q_n .

Просуммируем полученное разложение по n и обозначим

$$e(r) = \sum_{n=1}^s l_n q_n \ln q_n, \quad Z^-(x) = \sum_{n=0}^s Z_n^-(x), \quad P^-(x) = \sum_{n=0}^s P_n^-(T^{r_{n+1}}x).$$

Из суммы $\sum_{n=0}^s I_n^-(x)$ выделим слагаемые, их не более двух, особые точки которых лежат в левой Δ_s -полукрестности точки x , и объединим их в $I^-(x)$, а сумму остальных обозначим $I_{\text{ост}}^-(x)$.

Таким образом, получаем лемму 5.4 из [1]: *справедливо разложение*

$$v^r(x) = e(r) + Z^+(x) + I^+(x) + I_{\text{ост}}^+(x) + P^+(x), \quad (2.3)$$

$$u^r(x) = e(r) + Z^-(x) + I^-(x) + I_{\text{ост}}^-(x) + P^-(x), \quad (2.4)$$

где

$$e(r) = \sum_{n=1}^s l_n q_n \ln q_n, \quad Z^+(x) = \sum_{n=0}^s Z_n^+(x), \quad Z^-(x) = \sum_{n=0}^s Z_n^-(x).$$

При этом справедливы оценки

$$|P^\pm(x)| \leq 4r, \quad (2.5)$$

$$0 < I^\pm(x) < \frac{2}{|x^\pm(x) - x|}, \quad (2.6)$$

где $x^+(x)$ и $x^-(x)$ – ближайшие к x справа и слева соответственно особые точки функций v^r и u^r ;

$$|I_{\text{ост}}^\pm(x)| < 2q_s(\ln s + 1). \quad (2.7)$$

(Последняя оценка отличается от того, что сформулировано в [1; лемма 5.4], но возникает по ходу доказательства леммы.)

В приведенном разложении помимо относительно малых остаточных членов налицо три компоненты: эргодическая $e(r)$, резонансная $Z^\pm$ и индивидуальная $I^\pm$. Последняя становится несущественной при небольшом сужении множества, на котором производятся оценки, а именно на множестве $\bar{V}(t)$, определенном ниже. Эргодической составляющей было бы достаточно для растяжения биркгофовых сумм при условии, что резонансные слагаемые “не мешали” или “помогали” этому. В случае $\ln k_{n+1} = o(\ln q_n)$ резонансные слагаемые малы по сравнению с $e(r)$ [1], а в случае сильно асимметричной функции, как будет показано ниже, они согласуются с эргодическим.

Определим еще один объект, необходимый для описания свойств резонансных слагаемых. Множество $X^{(n)} = X^{(n)}(r)$ особых точек функции $u^{l_n q_n}(T^{r_{n+1}}x)$ распадается на подмножества вида

$$X_i^{(n)} = \{T^{-r_{n+1}-i-jq_n}, j = 0, \dots, l_n - 1\}, \quad i = 0, \dots, q_n - 1.$$

Эти подмножества будем называть *сгустками* n -го ранга. Каждый сгусток состоит из l_n точек, образующих арифметическую прогрессию с шагом δ_n . Через $[X_i^{(n)}]$ обозначим минимальный отрезок, содержащий $X_i^{(n)}$, $[X^{(n)}] = \bigcup_i [X_i^{(n)}]$, через $\partial[X^{(n)}]$ – границу множества $[X^{(n)}]$. Длина каждого отрезка равна $|X_i^{(n)}| = (l_n - 1)|\delta_n|$, $\mu([X^{(n)}]) \approx l_n/k_{n+1}$. Отрезки $[X_i^{(n)}]$ попарно не пересекаются, поэтому $\partial[X^{(n)}]$ состоит из объединения концов отрезков $[X_i^{(n)}]$.

Множество $X(r)$ особых точек функций u^r и v^r является объединением сгустков рангов от 0 до s .

Множества вида

$$\hat{X}_i = \hat{X}_i^{(s)} = \{T^{-i-jq_s}, 0 \leq i + jq_s < r\}, \quad i = 0, \dots, q_s - 1,$$

назовем *расширенными сгустками*. Каждый расширенный сгусток состоит из l_s или $l_s + 1$ точек. Через $[\hat{X}_i]$ обозначим минимальный отрезок, содержащий $\hat{X}_i$. Отрезки $[\hat{X}_i]$ попарно не пересекаются, $|\hat{X}_i| < \Delta_s$. Множество $X(r)$ распадается на расширенные сгустки. Таким образом, сгустки рангов меньших чем s состоят из дополнительных точек расширенных сгустков (не более одной в каждом расширенном сгустке).

Более подробно свойства множества особых точек $X(r)$ описаны в [1; § 4].

§3. Предварительная оценка слагаемых

В качестве измерителя рассмотрим последовательность σ_n , $n \in \mathbb{Z}_+$, зависящую от ρ и удовлетворяющую следующим условиям:

$$1) \sigma_n \searrow 0; \quad (3.1)$$

$$2) \sigma_n^2 \ln q_n \nearrow +\infty; \quad (3.2)$$

$$3) \sigma_n > (\ln q_n)^{-1/4} \quad (\text{при } n > 1). \quad (3.3)$$

Заметим, что из условий $\sigma_n^2 \ln q_n \nearrow +\infty$ и $\sigma_n \searrow 0$ следует, что $\sigma_n \ln q_n \nearrow +\infty$.

Если $\ln k_{n+1} = o(\ln q_n)$, то нетрудно доказать, действуя так же, как в [1; §6], что на σ_n можно наложить дополнительное условие $\ln k_{n+1} \leq \sigma_n^2 \ln q_n$.

Фиксируем достаточно большое t и выберем такое $m = m(t)$, что

$$\sqrt{2} q_m \leq t < \sqrt{2} q_{m+1}. \quad (3.4)$$

Очевидно, что $m(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

Для каждого номера $m \geq 2$ определим множества

$$V_m = \{x: |x - T^{-j} x_0| \geq 3\sigma_m/q_m \quad \forall j = 0, 1, \dots, q_m - 1\},$$

$$V'_m = \{x: |x - T^{-j} x_0| \geq 3\sigma_m/q_{m+1} \quad \forall j = 0, 1, \dots, 2q_{m+1} - 1\}.$$

Непосредственно из определения следуют свойства V_m и V'_m :

- множества V_m и V'_m состоят из попарно непересекающихся отрезков; число этих отрезков не превосходит q_m для множества V_m и $2q_{m+1}$ для множества V'_m ;
- меры V_m и V'_m больше, чем $1 - 12\sigma_m$;
- длина каждого из отрезков, из которых состоит V_m , не превосходит $2/q_m$;
- длина каждого из отрезков, из которых состоит V'_m , не превосходит $2/q_{m+1}$.

Определим множество $\tilde{V}(t)$, на котором будем проводить оценки слагаемых разложения u^r и v^r :

$$\tilde{V}(t) = \begin{cases} V_m, & \text{если } \sqrt{2} q_m \leq t < \sqrt{2} \sigma_m q_{m+1}, \\ V'_m, & \text{если } \sqrt{2} \sigma_m q_{m+1} \leq t < \sqrt{2} q_{m+1}. \end{cases}$$

Пусть $W \subset \mathbb{S}^1$, $\varepsilon > 0$. Обозначим через $U(\varepsilon, W)$ ε -окрестность множества W .

ЛЕММА 3.1. 1) Если $r < 2\sigma_m q_{m+1}$, то $U(\sigma_m/q_m, X(r)) \cap V_m = \emptyset$. Более того, для любого $x \in V_m$ расстояние от x до любого расширенного сгустка $\hat{X}_i^{(m)}(r)$ ранга m больше, чем σ_m/q_m .

2) Если $r < 2q_{m+1}$, то $U(3\sigma_m/q_{m+1}, X(r)) \cap V'_m = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 2) леммы следует непосредственно из определения множества V'_m и неравенства $r < 2q_{m+1}$. Для доказательства п. 1) заметим, что узловые точки ранга m , которые одновременно являются крайними точками расширенных сгустков, удалены от V_m на $3\sigma_m/q_m$. Осталось оценить длину расширенного сгустка:

$$|\hat{X}_i^{(m)}(r)| \leq l_m |\delta_m| \leq \frac{r|\delta_m|}{q_m} < \frac{2\sigma_m q_{m+1}}{q_m} |\delta_m| < \frac{2\sigma_m}{q_m}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть t достаточно велико. Тогда для любого $x \in \tilde{V}(t)$ и любого $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$

$$I^\pm(x) < \frac{2}{\sigma_m^2 \ln q_m} e(r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $\sqrt{2}q_m \leq t < \sqrt{2}\sigma_m q_{m+1}$. В этом случае $\tilde{V}(t) = V_m$, $r \in (q_m, 2\sigma_m q_{m+1})$. В силу леммы 3.1 $U(\sigma_m/q_m, X(r)) \cap V_m = \emptyset$, поэтому $|x - x^\pm(x)| > \sigma_m/q_m$, откуда $I^\pm(x) < 2/|x - x^\pm(x)| < 2q_m/\sigma_m$. Так как $r > q_m$, то $e(r) \geq q_m \ln q_m$. Следовательно,

$$\frac{I^\pm(x)}{e(r)} < \frac{2}{\sigma_m \ln q_m} < \frac{2}{\sigma_m^2 \ln q_m}.$$

Пусть теперь $\sqrt{2}\sigma_m q_{m+1} \leq t < \sqrt{2}q_{m+1}$, $t \geq \sqrt{2}q_m$. В этом случае $\tilde{V}(t) = V'_m$, $r \in (\sigma_m q_{m+1}, 2q_{m+1})$, $r > q_m$. В силу леммы 3.1 $U(3\sigma_m/q_{m+1}, X(r)) \cap V_{m+1} = \emptyset$, поэтому $|x - x^\pm(x)| > 3\sigma_m/q_{m+1}$. Учитывая, что

$$e(r) > \frac{r}{2} \ln q_m > \frac{\sigma_m q_{m+1}}{2} \ln q_m,$$

получаем ту же оценку.

Лемма доказана.

Подведем промежуточный итог.

Будем считать, что m достаточно велико.

ЛЕММА 3.3. Пусть $\sqrt{2}q_m \leq t < \sqrt{2}q_{m+1}$. Тогда для любого $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$ и любого $x \in \tilde{V}(t)$

$$u^r(x) = e(r)(1 + \delta_1 u^r(x)) + \sum_{n=0}^{m+2} Z_n^-(x), \quad (3.5)$$

$$v^r(x) = e(r)(1 + \delta_1 v^r(x)) + \sum_{n=0}^{m+2} Z_n^+(x), \quad (3.6)$$

где

$$|\delta_1 u^r(x)| < \sigma_m, \quad |\delta_1 v^r(x)| < \sigma_m \quad (3.7)$$

($\delta_1 u^r$ и $\delta_1 v^r$ — относительные погрешности оценок).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки следуют из (2.3)–(2.7), а также из леммы 3.2.

Так как $\sqrt{2}q_m \leq t < \sqrt{2}q_{m+1}$, $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$, то $q_m < r < 2q_{m+1} < q_{m+3}$, поэтому в стандартном разложении $r = l_s q_s + \dots + l_0 q_0$ старший индекс s может принимать одно из трех значений: m , $m+1$ или $m+2$. Имеем (так как $e(r) > (r/2) \ln q_s$ и $e(r) \geq q_s \ln q_s$)

$$|P^\pm(x)| < 4r < \frac{8}{\ln q_s} e(r) \leq \frac{8}{\ln q_m} e(r),$$

$$I_{\text{ост}}^\pm(x) < 2q_s(\ln s + 1) \leq \frac{3 \ln \ln q_s}{\ln q_s} e(r) \leq \frac{3 \ln \ln q_m}{\ln q_m} e(r),$$

а для любого $x \in \tilde{V}(t)$ справедливо $I^\pm(x) < 2e(r)/(\sigma_m^2 \ln q_m)$.

Складывая все оценки и учитывая, что $3 \ln \ln q_m < \sqrt[4]{\ln q_m}$, $\sigma_m^2 \ln q_m > \sqrt{\ln q_m}$, $\sigma_m > 1/\sqrt[4]{\ln q_m}$, получим при достаточно больших m для любого $x \in \tilde{V}(t)$

$$|P^\pm(x)| + |I_{\text{ост}}^\pm(x)| + |I^\pm(x)| < \sigma_m e(r).$$

Лемма доказана.

Таким образом, в разложении биркгофовых сумм u^r и v^r мы оценили все слагаемые, кроме $\sum_i Z_i^\pm(x)$. Эти слагаемые, которые мы условно называем резонансными, существенно зависят от арифметических свойств угла поворота ρ .

§ 4. Теорема о “главном резонансном слагаемом” и построение частичного разбиения

Сформулируем теорему о “главном резонансном слагаемом”, в которой описываются возможные ситуации роста знаменателей.

Итак, фиксируем достаточно большое t и выберем $m = m(t)$ в соответствии с (3.4).

ТЕОРЕМА 3. *При достаточно больших t возможны следующие ситуации.*

1. “Главного резонансного слагаемого” нет:

$$\begin{cases} q_{s+1} \ln k_{s+1} \leq \sigma_m t \ln q_m & \text{для любого } s < m, \\ \ln k_{m+1} \leq \sigma_m^2 \ln q_m, \\ \sqrt{2} q_m \leq t < \sqrt{2} \sigma_m q_{m+1}. \end{cases}$$

Тогда для любого $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$ и любого $x \in \tilde{V}(t)$

$$0 \leq \sum_n Z_n^\pm(x) < 20\sigma_m e(r). \quad (4.1)$$

2. “Главное резонансное слагаемое” имеет ранг m :

$$\begin{cases} q_{s+1} \ln k_{s+1} \leq \sigma_m t \ln q_m & \text{для любого } s < m, \\ \ln k_{m+1} > \sigma_m^2 \ln q_m, \\ \sqrt{2} \sigma_m q_{m+1} \leq t < \sqrt{2} q_{m+1}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Тогда для любого x

$$\sum_{n \neq m} Z_n^\pm(x) < 16\sigma_m e(r), \quad (4.3)$$

а для $Z_m^\pm(x) = Z_m^\pm(r, x)$ при $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$ и $x \in \tilde{V}(t) \setminus U(\sigma_m/q_m, \partial[X^{(m)}(r)])$ имеется альтернатива:

– если $x \notin [X^{(m)}(r)]$, то

$$Z_m^\pm(x) < \sigma_m e(r); \quad (4.4)$$

– если $x \in [X^{(m)}(r)]$, то

$$q_{m+1} \ln k_{m+1} - \sigma_m e(r) < Z_m^\pm(x) < q_{m+1} \ln k_{m+1} + \sigma_m e(r). \quad (4.5)$$

3. “Главное резонансное слагаемое” имеет ранг $s < m$: существует $s < m$, для которого выполняется неравенство

$$q_{s+1} \ln k_{s+1} > \sigma_m t \ln q_m. \quad (4.6)$$

Тогда для любого $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$ и любого $x \in \tilde{V}(t)$

$$\sum_{n \neq s} Z_n^\pm(x) < \sigma_m e(r), \quad (4.7)$$

а для $Z_s^\pm(x) = Z_s^\pm(r, x)$ при $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$ и $x \in \tilde{V}(t) \setminus U(\sigma_s/q_s, \partial[X^{(s)}(r)])$ имеется альтернатива:

– если $x \notin [X^{(s)}(r)]$, то

$$Z_s^\pm(x) < \sigma_m e(r); \quad (4.8)$$

– если $x \in [X^{(s)}(r)]$, то

$$q_{s+1} \ln k_{s+1} - \sigma_m e(r) < Z_s^\pm(x) < q_{s+1} \ln k_{s+1} + \sigma_m e(r). \quad (4.9)$$

Эта теорема доказана в следующем параграфе, а в этом в каждой из ситуаций построено частичное разбиение ξ_t и проверено выполнение достаточного условия перемешивания. Часть лемм, на которые опирается изложение, доказана в § 6.

Определим функции $\varepsilon(t) \rightarrow 0$, $H(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, фигурирующие в формулировке достаточного условия перемешивания. Положим

$$\varepsilon_e(t) = \frac{4K}{|A-B|} \max_{r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)} \alpha(r) + \frac{21(A+B)}{|A-B|} \sigma_m, \quad (4.10)$$

$$\varepsilon_L(t) = \max_{1 \leq i \leq K} \frac{2}{|A_i - B_i|} \max_{r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)} \alpha(r), \quad (4.11)$$

где $\alpha(r)$ – бесконечно малая последовательность, определенная в теореме 3.1 из [1], см. также (2.1), (2.2). Теперь положим

$$\varepsilon(t) = 2 \max(\varepsilon_e(t), \varepsilon_L(t)), \quad (4.12)$$

$$H(t) = \frac{|B-A| \sigma_m^2 \ln q_m}{4}. \quad (4.13)$$

Очевидно, что $\varepsilon(t) \rightarrow 0$, $H(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

В каждой из трех ситуаций мы построим частичное разбиение ξ_t , удовлетворяющее условиям:

- 1) $\mu([\xi_t]) > 1 - 30K\sigma_m$ для второй ситуации или $\mu([\xi_t]) > 1 - 18K\sigma_m - 12K\sigma_s$ для третьей ситуации;

- 2) элементами разбиения являются отрезки, для любого элемента $C \in \xi_t$
 $|C| < 2/q_m$;
 3₁) в ситуации 1 для любого $x \in [\xi_t]$ и любого $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$ справедливо

$$(f^r)'(x) = (B - A)e(r)(1 + \gamma_e(r, x)), \quad |\gamma_e(r, x)| < \frac{\varepsilon(t)}{2}; \quad (4.14)$$

- 3_{2,3}) в ситуациях 2 и 3 для любого элемента $C \in \xi_t$ существует такая константа $L(C) \geq 0$, что для любого $r \in \mathcal{R}(t, [\xi_t])$ и любого $x \in C$

$$(f^r)'(x) = (B - A)(e(\bar{r})(1 + \gamma_e(r, x)) + L(C)(1 + \gamma_L(r, x))), \quad (4.15)$$

$$|\gamma_e(r, x)| < \frac{\varepsilon(t)}{2}, \quad |\gamma_L(r, x)| < \frac{\varepsilon(t)}{2}, \quad (4.16)$$

где $\bar{r} = \bar{r}(t) \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$ определяется при построении разбиения;

- 4) для любого элемента разбиения $C \in \xi_t$ и любого $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$

$$|C|e(r) > \frac{\sigma_m^2 \ln q_m}{2}. \quad (4.17)$$

Нетрудно видеть, что при выполнении одного из условий 3) и условия 4) при $\varepsilon(t) < 1/2$ для функции $f^r|C$ выполнено достаточное условие $(\varepsilon(t), H(t))$ -равномерной распределенности, сформулированное в лемме 1.1.

1. В ситуации 1 в силу леммы 3.3, а также (4.1) из теоремы 3 справедлива оценка: для любого $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$ и любого $x \in \tilde{V}(t)$

$$u^r(x) = e(r)(1 + \delta u^r(x)), \quad v^r(x) = e(r)(1 + \delta v^r(x)), \quad (4.18)$$

где $|\delta u^r(x)| < 21\sigma_m$, $|\delta v^r(x)| < 21\sigma_m$. Тогда для любого $x \in \tilde{V}(t) + \bar{x}_i$

$$\begin{aligned} (-A_i + \alpha_i^-(r, x))u^r(x - \bar{x}_i) &= e(r)(-A_i - A_i\delta u^r(x - \bar{x}_i) \\ &\quad + \alpha_i^-(r, x)(1 + \delta u^r(x - \bar{x}_i))), \\ (B_i + \alpha_i^+(r, x))v^r(x - \bar{x}_i) &= e(r)(B_i + B_i\delta v^r(x - \bar{x}_i) \\ &\quad + \alpha_i^+(r, x)(1 + \delta v^r(x - \bar{x}_i))) \end{aligned}$$

($\bar{x}_i$ – особые точки функции f). Поэтому положим

$$\bar{V}(t) = \bigcap_{i=1}^K (\tilde{V}(t) + \bar{x}_i). \quad (4.19)$$

Подстановкой в разложение (2.1) легко убедиться, что в ситуации 1 для любого $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$ и любого $x \in \bar{V}(t)$

$$(f^r)'(x) = (B - A)e(r)(1 + \gamma_e(r, x)), \quad |\gamma_e(r, x)| \leq \varepsilon_e(t) \leq \frac{\varepsilon(t)}{2}.$$

Из свойств множества $\tilde{V}(t)$ следует, что $\bar{V}(t)$ состоит из попарно непересекающихся отрезков, число которых не более, чем $2Kq_{m'}$, где

$$\begin{aligned} m' &= m, & \text{если } t \leq \sqrt{2}\sigma_m q_{m+1} \text{ и } \tilde{V}(t) = V_m, \\ m' &= m+1, & \text{если } t > \sqrt{2}\sigma_m q_{m+1} \text{ и } \tilde{V}(t) = V'_m. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Длина каждого из отрезков менее, чем $2/q_{m'}$, и $\mu(\bar{V}(t)) > 1 - 12K\sigma_m$.

В качестве элементов разбиения ξ_t выберем те из отрезков $C \subset \bar{V}(t)$, длина которых не меньше, чем $\sigma_m/q_{m'}$.

Легко видеть, что

$$\mu([\xi_t]) > 1 - 14K\sigma_m.$$

В самом деле, общая длина выброшенных отрезков меньше, чем $2Kq_{m'}\sigma_m/q_{m'} = 2K\sigma_m$.

Из правила отбора отрезков, входящих в ξ_t , сразу следует неравенство (4.17). В самом деле, если $\sqrt{2}q_m \leq t < \sqrt{2}\sigma_m q_{m+1}$, то $m' = m$, $|C| \geq \sigma_m/q_m$, $e(r) \geq q_m \ln q_m$ (так как $r > q_m$), поэтому $|C|e(r) > \sigma_m \ln q_m$. Если $t > \sqrt{2}\sigma_m q_{m+1}$, то $r > \sigma_m q_{m+1}$, $e(r) > (\sigma_m q_{m+1} \ln q_m)/2$; $m' = m+1$, значит, $|C| \geq \sigma_m/q_{m+1}$, следовательно, $|C|e(r) > (\sigma_m^2 \ln q_m)/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сформулированное правило отбора отрезков, входящих в ξ_t , сохраняется во всех ситуациях, поэтому неравенство (4.17) доказано для всех случаев.

Таким образом, для любого $C \in \xi_t$ и любого $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$ выполняется (4.14) и (4.17), а значит, выполняется достаточное условие $(\varepsilon(t), H(t))$ -равномерной распределенности функции $f^r|C$.

Для тех моментов t , когда возникает ситуация 1, задача построения ξ_t , $\varepsilon(t)$ и $H(t)$, удовлетворяющих достаточному условию перемешивания, решена.

Как уже отмечалось, действуя так же, как в [1; §6], легко показать, что если ρ удовлетворяет условию

$$\ln k_{n+1} = o(\ln q_n), \quad (*)$$

то можно так выбрать последовательность σ_m , что для всех t будет иметь место ситуация 1. Отсюда мы получаем как частный случай теорему 1 о перемешивании в специальном потоке S^t при условии (*) для произвольной асимметричной функции с логарифмическими особенностями.

2. Ситуации 2 и 3 отличаются от первой тем, что в них возникают “главные резонансные слагаемые”, это $Z_m^\pm$ в ситуации 2 и $Z_s^\pm$ в ситуации 3, которые на множестве достаточно большой меры, а точнее, на $[X^{(m)}]$ или $[X^{(s)}]$ соответственно, по величине могут быть сравнимы с $e(r)$ или даже существенно превосходить $e(r)$.

Это, во-первых, означает, что для общего случая асимметричной функции f , когда возможно, что $\operatorname{sgn}(A - B) \neq \operatorname{sgn}(A_i - B_i)$, вообще говоря, не исключены моменты, когда на множестве большой меры производная $(f^r)'$ относительно мала, что не дает возможности применить технику настоящей работы для оценки растяжения биркгофовых сумм. Во-вторых, для учета резонансных слагаемых требуется модификация метода построения разбиения ξ_t , а также дополнительные оценки.

Как следует из теоремы о “главном резонансном слагаемом”, это слагаемое хорошо оценивается вне малых окрестностей концов сгустков соответствующего ранга. Но эти сгустки зависят от r . До сих пор, и в том числе в ситуации 1, мы рассматривали диапазон $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$, но в таком случае множество, на котором можно оценить “главное резонансное слагаемое” одновременно для всех $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$, будет слишком мало.

На самом деле, резонансные слагаемые достаточно оценивать только для $r \in \mathcal{R}(t, [\xi_t])$, а этот диапазон оказывается достаточно узким.

Итак, рассмотрим ситуацию 2. В этой ситуации

$$\sqrt{2} \max(q_m, \sigma_m q_{m+1}) \leq t < \sqrt{2} q_{m+1}, \quad \tilde{V}(t) = V'_m, \quad \ln k_{m+1} > \sigma_m^2 \ln q_m.$$

Положим, как и прежде, $\bar{V}(t) = \bigcap_{i=1}^K (\tilde{V}(t) + \bar{x}_i)$.

Пусть

$$\bar{r} = \min \mathcal{R}(t, \bar{V}(t)).$$

Тогда для любого $r \in \mathcal{R}(t, \bar{V}(t))$ можно записать $r = \bar{r} + \Delta r$ и

$$(f^r)'(x) = (f^{\bar{r}})'(x) + (f^{\Delta r})'(x + \bar{r}\rho). \quad (4.21)$$

Оказывается, что (леммы 6.1 и 6.4)

$$0 \leq \Delta r \leq \frac{q_{m+1}}{\ln q_m}, \quad (4.22)$$

и поэтому (лемма 6.6) для любого $x \in \bigcap_{i=1}^K (V_m + \bar{x}_i)$

$$|(f^{\Delta r})'(x)| < (A + B)\sigma_m e(\bar{r}), \quad (4.23)$$

а значит, слагаемое $(f^{\Delta r})'(x + \bar{r}\rho)$ не оказывает существенного влияния на оценку $(f^r)'(x)$.

Теперь мы можем построить разбиение ξ_t , учитывающее оценку для $(f^{\Delta r})'$ и альтернативу для $Z_m^\pm$.

Положим

$$\tilde{\tilde{V}}(t) = (\tilde{V}(t) \setminus U(\sigma_m/q_m, \partial[X^{(m)}(\bar{r})])) \cap (V_m - \bar{r}\rho). \quad (4.24)$$

Обозначим через χ характеристическую функцию множества $[X^{(m)}]$. В силу леммы 3.3, а также п. 2 теоремы 3 о “главном резонансном слагаемом” для любого $x \in \tilde{\tilde{V}}(t)$

$$\begin{aligned} u^{\bar{r}}(x) &= e(\bar{r})(1 + \delta u^{\bar{r}}(x)) + \chi(x)q_{m+1} \ln k_{m+1}, \\ v^{\bar{r}}(x) &= e(\bar{r})(1 + \delta v^{\bar{r}}(x)) + \chi(x)q_{m+1} \ln k_{m+1}, \\ |\delta u^{\bar{r}}(x)| &< 18\sigma_m, \quad |\delta v^{\bar{r}}(x)| < 18\sigma_m. \end{aligned}$$

Тогда для $x \in \tilde{V}(t) + \bar{x}_i$ выполняется

$$\begin{aligned} & (-A_i + \alpha_i^-(\bar{r}, x))u^{\bar{r}}(x - \bar{x}_i) + (B_i + \alpha_i^+(\bar{r}, x))v^{\bar{r}}(x - \bar{x}_i) \\ &= e(\bar{r})(B_i - A_i + B_i\delta v^{\bar{r}} - A_i\delta u^{\bar{r}} + (1 + \delta u^{\bar{r}})\alpha_i^- + (1 + \delta v^{\bar{r}})\alpha_i^+) \\ &+ \chi(x - \bar{x}_i)q_{m+1} \ln k_{m+1}(B_i - A_i) \left(1 + \frac{\alpha_i^+ - \alpha_i^-}{B_i - A_i}\right). \end{aligned}$$

Поэтому положим

$$\bar{\bar{V}}(t) = \bigcap_{i=1}^K (\tilde{V}(t) + \bar{x}_i).$$

Заметим, что $\bar{\bar{V}}(t) \subset \bar{V}(t)$. Подстановкой в разложение (2.1) и с учетом оценки для $(f^{\Delta r})'$ легко убедиться, что для любого $x \in \bar{\bar{V}}(t)$ и любого $r \in \mathcal{R}(t, \bar{\bar{V}}(t))$

$$\begin{aligned} (f^r)'(x) &= (B - A)(e(\bar{r})(1 + \gamma_e(r, x)) + L(x)(1 + \gamma_L(r, x))), \\ |\gamma_e(r, x)| &< \varepsilon_e(t), \quad |\gamma_L(r, x)| < \varepsilon_L(t), \end{aligned} \tag{4.25}$$

где

$$L(x) = \left(\sum_{i=1}^K \frac{B_i - A_i}{B - A} \chi(x - \bar{x}_i) \right) q_{m+1} \ln k_{m+1},$$

$\varepsilon_e(t)$ и $\varepsilon_L(t)$ определены в (4.10) и (4.11). Функция $L(x)$ постоянна на компонентах связности множества $\bar{\bar{V}}(t)$, поскольку это множество не содержит точек разрыва функций $\chi(x - \bar{x}_i)$, следовательно, вместо $L(x)$ для компоненты связности C можно писать $L(C)$. Из условия $\text{sgn}(B_i - A_i) = \text{sgn}(B - A) \neq 0$ следует, что $L(C) \geq 0$.

Множество $\bar{\bar{V}}(t)$ состоит из отрезков (часть из них может вырождаться в точки), причем их число не превосходит числа компонент связности множества $\bar{V}(t)$, т. е. не более $2Kq_{m+1}$. Это следует из того, что центры дополнительно выбрасываемых при построении $\tilde{V}(t)$ окрестностей попадают в окрестности, выбрасываемые при построении $\tilde{V}(t) = V'_m$. (Впрочем, последнее соображение непринципально, вместо этого можно просто чуть ухудшить оценку $\mu([\xi_t])$.) Справедливо неравенство $\mu(\bar{\bar{V}}(t)) > 1 - 28K\sigma_m$.

В качестве элементов разбиения ξ_t возьмем те отрезки (компоненты связности) $C \subset \bar{\bar{V}}(t)$, для которых

$$|C| \geq \frac{\sigma_m}{q_{m'}} = \frac{\sigma_m}{q_{m+1}}.$$

Очевидно, что

$$\mu([\xi_t]) > 1 - 30K\sigma_m.$$

Из (4.25) следует выполнение (4.15) и (4.16) на элементах разбиения ξ_t .

Условие (4.17) уже проверено для всех ситуаций.

Таким образом, в ситуации 2 для любого $r \in \mathcal{R}(t, [\xi_t])$ и любого $C \in \xi_t$ выполнено достаточное условие $(\varepsilon(t), H(t))$ -равномерной распределенности $f^r|C$.

3. Рассмотрим *ситуацию 3*. Она похожа на ситуацию 2, однако некоторые оценки отличаются.

Если ситуация 3 возникает лишь для ограниченного множества моментов времени t , то мы ею пренебрегаем, считая, что t больше верхней грани этого множества.

Пусть существует неограниченное множество значений t , для каждого из которых имеется ситуация 3, т.е. существуют такие $m = m(t)$ и $s = s(t)$, что

$$\sqrt{2}q_m \leq t < \sqrt{2}q_{m+1}, \quad s < m, \quad q_{s+1} \ln k_{s+1} > \sigma_m t \ln q_m.$$

(Не будем вдаваться в исследование единственности s , если оно существует. Если вдруг таких s окажется несколько, то выберем наибольшее из них.) Из неравенства (5.14) леммы 5.6 следует, что $\ln q_{s+1} \sim \ln q_m$, следовательно, $s(t) \rightarrow +\infty$, а значит, $\sigma_s \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ (предел берется лишь по тем t , при которых $s(t)$ определено).

Как и выше, определим множество

$$\bar{V}(t) = \bigcap_{i=1}^K (\tilde{V}(t) + \bar{x}_i)$$

и положим $\bar{r} = \min \mathcal{R}(t, \bar{V}(t))$. Для любого $r \in \mathcal{R}(t, \bar{V}(t))$ запишем $r = \bar{r} + \Delta r$ и

$$(f^r)'(x) = (f^{\bar{r}})'(x) + (f^{\Delta r})'(x + \bar{r}\rho).$$

Оказывается, что в ситуации 3 $0 \leq \Delta r \leq q_{s+1}/\ln q_s$ (леммы 6.1 и 6.5), откуда, как и в ситуации 2, следует оценка (лемма 6.7): *для любого $x \in \bigcap_{i=1}^K (V_s + \bar{x}_i)$ и любого $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$*

$$|(f^{\Delta r})'(x)| < (A + B)\sigma_m e(r).$$

Теперь разбиение ξ_t , учитывающее диапазон $\mathcal{R}(t, \bar{V}(t))$ и краевые эффекты для $Z_s^\pm$, строится следующим образом. Положим

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{V}}(t) &= (\tilde{V}(t) \setminus U(\sigma_m/q_s, \partial[X^{(s)}(\bar{r})])) \cap (V_s - \bar{r}\rho), \\ \bar{\bar{V}}(t) &= \bigcap_{i=1}^K (\tilde{\tilde{V}}(t) + \bar{x}_i). \end{aligned}$$

В качестве элементов разбиения ξ_t возьмем те из компонент связности множества $\bar{\bar{V}}(t)$, длина которых не меньше, чем $\sigma_m/q_{m'}$ (m' определено в (4.20)). Так же, как в ситуации 2, легко проверить, что

$$\mu([\xi_t]) > 1 - 18K\sigma_m - 12K\sigma_s.$$

В ситуации 3 через χ обозначим характеристическую функцию множества $[X^{(s)}]$. В силу леммы 3.3, а также п. 3 теоремы 3 о “главном резонансном слагаемом” справедлива оценка: для любого $x \in \tilde{\tilde{V}}(t)$

$$\begin{aligned} u^{\bar{r}}(x) &= e(\bar{r})(1 + \delta u^{\bar{r}}(x)) + \chi(x)q_{s+1} \ln k_{s+1}, \\ v^{\bar{r}}(x) &= e(\bar{r})(1 + \delta v^{\bar{r}}(x)) + \chi(x)q_{s+1} \ln k_{s+1}, \\ |\delta u^{\bar{r}}(x)| &< 18\sigma_m, \quad |\delta v^{\bar{r}}(x)| < 18\sigma_m. \end{aligned}$$

Для каждого $C \in \xi_t$ определим константу $L(C)$: возьмем $x \in C$ и положим

$$L(C) = \left(\sum_{i=1}^K \frac{B_i - A_i}{B - A} \chi(x - \bar{x}_i) \right) q_{s+1} \ln k_{s+1}.$$

Это определение не зависит от выбора $x \in C$. Так же, как в ситуации 2, убедимся, что производная $(f^r)'$ удовлетворяет (4.15) и (4.16).

Таким образом, и в ситуации 3 для любого $r \in \mathcal{R}(t, [\xi_t])$ и любого $C \in \xi_t$ выполнено достаточное условие $(\varepsilon(t), H(t))$ -равномерной распределенности $f^r|C$. Проверка выполнения достаточного условия перемешивания (в предположении справедливости сформулированных лемм и теоремы 3) завершена.

§ 5. Свойства резонансных слагаемых и доказательство теоремы 3

Приведем еще одно, эквивалентное, определение резонансных слагаемых [1].

Пусть $r = l_s q_s + \dots + l_n q_n + \dots + l_0 q_0$ – стандартное разложение. Если $l_n = 0$, то $Z_n^\pm(x) = Z_n^\pm(r, x) = 0$. Если $l_n \geq 1$, то

$$\begin{aligned} Z_n^+(x) &= Z_n^+(r, x) = \sum_{x_{i,j}^{(n)} \in (x_n^+(x), x + \Delta_n) \cap X^{(n)}(r)} v(x - x_{i,j}^{(n)}), \\ Z_n^-(x) &= Z_n^-(r, x) = \sum_{x_{i,j}^{(n)} \in (x - \Delta_n, x_n^-(x)) \cap X^{(n)}(r)} u(x - x_{i,j}^{(n)}). \end{aligned}$$

Резонансные слагаемые существенно зависят от номера r биркгофовой суммы. По существу, их нужно обозначать $Z_n^\pm(r, x)$. В основном, когда r фиксировано, аргумент r мы будем опускать, но иногда его придется использовать.

Введем еще одно обозначение. Положим

$$Z_n = \max_r \sup_x Z_n^\pm(r, x).$$

Эта величина зависит только от ρ и от номера n . Из определения следует, что для любого r , любого n и любого x $0 \leq Z_n^\pm(x) \leq Z_n$.

ЛЕММА 5.1. 1) Если $l_n \leq 1$, то $Z_n^\pm = 0$.

2) Если $l_n \geq 2$, то для любого номера n и для любого x

$$Z_n^\pm(x) < \frac{1}{|\delta_n|} (\ln l_n + 1). \quad (5.1)$$

3) Для любого n

$$Z_n < 2q_{n+1} (\ln k_{n+1} + 1). \quad (5.2)$$

4) Если $x \notin U(\varepsilon, X^{(n)})$, $\varepsilon > 0$, $l_n \geq 2$, то

$$Z_n^\pm(x) \leq \frac{l_n - 1}{\varepsilon}. \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В полуинтервал длины Δ_n может попасть не более l_n точек из $X^{(n)}$, причем расстояние между этими точками не менее $|\delta_n|$. Обозначим $\Delta x = \{x_n^+ - x\}$, тогда

$$Z_n^+(x) \leq \sum_{j=1}^{l_n-1} \frac{1}{\Delta x + j|\delta_n|}.$$

Отсюда и из неравенств $l_n \leq k_{n+1}$ и $|1/\delta_n| < 2q_{n+1}$ получаются оценки для случая $l_n \geq 2$. Остальное следует из определения. Оценки для $Z_n^-(x)$ аналогичны.

Лемма доказана.

ЛЕММА 5.2. Если $1 \leq s_1 < s_2$ и $\ln q_{s_2} > 4$, то

$$\sum_{n=s_1}^{s_2-1} Z_n < 3q_{s_2} \ln q_{s_2}. \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (5.2) $Z_n < 2q_{n+1}(\ln k_{n+1} + 1)$, откуда, учитывая неравенство $k_{n+1} < q_{n+1}/q_n$,

$$\sum_{n=s_1}^{s_2-1} Z_n < 2 \sum_{n=s_1}^{s_2-1} q_{n+1}(\ln q_{n+1} - \ln q_n) + 2 \sum_{n=s_1}^{s_2-1} q_{n+1}.$$

Преобразуем первое слагаемое правой части:

$$\sum_{n=s_1}^{s_2-1} q_{n+1}(\ln q_{n+1} - \ln q_n) = q_{s_2} \ln q_{s_2} - \sum_{n=s_1}^{s_2-1} (q_{n+1} - q_n) \ln q_n - q_{s_1} \ln q_{s_1},$$

откуда

$$\sum_{n=s_1}^{s_2-1} q_{n+1} \ln k_{n+1} < q_{s_2} \ln q_{s_2}.$$

Отметим стандартное неравенство, которое мы будем часто использовать в дальнейшем:

$$\sum_{i=0}^m q_i < 4q_m. \quad (5.5)$$

Учитывая последние два неравенства при условии $\ln q_{s_2} > 4$, получаем (5.4).

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 3.

Во-первых, отметим, что $Z_n^\pm(x) = 0$ при $n > m$, так как при $r < 2q_{m+1}$ коэффициенты квазистандартного разложения r удовлетворяют неравенствам $l_{m+1} \leq 1$, $l_{m+2} \leq 1$, а при $n > m + 2$ $l_n = 0$. Таким образом, необходимо оценивать $\sum_{n=0}^m Z_n^\pm$.

1. Следующая лемма имеет отношение к ситуациям 1 и 2.

Пусть $\sqrt{2}q_m \leq t < \sqrt{2}q_{m+1}$, $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$.

ЛЕММА 5.3. Пусть для любого $n = 0, 1, \dots, m-1$

$$q_{n+1} \ln k_{n+1} \leq \sigma_m t \ln q_m. \quad (5.6)$$

Тогда для любого x

$$\sum_{n \neq m} Z_n^\pm(x) \leq \left(15\sigma_m + \frac{5}{\ln q_m}\right) e(r). \quad (5.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что при достаточно большом m

$$\Sigma_1 = Z_0 + Z_1 + \sum_{\substack{i: 2 \leq i < m \\ \ln k_{i+1} \leq \sigma_i \ln q_i}} Z_i < 9\sigma_m e(r). \quad (5.8)$$

В силу (5.2) $Z_n < 2q_{n+1}(\ln k_{n+1} + 1)$, поэтому

$$\Sigma_1 < 4q_2(\ln q_2 + 1) + \sum_{i=2}^{m-1} 2q_{i+1}(\ln k_{i+1} + 1) \leq 4q_2(\ln q_2 + 1) + \sum_{i=2}^{m-1} 2q_{i+1}(\sigma_i \ln q_i + 1).$$

Так как $\sigma_i \ln q_i \nearrow +\infty$, то $\Sigma_1 < 4q_2(\ln q_2 + 1) + 2(\sigma_m \ln q_m + 1) \sum_{i=2}^{m-1} 2q_{i+1}$. Из неравенства (5.5) следует, что $\Sigma_1 < 4q_2(\ln q_2 + 1) + 8q_m(\sigma_m \ln q_m + 1)$. Так как $e(r) \geq q_m \ln q_m$, то при достаточно больших m получаем

$$\Sigma_1 < 9\sigma_m e(r).$$

Выберем теперь наибольшее n , удовлетворяющее условиям

$$2 \leq n < m, \quad \ln k_{n+1} > \sigma_n \ln q_n,$$

если такое существует (если такого n нет, то оценка закончена). В этом случае в силу неравенства $\sigma_n \ln q_n > \sqrt{\ln q_n}$ имеем $k_{n+1} > e^{\sqrt{\ln q_n}} > \ln q_n$. В силу (5.4), а также неравенства $e(r) \geq q_m \ln q_m$

$$\frac{1}{e(r)} \sum_{i=0}^{n-1} Z_i < \frac{3q_n \ln q_n}{q_m \ln q_m} < \frac{3 \ln q_n}{k_{n+1} \ln q_m} < \frac{3}{\ln q_m}.$$

В силу (5.6)

$$Z_n < 2q_{n+1}(\ln k_{n+1} + 1) < 2(\sigma_m t \ln q_m + q_{n+1}).$$

Так как $e(r) > (r \ln q_m)/2 > (t \ln q_m)/3$, то $2\sigma_m t \ln q_m < 6\sigma_m e(r)$. Кроме того, $2q_{n+1} \leq 2q_m \leq 2e(r)/\ln q_m$. Таким образом,

$$Z_n < \left(6\sigma_m + \frac{2}{\ln q_m}\right) e(r).$$

Если $n < m - 1$, то согласно (5.8)

$$\sum_{i=n+1}^{m-1} Z_i < \Sigma_1 < 9\sigma_m e(r).$$

Собрав все оценки, получим

$$\sum_{i=1}^{m-1} Z_i < \left(15\sigma_m + \frac{5}{\ln q_m}\right) e(r).$$

Наконец, как уже отмечалось, $Z_n^\pm(x) = 0$ при $n > m$.

Лемма доказана.

Чтобы завершить рассмотрение ситуации 1, оценим $Z_m^\pm(x)$. Оценки следующей леммы имеют отношение к ситуациям 1 и 3.

ЛЕММА 5.4. 1) Если $\sqrt{2}q_m \leq t < \sqrt{2}\sigma_m q_{m+1}$ (ситуации 1 и 3), то для любого $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$ и любого $x \in \tilde{V}(t)$ (независимо от величины k_{m+1})

$$Z_m^\pm(x) < \frac{2}{\sigma_m \ln q_m} e(r).$$

2) Если $\sqrt{2}\sigma_m q_{m+1} \leq t < \sqrt{2}q_{m+1}$, $t \geq \sqrt{2}q_m$ и $\ln k_{m+1} \leq \sigma_m^2 \ln q_m$ (ситуация 1), то для любого $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$

$$Z_m < 4\left(\sigma_m + \frac{1}{\sigma_m \ln q_m}\right) e(r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\sqrt{2}q_m \leq t < \sqrt{2}\sigma_m q_{m+1}$, $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$. Тогда $q_m < r < 2\sigma_m q_{m+1}$, $\tilde{V}(t) = V_m$. В силу леммы 3.1 для любого $x \in V_m$ при $r < 2\sigma_m q_{m+1}$ расстояние от x до любого сгустка $X_i^{(m)}$ ранга m больше, чем σ_m/q_m . Поэтому согласно п. 4) леммы 5.1 с учетом неравенств $l_m q_m \leq r$ и $e(r) > (r \ln q_m)/2$

$$Z_m^\pm(x) < \frac{(l_m - 1)q_m}{\sigma_m} < \frac{r}{q_m} \cdot \frac{q_m}{\sigma_m} = \frac{r}{\sigma_m} < \frac{2}{\sigma_m \ln q_m} e(r).$$

2) Пусть $\ln k_{m+1} \leq \sigma_m^2 \ln q_m$. Согласно п. 3) леммы 5.1 с учетом неравенства $e(r) > (\sigma_m q_{m+1} \ln q_m)/2$

$$Z_m < 2q_{m+1}(\ln k_{m+1} + 1) \leq 2q_{m+1}(\sigma_m^2 \ln q_m + 1) < 4\sigma_m + \frac{4}{\sigma_m \ln q_m}.$$

Лемма доказана.

Учитывая оценки лемм 5.3 и 5.4, а также неравенство (при достаточно большом m)

$$\frac{4}{\sigma_m \ln q_m} + \frac{5}{\ln q_m} < \sigma_m,$$

получим неравенство (4.1).

Доказательство теоремы 3 в ситуации 1 завершено.

2. В ситуации 2 неравенство (4.3) также следует из леммы 5.3.

Альтернативы для $Z_m^\pm$ получаются из следующей леммы.

ЛЕММА 5.5. Пусть $q_m < r < 2q_{m+1}$ и для номера $s \leq m$ выполнено неравенство

$$\ln k_{s+1} > \sigma_m^2 \ln q_m.$$

Тогда справедливы следующие оценки:

1) для любого $x \in [X^{(s)}(r)] \setminus U(\sigma_m/q_s, \partial[X^{(s)}(r)])$

$$q_{s+1} \ln k_{s+1} - q_{s+1} \ln \frac{6}{\sigma_m} < Z_s^\pm(r, x) < q_{s+1} \ln k_{s+1} + 2q_{s+1}; \quad (5.9)$$

2) для любого $x \notin U(\sigma_m/q_s, [X^{(s)}])$

$$0 < Z_s^\pm(r, x) < \frac{l_s q_s}{\sigma_m}. \quad (5.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В этой лемме множество, на котором оцениваются $Z_s^\pm$, существенно зависит от r и, чтобы это подчеркнуть, мы внесли r в состав аргументов функций $Z_s^\pm$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $x \in [X^{(s)}(r)] \setminus U(\sigma_m/q_s, \partial[X^{(s)}(r)])$. Оценка сверху следует из п. 2) леммы 5.1, а также неравенств $l_s \leq k_{s+1}$ и $q_{s+1} < 1/|\delta_s| < q_{s+1}(1 + 1/k_{s+1})$. В самом деле,

$$Z_s^\pm < \frac{1}{|\delta_s|}(\ln l_s + 1) < q_{s+1} \left(1 + \frac{1}{k_{s+1}}\right)(\ln k_{s+1} + 1) < q_{s+1} \ln k_{s+1} + 2q_{s+1}.$$

Дальнейшие оценки проведем для Z_s^+ . Для Z_s^- они аналогичны.

Разобьем Z_s^+ на два слагаемых: $Z_s^+(x) = \widehat{Z}_s^+(x) + \check{Z}_s^+(x)$,

$$\begin{aligned} \widehat{Z}_s^+(x) &= \sum_{x_{i,j}^{(s)} \in (x_s^+(x), x + \sigma_m/q_s] \cap X^{(s)}} v(x - x_{i,j}^{(s)}), \\ \check{Z}_s^+(x) &= \sum_{x_{i,j}^{(s)} \in (x + \sigma_m/q_s, x + \Delta_s) \cap X^{(s)}} v(x - x_{i,j}^{(s)}). \end{aligned}$$

Очевидно, что для любого x $Z_s^+(x) \geq \widehat{Z}_s^+(x)$, а для $x \notin U(\sigma_m/q_s, [X^{(s)}])$ $Z_s^+(x) = \check{Z}_s^+(x)$.

Пусть $x \in [X_i^{(s)}] \setminus U(\sigma_m/q_s, \partial[X_i^{(s)}])$ для некоторого i , $\Delta x = \{x_s^+(x) - x\}$. Тогда $0 < \Delta x \leq |\delta_s|$. Поскольку $(x, x + \sigma_m/q_s] \subset [X_i^{(s)}]$, то точки $x_{i,j}^{(s)}$ расположены через $|\delta_s|$, поэтому

$$\widehat{Z}_s^+(x) = \sum_{j=1}^l \frac{1}{\Delta x + j|\delta_s|},$$

где l удовлетворяет неравенству $\sigma_m/q_s - |\delta_s| \leq l|\delta_s| < \sigma_m/q_s$. Нетрудно видеть, что

$$\widehat{Z}_s^+(x) > \frac{1}{|\delta_s|}(\ln l - 1).$$

Из неравенства для l имеем

$$l \geq \frac{\sigma_m}{q_s|\delta_s|} - 1 > \frac{\sigma_m q_{s+1}}{q_s} - 1 > \sigma_m k_{s+1} - 1.$$

Отсюда при достаточно большом m

$$\ln l - 1 > \ln \frac{\sigma_m k_{s+1}}{2} - 1 = \ln k_{s+1} - \ln \frac{2}{\sigma_m} - 1 > \ln k_{s+1} - \ln \frac{6}{\sigma_m},$$

откуда получаем

$$\widehat{Z}_s^\pm(r, x) > q_{s+1} \ln k_{s+1} - q_{s+1} \ln \frac{6}{\sigma_m}.$$

Пункт 1) разобран. Пункт 2) следует из п. 4) леммы 5.1.

Лемма доказана.

Пункт 1) доказанной леммы при $s = m$ описывает первую альтернативу для $Z_m^\pm$ в ситуации 2, а при $s < m$ — для $Z_s^\pm$ в ситуации 3. В самом деле, в ситуации 2 $\sigma_m q_{m+1} < r < 2q_{m+1}$, $r > q_m$, поэтому $e(r) > (\sigma_m q_{m+1} \ln q_m)/2$, откуда для $x \in [X^{(m)}(r)] \setminus U(\sigma_m/q_m, \partial[X^{(m)}(r)])$ получаем

$$q_{m+1} \ln k_{m+1} - e(r) \frac{2 \ln(6/\sigma_m)}{\sigma_m \ln q_m} < Z_m^\pm(r, x) < q_{m+1} \ln k_{m+1} + e(r) \frac{4}{\sigma_m \ln q_m}.$$

В ситуации 3 получаем соответствующую оценку с учетом неравенств $q_{s+1} \leq q_m$ и $e(r) \geq q_m \ln q_m$.

Учитывая асимптотические свойства σ_m , получаем требуемые оценки.

Доказательство утверждений для ситуации 2 завершено. Осталось оценить $\sum_{n \neq s} Z_n^\pm$ в ситуации 3.

3. Ситуация 3 принципиально не отличается от второй, однако в ней возникают дополнительные технические сложности.

Отметим некоторые “арифметические” свойства “главного” сгустка в ситуации 3. Они будут использованы при оценке резонансных слагаемых и колебаний биркгофовых сумм.

ЛЕММА 5.6. *Если $q_m \leq t < 2q_{m+1}$ и для некоторого $s < m$ выполнено неравенство*

$$q_{s+1} \ln k_{s+1} > \sigma_m t \ln q_m,$$

то справедливы соотношения

$$t < \frac{q_{s+1}}{\sigma_m}, \quad (5.11)$$

$$k_{s+1} > e^{\sqrt{\ln q_m}} > \ln q_m, \quad (5.12)$$

$$q_{s+1} > \sigma_m q_m, \quad (5.13)$$

$$\ln q_m - \ln \frac{1}{\sigma_m} < \ln q_{s+1} \leq \ln q_m; \quad (5.14)$$

если $s + 2 \leq m$, то

$$\ln k_{s+2} + \dots + \ln k_m < \ln \frac{1}{\sigma_m}. \quad (5.15)$$

Если, кроме того, $t \geq \sigma_m q_{m+1}$, то

$$q_{m+1} < \frac{q_{s+1}}{\sigma_m^2}, \quad (5.16)$$

$$\ln q_{s+1} > \ln q_{m+1} - 2 \ln \frac{1}{\sigma_m}. \quad (5.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы с учетом неравенств $\ln k_{s+1} < \ln q_{s+1} \leq \ln q_m$ следует

$$t < \frac{q_{s+1} \ln k_{s+1}}{\sigma_m \ln q_m} < \frac{q_{s+1}}{\sigma_m}.$$

Неравенства (5.12) получаются из условия леммы с учетом того, что $t \geq q_m$, $\sigma_m > 1/\sqrt{\ln q_m}$, а также неравенства $e^x > x^2$ при $x > 0$:

$$\ln k_{s+1} > \frac{\sigma_m q_m \ln q_m}{q_{s+1}} \geq \sigma_m \ln q_m > \sqrt{\ln q_m}.$$

Двойное неравенство (5.14) следует из цепочки

$$q_m \geq q_{s+1} > \frac{\sigma_m q_m \ln q_m}{\ln k_{s+1}} > \sigma_m q_m.$$

Неравенство (5.15) при $s + 2 \leq m$ получается так:

$$q_{s+1} \ln k_{s+1} > \sigma_m t \ln q_m > \sigma_m q_m \ln q_m > \sigma_m q_{s+1} k_{s+2} \dots k_m \ln q_m,$$

откуда

$$k_{s+2} \dots k_m < \frac{\ln k_{s+1}}{\sigma_m \ln q_m} < \frac{1}{\sigma_m}.$$

Прологарифмировав это неравенство, получим (5.15). Наконец, если $t \geq \sigma_m q_{m+1}$, то согласно (5.11) $q_{s+1} > \sigma_m^2 q_{m+1}$, откуда и следуют (5.16) и (5.17).

Лемма доказана.

Оценим теперь сумму резонансных слагаемых при $n \neq s$.

Итак, $\sqrt{2} q_m \leq t < \sqrt{2} q_{m+1}$, $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2} t)$, откуда $q_m < r < 2q_{m+1}$, $e(r) \geq q_m \ln q_m$, $e(r) > (r \ln q_m)/2 > (t \ln q_m)/3$.

Согласно лемме 5.2 с учетом (5.12)

$$\sum_{n=0}^{s-1} Z_n < 3q_s \ln q_s \leq \frac{3q_s \ln q_s}{q_m \ln q_m} e(r) \leq \frac{3q_s \ln q_s}{q_{s+1} \ln q_{s+1}} e(r) < \frac{3}{k_{s+1}} e(r) < \frac{3}{\ln q_m} e(r). \quad (5.18)$$

Если $s + 1 \leq m - 1$, то в силу п. 3) леммы 5.1

$$\sum_{n=s+1}^{m-1} Z_n < \sum_{n=s+1}^{m-1} 2q_{n+1}(\ln k_{n+1} + 1) < 2q_m \sum_{n=s+2}^m \ln k_n + 2 \sum_{n=s+2}^m q_n.$$

В силу (5.15), (5.5) и неравенства $\ln(1/\sigma_m) < 1/\sigma_m$ (при условии $\sigma_m < 1/8$)

$$\sum_{n=s+1}^{m-1} Z_n < 2q_m \left(\frac{1}{\sigma_m} + 4 \right) < \frac{3q_m}{\sigma_m} \leq \frac{3}{\sigma_m \ln q_m} e(r). \quad (5.19)$$

Оценка

$$Z_m^\pm(x) < \frac{l_m q_m}{\sigma_m} \leq \frac{1}{\sigma_m \ln q_m} e(r)$$

в случае $\sqrt{2} q_m \leq t < \sqrt{2} \sigma_m q_{m+1}$ для $x \in \tilde{V}(t)$ получена в п. 1) леммы 5.4.

В случае, когда $t \geq \sqrt{2} \sigma_m q_{m+1}$, согласно (5.16)

$$q_{m+1} < \frac{q_{s+1}}{\sigma_m^2} \leq \frac{q_m}{\sigma_m^2}.$$

Так как $e(r) \geq l_m q_m \ln q_m$, то для любого x при $l_m > 1$

$$\frac{Z_m^\pm(x)}{e(r)} < \frac{2q_{m+1}(\ln l_m + 1)}{l_m q_m \ln q_m} < \frac{\ln l_m + 1}{l_m} \cdot \frac{1}{\sigma_m^2 \ln q_m} \leq \frac{1}{\sigma_m^2 \ln q_m}.$$

Если $l_m = 1$, то $Z_m^\pm(x) = 0$.

Наконец, как уже упоминалось, $Z_n^\pm = 0$ при $n > m$.

Таким образом, для любого $x \in \tilde{V}(t)$

$$\sum_{n \neq s} Z_n^\pm(x) < \left(\frac{3}{\ln q_m} + \frac{3}{\sigma_m \ln q_m} + \frac{1}{\sigma_m^2 \ln q_m} \right) e(r),$$

что при достаточно больших m можно заменить оценкой $\sum_{n \neq s} Z_n^\pm(x) < \sigma_m e(r)$.

Ситуация 3 разобрана, теорема 3 доказана.

§ 6. Оценка диапазона $\mathcal{R}(t, [\xi_t])$ и величины $(f^{\Delta r})'$

В этом параграфе мы докажем оценки, которые используются в § 4 при построении частичного разбиения и проверке $(\varepsilon(t), H(t))$ -равномерной распределенности биркгофовых сумм f^r на элементах разбиения. Для удобства мы заново нумеруем некоторые формулы.

Первые две леммы носят общий характер, а остальные относятся к конкретной ситуации.

ЛЕММА 6.1. Пусть при некотором $t' > 0$ для каждого $t > t'$ определено множество $V(t)$, причем $\mu(V(t)) \geq \mu_0 > 0$ и для любых $x, y \in V(t)$ и любого $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$

$$|f^r(x) - f^r(y)| < c\mathcal{H}(t), \quad \mathcal{H}(t) < \frac{t}{20}. \quad (6.1)$$

Тогда при достаточно больших t для любых $r_1, r_2 \in \mathcal{R}(t, V(t))$

$$|r_1 - r_2| < \mathcal{H}(t) + 1. \quad (6.2)$$

Напомним, что $c = \min_{x \in \mathbb{S}^1 \setminus \bigcup_i \bar{x}_i} f(x)$.

Доказательство этой леммы опирается на эргодическую теорему Биркгофа и носит рутинный характер.

Из этой леммы, в частности, следует включение $\mathcal{R}(t, [\xi_t]) \subset (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$ при достаточно больших t .

Следующая лемма, являющаяся уточнением леммы Данжуа, используется для оценки колебания биркгофовых сумм.

ЛЕММА 6.2. Пусть p/q — подходящая к ρ дробь, $\varphi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Тогда для любых $x, y \in \mathbb{S}^1$

$$|\varphi^q(x) - \varphi^q(y)| \leq \text{Var}(\varphi).$$

Оценки, основанные на лемме 6.2, использовали в разных вариантах многие авторы (см., например, [4], [6]–[8] и др.).

Пусть $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in C^1(0, 1]$ (в точке 1 определена левая производная), удовлетворяет при $x \rightarrow +0$ условиям

$$\begin{aligned} g &\in C^1(0, 1], \quad g(1-0) = 0, \quad g'(1-0) = 0, \\ g'(x) &= u(x)(-A_0 + o(1)), \quad A_0 \geq 0. \end{aligned}$$

Функции такого вида, а также функции вида $h(x) = g(1-x)$ назовем модельными.

Положим для $\varepsilon > 0$

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (0, \varepsilon), \\ g(x), & \text{если } x \in [\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

Легко доказать следующую лемму.

ЛЕММА 6.3. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$\text{Var}(g_\varepsilon) \leq (2A_0 + 1) \ln \frac{1}{\varepsilon} \quad (6.3)$$

(вариация рассматривается на окружности);

$$\max_x |g_\varepsilon(x)| < \left(A_0 + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{1}{\varepsilon}. \quad (6.4)$$

ЛЕММА 6.4. Если t достаточно велико и $\ln k_{m+1} > \sigma_m^2 \ln q_m$ (ситуация 2), то для любого $r < 2q_{m+1}$ и любых $x, y \in \bar{V}(t)$

$$|f^r(x) - f^r(y)| < \frac{c}{2 \ln q_m} q_{m+1}$$

(c — минимальное значение f на $\mathbb{S}^1 \setminus \bigcup_{i=1}^K \bar{x}_i$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При достаточно больших m

$$8(A + B + K) \frac{\ln q_m}{e^{\sqrt{\ln q_m}}} < \frac{c}{2 \ln q_m}.$$

Поэтому с помощью разложения $f = \sum_{i=1}^K (g_i + h_i)$ в соответствии с [1; лемма 3.1] в сумму сдвигов модельных функций с учетом равенства $\bar{V}(t) = \bigcap_{i=1}^K (V'_m + \bar{x}_i)$ лемма легко сводится к следующему утверждению.

Если m достаточно велико и $\ln k_{m+1} > \sigma_m^2 \ln q_m$, то для любого $r < 2q_{m+1}$ и любых $x, y \in V'_m$

$$|g^r(x) - g^r(y)| < (4A_0 + 2) \frac{2 \ln q_m}{e^{\sqrt{\ln q_m}}} q_{m+1}. \quad (6.5)$$

Докажем это утверждение. Положим

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \in [\sigma_m/q_{m+1}, 1], \\ 0, & \text{если } x \in (0, \sigma_m/q_{m+1}). \end{cases}$$

Тогда в силу леммы 3.1 для любого $x \in V'_m$ и любого $r < 2q_{m+1}$ $(\bar{g})^r(x) = g^r(x)$.

Согласно лемме 6.3 при достаточно больших m

$$\text{Var}(\bar{g}) < (4A_0 + 2) \ln q_{m+1}, \quad (6.6)$$

$$\max |\bar{g}(x)| < (2A_0 + 1) \ln q_{m+1}. \quad (6.7)$$

Пусть $r < 2q_{m+1}$. Рассмотрим нестандартное разложение r по q_{m+1} и q_m :

$$r = l_{m+1}q_{m+1} + l_m q_m + l_0, \quad 0 \leq l_m q_m + l_0 < q_{m+1}, \quad 0 \leq l_0 < q_m.$$

Нетрудно видеть, что при этом $0 \leq l_m \leq k_{m+1} < q_{m+1}/q_m$, $0 \leq l_{m+1} \leq 1$. Тогда для $x, y \in V'_m$

$$|g^r(x) - g^r(y)| = |(\bar{g})^r(x) - (\bar{g})^r(y)| \leq \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3,$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= |(\bar{g})^{l_{m+1}q_{m+1}}(x) - (\bar{g})^{l_{m+1}q_{m+1}}(y)|, \\ \Sigma_2 &= |(\bar{g})^{l_m q_m}(x_1) - (\bar{g})^{l_m q_m}(y_1)|, & x_1 &= T^{l_{m+1}q_{m+1}}x, \quad y_1 = T^{l_{m+1}q_{m+1}}y, \\ \Sigma_3 &= |(\bar{g})^{l_0}(x_2) - (\bar{g})^{l_0}(y_2)|, & x_2 &= T^{l_m q_m}x_1, \quad y_2 = T^{l_m q_m}y_1. \end{aligned}$$

В силу леммы 6.2 и неравенства $l_{m+1} \leq 1$

$$\Sigma_1 \leq \text{Var}(\bar{g}) < (4A_0 + 2) \ln q_{m+1}. \quad (6.8)$$

Для оценки Σ_2 и Σ_3 представим функцию $\bar{g}$ в виде суммы $\bar{g} = \hat{g} + \check{g}$:

- если $x \in (0, \Delta_m)$, то $\hat{g}(x) = \bar{g}(x)$, $\check{g}(x) = 0$;
- если $x \in [\Delta_m, 1]$, то $\hat{g}(x) = 0$, $\check{g}(x) = \bar{g}(x)$.

Имеем

$$\Sigma_2 = |(\bar{g})^{l_m q_m}(x_1) - (\bar{g})^{l_m q_m}(y_1)| \leq |\check{g}^{l_m q_m}(x_1) - \check{g}^{l_m q_m}(y_1)| + 2 \max_x |\hat{g}^{l_m q_m}(x)|,$$

$$\Sigma_3 = |(\bar{g})^{l_0}(x_2) - (\bar{g})^{l_0}(y_2)| \leq |\check{g}^{l_0}(x_2) - \check{g}^{l_0}(y_2)| + 2 \max_x |\hat{g}^{l_0}(x)|.$$

Так как $1/\Delta_m < 2q_m$, то согласно лемме 6.3

$$\text{Var}(\check{g}) < (2A_0 + 1) \ln \frac{1}{\Delta_m} < (4A_0 + 2) \ln q_m,$$

поэтому в силу леммы 6.2 с учетом неравенств $l_m \leq k_{m+1}$ и $l_0 < q_m$

$$|\check{g}^{l_m q_m}(x_1) - \check{g}^{l_m q_m}(y_1)| < (4A_0 + 2)k_{m+1} \ln q_m, \quad (6.9)$$

$$|\check{g}^{l_0}(x_2) - \check{g}^{l_0}(y_2)| < (4A_0 + 2)q_m \ln q_m. \quad (6.10)$$

Для оценки $\max_x |\hat{g}^{l_m q_m}(x)|$ заметим, что

$$\hat{g}^{l_m q_m}(x) = \sum_{x_{i,j} \in (x - \Delta_m, x - \sigma_m / q_{m+1}] \cap X^{(m)}(l_m q_m)} g(x - x_{i,j}).$$

При этом особые точки $x_{i,j} \in X^{(m)}(l_m q_m)$ отстоят друг от друга не менее, чем на $|\delta_m| > 1/(2q_{m+1})$, не более одной из них находится в интервале $(x - |\delta_m|, x)$ и не более k_{m+1} попадают в интервал длины Δ_m . Поэтому

$$\max_x |\hat{g}^{l_m q_m}(x)| \leq \max_x |\bar{g}(x)| + \sum_{i=1}^{k_{m+1}} |g(i|\delta_m)|.$$

Если Δ_m достаточно мало, то, учитывая асимптотические свойства g ,

$$\sum_{i=1}^{k_{m+1}} |g(i|\delta_m)| < \left(A_0 + \frac{1}{4}\right) \sum_{i=1}^{k_{m+1}} \ln \frac{1}{i|\delta_m|}.$$

С помощью формулы суммирования Эйлера и неравенства $k_{m+1}|\delta_m| > 1/(2q_m)$ легко получить оценку

$$\begin{aligned} \left(A_0 + \frac{1}{4}\right) \sum_{i=1}^{k_{m+1}} \ln \frac{1}{i|\delta_m|} &< \left(A_0 + \frac{1}{4}\right) k_{m+1} \left(\ln \frac{1}{k_{m+1}|\delta_m|} + 1 \right) \\ &< (2A_0 + 1) k_{m+1} \ln q_m. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и (6.7) получаем

$$\max_x |\hat{g}^{l_m q_m}(x)| < (2A_0 + 1)(\ln q_{m+1} + k_{m+1} \ln q_m).$$

Теперь учтем (6.9) и получим

$$\Sigma_2 < (4A_0 + 2)(\ln q_{m+1} + 2k_{m+1} \ln q_m). \quad (6.11)$$

Аналогично, так как в полуинтервал длины Δ_m попадает не более одной точки вида $T^i x$, $i = 0, \dots, q_m - 1$, то

$$\max_x |\widehat{g}^{l_0}(x)| \leq \max_x |\overline{g}(x)| < (2A_0 + 1) \ln q_{m+1},$$

поэтому с учетом (6.10)

$$\Sigma_3 < (4A_0 + 2)(q_m \ln q_m + \ln q_{m+1}). \quad (6.12)$$

Объединяя оценки (6.8), (6.11) и (6.12) для Σ_1 , Σ_2 и Σ_3 , получаем

$$|g^r(x) - g^r(y)| < (4A_0 + 2)(q_m \ln q_m + 2k_{m+1} \ln q_m + 3 \ln q_{m+1}).$$

Из неравенств $\ln k_{m+1} > \sigma_m^2 \ln q_m$ и $\sigma_m^2 \ln q_m > \sqrt{\ln q_m}$ следует $k_{m+1} > e^{\sqrt{\ln q_m}}$. Учитывая, кроме того, что $q_m/q_{m+1} < 1/k_{m+1}$, $k_{m+1}/q_{m+1} < 1/q_m$, $q_m > e^{\sqrt{\ln q_m}}$, а также неравенства

$$\frac{\ln q_{m+1}}{q_{m+1}} < \frac{\ln q_m}{q_m} < \frac{\ln q_m}{5e^{\sqrt{\ln q_m}}}$$

(при достаточно большом m), получаем (6.5).

Лемма доказана.

ЛЕММА 6.5. Пусть $\sqrt{2}q_m \leq t < \sqrt{2}q_{m+1}$ и $q_{s+1} \ln k_{s+1} > \sigma_m t \ln q_m$ для некоторого $s < m$ (ситуация 3). Тогда для любого $r < 2q_{m+1}$ и любых $x, y \in \overline{V}(t)$

$$|f^r(x) - f^r(y)| < \frac{cq_{s+1}}{2 \ln q_s}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем считать, что m , а вместе с ним и s настолько велики, что

$$8(A + B + K) \frac{\ln q_s}{e^{\sqrt{\ln q_s}}} < \frac{c}{2 \ln q_s}. \quad (6.13)$$

Пусть g — та же модельная функция, что и в лемме 6.4. Точно так же лемма сводится к следующему утверждению для g : в условиях настоящей леммы для любого $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$ и любых $x, y \in \widetilde{V}(t)$

$$|g^r(x) - g^r(y)| < (4A_0 + 2) \left(\frac{2 \ln q_s}{q_s} + \frac{\ln q_s}{e^{\sqrt{\ln q_s}}} \right) q_{s+1}. \quad (6.14)$$

Докажем это утверждение.

Рассмотрим сначала случай $\sqrt{2} q_m \leq t < \sqrt{2} \sigma_m q_{m+1}$. В этом случае $\tilde{V}(t) = V_m$. В силу леммы 3.1 $U(\sigma_m/q_m, X(r)) \cap V_m = \emptyset$. Поэтому если положить

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [\sigma_m/q_m, 1], \\ 0, & x \in (0, \sigma_m/q_m), \end{cases}$$

то для любого $x \in V_m$ и любого $r \in (0, \sqrt{2} t)$ $g^r(x) = (\bar{g})^r(x)$. Из леммы 6.3 получаем

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{g}) &< (2A_0 + 1) \left(\ln q_m + \ln \frac{1}{\sigma_m} \right) < \left(3A_0 + \frac{3}{2} \right) \ln q_m, \\ \max_x \bar{g}(x) &< (2A_0 + 1) \ln q_m. \end{aligned}$$

Аналогично, для случая $\sqrt{2} \sigma_m q_{m+1} \leq t < \sqrt{2} q_{m+1}$, когда $\tilde{V}(t) = V'_m$, для любого $r < \sqrt{2} t$ $U(\sigma_m/q_{m+1}, X(r)) \cap V'_m = \emptyset$, поэтому если положить

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [\sigma_m/q_{m+1}, 1], \\ 0, & x \in (0, \sigma_m/q_{m+1}), \end{cases}$$

то для любого $x \in \tilde{V}(t)$ и любого $r \in (0, \sqrt{2} t)$ $g^r(x) = (\bar{g})^r(x)$. Из леммы 6.3 легко получить неравенства

$$\text{Var}(\bar{g}) < \left(3A_0 + \frac{3}{2} \right) \ln q_{m+1}, \quad \max_x \bar{g}(x) < (2A_0 + 1) \ln q_{m+1}.$$

В обоих случаях при достаточно больших m в силу неравенств $\ln q_m - \ln(1/\sigma_m) < \ln q_{s+1} \leq \ln q_m$ и $\ln q_{s+1} > \ln q_{m+1} - 2 \ln(1/\sigma_m)$ (лемма 5.6) справедливы оценки

$$\text{Var}(\bar{g}) < (4A_0 + 2) \ln q_{s+1}, \quad \max_x \bar{g}(x) < \left(3A_0 + \frac{3}{2} \right) \ln q_{s+1}. \quad (6.15)$$

Далее доказательство во многом повторяет доказательство леммы 6.4. Существенная разница возникает при оценке Σ_1 .

Пусть $r < \sqrt{2} t$. Рассмотрим *нестандартное* разложение r по q_{s+1} и q_s , задаваемое соотношениями

$$r = l_0 + l_s q_s + l_{s+1} q_{s+1}, \quad 0 \leq l_0 < q_s, \quad 0 \leq l_0 + l_s q_s < q_{s+1}.$$

Нетрудно видеть, что при этом $0 \leq l_s \leq k_{s+1} \leq q_{s+1}/q_s$, $0 \leq l_{s+1} < 2/\sigma_m$. Последнее неравенство получается из неравенства $t < q_{s+1}/\sigma_m$ леммы 5.6:

$$l_{s+1} < \frac{r}{q_{s+1}} < \frac{\sqrt{2} t}{q_{s+1}} < \frac{2}{\sigma_m}.$$

Для $x, y \in \tilde{V}(t)$

$$|g^r(x) - g^r(y)| = |(\bar{g})^r(x) - (\bar{g})^r(y)| = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3,$$

где

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= |(\bar{g})^{l_{s+1}q_{s+1}}(x) - (\bar{g})^{l_{s+1}q_{s+1}}(y)|, \\ \Sigma_2 &= |(\bar{g})^{l_s q_s}(x_1) - (\bar{g})^{l_s q_s}(y_1)|, \quad x_1 = T^{l_{s+1}q_{s+1}}x, \quad y_1 = T^{l_{s+1}q_{s+1}}y, \\ \Sigma_3 &= |(\bar{g})^{l_0}(x_2) - (\bar{g})^{l_0}(y_2)|, \quad x_2 = T^{l_s q_s}x_1, \quad y_2 = T^{l_s q_s}y_1.\end{aligned}$$

В силу леммы 6.2 и неравенства $0 \leq l_{s+1} \leq 2/\sigma_m$

$$\Sigma_1 \leq l_{s+1} \operatorname{Var}(\bar{g}) < \frac{(8A_0 + 4) \ln q_{s+1}}{\sigma_m}.$$

Аналогично, с учетом неравенства $l_0 < q_s$ и оценки $\operatorname{Var}(\bar{g})$,

$$\Sigma_3 \leq q_s \operatorname{Var}(\bar{g}) < (4A_0 + 2)q_s \ln q_{s+1}.$$

Так же, как в лемме 6.4, получим оценку для Σ_2 :

$$\Sigma_2 \leq 2(4A_0 + 2)k_{s+1} \ln q_s + 2 \max_x \bar{g}(x) \leq (8A_0 + 4)k_{s+1} \ln q_s + (6A_0 + 3) \ln q_{s+1}.$$

Таким образом,

$$|g^r(x) - g^r(y)| \leq (2A_0 + 1) \left(4k_{s+1} \ln q_s + \left(\frac{5}{\sigma_m} + 2q_s \right) \ln q_{s+1} \right).$$

Легко видеть, что

$$\frac{k_{s+1} \ln q_s}{q_m} \leq \frac{k_{s+1} \ln q_s}{q_{s+1}} < \frac{\ln q_s}{q_s}.$$

Из неравенства $k_{s+1} > e^{\sqrt{\ln q_m}} > \ln q_m$ (лемма 5.6) следует, что

$$\frac{q_s \ln q_{s+1}}{q_{s+1}} < \frac{\ln q_{s+1}}{k_{s+1}} < \frac{\ln q_{s+1}}{e^{\sqrt{\ln q_m}}} \leq \frac{\ln q_{s+1}}{e^{\sqrt{\ln q_{s+1}}}}.$$

Наконец, из определения σ_m и (5.14) следует, что при достаточно большом s

$$\frac{5 \ln q_{s+1}}{\sigma_m q_{s+1}} < \frac{5 \sqrt[4]{\ln q_m} \cdot \ln q_{s+1}}{q_{s+1}} < \frac{\ln^2 q_{s+1}}{q_{s+1}} < \frac{\ln q_{s+1}}{e^{\sqrt{\ln q_{s+1}}}}.$$

С учетом всех этих оценок получаем (6.14).

Лемма доказана.

ЛЕММА 6.6. *Если m достаточно велико, $\ln k_{m+1} > \sigma_m^2 \ln q_m$, $0 \leq \Delta r \leq q_{m+1}/\ln q_m$ и $r > \max(\sigma_m q_{m+1}/2, q_m)$, то для любого $x \in \bigcap_{i=1}^K (V_m + \bar{x}_i)$*

$$|(f^{\Delta r})'(x)| < (A + B)\sigma_m e(r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с теоремой 3.1 из [1]

$$(f^{\Delta r})'(x) = \sum_{i=1}^K (u^{\Delta r}(x - \bar{x}_i)(-A_i + \alpha_i^-(\Delta r, x)) + v^{\Delta r}(x - \bar{x}_i)(B_i + \alpha_i^+(\Delta r, x))),$$

где $|\alpha_i^\pm(\Delta r, x)| \leq \alpha(\Delta r)$. Поэтому существует такая константа $W = W(\rho, f)$, зависящая только от ρ и f , что для любого x , кроме особых точек $f^{\Delta r}$, выполняется неравенство

$$|(f^{\Delta r})'(x)| \leq W \max_{1 \leq i \leq K} (u^{\Delta r}(x - \bar{x}_i), v^{\Delta r}(x - \bar{x}_i)).$$

Если $x \in \bigcap_{i=1}^K (V_m + x_i)$, то для любого i $x - \bar{x}_i \in V_m$, поэтому

$$|(f^{\Delta r})'(x)| \leq W \sup_{x \in V_m} (u^{\Delta r}(x), v^{\Delta r}(x)).$$

Пусть m настолько велико, что $W\sigma_m < (A+B)$. Тогда заключение леммы следует из утверждения: *в условиях настоящей леммы для любого $x \in V_m$*

$$0 \leq u^{\Delta r}(x) < \sigma_m^2 e(r), \quad 0 \leq v^{\Delta r}(x) < \sigma_m^2 e(r).$$

Докажем это утверждение для $u^{\Delta r}$. Разложим $u^{\Delta r}$ согласно лемме 5.4 из [1]:

$$u^{\Delta r}(x) = e(\Delta r) + \sum_{n=0}^{m-1} Z_n^-(\Delta r, x) + Z_m^-(\Delta r, x) + I^-(\Delta r, x) + I_{\text{ост}}^-(\Delta r, x) + P^-(\Delta r, x).$$

Из неравенства $\Delta r < q_{m+1}/\ln q_m$ следует, что $e(\Delta r) < 2q_{m+1}$. Кроме того, $I_{\text{ост}}^-(\Delta r, x) < 3q_m \ln(\ln q_m)$ и $|P^-(\Delta r, x)| < 4\Delta r < 4q_{m+1}/\ln q_m$. Согласно лемме 5.2

$$\sum_{n=0}^{m-1} Z_n^-(\Delta r, x) \leq \sum_{n=0}^{m-1} Z_n < 3q_m \ln q_m.$$

Так как $\Delta r < q_{m+1}/\ln q_m < 2\sigma_m q_{m+1}$, то $U(\sigma_m/q_m, X(\Delta r)) \cap V_m = \emptyset$, поэтому для $x \in V_m$

$$I^-(\Delta r, x) + Z_m^-(\Delta r, x) < \frac{(l_m(\Delta r) + 1)q_m}{\sigma_m} < \frac{2\Delta r}{\sigma_m} \leq \frac{2q_{m+1}}{\sigma_m \ln q_m}$$

$(l_m(\Delta r) - \text{коэффициент при } q_m \text{ в квазистандартном разложении } \Delta r)$.

Сложив все оценки и огрубив их, получим

$$u^{\Delta r}(x) < 3q_{m+1} + 4q_m \ln q_m.$$

Так как $e(r) > (\sigma_m q_{m+1} \ln q_m)/4$, то получаем

$$u^{\Delta r}(x) < \left(\frac{12}{\sigma_m \ln q_m} + \frac{16}{\sigma_m k_{m+1}} \right) e(r).$$

Учитывая, что $k_{m+1} > \ln q_m$ и $1/(\sigma_m \ln q_m) < \sigma_m^3$, получим требуемую оценку.

Лемма доказана.

ЛЕММА 6.7. Если для некоторого $s < t$ выполнено неравенство

$$q_{s+1} \ln k_{s+1} > \sigma_m t \ln q_m$$

и при этом $0 \leq \Delta r \leq q_{s+1}/\ln q_s$ и $r > q_m$, то для любого $x \in \bigcap_{i=1}^K (V_s + \overline{x}_i)$

$$|(f^{\Delta r})'(x)| < (A + B)\sigma_m e(r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точно так же, как в лемме 6.6, заключение леммы следует из оценок: для любого $x \in V_m$

$$0 \leq u^{\Delta r}(x) < \sigma_m^2 e(r), \quad 0 \leq v^{\Delta r}(x) < \sigma_m^2 e(r).$$

Докажем эти оценки для u . Разложим $u^{\Delta r}$:

$$u^{\Delta r} = e(\Delta r) + \sum_{n=0}^{s-1} Z_n^-(\Delta r, x) + Z_s^-(\Delta r, x) + I^-(\Delta r, x) + I_{\text{ост}}^-(\Delta r, x) + P^-(\Delta r, x).$$

Оценки всех слагаемых, кроме $I^- + Z_s^-$, повторяют аналогичные оценки леммы 6.6:

$$e(\Delta r) < 2q_{s+1}, \quad \sum_{n=0}^{s-1} Z_n^- < 3q_s \ln q_s,$$

$$I_{\text{ост}}^-(\Delta r, x) < 3q_s \ln(\ln q_s), \quad |P^-(\Delta r, x)| < \frac{4q_{s+1}}{\ln q_s}.$$

Так как $\Delta r \leq q_{s+1}/\ln q_s < 2\sigma_s q_{s+1}$, то в силу леммы 3.1 $U(\sigma_s/q_s, X(\Delta r)) \cap V_s = \emptyset$, поэтому для $x \in V_s$

$$I^-(\Delta r, x) + Z_s^-(\Delta r, x) \leq \frac{(l_s(\Delta r) + 1)q_s}{\sigma_s} < \frac{2\Delta r}{\sigma_s} < \frac{2q_{s+1}}{\sigma_s \ln q_s}.$$

В силу леммы 5.6 можно считать, что $3q_s \ln q_s < q_s k_{s+1} < q_{s+1}$. Сложив все оценки и огрубив их, получим

$$u^{\Delta r}(x) < 4q_{s+1}.$$

С другой стороны, $e(r) \geq q_m \ln q_m \geq q_{s+1} \ln q_m$, поэтому

$$u^{\Delta r}(x) < \frac{4}{\ln q_m} e(r) < \sigma_m^2 e(r).$$

Лемма доказана.

Список литературы

1. *Кочергин А. В.* Невырожденные неподвижные точки и перемешивание в потоках на двумерном торе // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 8. С. 83–112.
2. *Арнольд В. И.* Топологические и эргодические свойства замкнутых 1-форм с несоизмеримыми периодами // Функц. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 2. С. 1–12.
3. *Кочергин А. В.* Невырожденные седла и отсутствие перемешивания // Матем. заметки. 1976. Т. 19. № 3. С. 453–468.
4. *Синай Я. Г., Ханин К. М.* Перемешивание некоторых классов потоков над поворотом окружности // Функц. анализ и его прилож. 1992. Т. 26. № 3. С. 1–21.
5. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. М.: Физматгиз, 1961.
6. *Кочергин А. В.* Перемешивающий специальный поток над поворотом окружности с почти липшицевой функцией // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 3. С. 51–78.
7. *Fayad B. R.* Reparamétrage de flots irrationnels sur le tore // PhD thesis. L'École Polytechnique, Paris, 2000.
8. *Кочергин А. В.* Об отсутствии перемешивания у специальных потоков над поворотом окружности и у потоков на двумерном торе // Докл. АН СССР. 1972. Т. 205. С. 515–518.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: avk@econ.msu.ru

Поступила в редакцию
17.09.2003