Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Дельво, А. Лопес, Г. Лопес Лагомасино, Об одном семействе систем Никишина с периодическими рекуррентными коэффициентами, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 1, 47–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8076>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 12:37:21

УДК 517.53

С. Дельво, А. Лопес, Г. Лопес Лагомасино

Об одном семействе систем Никишина с периодическими рекуррентными коэффициентами

Пусть задана система Никишина из p мер и k -я порождающая мера системы Никишина имеет носитель на интервале $\Delta_k \subset \mathbb{R}$, где $\Delta_k \cap \Delta_{k+1} = \emptyset$ для каждого k . Хорошо известно, что соответствующая лестничная последовательность совместно ортогональных многочленов удовлетворяет $(p+2)$ -членному рекуррентному соотношению, у коэффициентов которого при определенных условиях на порождающие меры есть периодические пределы с периодом p (эти пределы зависят только от расположения интервалов Δ_k). Рассматривая эти периодические предельные значения как коэффициенты нового $(p+2)$ -членного рекуррентного соотношения, можно построить каноническую последовательность полиномов $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ со старшим коэффициентом 1, так называемые полиномы Чебышёва–Никишина. Показано, что полиномы P_n сами образуют последовательность совместно ортогональных многочленов по некоторой никишинской системе мер, в которой k -я порождающая мера абсолютно непрерывна на Δ_k . Тем самым, обобщается результат, полученный для $p=2$ третьим автором совместно с Рохой в [1]. Доказательство использует связи с блочными матрицами Тёплица и с некоторой римановой поверхностью рода нуль. Также получены сильная асимптотика и точная формула типа Видома для функций второго рода для системы Никишина, соответствующей $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Библиография: 27 названий.

Ключевые слова: совместные ортогональные многочлены, система Никишина, блочная матрица Тёплица, приближение Эрмита–Паде, сильная асимптотика, асимптотика отношения.

DOI: 10.4213/sm8076

§ 1. Введение и формулировка результатов

1.1. Система Никишина. Пусть $p \in \mathbb{Z}_{>0}$, и пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_p \subset \mathbb{R}$ – конечные отрезки, удовлетворяющие условию

$$\Delta_k \cap \Delta_{k+1} = \emptyset, \quad k = 1, \dots, p-1.$$

Допустим, что для всякого $k \in \{1, \dots, p\}$ σ_k является конечной положительной мерой с носителем на Δ_k и плотностью $\sigma'_k(x) > 0$ для п.в. $x \in \Delta_k$. Обозначим систему Никишина, порожденную мерами σ_k , через

$$\mathcal{M} = (\mu_1, \dots, \mu_p) = \mathcal{N}(\sigma_1, \dots, \sigma_p). \quad (1.1)$$

Первый и третий авторы являются постдокскими стипендиатами Фонда научных исследований Фландрии (FWO), Бельгия. Второй автор был частично поддержан грантом MTM 2009-12740-C03-01 Министерства науки и инноваций Испании.

Конструкция этой системы основана на следующей операции “произведения” мер: для заданных мер σ_α и σ_β с носителями на конечных непересекающихся отрезках на оси $\mathbb{R}$ положим

$$d\langle\sigma_\alpha, \sigma_\beta\rangle(x) := \int \frac{d\sigma_\beta(t)}{x-t} d\sigma_\alpha(x).$$

Это задает новую меру с носителем, как у меры σ_α . Теперь мы можем задать систему $\mathcal{M}$ в (1.1) следующим образом (обозначения были введены в [2]):

$$\begin{aligned} \mu_1 &:= \sigma_1, & \mu_2 &:= \langle\sigma_1, \sigma_2\rangle, \\ \mu_3 &:= \langle\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\rangle = \langle\sigma_1, \langle\sigma_2, \sigma_3\rangle\rangle, & \dots, & \mu_p := \langle\sigma_1, \langle\sigma_2, \dots, \sigma_p\rangle\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, все меры $\mu_1, \dots, \mu_p$ знакопостоянны и имеют носители на Δ_1 . Системы Никишина были введены в [3]. В последние десятилетия эти системы (и их варианты) привлекают все больше внимания благодаря многочисленным применениям, теоретическим и практическим (см., к примеру, [1]–[17]).

Для $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ рассмотрим мультииндекс

$$\mathbf{n} := (n_1, \dots, n_p) := (\underbrace{m+1, \dots, m+1}_{k \text{ раз}}, \underbrace{m, \dots, m}_{p-k \text{ раз}}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^p, \quad (1.2)$$

где $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ входят в соотношение $n = mp + k$. Заметим, что $|\mathbf{n}| := n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$.

Пусть $(Q_n)_{n=0}^\infty$ – диагональная последовательность совместно ортогональных многочленов, связанная с системой Никишина $\mathcal{M}$. А именно, Q_n – многочлен степени n с единичным старшим коэффициентом, удовлетворяющий условиям ортогональности

$$\int_{\Delta_1} Q_n(x) x^l d\mu_k(x) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, n_k - 1, \quad (1.3)$$

при $k = 1, \dots, p$; где n_k – k -я компонента мультииндекса $\mathbf{n}$ в (1.2). Существование и единственность последовательности $(Q_n)_{n=0}^\infty$ следует из того, что системы Никишина являются совершенными (слабосовершенными) системами (см., к примеру, [17], а также [13], где показано, что системы Никишина совершенны). Хорошо известно, что многочлены Q_n удовлетворяют $(p+2)$ -членному рекуррентному соотношению

$$zQ_n(z) = Q_{n+1}(z) + a_{n,n}Q_n(z) + a_{n,n-1}Q_{n-1}(z) + \dots + a_{n,n-p}Q_{n-p}(z) \quad (1.4)$$

с начальными условиями

$$Q_{-p} \equiv Q_{-p+1} \equiv \dots \equiv Q_{-1} \equiv 0, \quad Q_0 \equiv 1$$

и с $a_{n,n-p} \neq 0$ при $n \geq p$. Рекуррентные коэффициенты $a_{n,m}$ в (1.4) можно рассматривать как матричные элементы ленточной матрицы Хессенберга

$$A = \begin{pmatrix} a_{0,0} & 1 & & & \\ a_{1,0} & a_{1,1} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_{p,0} & a_{p,1} & & \ddots & \\ & a_{p+1,1} & a_{p+1,2} & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Таким образом, A – полубесконечная матрица с наддиагональю, состоящей из единиц, и p поддиагоналями. Прочие элементы A равны нулю.

1.2. Многочлены Чебышёва–Никишина. Как показано в работе [7], имеют место асимптотические формулы

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{mp+k}(z)}{Q_{mp+k-1}(z)} =: F_k(z), \quad k = 1, \dots, p, \quad (1.6)$$

где пределы равномерны внутри $\mathbb{C} \setminus \Delta_1$. Эти функции $F_k(z)$, равные пределам отношений, подробно обсуждаются в § 4.

В силу асимптотики отношений (1.6) (см. [5]) для всякой пары чисел (i, j) , $0 \leq j \leq p-1$, $j \leq i \leq j+p$, существует предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{mp+i, mp+j} =: b_{i,j}. \quad (1.7)$$

Для $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ положим $b_{mp+i, mp+j} := b_{i,j}$. Тогда ленточный оператор Хессенберга A в (1.5) оказывается компактным возмущением трехдиагонального блочного оператора Тёплица

$$T = \begin{pmatrix} B_0 & B_{-1} & & & \\ B_1 & B_0 & B_{-1} & & \\ & B_1 & B_0 & B_{-1} & \\ & & B_1 & B_0 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

где $(p \times p)$ -блоки B_k имеют вид

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_{0,0} & 1 & & \\ b_{1,0} & b_{1,1} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ b_{p-1,0} & b_{p-1,1} & \dots & b_{p-1,p-1} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_{p,0} & b_{p,1} & \dots & b_{p,p-1} \\ & b_{p+1,1} & \dots & b_{p+1,p-1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{2p-1,p-1} \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

$$B_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Диагонали матрицы T мы будем рассматривать как периодические последовательности с периодом p .

ТЕОРЕМА 1.1. Для всех k, j и $l \in \{1, \dots, p-1\}$ выполнены соотношения

$$b_{k,k-1} = b_{j,j-1} =: \beta, \quad (1.11)$$

$$b_{k+1,k-l} - b_{k,k-l-1} = b_{k,k-l}(b_{k-l,k-l} - b_{k,k}). \quad (1.12)$$

Теорема 1.1 обобщает результат, полученный в [1] для $p = 2$. Она доказывается в § 7. Однако в дальнейшем изложении мы не будем использовать теорему 1.1.

Мы определяем *многочлены Чебышёва–Никишина* (см. [1]) как многочлены $(P_n)_{n=0}^\infty$ со старшим коэффициентом 1, ассоциированные с оператором T из (1.8), т.е.

$$P_n(z) = \det(zI_n - T_n), \quad (1.13)$$

где I_n – единичная матрица размера n , а T_n – главная подматрица порядка n матрицы T . Многочлены P_n удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$zP_n(z) = P_{n+1}(z) + b_{n,n}P_n(z) + \cdots + b_{n,n-p}P_{n-p}(z)$$

с начальными условиями

$$P_{-p} \equiv P_{-p+1} \equiv \cdots \equiv P_{-1} \equiv 0, \quad P_0 \equiv 1.$$

Заметим, что при $p = 1$ и $\Delta_1 = [-2, 2]$ многочлены P_n сводятся к классическим многочленам Чебышёва второго рода для этого отрезка. Этим и объясняется термин “многочлены Чебышёва–Никишина” (см. [1]).

1.3. Система Никишина, порожденная многочленами Чебышёва–Никишина. Легко видеть, что существуют положительные меры $(\nu_1, \dots, \nu_p)$ с носителем на Δ_1 , для которых

$$\frac{1}{F_k(z)} = \int_{\Delta_1} \frac{1}{z-t} d\nu_k(t), \quad k = 1, \dots, p. \quad (1.14)$$

Это следует из асимптотики отношения в (1.6) и чередования нулей $Q_{mp+k}(z)$ и $Q_{mp+k-1}(z)$ (см. [7]). При другом подходе интегральное представление (1.14) можно вывести из аналитических свойств $1/F_k(z)$ с помощью теоремы А.6 из [18] (см. ниже (4.2)), согласно которой меры ν_k , $k = 1, \dots, p$, абсолютно непрерывны относительно меры Лебега.

Основная цель настоящей статьи – доказательство следующих двух теорем, касающихся многочленов Чебышёва–Никишина $P_n(z)$.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $(\nu_1, \dots, \nu_p)$ – меры на Δ_1 , определенные формулой (1.14). Тогда многочлены Чебышёва–Никишина P_n удовлетворяют условиям ортогональности

$$\int_{\Delta_1} P_n(x)x^l d\nu_k(x) = 0, \quad l = 0, \dots, n_k - 1, \quad k = 1, \dots, p, \quad (1.15)$$

где n_k – k -я компонента мультииндекса $\mathbf{n}$ из (1.2).

ТЕОРЕМА 1.3. Меры $(\nu_1, \dots, \nu_p)$ образуют систему Никишина на $(\Delta_1, \dots, \Delta_p)$, т.е. существуют меры ρ_k на Δ_k , $k = 1, \dots, p$, для которых $(\nu_1, \dots, \nu_p) = \mathcal{N}(\rho_1, \dots, \rho_p)$. Мера ρ_k абсолютно непрерывна на Δ_k , а ее плотность $\rho'_k(x)$ не обращается в нуль и имеет постоянный знак (плюс или минус) во внутренних точках Δ_k .

Теоремы 1.2 и 1.3 доказываются соответственно в §5 и §6. При $p = 2$ эти утверждения сводятся к результату, установленному в [1]. Наши доказательства заметно отличаются от приведенных в [1]. Обобщение теоремы 1.2 на другие системы мультииндексов $\mathbf{n}$ приводится в §9.

1.4. К доказательству теоремы 1.2: асимптотика отношения. Пусть

$$F(z, x) := \frac{1}{z}B_{-1} + B_0 + zB_1 - xI_p \quad (1.16)$$

– блочный символ, ассоциированный с блочным оператором Тёплица T из (1.8), и пусть

$$f(z, x) := \det F(z, x). \quad (1.17)$$

У алгебраического уравнения $f(z, x) = 0$ есть $p + 1$ корней $z_1(x), \dots, z_{p+1}(x)$ (считая кратности). Мы перенумеруем их так, чтобы

$$|z_1(x)| \leq |z_2(x)| \leq \dots \leq |z_{p+1}(x)|, \quad x \in \mathbb{C}. \quad (1.18)$$

Введем множества

$$\Gamma_k := \{x \in \mathbb{C} : |z_k(x)| = |z_{k+1}(x)|\}, \quad k = 1, \dots, p. \quad (1.19)$$

Решающую роль в доказательстве теоремы 1.2 играет следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Выполнено равенство*

$$\Gamma_k = \Delta_k, \quad k = 1, \dots, p, \quad (1.20)$$

a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{P_{mp+k}(x)}{P_{mp+k-1}(x)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{mp+k}(x)}{Q_{mp+k-1}(x)} =: F_k(x), \quad k = 1, \dots, p, \quad (1.21)$$

равномерно внутри $\mathbb{C} \setminus (\Delta_1 \cup \mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ – конечное подмножество. Здесь использованы обозначения из (1.6).

Предложение 1.4 доказывается в § 4. Равенство (1.20) было ранее получено А. И. Аптекаревым (см. [1; предложения 2.1, 2.2]), но мы дадим другое доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Если теоремы 1.2 и 1.3 установлены, то полиномы P_n оказываются совместно ортогональными относительно системы Никишина. Тогда уравнение (1.21) оказывается следствием основного результата работы [7]. Кроме того, нули P_n оказываются простыми и расположены во внутренних точках Δ_1 , причем нули двух последовательных полиномов чередуются (см. [7; теорема 2.1]). Следовательно, сходимость в (1.21) оказывается равномерной внутри $\mathbb{C} \setminus \Delta_1$.

1.5. Сильная асимптотика, формулы типа Видома и функции второго рода. В качестве следствия детерминантного тождества Видома для тёплицевых матриц (см. [19; § 6]) получаем следующую *точную* формулу для $P_{mp+k}(x)$ (см. [11; § 4]):

$$P_{mp+k}(x) = \frac{(-1)^{p+k}}{f_p} \sum_{j=1}^{p+1} \frac{\det F^{[p, k+1]}(z_j(x), x)}{\prod_{i=1, i \neq j}^{p+1} (z_j(x) - z_i(x))} z_j(x)^{-m-1} \quad (1.22)$$

для всех $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $k = 0, 1, \dots, p - 1$, где

$$f_p = \prod_{i=0}^{p-1} b_{p+i, i}, \quad (1.23)$$

а через $F^{[p,k+1]}$ обозначен минор матрицы F из (1.16), полученный удалением p -й строки и $(k+1)$ -го столбца. (Заметим, что строки и столбцы F занумерованы индексами $1, 2, \dots, p$, т.е. мы начинаем отсчет с 1, а не с 0.) В (1.22) неявно используется, что $f_p \neq 0$; это будет обосновано в § 4, см. (4.5).

Равенство (1.22) выполняется для всех таких x , что все корни $z_j(x)$ попарно различны. Если для некоторого $x \in \mathbb{C}$ два корня $z_j(x)$ и $z_k(x)$ с $j \neq k$ совпадают (таких x конечное число), то (1.22) остается в силе после замены правой части на ее предел.

Из (1.22) получаем формулу сильной асимптотики

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_{mp+k}(x) z_1(x)^{m+1} = \frac{(-1)^{p+k} \det F^{[p,k+1]}(z_1(x), x)}{f_p \prod_{i=2}^{p+1} (z_1(x) - z_i(x))} \quad (1.24)$$

для всякого фиксированного $k \in \{0, \dots, p-1\}$, равномерно внутри $\mathbb{C} \setminus \Gamma_1$ (см. [11; § 4]).

В настоящей работе получены аналогичные формулы типа Видома для функций второго рода для системы Никишина, порожденной P_n . Напомним, что функции второго рода $\Psi_{n,l}(z)$ определяются рекуррентно в [2]:

$$\Psi_{n,0}(z) := P_n(z), \quad (1.25)$$

$$\Psi_{n,l}(z) = \int_{\Delta_l} \frac{\Psi_{n,l-1}(t)}{z-t} d\rho_l(t) \quad (1.26)$$

при $l = 1, \dots, p$, где ρ_l – мера на Δ_l , описываемая теоремой 1.3. Для формул типа Видома для $\Psi_{n,l}(z)$ нам нужны дополнительные обозначения, так что отложим их формулировку до § 8.

1.6. План статьи. Статья построена следующим образом. В § 2 мы вспоминаем несколько общих результатов относительно соотношений совместной ортогональности для ленточных операторов Хессенберга. В § 3 эти результаты применяются к многочленам Чебышёва–Никишина P_n . В § 4 доказано предложение 1.4 об асимптотике отношения многочленов P_n . В § 5 этот анализ использован для доказательства теоремы 1.2. В § 6 мы докажем теорему 1.3. В § 7 доказывается теорема 1.1 о соотношениях между коэффициентами $b_{i,j}$ в (1.7). В § 8 получены сильная асимптотика и точные формулы типа Видома для функций второго рода $\Psi_{n,l}(z)$ из (1.25), (1.26). Наконец, в § 9 обсуждаются обобщения наших результатов на некоторые другие системы мультииндексов $\mathbf{n}$.

§ 2. Соотношения совместной ортогональности для ленточных операторов Хессенберга

В этом параграфе мы напомним некоторые общие результаты о соотношениях совместной ортогональности для ленточных матриц Хессенберга, следуя статье В. А. Калягина [20]; см. также работы Дж. Ван Исегема [21] и В. А. Калягина [22]. Мы рассматриваем ленточную матрицу Хессенберга A с $p+2$ диагоналями вида (1.5) и ставим в соответствие матрице A следующие последовательности многочленов $(q_n)_n$ и $(p_n^{(j)})_n$, где $j \in \{1, \dots, p\}$. По условию эти многочлены удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$zy_n = y_{n+1} + a_{n,n}y_n + a_{n,n-1}y_{n-1} + \dots + a_{n,n-p}y_{n-p}, \quad n \geq 0, \quad (2.1)$$

с начальными условиями

n	$-p$	$-p+1$	$-p+2$	$\dots$	-1	0
$p_n^{(1)}$	1	0	0	$\dots$	0	0
$p_n^{(2)}$	0	1	0	$\dots$	0	0
$p_n^{(3)}$	0	0	1	$\dots$	0	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$p_n^{(p)}$	0	0	0	$\dots$	1	0
q_n	0	0	0	$\dots$	0	1

(2.2)

В нашем случае полагаем $a_{i,j} = -1$ при $0 \leq i \leq p-1$ и $j \leq -1$. Заметим, что при $n \geq 0$ q_n – многочлен степени n , а $p_n^{(j)}$ – многочлен степени $n-1$ при всех $j \in \{1, \dots, p\}$.

Пусть A_n – матрица, составленная из первых n строк и n столбцов матрицы A . Положим

$$D_n(z) := \det(zI_n - A_n), \quad (2.3)$$

$$D_n^{(j)}(z) := \det(zI_{n-j} - (A_n)^{[1, \dots, j; 1, \dots, j]}), \quad 1 \leq j \leq p, \quad (2.4)$$

где I_k – единичная матрица $k \times k$, а $M^{[1, \dots, j; 1, \dots, j]}$ – подматрица M , полученная удалением первых j строк и j столбцов. Разумеется, мы полагаем

$$D_0(z) \equiv D_1^{(1)}(z) \equiv D_2^{(2)}(z) \equiv \dots \equiv D_p^{(p)}(z) \equiv 1,$$

а также $D_n(z) \equiv 0$ при $n < 0$ и $D_n^{(j)}(z) \equiv 0$ при $n < j$.

Разлагая определитель D_n по последней строке, легко проверить, что

$$q_n = D_n, \quad n \geq 0,$$

поскольку обе последовательности удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению и одинаковым начальным условиям.

ЛЕММА 2.1. Для всякого $j \in \{1, \dots, p\}$ выполнено

$$p_n^{(j)} = D_n^{(1)} + D_n^{(2)} + \dots + D_n^{(j)}, \quad n \geq 0. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения (2.4) легко видеть, что последовательность многочленов $D_n^{(j)}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} zD_n^{(j)}(z) &= D_{n+1}^{(j)}(z) + a_{n,n}D_n^{(j)}(z) + a_{n,n-1}D_{n-1}^{(j)}(z) + \dots \\ &\quad + a_{n,n-p}D_{n-p}^{(j)}(z), \quad n \geq j. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Поскольку $p_1^{(1)}(z) = 1 = D_1^{(1)}(z)$ и $p_n^{(1)} = D_n^{(1)} = 0$ при $1-p \leq n \leq 0$, из (2.1) и (2.6) вытекает, что $p_n^{(1)} = D_n^{(1)}$ для всех $n \geq 0$.

Теперь покажем, что

$$p_n^{(j)}(z) - p_n^{(j-1)}(z) = D_n^{(j)}(z) \quad \text{для всех } n \geq 0. \quad (2.7)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} z(p_n^{(j)} - p_n^{(j-1)}) &= p_{n+1}^{(j)} - p_{n+1}^{(j-1)} + a_{n,n}(p_n^{(j)} - p_n^{(j-1)}) + \dots \\ &\quad + a_{n,n-p}(p_{n-p}^{(j)} - p_{n-p}^{(j-1)}), \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Напомним, что выполнены начальные условия (2.2) и, в частности, $p_{j-1-p}^{(j)} = 1$ и $p_{j-2-p}^{(j-1)} = 1$. По определению $a_{k,j} = -1$ при $0 \leq k \leq p-1$ и $j \leq -1$, так что, полагая $n = 0$ в (2.8), получим $p_1^{(j)} - p_1^{(j-1)} = 0$. Подставляя в формулу (2.8) значения n от 1 до $j-2$, при $2 \leq n \leq j-1$ получим равенства $p_n^{(j)} - p_n^{(j-1)} = 0$. Итак, (2.7) доказано при $0 \leq n \leq j-1$.

Далее положим $n = j-1$ в (2.8), что дает $p_j^{(j)} - p_j^{(j-1)} = 1 = D_j^{(j)}$. Теперь (2.7) непосредственно следует из (2.8), (2.6) и того факта, что $p_n^{(j)} - p_n^{(j-1)} = D_n^{(j)}$ при $j-p \leq n \leq j$. Итак, мы можем доказать (2.5), используя индукцию по j .

Напомним результаты В. А. Калягина [20], [22]; см. также [21]. Чтобы сформулировать эти результаты, введем некоторые обозначения. Будем считать, что у матрицы A равномерно ограниченные коэффициенты. Пусть $\{\mathbf{e}_n\}_{n=0}^\infty$ – стандартный базис в l^2 . Рассмотрим следующие резольвентные функции:

$$g_j(z) := (R_z \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_0), \quad 1 \leq j \leq p, \quad (2.9)$$

где $R_z = (zI - A)^{-1}$ – резольвента, а $(\cdot, \cdot)$ – стандартное скалярное произведение в l^2 . Также положим

$$\varphi_j(z) := g_1(z) + g_2(z) + \dots + g_j(z), \quad 1 \leq j \leq p. \quad (2.10)$$

Для $j = 1, \dots, p$ введем линейные функционалы L_j на пространстве многочленов по формуле

$$L_j(z^n) = (A^n \mathbf{v}_j, \mathbf{e}_0),$$

где $\mathbf{v}_j := \mathbf{e}_0 + \dots + \mathbf{e}_{j-1}$. Заметим, что $(\mu_{j,n})_{n=0}^\infty = (L_j(z^n))_{n=0}^\infty$ – это последовательность “моментов” для φ_j в следующем смысле:

$$\varphi_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_{j,n}}{z^{n+1}}$$

для достаточно больших $z \in \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 2.2 (см. [20], [21]). а) *Рациональная вектор-функция*

$$\left(\frac{p_n^{(1)}}{q_n}, \frac{p_n^{(2)}}{q_n}, \dots, \frac{p_n^{(p)}}{q_n} \right)$$

является аппроксимацией Эрмита–Паде с мультииндексом $\mathbf{n}$ из (1.2) к системе $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$, т.е. при $j = 1, \dots, p$

$$q_n(z)\varphi_j(z) - p_n^{(j)}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty,$$

где n_j – j -я компонента $\mathbf{n}$.

б) Для всякого $j \in \{1, \dots, p\}$ многочлен q_n удовлетворяет соотношениям ортогональности

$$L_j(q_n z^l) = 0, \quad l = 0, \dots, n_j - 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Используя теорему 2.2 и лемму 2.1, по линейности получим, что

$$\left(\frac{D_n^{(1)}}{D_n}, \frac{D_n^{(1)} + c_{1,1}D_n^{(2)}}{D_n}, \dots, \frac{D_n^{(1)} + c_{1,p-1}D_n^{(2)} + c_{2,p-1}D_n^{(3)} + \dots + c_{p-1,p-1}D_n^{(p)}}{D_n} \right)$$

– аппроксимация Эрмита–Паде с мультииндексом (1.2) к системе функций

$$(g_1, g_1 + c_{1,1}g_2, g_1 + c_{1,2}g_2 + c_{2,2}g_3, \dots, g_1 + c_{1,p-1}g_2 + \dots + c_{p-1,p-1}g_p).$$

Здесь $c_{i,j}$ могут быть произвольными константами.

Недавно опубликованный обзор [23] содержит информацию о последних достижениях теории аппроксимаций Эрмита–Паде совместно ортогональных многочленов и об их приложениях к теории случайных матриц.

§ 3. Многочлены Чебышёва–Никишина

В этом параграфе результаты § 2 применяются для многочленов Чебышёва–Никишина $(P_n)_{n=0}^\infty$, определенных в (1.7)–(1.13). Для приложений удобнее использовать альтернативную детерминантную формулу для P_n . Чтобы применить результаты § 2 непосредственно к T из (1.8), мы фактически должны знать асимптотическое поведение отношений

$$\frac{\det(zI_{n-j} - (T_n)^{[1, \dots, j; 1, \dots, j]})}{\det(zI_n - T_n)}$$

для фиксированных $j = 1, \dots, p$ при $n \rightarrow \infty$. С этими пределами сложно работать, так что мы используем другой подход. Отразим T_n относительно побочной диагонали, в результате чего эти отношения перейдут в выражения следующего вида:

$$\frac{\det(zI_{n-j} - T_{n-j})}{\det(zI_n - T_n)} \equiv \frac{P_{n-j}(z)}{P_n(z)}.$$

Заметим, что матрица в числителе слева получается из матрицы в знаменателе вычеркиванием последних j строк и j столбцов (а не первых j строк и j столбцов в силу отражения относительно побочной диагонали). Теперь пределы отношений при $n \rightarrow \infty$ получаются с помощью равенства (1.21) (и зависят от остатка от деления n на p).

Теперь разовьем изложенные выше идеи. Фиксируем $k \in \{0, \dots, p-1\}$ и положим

$$T^{(k)} := T^{[1, \dots, k; 1, \dots, k]},$$

так что $T^{(k)}$ – бесконечная матрица, полученная удалением первых k строк и k столбцов матрицы T . Понятно, что $T^{(0)} = T$. Заметим, что $T^{(k)}$ также является трехдиагональной блочной матрицей Тёплица:

$$T^{(k)} = \begin{pmatrix} B_0^{(k)} & B_{-1}^{(k)} & & & \\ B_1^{(k)} & B_0^{(k)} & B_{-1}^{(k)} & & \\ & B_1^{(k)} & B_0^{(k)} & B_{-1}^{(k)} & \\ & & B_1^{(k)} & B_0^{(k)} & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

где блоки в $T^{(k)}$ также имеют размер $p \times p$ и легко вычисляются. Рассмотрим матрицу перестановки Π_p размера $p \times p$, в которой единицы стоят на побочной диагонали и нули – в прочих позициях, так что

$$\Pi_p(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i + j = p + 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (3.1)$$

где $\Pi_p(i, j)$ – элемент, стоящий в i -й строке и j -м столбце Π_p . Теперь построим новую блочную матрицу Тёплица $\tilde{T}^{(k)}$:

$$\tilde{T}^{(k)} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_0^{(k)} & \tilde{B}_{-1}^{(k)} & & & \\ \tilde{B}_1^{(k)} & \tilde{B}_0^{(k)} & \tilde{B}_{-1}^{(k)} & & \\ & \tilde{B}_1^{(k)} & \tilde{B}_0^{(k)} & \tilde{B}_{-1}^{(k)} & \\ & & \tilde{B}_1^{(k)} & \tilde{B}_0^{(k)} & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{B}_i^{(k)} = \Pi_p(B_i^{(k)})^T \Pi_p, \quad i = -1, 0, 1;$$

верхний индекс T обозначает транспонирование матриц. Таким образом, блок $\tilde{B}_i^{(k)}$ получается отражением $B_i^{(k)}$ относительно побочной диагонали.

ЛЕММА 3.1. *Зафиксируем $n = tp + k$, где $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Тогда многочлены Чебышёва–Никишина $\{P_{n-j}\}_{j=0}^n$ задаются формулами*

$$P_{n-j}(z) = \det(zI_{n-j} - (\tilde{T}_n^{(k)})^{[1, \dots, j; 1, \dots, j]}), \quad 0 \leq j \leq n, \quad (3.2)$$

где I_{n-j} – единичная матрица порядка $n-j$, а матрица $\tilde{T}_n^{(k)}$ составлена из первых n столбцов и n строк матрицы $\tilde{T}^{(k)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (3.2) – прямое следствие соотношения $\tilde{T}_n^{(k)} = \Pi_n T_n \Pi_n^T$, где Π_n – матрица перестановки порядка n , определенная аналогично (3.1).

Теперь фиксируем $n = tp + k$. Если положить $A = \tilde{T}^{(k)}$, то согласно лемме 3.1 многочлены $\{P_{n-j}\}_{j=0}^p$ имеют вид $D_n^{(j)}$; см. (2.3), (2.4). Таким образом (см. замечание 2.3), мы знаем, что

$$\left(\frac{P_{n-1}}{P_n}, \frac{P_{n-1} + c_{1,1}P_{n-2}}{P_n}, \dots, \frac{P_{n-1} + c_{1,p-1}P_{n-2} + c_{2,p-1}P_{n-3} + \dots + c_{p-1,p-1}P_{n-p}}{P_n} \right) \quad (3.3)$$

– аппроксимация Эрмита–Паде с мультииндексом (1.2) системы функций

$$(g_1^{(k)}, g_1^{(k)} + c_{1,1}g_2^{(k)}, g_1^{(k)} + c_{1,2}g_2^{(k)} + c_{2,2}g_3^{(k)}, \dots, g_1^{(k)} + c_{1,p-1}g_2^{(k)} + \dots + c_{p-1,p-1}g_p^{(k)}),$$

а $g_i^{(k)}$ – резольвентные функции (2.9), соответствующие оператору $\tilde{T}^{(k)}$.

§ 4. Доказательство предложения 1.4

В этом параграфе будет доказано предложение 1.4 об асимптотике отношения для многочленов Чебышёва–Никишина P_n . В §5 оно будет использовано в доказательстве теорем 1.2 и 1.3.

Вспомним обозначения из п. 1.4. Поскольку блочная матрица Тёплица T из (1.8)–(1.10) имеет вид нижней матрицы Хессенберга, все множества Γ_k в (1.19) непусты; каждое из них является объединением конечного числа аналитических дуг (см. [24; предложение 1.1 и лемма 2.1]). Из [4] или [24; пример 5.3] мы знаем асимптотику корней $z_k(x)$ в (1.18) (ее можно проверить и непосредственно):

$$z_1(x) = \frac{1}{x^p} + O\left(\frac{1}{x^{p+1}}\right), \quad x \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

$$C_1|x| < |z_k(x)| < C_2|x|, \quad x \rightarrow \infty, \quad 2 \leq k \leq p+1,$$

для некоторых постоянных $C_1, C_2 > 0$. Таким образом, Γ_1 – компакт.

Нам потребуются результаты и обозначения из [7]. Пусть $\mathcal{R}$ – компактная риманова поверхность

$$\mathcal{R} = \bigcup_{k=0}^p \overline{\mathcal{R}_k},$$

полученная стандартной последовательной склейкой крест-накрест листов

$$\mathcal{R}_0 := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_1, \quad \mathcal{R}_k = \overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta_k \cup \Delta_{k+1}), \quad k = 1, \dots, p-1, \quad \mathcal{R}_p := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_p.$$

Обозначим через $\psi^{(k)}$, $k = 1, \dots, p$, мероморфную функцию на $\mathcal{R}$ с дивизором (состоящим из простого полюса в $\infty^{(0)} \in \mathcal{R}_0$ и простого нуля в $\infty^{(k)} \in \mathcal{R}_k$), нормированную условием

$$\psi^{(k)}(z) = z + O(1), \quad z \rightarrow \infty^{(0)}.$$

Здесь $\infty^{(k)}$ – бесконечно удаленная точка на листе $\mathcal{R}_k$. Через $\psi_j^{(k)}$ обозначим ограничение $\psi^{(k)}$ на лист $\mathcal{R}_j$. Согласно основному результату [7]

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{mp+k}(z)}{Q_{mp+k-1}(z)} =: F_k(z) = \psi_0^{(k)}(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Delta_1, \quad k = 1, \dots, p \quad (4.2)$$

(ср. (1.6)). По теореме Лиувилля для всякой пары индексов j, k разность $\psi_j^{(j)} - \psi_j^{(k)}$ постоянна на $\mathcal{R}$. В частности, $F_j - F_k$ – постоянная.

Из рекуррентного соотношения

$$zQ_{mp+k} = Q_{mp+k+1} + a_{mp+k, mp+k}Q_{mp+k} + \dots + a_{mp+k, mp+k-p}Q_{mp+k-p}$$

после деления на Q_{mp+k} и перехода к пределу при $m \rightarrow \infty$ для всякого $k \in \{0, \dots, p-1\}$ получим равенство

$$z = F_{k+1} + b_{k,k} + b_{k,k-1} \frac{1}{F_k} + b_{k,k-2} \frac{1}{F_k F_{k-1}} + \dots + b_{k,k-p} \frac{1}{F_k \dots F_{k-p+1}}, \quad (4.3)$$

где мы естественным образом полагаем $b_{k,k-i} = b_{p+k, p+k-i}$ при $i > k$ и $F_{k-i} = F_{p+k-i}$ при $i \geq k$ (ср. (1.6) и (1.7)). Умножив обе части (4.3) на $F_k \dots F_{k-p+1}$,

получаем

$$zF_k \cdots F_{k-p+1} = F_{k+1}F_k \cdots F_{k-p+1} + b_{k,k}F_k \cdots F_{k-p+1} + \cdots + b_{k,k-p+1}F_{k+1} + b_{k,k-p}. \quad (4.4)$$

За исключением $b_{k,k-p}$, все члены в (4.4) содержат множитель $F_{k+1} \equiv F_{k-p+1}$. Записывая все функции F_j , $j \neq k+1$, в виде F_{k+1} плюс некоторая константа, приходим к алгебраическому уравнению степени $p+1$ для функции $F_{k+1}(z) = \psi_0^{(k+1)}(z)$, имеющему вид

$$F_{k+1}(z)^{p+1} + C_p(z)F_{k+1}(z)^p + \cdots + C_1(z)F_{k+1}(z) + b_{k,k-p} = 0.$$

В силу аналитического продолжения другие ветви $\psi_i^{(k+1)}$, $i = 1, \dots, p$, также удовлетворяют этому уравнению. Следовательно,

$$b_{k,k-p} \equiv (-1)^{p+1} \prod_{i=0}^p \psi_i^{(k+1)}(z), \quad z \in \overline{\mathbb{C}}. \quad (4.5)$$

В частности, мы видим, что $f_p \neq 0$; см. (1.23). В результате приходим к (1.22).

Напомним сильную асимптотику из формулы (1.24). Заметим, что функция $\det F^{[p,k+1]}(z_1(x), x)$ в (1.24) имеет не более конечного числа нулей вне Γ_1 . В противном случае $\det F^{[p,k+1]}(z_1(x), x)$ был бы тождественным нулем как функция x , и в силу аналитического продолжения каждый коэффициент формул Видома (1.22) для $P_{mp+k}(x)$ был бы тождественно равен нулю. Но тогда $P_{mp+k}(x) \equiv 0$, что с очевидностью приводит к противоречию (см. также [24; лемма 5.7]).

Из (1.24) получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{P_{n+p}(x)} = z_1(x), \quad (4.6)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{P_{mp+k}(x)}{P_{mp}(x)} = (-1)^k \frac{\det F^{[p,k+1]}(z_1(x), x)}{\det F^{[p,1]}(z_1(x), x)}, \quad k = 0, \dots, p-1, \quad (4.7)$$

равномерно внутри $\mathbb{C} \setminus (\Gamma_1 \cup \mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ – конечное множество.

Наша цель – установить связь между асимптотиками в (4.7) и (4.2). Напомним, что у всех многочленов Q_n нули лежат на отрезке Δ_1 и что нули Q_n и Q_{n+1} чередуются (см. [7; теорема 2.1]). Теперь можно использовать результаты из [25; § 4] (с учетом того, что мы пока не доказали, что $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}$) и для достаточно больших $x \in \mathbb{C}$ получить

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(x)}{Q_{n+p}(x)} = z_1(x).$$

Более того, в [25; замечание 4.2] показано, что вектор

$$\mathbf{Q}(x) := \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{Q_{mp}(x)} \begin{pmatrix} Q_{mp}(x) \\ \vdots \\ Q_{mp+p-1}(x) \end{pmatrix}$$

удовлетворяет следующему соотношению (в смысле умножения матрицы на вектор):

$$F(z_1(x), x)\mathbf{Q}(x) = \mathbf{0}$$

для всех достаточно больших $x \in \mathbb{C}$. Из чередования нулей следует, что все пределы отношений $\lim_{m \rightarrow \infty} (Q_{mp+k}(x)/Q_{mp}(x))$ аналитичны в $\mathbb{C} \setminus \Delta_1$. В силу аналитического продолжения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(x)}{Q_{n+p}(x)} = \tilde{z}_1(x), \quad x \in \mathbb{C} \setminus \Delta_1, \quad (4.8)$$

$$F(\tilde{z}_1(x), x) \mathbf{Q}(x) = \mathbf{0}, \quad x \in \mathbb{C} \setminus \Delta_1, \quad (4.9)$$

где $\tilde{z}_1(x)$ – единственный корень алгебраического уравнения $f(z, x) = 0$, удовлетворяющий условию $\tilde{z}_1(x) \sim x^{-p}$ при $x \rightarrow \infty$ и аналитически зависящий от $x \in \mathbb{C} \setminus \Delta_1$. Очевидно, что $\tilde{z}_1(x) = z_1(x)$ при достаточно больших x . В дальнейшем мы увидим, что $\tilde{z}_1(x) = z_1(x)$ для всех $x \in \mathbb{C} \setminus \Delta_1$.

В частности, проведенные рассуждения показывают, что корень $z_1(x)$ аналитически продолжается в $\mathbb{C} \setminus \Delta_1$ из окрестности бесконечности.

По правилу Крамера из (4.9) получаем равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{mp+k}(x)}{Q_{mp}(x)} = (-1)^k \frac{\det F^{[p, k+1]}(\tilde{z}_1(x), x)}{\det F^{[p, 1]}(\tilde{z}_1(x), x)}, \quad x \in \mathbb{C} \setminus \Delta_1, \quad (4.10)$$

для всех $k = 0, \dots, p-1$. Сравнивая его с (4.6), (4.7), видим, что мы докажем (1.21), если покажем, что $\tilde{z}_1(x) = z_1(x)$ для всех $x \in \mathbb{C} \setminus \Delta_1$.

С другой стороны, отметим, что (4.8) и (4.10) могут быть доказаны и по-другому, с помощью обобщенной теоремы Пуанкаре из [26] вместо результатов работы [25].

Из (4.2) и (4.8) видно, что

$$\tilde{z}_1(x) = \frac{1}{\psi_0^{(1)}(x) \cdots \psi_0^{(p)}(x)} = \frac{1}{F_1(x) \cdots F_p(x)}, \quad x \in \mathbb{C} \setminus \Delta_1. \quad (4.11)$$

Правая часть аналитически продолжается до мероморфной функции на римановой поверхности $\mathcal{R}$, ограничение которой на лист $\mathcal{R}_{k-1}$ имеет вид

$$\tilde{z}_k(x) := \frac{1}{\psi_{k-1}^{(1)}(x) \cdots \psi_{k-1}^{(p)}(x)}, \quad x \in \mathbb{C} \setminus (\Delta_{k-1} \cup \Delta_k), \quad (4.12)$$

при $k = 1, \dots, p+1$; здесь мы условимся, что $\Delta_0 = \emptyset = \Delta_{p+1}$. Итак, $\tilde{z}_k(x)$ и $\tilde{z}_{k+1}(x)$ аналитически продолжают друг друга через Δ_k . В силу единственности аналитического продолжения для всякого $x \in \mathbb{C}$ точки $\tilde{z}_1(x), \dots, \tilde{z}_{p+1}(x)$ являются перестановкой корней $z_1(x), \dots, z_{p+1}(x)$ алгебраического уравнения $f(z, x) = 0$. Если нам удастся показать, что

$$|\tilde{z}_1(x)| \leq |\tilde{z}_2(x)| \leq \cdots \leq |\tilde{z}_{p+1}(x)|, \quad x \in \mathbb{C}, \quad (4.13)$$

$$|\tilde{z}_k(x)| < |\tilde{z}_{k+1}(x)|, \quad x \in \mathbb{C} \setminus \Delta_k, \quad (4.14)$$

то из (1.18) мы сможем заключить, что для всех $x \in \mathbb{C} \setminus (\Delta_{k-1} \cup \Delta_k)$ справедливо $\tilde{z}_k(x) = z_k(x)$.

В оставшейся части доказательства установим (4.13), (4.14). Мы проведем довольно изощренное рассуждение, в котором используются полные массы некоторых равновесных мер. Другое доказательство можно найти в [4; предложения 2.1, 2.2].

Для начала рассмотрим меру s_k на Δ_k с плотностью

$$ds_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\tilde{z}'_{k,+}(x)}{\tilde{z}_{k,+}(x)} - \frac{\tilde{z}'_{k,-}(x)}{\tilde{z}_{k,-}(x)} \right) dx, \quad x \in \Delta_k, \quad (4.15)$$

$k = 1, \dots, p$, где штрихом обозначаются производные по x , а индексы плюс и минус указывают на граничные предельные значения в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости. Заметим, что плотность (4.15) корректно определена во внутренних точках Δ_k и стремится к бесконечности на концах Δ_k не быстрее чем единица на квадратный корень (это следует из представления $\tilde{z}_k$ в локальных координатах вблизи концов). Покажем, что s_k – вещественнозначная (возможно, знакопеременная) мера с носителем на Δ_k полной массы:

$$s_k(\Delta_k) := \int_{\Delta_k} ds_k(x) = p + 1 - k, \quad k = 1, \dots, p. \quad (4.16)$$

Для доказательства утверждения (4.16) сначала выведем следующее соотношение между преобразованиями Коши:

$$\int_{\Delta_{k-1}} \frac{1}{x-t} ds_{k-1}(t) - \int_{\Delta_k} \frac{1}{x-t} ds_k(t) = \frac{\tilde{z}'_k(x)}{\tilde{z}_k(x)}, \quad x \in \mathbb{C} \setminus (\Delta_{k-1} \cup \Delta_k), \quad (4.17)$$

при $k = 1, \dots, p$, где мы условимся, что $\Delta_0 = \emptyset$ и $s_0 = 0$. В самом деле, соотношение (4.17) легко получить деформацией контура интегрирования, используя равенство $\tilde{z}_{k-1,\pm}(x) = \tilde{z}_{k,\mp}(x)$ при $x \in \Delta_{k-1}$.

Из соотношений

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1(x) &\sim x^{-p}, & x &\rightarrow \infty, \\ \tilde{z}_k(x) &\sim C_k x, & x &\rightarrow \infty, \quad 2 \leq k \leq p+1, \end{aligned}$$

мы видим, что при $x \rightarrow \infty$ логарифмические производные имеют асимптотику

$$\frac{\tilde{z}'_k(x)}{\tilde{z}_k(x)} \sim \begin{cases} -\frac{p}{x}, & k = 1, \\ \frac{1}{x}, & k = 2, \dots, p. \end{cases}$$

Приравнивая члены, содержащие $1/x$ в асимптотиках обеих частей (4.17) при $x \rightarrow \infty$, получим

$$s_{k-1}(\Delta_{k-1}) - s_k(\Delta_k) = \begin{cases} -p, & k = 1, \\ 1, & k = 2, \dots, p. \end{cases}$$

Отсюда обычной индукцией по $k = 1, \dots, p$ можно вывести утверждение (4.16).

В силу симметрии относительно комплексного сопряжения $\tilde{z}_k(\bar{x}) = \overline{\tilde{z}_k(x)}$, где чертой обозначено сопряжение. Теперь мы видим из (4.15), (4.16), что

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Delta_k} \operatorname{Im} \left(\frac{\tilde{z}'_{k,+}(x)}{\tilde{z}_{k,+}(x)} \right) dx = p + 1 - k, \quad (4.18)$$

где Im – мнимая часть комплексного числа.

С другой стороны, рассмотрим (положительную) меру σ_k на Γ_k с плотностью (см. [24])

$$d\sigma_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^k \left(\frac{z'_{j,+}(x)}{z_{j,+}(x)} - \frac{z'_{j,-}(x)}{z_{j,-}(x)} \right) dx, \quad x \in \Gamma_k. \quad (4.19)$$

Она корректно определена на всякой открытой аналитической дуге в Γ_k (напомним, что Γ_k – конечное объединение аналитических дуг). Заметим, что тут используются корни z_j , а не $\tilde{z}_j$. Ограничение меры σ_k на вещественную ось имеет вид

$$d\sigma_k(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^k \operatorname{Im} \left(\frac{z'_{j,+}(x)}{z_{j,+}(x)} \right) dx, \quad x \in \Gamma_k \cap \mathbb{R}. \quad (4.20)$$

Теперь зафиксируем открытый интервал $J \subset \mathbb{R}$, не содержащий ни точек пересечения, ни концов аналитических дуг, составляющих каждое из множеств Γ_k . Также будем считать, что J не содержит изолированных точек пересечения Γ_k с вещественной осью. Тогда существует такое открытое подмножество $U \subset \mathbb{C}$, что $U \cap \mathbb{R} = J$ и вдобавок $U \cap \Gamma_k$ пусто или совпадает с J для каждого $k = 1, \dots, p$. Тогда граничные значения $z_{k,+}(x)$ однозначно определены для $x \in J$ и аналитически зависят от x .

Для интервала J существуют такие индексы $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_L \leq p$, что

$$\begin{aligned} |z_{1,+}(x)| &= \dots = |z_{m_1,+}(x)| < |z_{m_1+1,+}(x)| = \dots \\ &= |z_{m_2,+}(x)| < \dots < |z_{m_L+1,+}(x)| = \dots = |z_{p+1,+}(x)| \end{aligned} \quad (4.21)$$

при всех $x \in J$. Положим $m_0 := 0$ и $m_{L+1} := p+1$.

Мы покажем ниже, что $m_{k+1} - m_k \in \{1, 2\}$ при всех k , так что каждый кластер $|z_{m_k+1,+}(x)| = \dots = |z_{m_{k+1}+1,+}(x)|$ в (4.21) имеет длину 1 или 2.

В силу упорядочения (1.18) при $k = 0, \dots, L$ для каждого кластера

$$|z_{m_k+1,+}(x)| = \dots = |z_{m_{k+1}+1,+}(x)|$$

в (4.21) мы получаем неравенства

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon} (\operatorname{Re} \log z_{m_k+1}(x+i\varepsilon)) \right]_{\varepsilon=0+} \leq \dots \leq \left[\frac{d}{d\varepsilon} (\operatorname{Re} \log z_{m_{k+1}+1}(x+i\varepsilon)) \right]_{\varepsilon=0+}, \quad x \in J.$$

С учетом уравнений Коши–Римана отсюда получаем

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z'_{m_k+1,+}(x)}{z_{m_k+1,+}(x)} \right) \geq \dots \geq \operatorname{Im} \left(\frac{z'_{m_{k+1}+1,+}(x)}{z_{m_{k+1}+1,+}(x)} \right), \quad x \in J, \quad (4.22)$$

для $k = 0, \dots, L$.

В силу симметрии относительно комплексного сопряжения числа в (4.22) разбиваются на положительно-отрицательные пары, задаваемые условием

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z'_{m_k+j,+}(x)}{z_{m_k+j,+}(x)} \right) = - \operatorname{Im} \left(\frac{z'_{m_{k+1}+1-j,+}(x)}{z_{m_{k+1}+1-j,+}(x)} \right), \quad j = 1, \dots, m_{k+1} - m_k, \quad (4.23)$$

при всех $x \in J$ и $k = 0, \dots, L$. Заметим, что числа из (4.22) могут быть и тождественными нулями, если корень вещественный. Ясно, что если $m_{k+1} - m_k$ есть нечетное число, то хотя бы один корень будет вещественным.

Пусть

$$\tilde{m}_k := \left\lfloor \frac{m_k + m_{k+1}}{2} \right\rfloor.$$

В силу проведенных рассуждений для всех $k = 0, \dots, L$ для плотности меры $\sigma_{\tilde{m}_k}$ в (4.20) получим

$$\frac{d\sigma_{\tilde{m}_k}(x)}{dx} = \frac{1}{\pi} \sum_{j=m_k+1}^{\tilde{m}_k} \operatorname{Im} \left(\frac{z'_{j,+}(x)}{z_{j,+}(x)} \right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=m_k+1}^{m_{k+1}} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{z'_{j,+}(x)}{z_{j,+}(x)} \right) \right|, \quad x \in J,$$

где первое равенство является следствием приведения подобных в силу (4.23), а второе следует из (4.22), (4.23). Итак, сумма полных масс мер σ_k на интервале J имеет нижнюю грань:

$$\sigma_1(J) + \dots + \sigma_p(J) \geq \sigma_{\tilde{m}_0}(J) + \dots + \sigma_{\tilde{m}_L}(J) = \frac{1}{2\pi} \int_J \sum_{j=1}^{p+1} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{z'_{j,+}(x)}{z_{j,+}(x)} \right) \right| dx. \quad (4.24)$$

Положив $\Delta := \bigcup_{k=1}^p \Delta_k$, получим

$$\sigma_1(\Delta) + \dots + \sigma_p(\Delta) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} \sum_{j=1}^{p+1} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{z'_{j,+}(x)}{z_{j,+}(x)} \right) \right| dx. \quad (4.25)$$

С другой стороны, (положительная) мера σ_k удовлетворяет соотношению из [24; следствие 4.2] (или см. доказательство (4.16))

$$\sigma_k(\Delta) \leq \sigma_k(\mathbb{C}) = \sigma_k(\Gamma_k) = p + 1 - k \quad (4.26)$$

при $k = 1, \dots, p$. Подставляя его в (4.25), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p (p + 1 - k) &\geq \sum_{k=1}^p \sigma_k(\Delta) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} \sum_{k=1}^{p+1} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{z'_{k,+}(x)}{z_{k,+}(x)} \right) \right| dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} \sum_{k=1}^{p+1} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{\tilde{z}'_{k,+}(x)}{\tilde{z}_{k,+}(x)} \right) \right| dx = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^p \int_{\Delta_k} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{\tilde{z}'_{k,+}(x)}{\tilde{z}_{k,+}(x)} \right) \right| dx \\ &\geq \sum_{k=1}^p (p + 1 - k), \end{aligned}$$

где второе соотношение верно в силу (4.25), а третье выполняется, так как корни $\tilde{z}_k$ являются перестановкой z_k . В четвертом соотношении используется тот факт, то на Δ_k имеется ровно два не вещественных корня $\tilde{z}_k(x)$ и $\tilde{z}_{k+1}(x)$, которые комплексно сопряжены. Наконец, последнее неравенство верно в силу (4.18).

Из этой цепи неравенств получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 4.1. (а) *Выполнено включение*

$$\Gamma_k \subset \Delta = \bigcup_{j=1}^p \Delta_j, \quad k = 1, \dots, p. \quad (4.27)$$

(б) В (4.21) кластеры длины ≥ 3 могут возникнуть, только если для них все величины в (4.22) обращаются в нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Сравнивая два крайних выражения в цепочке неравенств, мы видим, что каждое из нестрогих неравенств на самом деле – равенство. Поскольку первое неравенство в цепочке следует из (4.26), это, в частности, означает, что $\sigma_k(\Delta) = \sigma_k(\mathbb{C}) = \sigma_k(\Gamma_k) = p + 1 - k$ для всех k . Отсюда вытекает (4.27), так как каждая дуга в Γ_k несет строго положительную массу меры σ_k .

Докажем только что сделанное утверждение. Заметим, что произведение $z_1(x) \cdots z_k(x)$ аналитично в $\mathbb{C} \setminus \Gamma_k$ (см. [27; предложение 3.5]); более того, разбивая при необходимости аналитические дуги из Γ_k на конечное число поддуг, мы можем аналитически продолжить $z_1(x) \cdots z_k(x)$ через эти поддуги, причем предложение имеет вид $z_{j_1}(x) \cdots z_{j_k}(x)$, где $\{j_1, \dots, j_k\} \neq \{1, \dots, k\}$ (см. [27; предложение 3.4]). Отсюда следует, что функция $\log |z_1(x) \cdots z_k(x)|$ не гармонична нигде на Γ_k . Поскольку $-\log |z_1(x) \cdots z_k(x)| + C$ (с некоторой константой C) – логарифмический потенциал меры σ_k из (4.19) (см. [24; предложение 5.10]), из этой негармоничности можно сделать вывод, что σ_k действительно нетривиальна на всякой поддуге Γ_k , что и доказывает утверждение.

(b) Поскольку в выписанной выше цепи на самом деле имеем равенство, мы опять получаем, что нестрогое неравенство в (4.24) является равенством. Отсюда легко вывести утверждение (b).

Теперь мы можем доказать (1.20). Сначала покажем, что $\Gamma_1 = \Delta_1$. Мы уже знаем из (4.27), что $\Gamma_1 \subset \Delta$. Тогда равенство $\tilde{z}_1(x) = z_1(x)$, которое было установлено для достаточно больших x , остается в силе вообще для всех $x \in \mathbb{C} \setminus \Delta$. Используя его, найдем

$$z_{1,+}(x) = \tilde{z}_{1,+}(x) = \tilde{z}_{1,-}(x) = z_{1,-}(x), \quad x \in \Delta \setminus \Delta_1,$$

где мы пользуемся аналитичностью $\tilde{z}_1(x)$ вне Δ_1 . Следовательно, $z_1(x)$ аналитична на $\Delta \setminus \Delta_1$, так что в силу [27; предложение 3.4] $(\Delta \setminus \Delta_1) \cap \Gamma_1 = \emptyset$ и, значит, $\Gamma_1 \subset \Delta_1$. Обратное включение $\Delta_1 \subset \Gamma_1$ получается непосредственно, так как $z_{1,+}(x) = \tilde{z}_{1,+}(x) = \tilde{z}_{1,-}(x) = z_{1,-}(x)$ при $x \in \Delta_1$, что дает два различных корня одинаковой абсолютной величины. Это доказывает, что $\Gamma_1 = \Delta_1$.

Поскольку мера σ_1 нетривиальна на $\Gamma_1 = \Delta_1$ (см. доказательство п. (а) леммы 4.1),

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z'_{1,+}(x)}{z_{1,+}(x)} \right) \neq 0 \quad \text{для п.в. } x \in \Delta_1.$$

Значит, кластер

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z'_{1,+}(x)}{z_{1,+}(x)} \right) \geq \dots \geq \operatorname{Im} \left(\frac{z'_{m_1,+}(x)}{z_{m_1,+}(x)} \right)$$

на отрезке Δ_1 имеет длину $m_1 \leq 2$ в силу леммы 4.1, (b). С другой стороны, мы видим также, что $m_1 \geq 2$, поскольку $\tilde{z}_{1,\pm}(x) = \tilde{z}_{2,\mp}(x)$ при $x \in \Delta_1$ должны быть комплексно сопряжены. Значит, $m_1 = 2$. Это также показывает, что $z_2(x) = \tilde{z}_2(x)$ для всех x вблизи Δ_1 , а так как $\Gamma_2 \subset \Delta$ (опять-таки в силу (4.27)), то и для всех $x \in \mathbb{C} \setminus \Delta$.

Докажем теперь, что $\Gamma_2 = \Delta_2$. В силу предыдущего абзаца

$$z_{1,+}(x)z_{2,+}(x) = \tilde{z}_{1,+}(x)\tilde{z}_{2,+}(x) = \tilde{z}_{1,-}(x)\tilde{z}_{2,-}(x) = z_{1,-}(x)z_{2,-}(x), \quad x \in \Delta \setminus \Delta_2,$$

где мы используем то, что произведение $\tilde{z}_1\tilde{z}_2$ аналитично вне Δ_2 . Таким образом, z_1z_2 аналитично на $\Delta \setminus \Delta_2$, так что из предложения 3.4 в [27] мы опять

видим, что $(\Delta \setminus \Delta_2) \cap \Gamma_2 = \emptyset$ и потому $\Gamma_2 \subset \Delta_2$. Обратное включение $\Delta_2 \subset \Gamma_2$ снова следует из равенства $z_{2,+}(x) = \tilde{z}_{2,+}(x) = \overline{\tilde{z}_{2,-}(x)} = \overline{z_{2,-}(x)}$ при $x \in \Delta_2$, которое показывает, что существуют два различных корня одинаковой абсолютной величины. Это означает, что $\Gamma_2 = \Delta_2$.

Эти рассуждения можно продолжить и показать, что $\Gamma_k = \Delta_k$ для всех $k = 3, \dots, p$. В частности, $\tilde{z}_k(x) = z_k(x)$ при $x \in \mathbb{C} \setminus (\Delta_{k-1} \cup \Delta_k)$. Тем самым, предложение 1.4 доказано.

§ 5. Доказательство теоремы 1.2

Из (1.21), рассматривая произведения и сокращая сомножители, можно вывести, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{P_{mp+k-j}(x)}{P_{mp+k}(x)} = \frac{1}{F_k(x)F_{k-1}(x) \cdots F_{k-j+1}(x)},$$

$$j = 1, \dots, p, \quad k = 0, \dots, p-1,$$

где F_j трактуется как $F_{j(\bmod p)}$. Следовательно, при $n = mp + k$, $0 \leq k \leq p-1$, вектор (3.3) является аппроксимацией Эрмита–Паде системы функций

$$\mathbf{G}^{(k)} = (G_1^{(k)}, G_2^{(k)}, \dots, G_p^{(k)}),$$

где

$$G_j^{(k)}(x) = \frac{1}{F_k(x)} + c_{1,j-1} \frac{1}{F_k(x)F_{k-1}(x)} + \cdots$$

$$+ c_{j-1,j-1} \frac{1}{F_k(x)F_{k-1}(x) \cdots F_{k-j+1}(x)}. \quad (5.1)$$

В частности, получаем следующие условия ортогональности:

$$\int_{\gamma} P_n(x) x^l G_j^{(k)}(x) dx = 0, \quad l = 0, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, \dots, p, \quad (5.2)$$

где γ – произвольная замкнутая жорданова кривая, обходящая вокруг Δ_1 . Из (5.2) мы видим, что многочлены P_n удовлетворяют определенным соотношениям ортогональности, но с весами $G_j^{(k)}(x)$, зависящими от остатка k от деления n на p . Чтобы справиться с этой проблемой, нам надо удачно выбрать постоянные $c_{i,j-1}$ в (5.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Фиксируем j и k . Тогда постоянные $c_{i,j-1}$ в (5.1) можно выбрать так, чтобы*

$$G_j^{(k)}(x) = \frac{1}{F_{k-j+1}(x)}, \quad (5.3)$$

где опять F_{k-j+1} понимается как $F_{(k-j+1) \bmod p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. У функции $F_k(x)$ из (1.6) простой полюс в $x = \infty$ и

$$K_k := \lim_{x \rightarrow \infty} F_k(x) - x = -b_{k-1,k-1} \quad (5.4)$$

в силу (4.3) (где z надо заменить на x). Как уже отмечалось, по теореме Лиувилля для любых $j, k \in \{1, \dots, p\}$ разность $\psi^{(j)} - \psi^{(k)}$ постоянна на $\mathcal{R}$. Вместе с (5.4) и (4.2) это дает

$$F_j(x) - F_k(x) = \psi_0^{(j)}(x) - \psi_0^{(k)}(x) \equiv K_j - K_k, \quad x \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_1. \quad (5.5)$$

Пусть теперь j и k фиксированы. Мы вычислим сумму (5.1) справа налево. Точнее говоря, мы вводим функции $y_l(x)$, $l = 0, \dots, j$, где $y_0(x) = 0$, и далее при $l = 1, \dots, j$ используем рекуррентное определение

$$y_l(x) = y_{l-1}(x) + c_{j-l, j-1} \frac{1}{F_k(x)F_{k-1}(x) \cdots F_{k-j+l}(x)}, \quad (5.6)$$

где $c_{0, j-1} := 1$. Таким образом, $y_l(x)$ – сумма последних l членов в (5.1); в частности, $y_j(x) = G_j^{(k)}(x)$.

С помощью индукции по l докажем, что мы можем выбрать такие постоянные $c_{j-l, j-1}$, что

$$y_l(x) = c_{j-l, j-1} \frac{1}{F_k(x)F_{k-1}(x) \cdots F_{k-j+l+1}(x)F_{k-j+1}(x)} \quad (5.7)$$

для всех $l = 1, \dots, j$. При $l = j$ это доказывает предложение.

Осталось добиться выполнения (5.7). Для $l = 1$ это тривиально. Допустим по индукции, что (5.7) выполнено для $l - 1 \in \{1, \dots, j - 1\}$ вместо l . Тогда из определения (5.6) получим

$$\begin{aligned} y_l(x) &= c_{j-l+1, j-1} \frac{1}{F_k(x)F_{k-1}(x) \cdots F_{k-j+l}(x)F_{k-j+1}(x)} \\ &\quad + c_{j-l, j-1} \frac{1}{F_k(x)F_{k-1}(x) \cdots F_{k-j+l}(x)}. \end{aligned}$$

Приведем к общему знаменателю:

$$y_l(x) = \frac{c_{j-l+1, j-1} + c_{j-l, j-1} F_{k-j+1}(x)}{F_k(x)F_{k-1}(x) \cdots F_{k-j+l}(x)F_{k-j+1}(x)}.$$

Положим теперь $c_{j-l+1, j-1} := c_{j-l, j-1}(K_{k-j+l} - K_{k-j+1})$. Используя (5.5), имеем

$$y_l(x) = c_{j-l, j-1} \frac{F_{k-j+l}(x)}{F_k(x)F_{k-1}(x) \cdots F_{k-j+l}(x)F_{k-j+1}(x)},$$

что показывает выполнение (5.7) для l и доказывает шаг индукции.

Мы видим из (5.2) и (5.3), что многочлены Чебышёва–Никишина $P_n(x)$ удовлетворяют условиям ортогональности

$$\int_{\gamma} P_n(x) x^l \frac{1}{F_j(x)} dx = 0, \quad l = 0, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, \dots, p, \quad (5.8)$$

где γ снова является произвольной замкнутой жордановой кривой, охватывающей Δ_1 . Действительно, если $n = tp + k$, где $k \in \{0, 1, \dots, p - 1\}$, то мы можем

отдельно проверить (5.8) для каждого класса вычетов k , используя изложенные выше соображения и тот факт, что можно свободно переставлять меры, которым соответствует одинаковое количество соотношений ортогональности.

Стягивая контур γ в (5.8) к отрезку Δ_1 и используя формулу обращения Стильтьеса–Перрона, мы получим (см. (1.14))

$$\int_{\Delta_1} P_n(x) x^l d\nu_j(x) = 0, \quad l = 0, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, \dots, p. \quad (5.9)$$

Это доказывает теорему 1.2.

§ 6. Доказательство теоремы 1.3

В доказательстве используются идеи работы А. И. Аптекарева, В. А. Калягина и Е. Б. Саффа [6]; см. также [11].

Положим $(\nu_1^{(1)}, \dots, \nu_p^{(1)}) := (\nu_1, \dots, \nu_p)$. Эти меры составят первый уровень никишинской иерархии. Преобразование Коши меры $\nu_j^{(1)}$ будем обозначать через

$$F_j^{(1)}(x) := \frac{1}{F_j(x)}, \quad j = 1, \dots, p$$

(ср. (1.14)). По принципу обращения Стильтьеса–Перрона плотность меры $\nu_j^{(1)}$ задается формулой

$$\frac{d\nu_j^{(1)}(x)}{dx} = \frac{1}{2\pi i} (F_{j,-}^{(1)}(x) - F_{j,+}^{(1)}(x)), \quad x \in \Delta_1,$$

где с помощью символов плюс и минус мы снова обозначаем граничные предельные значения в верхней и нижней полуплоскостях. С помощью (4.2) это соотношение можно преобразовать как

$$\begin{aligned} \frac{d\nu_j^{(1)}(x)}{dx} &= \frac{-1}{2\pi i} \frac{\psi_{0,-}^{(j)}(x) - \psi_{0,+}^{(j)}(x)}{\psi_{0,+}^{(j)}(x)\psi_{0,-}^{(j)}(x)} = \frac{-1}{2\pi i} \frac{\psi_{0,-}^{(j)}(x) - \psi_{0,+}^{(j)}(x)}{\psi_0^{(j)}(x)\psi_1^{(j)}(x)} \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \frac{\psi_{0,-}^{(1)}(x) - \psi_{0,+}^{(1)}(x)}{\psi_0^{(j)}(x)\psi_1^{(j)}(x)}, \end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы используем тот факт, что в соответствии с (5.5)

$$\psi^{(j)}(x) = \psi^{(k)}(x) + K_j - K_k, \quad 1 \leq j, k \leq p, \quad (6.1)$$

откуда

$$\psi_{0,\pm}^{(j)}(x) = \psi_{0,\pm}^{(1)}(x) + K_j - K_1$$

(заметим, что $\psi_0^{(j)}\psi_1^{(j)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Delta_2)$, т.е. эта функция голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \Delta_2$).

Докажем, что отношение плотностей $\nu_j^{(1)}$ и $\nu_1^{(1)}$

$$F_j^{(2)}(x) := \frac{F_{j,-}^{(1)}(x) - F_{j,+}^{(1)}(x)}{F_{1,-}^{(1)}(x) - F_{1,+}^{(1)}(x)}, \quad x \in \Delta_1, \quad j = 2, \dots, p,$$

аналитически продолжается в $\mathbb{C} \setminus \Delta_2$ и выражается как преобразование Коши

$$F_j^{(2)}(x) = \int_{\Delta_2} \frac{1}{x-t} d\nu_j^{(2)}(t), \quad x \in \mathbb{C} \setminus \Delta_2, \quad j = 2, \dots, p,$$

для некоторой знакопостоянной меры $\nu_j^{(2)}$ с носителем на Δ_2 . Меры $(\nu_2^{(2)}, \dots, \nu_p^{(2)})$ составляют второй уровень никишинской иерархии.

Действительно,

$$F_j^{(2)}(x) = \frac{\psi_0^{(1)}(x)\psi_1^{(1)}(x)}{\psi_0^{(j)}(x)\psi_1^{(j)}(x)}, \quad x \in \Delta_1, \quad j = 2, \dots, p,$$

так что

$$F_j^{(2)} = \frac{\psi_0^{(1)}\psi_1^{(1)}}{\psi_0^{(j)}\psi_1^{(j)}} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Delta_2), \quad j = 2, \dots, p. \quad (6.2)$$

Более того, на бесконечности числитель принимает конечное значение, а знаменатель имеет простой полюс, так что

$$F_j^{(2)}(x) = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \infty,$$

имеет простой нуль в ∞ и больше никаких нулей в $\mathbb{C} \setminus \Delta_2$ не имеет.

Пусть γ – замкнутая положительно ориентированная жорданова кривая, охватывающая Δ_2 . По интегральной формуле Коши

$$F_j^{(2)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_j^{(2)}(t)}{x-t} dt$$

для всех x снаружи γ . Стягивая γ к Δ_2 , мы получим

$$F_j^{(2)}(x) = \int_{\Delta_2} \frac{d\nu_j^{(2)}(t)}{x-t},$$

где

$$d\nu_j^{(2)}(t) = \frac{1}{2\pi i} (F_{j,-}^{(2)}(t) - F_{j,+}^{(2)}(t)) dt, \quad t \in \Delta_2.$$

Поскольку $\psi_0^{(k)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Delta_1)$, $k = 1, \dots, p$, и $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, плотность меры $\nu_j^{(2)}$ имеет следующий вид:

$$\frac{d\nu_j^{(2)}(x)}{dx} = \frac{1}{2\pi i} (F_{j,-}^{(2)}(x) - F_{j,+}^{(2)}(x)) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\psi_0^{(1)}(x)}{\psi_0^{(j)}(x)} \left(\frac{\psi_{1,-}^{(1)}(x)}{\psi_{1,-}^{(j)}(x)} - \frac{\psi_{1,+}^{(1)}(x)}{\psi_{1,+}^{(j)}(x)} \right), \quad x \in \Delta_2.$$

С другой стороны, с помощью (6.1) последнее выражение в скобках приводится к виду

$$\frac{\psi_{1,-}^{(1)}(x)\psi_{1,+}^{(j)}(x) - \psi_{1,+}^{(1)}(x)\psi_{1,-}^{(j)}(x)}{\psi_{1,-}^{(j)}(x)\psi_{1,+}^{(j)}(x)} = \frac{(K_j - K_1)(\psi_{1,-}^{(1)}(x) - \psi_{1,+}^{(1)}(x))}{\psi_{1,-}^{(j)}(x)\psi_{1,+}^{(j)}(x)},$$

так как

$$\psi_{1,-}^{(j)}(x)\psi_{1,+}^{(j)}(x) = \psi_{2,+}^{(j)}(x)\psi_{1,+}^{(j)}(x) = \psi_{1,-}^{(j)}(x)\psi_{2,-}^{(j)}(x)$$

аналитически продолжается в окрестность Δ_2 . Следовательно,

$$\frac{d\nu_j^{(2)}(x)}{dx} = \frac{K_j - K_1}{2\pi i} \frac{\psi_0^{(1)}(x)(\psi_{1,-}^{(1)}(x) - \psi_{1,+}^{(1)}(x))}{\psi_0^{(j)}(x)\psi_1^{(j)}(x)\psi_2^{(j)}(x)}, \quad x \in \Delta_2, \quad j = 2, \dots, p,$$

где $\psi_0^{(j)}\psi_1^{(j)}\psi_2^{(j)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Delta_3)$ и $\psi_0^{(1)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Delta_1)$. Однако в силу симметрии этих функций мы видим, что $\psi_0^{(1)}/(\psi_0^{(j)}\psi_1^{(j)}\psi_2^{(j)})$ принимает вещественные значения постоянного знака на Δ_2 . С другой стороны,

$$\psi_{1,-}^{(1)}(x) - \psi_{1,+}^{(1)}(x) = \psi_{1,-}^{(1)}(x) - \overline{\psi_{1,-}^{(1)}(x)} = 2i \operatorname{Im}\{\psi_{1,-}^{(1)}(x)\}, \quad x \in \Delta_2.$$

Если бы в некоторой внутренней точке x отрезка Δ_2 выполнялось $\psi_{1,-}^{(1)}(x) = 0$, то в этой точке мы получили бы $\psi_{1,-}^{(1)}(x) = \psi_{1,+}^{(1)}(x)$. Ясно, что это невозможно, так как отображение $\psi^{(1)}$ взаимно однозначно на $\mathcal{R}$, а x_+ и x_- – различные точки этой римановой поверхности. Итак, для всех $j = 2, \dots, p$ мера $\nu_j^{(2)}$ на Δ_2 имеет постоянный знак.

В общем случае зафиксируем $l \in \{2, \dots, p\}$ и допустим, что мы уже определили меры $(\nu_{l-1}^{(l-1)}, \dots, \nu_p^{(l-1)})$ с носителями на Δ_{l-1} , образующие $(l-1)$ -й уровень никишинской иерархии. Обозначим преобразование Коши меры $\nu_j^{(l-1)}$ через $F_j^{(l-1)}$, $j = l-1, \dots, p$. Пусть мы вдобавок уже показали, что

$$F_j^{(l-1)}(x) = \frac{m_{l-2,j}}{m_{l-2,l-2}} \frac{\psi_0^{(l-2)}(x) \cdots \psi_{l-2}^{(l-2)}(x)}{\psi_0^{(j)}(x) \cdots \psi_{l-2}^{(j)}(x)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Delta_{l-1}) \quad (\psi_0^{(0)} \equiv 1),$$

$$\begin{aligned} \frac{d\nu_j^{(l-1)}(x)}{dx} &= \frac{1}{2\pi i} (F_{j,-}^{(l-1)}(x) - F_{j,+}^{(l-1)}(x)) \\ &= \frac{m_{l-1,j}}{2\pi i} \frac{\psi_0^{(l-2)}(x) \cdots \psi_{l-3}^{(l-2)}(x)}{\psi_0^{(j)}(x) \cdots \psi_{l-1}^{(j)}(x)} (\psi_{l-2,-}^{(1)}(x) - \psi_{l-2,+}^{(1)}(x)) \end{aligned}$$

для некоторых постоянных $m_{l-2,j}, m_{l-1,j} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (На самом деле $m_{0,j} = 1$ при $j = 0, \dots, p$, $m_{1,j} = -1$ при $j = 1, \dots, p$ и $m_{2,j} = K_j - K_1$ при $j = 2, \dots, p$.)

Тогда положим

$$F_j^{(l)}(x) := \frac{F_{j,-}^{(l-1)}(x) - F_{j,+}^{(l-1)}(x)}{F_{l-1,-}^{(l-1)}(x) - F_{l-1,+}^{(l-1)}(x)}, \quad x \in \Delta_{l-1},$$

при $j = l, \dots, p$. Мы покажем, что эта функция продолжается аналитически в $\mathbb{C} \setminus \Delta_l$ и тоже является преобразованием Коши:

$$F_j^{(l)}(x) = \int_{\Delta_l} \frac{1}{x-t} d\nu_j^{(l)}(t), \quad x \in \mathbb{C} \setminus \Delta_l, \quad (6.3)$$

некоторой знакопостоянной меры $\nu_j^{(l)}$ на Δ_l . Меры $(\nu_l^{(l)}, \dots, \nu_p^{(l)})$ составят l -й уровень никишинской иерархии. Тем самым, индукция будет завершена.

На самом деле из формул индуктивной гипотезы следует, что

$$F_j^{(l)}(x) = \frac{m_{l-1,j}}{m_{l-1,l-1}} \frac{\psi_0^{(l-1)}(x) \cdots \psi_{l-1}^{(l-1)}(x)}{\psi_0^{(j)}(x) \cdots \psi_{l-1}^{(j)}(x)}, \quad x \in \Delta_{l-1},$$

и в силу свойств ветвей $\psi_k^{(l-1)}$ и $\psi_k^{(j)}$, $k = 0, \dots, l-1$, это выражение аналитически продолжается на все множество $\mathbb{C} \setminus \Delta_l$. В бесконечности числитель принимает конечное значение, а у знаменателя – простой полюс. Значит,

$$F_j^{(l)}(x) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Delta_l), \quad F_j^{(l)}(x) = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Теперь из теоремы Коши получаем, что

$$F_j^{(l)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_j^{(l)}(t)}{x-t} dt$$

для всех x , лежащих снаружи γ , где γ – замкнутая положительно ориентированная жорданова кривая, охватывающая Δ_l . Стыгивая γ к Δ_l , мы видим, что выполнено (6.3) с условием

$$\begin{aligned} \frac{d\nu_j^{(l)}(x)}{dx} &= \frac{1}{2\pi i} (F_{j,-}^{(l)}(x) - F_{j,+}^{(l)}(x)) \\ &= \frac{m_{l,j}}{2\pi i} \frac{\psi_0^{(l-1)}(x) \cdots \psi_{l-2}^{(l-1)}(x)}{\psi_0^{(j)}(x) \cdots \psi_{l-1}^{(j)}(x)} (\psi_{l-1,-}^{(1)}(x) - \psi_{l-1,+}^{(1)}(x)) \end{aligned} \quad (6.4)$$

для $x \in \Delta_l$, где

$$m_{l,j} = \frac{m_{l-1,j}(K_j - K_{l-1})}{m_{l-1,l-1}}.$$

Здесь мы также воспользовались формулой (6.1). Используя выражение для $d\nu_j^{(l)}(x)/dx$ и рассуждая, как выше в случае $l = 2$, получим, что для всякого $j = l, \dots, p$ мера $\nu_j^{(l)}$ имеет постоянный знак на Δ_l . Абсолютная непрерывность этих мер относительно меры Лебега сразу следует из формул для них. Теорема 1.3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Заметим, что порождающие меры ρ_j из теоремы 1.3 в точности совпадают с “диагональными” мерами никитинской иерархии, т.е. $\rho_j = \nu_j^{(j)}$ задается формулой (6.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Рекуррентное соотношение между константами $m_{l,j}$, приведенное выше, позволяет нам выписать равенство

$$m_{l,j} = \frac{\prod_{i=1}^{l-1} (K_j - K_i)}{\prod_{i=1}^{l-2} (K_{l-1} - K_i)} = \frac{\prod_{i=0}^{l-2} (b_{i,i} - b_{j-1,j-1})}{\prod_{i=0}^{l-3} (b_{i,i} - b_{l-2,l-2})} \quad (6.5)$$

для всех $l = 2, \dots, p$ и $j = l, \dots, p$, где второе равенство следует из (5.4).

§ 7. Доказательство теоремы 1.1

Пусть

$$F_k(z) = z - b_{k-1,k-1} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_l}{z^l}, \quad |z| \geq R_0, \quad k = 1, \dots, p,$$

– лорановское разложение F_k на бесконечности (здесь мы используем (5.4), (5.5)). Положим

$$F(z) = z + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_l}{z^l}, \quad |z| \geq R_0.$$

Очевидным образом получаем

$$F_k(z) = F(z) - b_{k-1,k-1}. \quad (7.1)$$

Поскольку F получается сдвигом из функции F_k , являющейся ветвью конформного отображения римановой поверхности $\mathcal{R}$ на $\mathbb{C}$ (см. (4.2)), F также продолжается до конформного отображения $\mathcal{R}$ на $\mathbb{C}$. Пусть $\mathcal{F}$ – результат продолжения F на $\mathcal{R}$. При $j \neq k$ имеем $b_{j-1,j-1} \neq b_{k-1,k-1}$, так как в противном случае $F_j = F_k$. С учетом этого можно сделать вывод, что существует p различных точек $\zeta_0, \dots, \zeta_{p-1} \in \mathcal{R}$, в которых

$$\mathcal{F}(\zeta_k) = b_{k,k}, \quad k = 0, \dots, p-1.$$

В дальнейшем положим $\zeta_n = \zeta_k$ при $n \equiv k \pmod{p}$, $k \in \{0, \dots, p-1\}$.

Из (4.3) и (7.1) следует, что

$$b_{k,k-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} (z - F(z))F_k(z) = -c_1 =: \beta, \quad k = 0, \dots, p-1,$$

и (1.11) доказано.

Снова обращаясь к (4.3) и (7.1), мы видим, что

$$zF_k \cdots F_{k-p+1} = FF_k \cdots F_{k-p+1} + b_{k,k-1}F_{k-1} \cdots F_{k-p+1} + \cdots + b_{k,k-p}. \quad (7.2)$$

Перепишем (7.2), заменяя k на $k+1$ и учитывая, что

$$F_k \cdots F_{k-p+1} = F_{k+1} \cdots F_{k-p+2}.$$

Получим равенство

$$b_{k,k-1}F_{k-1} \cdots F_{k-p+1} + \cdots + b_{k,k-p} = b_{k+1,k}F_k \cdots F_{k-p+2} + \cdots + b_{k+1,k-p+1},$$

которое в силу (7.1) и того факта, что F продолжается на $\mathcal{R}$, принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & b_{k,k-1}(\mathcal{F} - b_{k-2,k-2}) \cdots (\mathcal{F} - b_{k-p,k-p}) + \cdots + b_{k,k-p+1}(\mathcal{F} - b_{k-p,k-p}) + b_{k,k-p} \\ &= b_{k+1,k}(\mathcal{F} - b_{k-1,k-1}) \cdots (\mathcal{F} - b_{k-p+1,k-p+1}) + \cdots \\ &+ b_{k+1,k-p+2}(\mathcal{F} - b_{k-p+1,k-p+1}) + b_{k+1,k-p+1}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Записав (7.3) в точке $\zeta_{k-p+1} \in \mathcal{R}$, получим

$$b_{k,k-p+1}(b_{k-p+1,k-p+1} - b_{k-p,k-p}) + b_{k,k-p} = b_{k+1,k-p+1}, \quad (7.4)$$

что эквивалентно (1.12) с $l = p-1$.

Теперь запишем (7.3) в точке $\zeta_{k-p+2} \in \mathcal{R}$. Это дает нам

$$\begin{aligned} & b_{k,k-p+2}(b_{k-p+2,k-p+2} - b_{k-p+1,k-p+1})(b_{k-p+2,k-p+2} - b_{k-p,k-p}) \\ & \quad + b_{k,k-p+1}(b_{k-p+2,k-p+2} - b_{k-p,k-p}) + b_{k,k-p} \\ & = b_{k,k-p+2}(b_{k-p+2,k-p+2} - b_{k-p+1,k-p+1})(b_{k-p+2,k-p+2} - b_{k-p,k-p}) \\ & \quad + b_{k,k-p+1}(b_{k-p+2,k-p+2} - b_{k-p+1,k-p+1}) \\ & \quad + b_{k,k-p+1}(b_{k-p+1,k-p+1} - b_{k-p,k-p}) + b_{k,k-p} \\ & = b_{k+1,k-p+2}(b_{k-p+2,k-p+2} - b_{k-p+1,k-p+1}) + b_{k+1,k-p+1}. \end{aligned}$$

С учетом (7.4) это равенство сводится к

$$\begin{aligned} & b_{k,k-p+2}(b_{k-p+2,k-p+2} - b_{k-p+1,k-p+1})(b_{k-p+2,k-p+2} - b_{k-p,k-p}) \\ & \quad + b_{k,k-p+1}(b_{k-p+2,k-p+2} - b_{k-p+1,k-p+1}) \\ & = b_{k+1,k-p+2}(b_{k-p+2,k-p+2} - b_{k-p+1,k-p+1}). \end{aligned}$$

Сократив обе части на $b_{k-p+2,k-p+2} - b_{k-p+1,k-p+1} (\neq 0)$, получаем

$$b_{k,k-p+2}(b_{k-p+2,k-p+2} - b_{k-p,k-p}) + b_{k,k-p+1} = b_{k+1,k-p+2}, \quad (7.5)$$

что и приводит к (1.12) с $l = p - 2$.

В общем случае предположим, что (1.12) выполнено для всех $l \in \{p - 1, p - 2, \dots, p - m\}$ при $m \leq p - 2$. Чтобы доказать, что это равенство выполняется и для $\tilde{l} := p - m - 1$, рассмотрим (7.3) в точке $\zeta_{k-\tilde{l}}$, что дает равенство

$$\begin{aligned} & b_{k,k-\tilde{l}}(b_{k-\tilde{l},k-\tilde{l}} - b_{k-\tilde{l}-1,k-\tilde{l}-1}) \cdots (b_{k-\tilde{l},k-\tilde{l}} - b_{k-p,k-p}) \\ & \quad + b_{k,k-\tilde{l}}(b_{k-\tilde{l},k-\tilde{l}} - b_{k-\tilde{l}-2,k-\tilde{l}-2}) \cdots (b_{k-\tilde{l},k-\tilde{l}} - b_{k-p,k-p}) + \cdots \\ & \quad + b_{k,k-p+2}(b_{k-\tilde{l},k-\tilde{l}} - b_{k-p+1,k-p+1})(b_{k-\tilde{l},k-\tilde{l}} - b_{k-p,k-p}) \\ & \quad + b_{k,k-p+1}(b_{k-\tilde{l},k-\tilde{l}} - b_{k-p,k-p}) + b_{k,k-p} \\ & = b_{k+1,k-\tilde{l}}(b_{k-\tilde{l},k-\tilde{l}} - b_{k-\tilde{l}-1,k-\tilde{l}-1}) \cdots (b_{k-\tilde{l},k-\tilde{l}} - b_{k-p+1,k-p+1}) \\ & \quad + b_{k+1,k-\tilde{l}-1}(b_{k-\tilde{l},k-\tilde{l}} - b_{k-\tilde{l}-2,k-\tilde{l}-2}) \cdots (b_{k-\tilde{l},k-\tilde{l}} - b_{k-p+1,k-p+1}) + \cdots \\ & \quad + b_{k+1,k-p+3}(b_{k-\tilde{l},k-\tilde{l}} - b_{k-p+2,k-p+2})(b_{k-\tilde{l},k-\tilde{l}} - b_{k-p+1,k-p+1}) \\ & \quad + b_{k+1,k-p+2}(b_{k-\tilde{l},k-\tilde{l}} - b_{k-p+1,k-p+1}) + b_{k+1,k-p+1}. \end{aligned}$$

Заменяем $b_{k,k-p+1}(b_{k-\tilde{l},k-\tilde{l}} - b_{k-p,k-p})$ в левой части на

$$b_{k,k-p+1}(b_{k-\tilde{l},k-\tilde{l}} - b_{k-p+1,k-p+1}) + b_{k,k-p+1}(b_{k-p+1,k-p+1} - b_{k-p,k-p}) \quad (7.6)$$

и применим (1.12) с $l = p - 1$. Мы можем сократить второе слагаемое в (7.6) с $b_{k,k-p}$ слева и $b_{k+1,k-p+1}$ справа. Теперь сомножитель $b_{k-\tilde{l},k-\tilde{l}} - b_{k-p+1,k-p+1}$ присутствует во всех членах полученного равенства. Сократим на него и получим новое соотношение, где в левой части стоит выражение

$$b_{k,k-p+2}(b_{k-\tilde{l},k-\tilde{l}} - b_{k-p,k-p}) + b_{k,k-p+1},$$

а справа стоит

$$b_{k+1,k-p+3}(b_{k-\tilde{l},k-\tilde{l}} - b_{k-p+2,k-p+2}) + b_{k+1,k-p+2}.$$

Аналогичным образом, заменим $b_{k,k-p+2}(b_{k-\tilde{l},k-\tilde{l}} - b_{k-p,k-p})$ на

$$b_{k,k-p+2}(b_{k-\tilde{l},k-\tilde{l}} - b_{k-p+2,k-p+2}) + b_{k,k-p+2}(b_{k-p+2,k-p+2} - b_{k-p,k-p}) \quad (7.7)$$

и применим (1.12) с $l = p - 2$. Тогда мы можем сократить второе слагаемое в (7.7) с $b_{k,k-p+1}$ в левой части и $b_{k+1,k-p+2}$ справа. Множитель $b_{k-\tilde{l},k-\tilde{l}} - b_{k-p+2,k-p+2}$ будет теперь входить во все члены, и мы сокращаем на него.

Ясно, что, продолжая таким образом, мы придем к требуемому равенству. Мы можем рассматривать соотношение (1.11) как частный случай (1.12), соответствующий $l = 0$, что завершает доказательство.

ВОПРОС 7.1. Пусть задан набор вещественных чисел $\{b_{k,j}\}$, удовлетворяющих (1.11), (1.12). Какие еще условия следует наложить, чтобы такой набор отвечал периодическим коэффициентам рекуррентного соотношения для некоторой последовательности многочленов Чебышёва–Никишина?

§ 8. Формулы и сильная асимптотика для функций второго рода

В этом параграфе найдена строгая асимптотика и точные формулы типа Видома для функций второго рода $\Psi_{n,l}$ из (1.25), (1.26). Функция $\Psi_{n,l}$ (где $1 \leq l \leq p$) решает следующую граничную задачу.

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА 8.1. (а) $\Psi_{n,l}$ – аналитическая функция $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta_l$.

(б) Скачок $\Psi_{n,l}$ удовлетворяет соотношению $(\Psi_{n,0}(z) = P_n(z))$

$$(\Psi_{n,l}(x))_- - (\Psi_{n,l}(x))_+ = 2\pi i \Psi_{n,l-1}(x) \frac{d\rho_l(x)}{dx}, \quad x \in \Delta_l. \quad (8.1)$$

(с) При $z \rightarrow \infty$

$$\Psi_{n,l}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_l+1}}\right),$$

где числа n_l такие же, как в (1.2).

(д) $\Psi_{n,l}$ ограничена вблизи концов α_l и β_l отрезка Δ_l , т.е. $\Psi_{n,l}(z) = O(1)$ при $z \rightarrow \alpha_l$ и $z \rightarrow \beta_l$.

Свойства (а) и (б) прямо следуют из определения $\Psi_{n,l}$. Свойство (с) – следствие соотношений ортогональности $\Psi_{n,l-1}$ по мере $d\rho_l$, установленных в [2; предложение 1]. Наконец, (д) вытекает из того, что $\Psi_{n,l-1}$ аналитична на Δ_l и

$$\frac{d\rho_l(x)}{dx} = \frac{d\nu_l^{(l)}(x)}{dx} = \begin{cases} O(|x - \alpha_l|^{1/2}), & x \rightarrow \alpha_l, \\ O(|x - \beta_l|^{1/2}), & x \rightarrow \beta_l; \end{cases}$$

см. (6.4) и замечание 6.1. Для заданного $\Psi_{n,l-1}$ (см. (8.1)) легко видеть, что $\Psi_{n,l}(z)$ однозначно определена поставленной выше граничной задачей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. Зафиксируем $l \in \{0, \dots, p\}$. Для достаточно больших m и любого $k = 0, \dots, p - 1$ верна следующая формула типа Видома:

$$\begin{aligned} \Psi_{mp+k,l}(x) &= \frac{(-1)^{p+k}}{f_p} \sum_{j=l+1}^{p+1} \frac{\det F^{[p,k+1]}(z_j(x), x)}{\prod_{t=1, t \neq j}^{p+1} (z_j(x) - z_t(x))} \\ &\quad \times \left(\prod_{i=0}^{l-1} m_{i+1,i+1} \frac{\psi_i^{(1)}(x) - \psi_{j-1}^{(1)}(x)}{\psi_i^{(l)}(x) \psi_{j-1}^{(i+1)}(x)} \right) z_j(x)^{-m-1}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Постоянные $m_{i+1,i+1}$ определены в (6.4) и (6.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 8.3. Правая часть в (8.2) может быть вычислена во всех точках $x \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ – множество точек $x \in \mathbb{C}$, в которых $z_i(x) = z_j(x)$ для некоторого $i \neq j$. Таким образом, $\mathcal{A}$ – конечное множество нулей дискриминанта функции переменной z $f(z, x) = 0$ из (1.17). Заметим, что концевые точки Δ_l лежат в $\mathcal{A}$.

Произведение величин $m_{i+1, i+1}$ из (8.2) можно вычислить с помощью (6.5):

$$\prod_{i=0}^{l-1} m_{i+1, i+1} = - \prod_{i=1}^{l-1} (K_l - K_i) = - \prod_{i=0}^{l-2} (b_{i, i} - b_{l-1, l-1}).$$

(Знак минус возникает из равенства $m_{1,1} = -1$.) Также из (1.21), (1.24) и (4.2) следует, что

$$\psi_{j-1}^{(k)}(x) = - \frac{\det F^{[p, k+1]}(z_j(x), x)}{\det F^{[p, k]}(z_j(x), x)} \quad (8.3)$$

при всех $k = 1, \dots, p-1$ и $j = 1, \dots, p+1$, а

$$\psi_{j-1}^{(p)}(x) = (-1)^{p-1} z_j^{-1}(x) \frac{\det F^{[p, 1]}(z_j(x), x)}{\det F^{[p, p]}(z_j(x), x)} \quad (8.4)$$

при $j = 1, \dots, p+1$, так что все величины в (8.2) на самом деле зависят от блочного тёмплицева символа $F(z, x)$ из (1.16), рассматриваемого в корнях $z = z_j(x)$.

Мы докажем формулу (8.2) только для достаточно больших m , хотя она, возможно, выполняется для всех m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 8.2. Докажем (8.2) индукцией по l . Случай $l = 0$ сводится к (1.22). В качестве предположения индукции допустим, что (8.2) выполнено для $l-1$ вместо l . Нам надо проверить, что правая часть (8.2) удовлетворяет четырем условиям (a)–(d) из граничной задачи 8.1. На самом деле покажем, что правая часть (8.2), которую мы обозначим через $\tilde{\Psi}_{mp+k, l}$, удовлетворяет ослабленному варианту (a)–(d), когда эти условия заменяются на следующие.

(a') $\tilde{\Psi}_{mp+k, l}(z)$ – аналитическая функция $z \in \mathbb{C} \setminus (\Delta_l \cup \mathcal{A})$.

(b') Скачок $\tilde{\Psi}_{mp+k, l}$ удовлетворяет соотношению

$$(\tilde{\Psi}_{mp+k, l}(x))_- - (\tilde{\Psi}_{mp+k, l}(x))_+ = 2\pi i \tilde{\Psi}_{mp+k, l-1}(x) \frac{d\rho_l(x)}{dx}, \quad x \in \Delta_l \setminus \mathcal{A}.$$

(c') При $z \rightarrow \infty$

$$\tilde{\Psi}_{mp+k, l}(z) = O\left(\frac{1}{z^{m+\delta}}\right),$$

где $\delta \in \mathbb{R}$ – некоторая постоянная, не зависящая от m .

(d') Для всякой точки $a_i \in \mathcal{A}$ существует такое целое число q_i , что в окрестности этой точки $\tilde{\Psi}_{mp+k, l}(z) = O((z - a_i)^{-q_i/2})$.

Целое число q_i окажется равным кратности $x = a_i \in \mathcal{A}$ как нуля дискриминанта $f(z, x) = 0$. Решение граничной задачи (a')–(d') единственно, только если m достаточно велико, поскольку тогда влияние (возможных) полюсов в точках множества $\mathcal{A}$ не может преодолеть влияние нуля высокого порядка на бесконечности. Это доказывает, что $\Psi_{mp+k, l} \equiv \tilde{\Psi}_{mp+k, l}$, т.е. выполнено (8.2).

В силу (8.3), (8.4) $\tilde{\Psi}_{mp+k,l}$ – симметричная функция переменных $z_{l+1}, \dots, z_{p+1}$, а также симметричная функция $z_1, \dots, z_l$. Точнее, если рассмотреть $\tilde{\Psi}_{mp+k,l}$ как функцию $\Lambda(z_1, \dots, z_l, z_{l+1}, \dots, z_{p+1}, x)$ переменных z_k и x , то

$$\Lambda(z_1, \dots, z_l, z_{l+1}, \dots, z_{p+1}, x) = \Lambda(z_1^*, \dots, z_l^*, z_{l+1}^*, \dots, z_{p+1}^*, x),$$

где $(z_1^*, \dots, z_l^*)$ – произвольная перестановка $(z_1, \dots, z_l)$, а $(z_{l+1}^*, \dots, z_{p+1}^*)$ – произвольная перестановка $(z_{l+1}, \dots, z_{p+1})$. Отсюда следует аналитичность $\tilde{\Psi}_{mp+k,l}$ в $\mathbb{C} \setminus (\Delta_l \cup \mathcal{A})$, что дает нам часть (а').

Для доказательства части (b') в выражении для $\tilde{\Psi}_{mp+k,l}(x)$ отделим член с $j = l + 1$ от членов с $j = l + 2, \dots, p + 1$ и начнем с последних. Сначала перепишем множитель с $i = l - 1$ в произведении в (8.2) следующим образом:

$$\frac{\psi_{l-1}^{(1)}(x) - \psi_{j-1}^{(1)}(x)}{\psi_{l-1}^{(l)}(x)\psi_{j-1}^{(l)}(x)} = \frac{\psi_{l-1}^{(l)}(x) - \psi_{j-1}^{(l)}(x)}{\psi_{l-1}^{(l)}(x)\psi_{j-1}^{(l)}(x)} = \frac{1}{\psi_{j-1}^{(l)}(x)} - \frac{1}{\psi_{l-1}^{(l)}(x)}. \quad (8.5)$$

Теперь заметим, что у выражения

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{p+k}}{f_p} \sum_{j=l+2}^{p+1} \frac{\det F^{[p,k+1]}(z_j(x), x)}{\prod_{t=1, t \neq j}^{p+1} (z_j(x) - z_t(x))} \\ & \times \left(\prod_{i=0}^{l-2} m_{i+1, i+1} \frac{\psi_i^{(1)}(x) - \psi_{j-1}^{(1)}(x)}{\psi_i^{(l)}(x)\psi_{j-1}^{(i+1)}(x)} \right) \frac{z_j(x)^{-m-1}}{\psi_{j-1}^{(l)}(x)} \end{aligned} \quad (8.6)$$

граничные значения со знаками плюс и минус на $\Delta_l \setminus \mathcal{A}$ совпадают. Это объясняется тем, что после отождествлений (8.3), (8.4) в равенство (8.6) симметрично входят переменные $z_{l+2}, \dots, z_{p+1}$, также симметрично входят $z_1, \dots, z_{l-1}$ и не входят z_l и z_{l+1} .

Равенство граничных значений выражения (8.6) сохраняется, и если опустить множитель $1/\psi_{j-1}^{(l)}(x)$. Тогда в силу (8.5) если вычесть граничные значения со знаком плюс из граничных значений со знаком минус слагаемых из $\tilde{\Psi}_{mp+k,l}(x)$ с $j = l + 2, \dots, p + 1$, то получим

$$\begin{aligned} & m_{l,l} \frac{\psi_{l-1,-}^{(l)}(x) - \psi_{l-1,+}^{(l)}(x)}{\psi_{l-1}^{(l)}(x)\psi_l^{(l)}(x)} \frac{(-1)^{p+k}}{f_p} \sum_{j=l+2}^{p+1} \frac{\det F^{[p,k+1]}(z_j(x), x)}{\prod_{t=1, t \neq j}^{p+1} (z_j(x) - z_t(x))} \\ & \times \left(\prod_{i=0}^{l-2} m_{i+1, i+1} \frac{\psi_i^{(1)}(x) - \psi_{j-1}^{(1)}(x)}{\psi_i^{(l)}(x)\psi_{j-1}^{(i+1)}(x)} \right) z_j(x)^{-m-1}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Здесь мы используем, что произведение $\psi_{l-1,-}^{(l)}(x)\psi_{l-1,+}^{(l)}(x) = \psi_{l-1}^{(l)}(x)\psi_l^{(l)}(x)$ аналитически продолжается через Δ_l .

С помощью равенств $z_{l+1,\pm}(x) = z_{l,\mp}(x)$, $\psi_{l,\pm}^{(s)}(x) = \psi_{l-1,\mp}^{(s)}(x)$, $x \in \Delta_l$, и некоторых других простых наблюдений легко понять, что разность между граничными значениями со знаками минус и плюс слагаемого в $\tilde{\Psi}_{mp+k,l}(x)$, соответствующего $j = l + 1$, задается выражением в (8.7), в котором сумма $\sum_{j=l+2}^{p+1}$ заменена на $\sum_{j=l}^{l+1}$. Наконец,

$$(\tilde{\Psi}_{mp+k,l}(x))_- - (\tilde{\Psi}_{mp+k,l}(x))_+ = m_{l,l} \frac{\psi_{l-1,-}^{(l)}(x) - \psi_{l-1,+}^{(l)}(x)}{\psi_{l-1}^{(l)}(x)\psi_l^{(l)}(x)}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{(-1)^{p+k}}{f_p} \sum_{j=l}^{p+1} \frac{\det F^{[p,k+1]}(z_j(x), x)}{\prod_{t=1, t \neq j}^{p+1} (z_j(x) - z_t(x))} \\
& \times \left(\prod_{i=0}^{l-2} m_{i+1, i+1} \frac{\psi_i^{(1)}(x) - \psi_{j-1}^{(1)}(x)}{\psi_i^{(l)}(x) \psi_{j-1}^{(i+1)}(x)} \right) z_j(x)^{-m-1}. \quad (8.8)
\end{aligned}$$

По предположению индукции известно, что $\Psi_{mp+k, l-1}(x)$ задается выражением из последней строки в (8.8), в котором $\psi_i^{(l)}(x)$ заменено на $\psi_i^{(l-1)}(x)$. Это наблюдение и (6.4) приводят к (b').

Наконец, условия (c') (ср. (4.1)) и (d') очевидны. Это и доказывает (8.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 8.4. Функции

$$\Phi_{n,l}(z) := \int_{\Delta_1} \frac{P_n(t)}{z-t} d\nu_l(t), \quad l = 1, \dots, p,$$

где ν_l – меры из условий ортогональности в теореме 1.2, также часто называют функциями второго рода (см. [2; с. 672]); они представляют собой линейную часть остаточного члена аппроксимаций Эрмита–Паде к функциям

$$\int_{\Delta_1} \frac{d\nu_l(t)}{z-t}, \quad l = 1, \dots, p.$$

Легко видеть, что при всех достаточно больших m верна формула

$$\begin{aligned}
\Phi_{mp+k, l}(x) &= \frac{(-1)^{p+k}}{f_p} \sum_{j=2}^{p+1} \frac{\det F^{[p,k+1]}(z_j(x), x)}{\prod_{t=1, t \neq j}^{p+1} (z_j(x) - z_t(x))} \\
&\times \left(\frac{1}{\psi_0^{(l)}(x)} - \frac{1}{\psi_{j-1}^{(l)}(x)} \right) z_j(x)^{-m-1}. \quad (8.9)
\end{aligned}$$

Проверку (8.9) мы оставляем читателю.

СЛЕДСТВИЕ 8.5. *Следующие сильные асимптотические формулы выполняются равномерно внутри соответствующих областей. Для любых фиксированных $k \in \{0, \dots, p-1\}$ и $l \in \{1, \dots, p\}$*

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow \infty} \Psi_{mp+k, l}(x) z_{l+1}(x)^{m+1} &= \frac{(-1)^{p+k}}{f_p} \frac{\det F^{[p,k+1]}(z_{l+1}(x), x)}{\prod_{t=1, t \neq l+1}^{p+1} (z_{l+1}(x) - z_t(x))} \\
&\times \left(\prod_{i=0}^{l-1} m_{i+1, i+1} \frac{\psi_i^{(1)}(x) - \psi_l^{(1)}(x)}{\psi_i^{(l)}(x) \psi_l^{(i+1)}(x)} \right), \quad x \in \mathbb{C} \setminus (\Delta_l \cup \Delta_{l+1}), \\
\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_{mp+k, l}(x) z_2(x)^{m+1} &= \frac{(-1)^{p+k}}{f_p} \frac{\det F^{[p,k+1]}(z_2(x), x)}{\prod_{t=1, t \neq 2}^{p+1} (z_2(x) - z_t(x))} \\
&\times \left(\frac{1}{\psi_0^{(l)}(x)} - \frac{1}{\psi_1^{(l)}(x)} \right), \quad x \in \mathbb{C} \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2).
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это сразу следует из (8.2), (8.9) и неравенства

$$|z_{l+1}(x)| < |z_j(x)|,$$

выполненного при $x \in \mathbb{C} \setminus (\Delta_l \cup \Delta_{l+1})$ для всех $j \geq l+2$ (ср. (1.18) и (1.19)).

§ 9. Другие возможные системы мультииндексов

Результаты настоящей статьи сформулированы для стандартной “лесенки” мультииндексов $\mathbf{n}$ в (1.2). В более общей постановке пусть $\Pi := (\pi_1, \dots, \pi_p)$ – произвольная перестановка $(1, \dots, p)$. Для $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ определим

$$\mathbf{n}^\Pi := (n_1^\Pi, \dots, n_p^\Pi) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^p$$

как единственный мультииндекс, в котором

$$n_{\pi_1}^\Pi \geq \dots \geq n_{\pi_p}^\Pi \geq n_{\pi_1}^\Pi - 1, \quad |\mathbf{n}^\Pi| := n_1^\Pi + \dots + n_p^\Pi = n. \quad (9.1)$$

Если $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p) = (1, \dots, p)$ – тождественная перестановка, то это определение сводится к (1.2).

Пусть $Q_n^\Pi(z)$ – многочлен совместной ортогональности степени n со старшим коэффициентом 1, удовлетворяющий соотношению (1.3), где вместо n_k стоит n_k^Π . Многочлены $Q_n^\Pi(z)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению вида (1.4) с коэффициентами $a_{n,m}^\Pi$, имеющими периодические пределы $b_{i,j}^\Pi$, как в (1.7). Введем блочные матрицы Тёплица T^Π и многочлены Чебышёва–Никишина $P_n^\Pi(z)$, как в (1.8)–(1.10) и (1.13) соответственно, только с $b_{i,j}^\Pi$ вместо $b_{i,j}$.

Тогда теорема 1.1 имеет следующее обобщение: величины $b_{i,j}^\Pi$ удовлетворяют соотношениям (1.11), (1.12), в которых β не зависит от перестановки Π .

Также выполняется следующее обобщение теоремы 1.2.

ТЕОРЕМА 9.1. *Многочлены Чебышёва–Никишина P_n^Π удовлетворяют условиям ортогональности*

$$\int_{\Delta_1} P_n^\Pi(x) x^l d\nu_k(x) = 0, \quad l = 0, \dots, n_k^\Pi - 1, \quad k = 1, \dots, p, \quad (9.2)$$

где ν_k – мера, определенная в (1.14) (и не зависящая от перестановки Π), а n_k^Π – k -я компонента $\mathbf{n}^\Pi$ из (9.1).

Теорема 9.1 доказывается аналогично теореме 1.2, так что мы оставим детали заинтересованному читателю. Дополнительную информацию можно также почерпнуть из следующих абзацев.

Определим $F_k^\Pi(z)$, как в (1.6), заменяя все Q_n на Q_n^Π . В силу основного результата [7] $F_k^\Pi(z) = F_{\pi_k}(z)$.

Зададим величины $F^\Pi(z, x)$, $f^\Pi(z, x)$, $z_k^\Pi(x)$ и Γ_k^Π , как в (1.16)–(1.19), с $b_{i,j}^\Pi$ вместо $b_{i,j}$. Повторяя доказательство из § 4, мы приходим к следующему аналогу формулы (4.11): для всех достаточно больших x

$$z_1^\Pi(x) = \frac{1}{F_1^\Pi(x) \cdots F_p^\Pi(x)} = \frac{1}{F_1(x) \cdots F_p(x)} = z_1(x),$$

где использовано сделанное выше замечание, что $F_k^\Pi(z) = F_{\pi_k}(z)$. Итак, при достаточно больших x значение $z_1^\Pi(x) = z_1(x)$ не зависит от перестановки Π . Тогда в силу аналитического продолжения никакой корень $z_k^\Pi(x) = z_k(x)$ не зависит от Π . В свою очередь это означает, что $f^\Pi(z, x) = f(z, x) = 0$ не зависит от Π , так что мы также имеем $\Gamma_k^\Pi = \Gamma_k = \Delta_k$.

ВОПРОС 9.2. Для фиксированных интервалов $\Delta_1, \dots, \Delta_p$ мы получили $p!$ блочных матриц Тёплица T^Π , индексированных перестановками Π элементов $1, \dots, p$. Все они удовлетворяют одному и тому же алгебраическому уравнению $f(z, x) = 0$, и для всех них выполнено (1.20). Существуют ли другие блочные матрицы Тёплица вида (1.8)–(1.10) (с произвольными $b_{i,j}$), дающие то же алгебраическое уравнение $f(z, x) = 0$ (или, что эквивалентно, для которых в обозначениях из (1.16)–(1.19)) $\Gamma_k = \Delta_k$ при всяком k ?

Мы предполагаем, что ответ на этот вопрос отрицательный.

Список литературы

- [1] G. López Lagomasino, I. A. Rocha, “A canonical family of multiple orthogonal polynomials for Nikishin systems”, *J. Math. Anal. Appl.*, **372**:2 (2010), 390–401.
- [2] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, В. Н. Сорокин, “Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа”, *Матем. сб.*, **188**:5 (1997), 33–58; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, V. N. Sorokin, “Hermite–Padé approximants for systems of Markov-type functions”, *Sb. Math.*, **188**:5 (1997), 671–696.
- [3] Е. М. Никишин, “О совместных аппроксимациях Паде”, *Матем. сб.*, **113**(155):4(12) (1980), 499–519; англ. пер.: E. M. Nikishin, “On simultaneous Padé approximants”, *Math. USSR-Sb.*, **41**:4 (1982), 409–425.
- [4] А. И. Аптекарев, “Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина”, *Матем. сб.*, **190**:5 (1999), 3–44; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Strong asymptotics of multiply orthogonal polynomials for Nikishin systems”, *Sb. Math.*, **190**:5 (1999), 631–669.
- [5] A. I. Aptekarev, V. A. Kaliaguine, G. López Lagomasino, I. A. Rocha, “On the limit behavior of recurrence coefficients for multiple orthogonal polynomials”, *J. Approx. Theory*, **139**:1–2 (2006), 346–370.
- [6] A. I. Aptekarev, V. A. Kaliaguine, E. B. Saff, “Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials”, *Constr. Approx.*, **30**:2 (2009), 175–223.
- [7] А. И. Аптекарев, Г. Лопес Лагомасино, И. А. Роча, “Асимптотика отношения полиномов Эрмита–Паде”, *Матем. сб.*, **196**:8 (2005), 3–20; англ. пер.: A. I. Aptekarev, G. López Lagomasino, I. A. Rocha, “Ratio asymptotics of Hermite–Padé polynomials for Nikishin systems”, *Sb. Math.*, **196**:8 (2005), 1089–1107.
- [8] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, “Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита–Паде”, *Матем. сб.*, **201**:2 (2010), 29–78; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. G. Lysov, “Systems of Markov functions generated by graphs and the asymptotics of their Hermite–Padé approximants”, *Sb. Math.*, **201**:2 (2010), 183–234.
- [9] Ж. Бустаманте Гонсалес, Г. Лопес Лагомасино, “Аппроксимации Эрмита–Паде для систем Никишина аналитических функций”, *Матем. сб.*, **183**:11 (1992), 117–138; англ. пер.: J. Bustamante, G. López Lagomasino, “Hermite–Padé approximation for Nikishin systems of analytic functions”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **77**:2 (1994), 367–384.
- [10] E. Coussement, W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials associated with the modified Bessel functions of the first kind”, *Constr. Approx.*, **19**:2 (2003), 237–263.
- [11] S. Delvaux, A. López, *High order three-term recursions, Riemann–Hilbert minors and Nikishin systems on star-like sets*, arXiv: abs/1202.4000.
- [12] K. Driver, H. Stahl, “Normality in Nikishin systems”, *Indag. Math. (N.S.)*, **5**:2 (1994), 161–187.

- [13] U. Fidalgo, G. López Lagomasino, “Nikishin systems are perfect”, *Constr. Approx.*, **34**:3 (2011), 297–356.
- [14] A. B. J. Kuijlaars, “Multiple orthogonal polynomial ensembles”, *Recent trends in orthogonal polynomials and approximation theory*, Contemp. Math., **507**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, 155–176.
- [15] A. B. J. Kuijlaars, A. Martínez-Finkelshtein, F. Wielonsky, “Non-intersecting squared Bessel paths and multiple orthogonal polynomials for modified Bessel weights”, *Comm. Math. Phys.*, **286**:1 (2009), 217–275.
- [16] A. López García, “Asymptotics of multiple orthogonal polynomials for a system of two measures supported on a starlike set”, *J. Approx. Theory*, **163**:9 (2011), 1146–1184.
- [17] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988; англ. пер.: Е. М. Nikishin, V. N. Sorokin, *Rational approximations and orthogonality*, Transl. Math. Monogr., **92**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [18] М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *The Markov moment problem and extremal problems*, Transl. of Math. Monographs, **50**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977.
- [19] Н. Widom, “Asymptotic behavior of block Toeplitz matrices and determinants”, *Advances in Math.*, **13** (1974), 284–322.
- [20] В. А. Калягин, “Аппроксимации Эрмита–Падэ и спектральный анализ несимметричных операторов”, *Матем. сб.*, **185**:6 (1994), 79–100; англ. пер.: V. A. Kalyagin, “Hermite–Padé approximants and spectral analysis of nonsymmetric operators”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **82**:1 (1995), 199–216.
- [21] J. Van Iseghem, “Vector orthogonal relations. Vector QD-algorithm”, *J. Comput. Appl. Math.*, **19**:1 (1987), 141–150.
- [22] V. A. Kaliaguine, “The operator moment problem, vector continued fractions and an explicit form of the Favard theorem for vector orthogonal polynomials”, *J. Comput. Appl. Math.*, **65**:1–3 (1995), 181–193.
- [23] А. И. Аптекарев, А. Э. Койэлаарс, “Аппроксимации Эрмита–Падэ и ансамбли совместно ортогональных многочленов”, *УМН*, **66**:6 (2011), 123–190; англ. пер.: A. I. Aptekarev, A. B. J. Kuijlaars, “Hermite–Padé approximations and multiple orthogonal polynomial ensembles”, *Russian Math. Surveys*, **66**:6 (2011), 1133–1199.
- [24] S. Delvaux, *Math. Nachr.*, arXiv: abs/1101.2644 (to appear).
- [25] M. Bender, S. Delvaux, A. B. J. Kuijlaars, “Multiple Meixner–Pollaczek polynomials and the six-vertex model”, *J. Approx. Theory*, **163**:11 (2011), 1606–1637.
- [26] A. Maté, P. Nevai, “A generalization of Poincaré’s theorem for recurrence equations”, *J. Approx. Theory*, **63**:1 (1990), 92–97.
- [27] M. Duits, A. B. J. Kuijlaars, “An equilibrium problem for the limiting eigenvalue distribution of banded Toeplitz matrices”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **30**:1 (2008), 173–196.

С. Дельво (S. Delvaux)

Department of Mathematics,
Katholieke Universiteit Leuven, Belgium
E-mail: steven.delvaux@wis.kuleuven.be

Поступила в редакцию
16.10.2011 и 13.07.2012

А. Лопес (A. López)

Department of Mathematics,
Katholieke Universiteit Leuven, Belgium
E-mail: abey.lopezgarcia@wis.kuleuven.be

Г. Лопес Лагомасино (G. López Lagomasino)

Departamento de Matemáticas,
Universidad Carlos III de Madrid, Spain
E-mail: lago@math.uc3m.es