Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев, Граничная задача для вырождающихся на границе области эллиптических уравнений в весовых пространствах Гёльдера, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 7, 25–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8078>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 10:42:37

УДК 517.956.226+517.956.4

Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев

Граничная задача для вырождающихся на границе области эллиптических уравнений в весовых пространствах Гёльдера

Изучается эллиптическая краевая задача для уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой в условиях слабого вырождения на границе области. Получены априорные оценки решения и доказана разрешимость задачи в пространствах Гёльдера с весом.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: вырождающееся эллиптическое уравнение, весовые пространства Гёльдера, априорная оценка.

DOI: 10.4213/sm8078

§ 1. Введение

Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (0, 1/2)$ таковы, что

$$0 < \beta < \min\{\alpha, 1 - \alpha\}. \quad (1.1)$$

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с границей класса $C^{2+\beta}$; мы используем стандартные пространства Гёльдера $C^{2+\beta}$. Пусть $d(x)$ – функция класса $C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$ такая, что

$$\nu \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq d(x) \leq C \operatorname{dist}(x, \partial\Omega), \quad \nu > 0; \quad (1.2)$$

здесь и всюду ниже через ν , C мы будем обозначать все абсолютные константы либо константы, зависящие только от раз и навсегда зафиксированных данных задачи.

Рассмотрим первую краевую задачу для искомой функции $u(x)$

$$Lu \equiv d(x)^\alpha \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^N a_i(x) u_{x_i} + a(x) u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.3)$$

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (1.4)$$

Здесь

$$a_{ij}(x), a_i(x), a(x) \in C^\beta(\bar{\Omega}) \quad (1.5)$$

– заданные функции, причем для $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$\nu \xi^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq C \xi^2, \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (1.6)$$

Мы предполагаем, что заданные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ обладают свойствами

$$f(x) \in C^\beta(\bar{\Omega}), \quad \varphi(x) \in C^{2+\beta-\alpha}(\partial\Omega). \quad (1.7)$$

Краевая задача (1.3), (1.4) относится к числу задач для уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой, имеющих к настоящему времени более чем полувековую историю интенсивных исследований. В книге О. А. Олейник и Е. В. Радкевича [1] приведен достаточно полный обзор работ в этой области вплоть до начала 70-х годов прошлого века. В частности, отмечается, что принципиальное значение в развитии теории для таких задач имела статья М. В. Келдыша [2]. Было обнаружено, что при достаточно сильном вырождении и определенных условиях на коэффициенты младших членов в уравнении, вырождающемся на границе области, граница может быть свободной от граничных условий. В работе [3] были сформулированы условия, при которых может быть поставлена первая краевая задача для уравнений вида (1.3); отметим, что эти условия выполнены при $\alpha \in (0, 1)$.

Результаты о корректности краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений в пространствах Соболева можно найти в работах М. И. Вишика [4], М. И. Вишика и О. А. Ладыженской [5], О. А. Олейник [6], М. И. Вишика и В. В. Грушина [7].

Обзор литературы, посвященной более поздним исследованиям для граничных эллиптических задач с вырождением, можно найти в книге [8] (это второе, с изменениями, издание книги [1]), а также в книге [9].

Авторам известно небольшое число работ, в которых рассматриваемая задача изучается в пространствах Гёльдера. Эти работы относятся к случаю $\alpha = 1$. Здесь мы укажем на работы [10]–[12], в которых при некоторых достаточных условиях на коэффициенты оператора L показано, что L осуществляет изоморфизм некоторых весовых пространств Гёльдера.

Целью настоящей работы является изучение задачи (1.3), (1.4) при $0 < \alpha < 1$ (слабое вырождение) в классах гладких функций, а именно в весовых пространствах Гёльдера.

Определим весовое банахово пространство функций $C_\alpha^{2+\beta}(\bar{\Omega})$ такое, что для $u(x) \in C_\alpha^{2+\beta}(\bar{\Omega})$ конечна норма

$$|u|_{\alpha, \Omega}^{(2+\beta)} = |u|_{\Omega}^{(0)} + \sum_{i=1}^N |u_{x_i}|_{\Omega}^{(\beta)} + \sum_{i,j=1}^N |d(x)^\alpha u_{x_i x_j}|_{\Omega}^{(0)} + \sum_{i,j=1}^N \langle d(x)^\alpha u_{x_i x_j} \rangle_{x, \Omega}^{(\beta)}, \quad (1.8)$$

где использованы обозначения

$$|v|_{\Omega}^{(0)} = \max_{\Omega} |v(x)|, \quad |v|_{\Omega}^{(\beta)} = |v|_{\Omega}^{(0)} + \langle v \rangle_{x, \Omega}^{(\beta)},$$

$\langle v \rangle_{x, \Omega}^{(\beta)}$ – константа Гёльдера функции v с показателем β .

Отметим, что мы не указываем явно в определении пространства $C_\alpha^{2+\beta}(\bar{\Omega})$ и его нормы функцию $d(x)$, так как нормы, построенные по двум функциям $d(x)$ и $\tilde{d}(x)$ из класса $C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющим условию (1.2), эквивалентны.

Наряду с уравнением (1.3) рассмотрим уравнение

$$Lu - \lambda u = f, \quad (1.9)$$

где λ – комплексный параметр.

Сформулируем теперь основной результат, относящийся к эллиптической краевой задаче.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (1.2), (1.1), (1.5)–(1.7), и пусть в (1.3) $a(x) \leq 0$. Тогда задача (1.3), (1.4) имеет единственное решение $u(x)$ из пространства $C_{\alpha}^{2+\beta}(\bar{\Omega})$, причем

$$|u|_{\alpha, \bar{\Omega}}^{(2+\beta)} \leq C(|f|_{\bar{\Omega}}^{(\beta)} + |\varphi|_{\partial\Omega}^{(2+\beta-\alpha)}), \quad (1.10)$$

а оператор задачи (1.3), (1.4) осуществляет изоморфизм пространства $C_{\alpha}^{2+\beta}(\bar{\Omega})$ на пространство $C^{\beta}(\bar{\Omega}) \times C^{2+\beta-\alpha}(\partial\Omega)$.

Если же в операторе (1.3) коэффициент $a(x)$ произволен, то для задачи (1.9), (1.4) существует счетное число $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $|\lambda_k| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, таких, что при $\lambda = \lambda_k$ однородная задача (1.9), (1.4) имеет ненулевые решения, причем пространство таких решений конечномерно. В этом случае неоднородная задача (1.9), (1.4) разрешима при выполнении конечного числа условий на f и φ , причем число этих условий совпадает с размерностью ядра оператора задачи (1.9), (1.4). При $\lambda \neq \lambda_k$ оператор задачи (1.9), (1.4) осуществляет изоморфизм пространства $C_{\alpha}^{2+\beta}(\bar{\Omega})$ на пространство $C^{\beta}(\bar{\Omega}) \times C^{2+\beta-\alpha}(\partial\Omega)$, т.е., в частности, задача (1.9), (1.4) однозначно разрешима и справедлива оценка (1.10).

Кроме того, при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ из единственности решения задачи (1.9), (1.4) следует ее разрешимость и оценка (1.10).

Статья состоит из шести параграфов. В § 2 доказывается, что пространство следов на $\partial\Omega$ функций из класса $C_{\alpha}^{2+\beta}(\bar{\Omega})$ есть в точности пространство $C^{2+\beta-\alpha}(\partial\Omega)$. В § 3 рассмотрена модельная задача в полупространстве для уравнения Лапласа с вырождением и получены точные коэциитивные оценки решения в весовом пространстве Гёльдера. В § 4 на основании результатов для модельной задачи приведена априорная оценка Шаудера решения задачи (1.3), (1.4). Для доказательства существования решения задачи (1.3), (1.4) в § 5 рассмотрим разрешимость и оценки решений задач для уравнений с вырождением в областях специального вида. При этом сначала используется разрешимость в пространстве W_p^2 , а затем повышается гладкость полученного решения. В § 6 завершается доказательство теоремы 1.

§ 2. Продолжение функций класса $C^{2+\beta-\alpha}(\partial\Omega)$ внутрь области и следы функций класса $C_{\alpha}^{2+\beta}(\bar{\Omega})$ на $\partial\Omega$

Применяя технику локального распрямления границы (см., например, [13; гл. IV]), мы можем ограничиться рассмотрением случая, когда Ω представляет собой полупространство.

Пусть $\mathbb{R}_+^N = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$, $\mathbb{R}^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N = 0\}$. Пусть на $\mathbb{R}^{N-1}$ задана финитная функция $\varphi(x) \in C^{2+\beta-\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})$. Покажем, что $\varphi(x)$ может быть продолжена в $\mathbb{R}_+^N$ до финитной функции класса $C_\alpha^{2+\beta}(\overline{\mathbb{R}_+^N})$. При этом в определении нормы в пространстве $C_\alpha^{2+\beta}(\mathbb{R}_+^N)$ роль весовой функции $d(x)$ в соотношении (1.8) играет функция $d(x) = x_N$.

Пусть $u(x)$ – решение задачи Дирихле

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^N, \quad (2.1)$$

$$u(x) = \varphi(x), \quad x_N = 0. \quad (2.2)$$

В соответствии с [14; § 5.4], для мультииндексов $\bar{k} = (k_1, \dots, k_N)$ таких, что $|\bar{k}| = k_1 + \dots + k_N \geq 2$ и $x_N < 1$, выполнено

$$|D^{\bar{k}}u(x', x_N)| \leq C_k |\varphi|_{\mathbb{R}^{N-1}}^{(2+\beta-\alpha)} x_N^{-|\bar{k}|+(2+\beta-\alpha)}, \quad x = (x', x_N). \quad (2.3)$$

Пусть D^2u – некоторая вторая производная $u_{x_i x_j}$. Рассмотрим отдельно гёльдеровость $x_N^\alpha D^2u$ по переменным $x' = (x_1, \dots, x_{N-1})$ и по x_N . Сначала рассмотрим гёльдеровость по x' . Имеем

$$\langle x_N^\alpha D^2u \rangle_{x', \mathbb{R}_+^N}^{(\beta)} = x_N^\alpha \langle D^2u \rangle_{x', \mathbb{R}_+^N}^{(\beta)}. \quad (2.4)$$

В силу известного интерполяционного неравенства (см. [15; гл. 1])

$$\langle D^2u \rangle_{x', \mathbb{R}_+^N}^{(\beta)} \leq C(|u|_{\mathbb{R}_+^N}^{(2)})^{1-\beta} (|u|_{\mathbb{R}_+^N}^{(3)})^\beta \quad (2.5)$$

и неравенства (2.3) из (2.4) получаем

$$\begin{aligned} \langle x_N^\alpha D^2u \rangle_{x', \mathbb{R}_+^N}^{(\beta)} &\leq C x_N^\alpha |\varphi|_{\mathbb{R}^{N-1}}^{(2+\beta-\alpha)} (x_N^{-2+(2+\beta-\alpha)})^{1-\beta} (x_N^{-3+(2+\beta-\alpha)})^\beta \\ &= C x_N^{\alpha-2+(2+\beta-\alpha)-\beta} |\varphi|_{\mathbb{R}^{N-1}}^{(2+\beta-\alpha)} = C |\varphi|_{\mathbb{R}^{N-1}}^{(2+\beta-\alpha)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Рассмотрим теперь гёльдеровость функции $x_N^\alpha D^2u$ по переменной x_N . Пусть $0 < \bar{x}_N < x_N$. Рассмотрим два случая. Если $|x_N - \bar{x}_N| \geq x_N/2$, то

$$\begin{aligned} \frac{|x_N^\alpha D^2u(x) - \bar{x}_N^\alpha D^2u(\bar{x})|}{|x_N - \bar{x}_N|^\beta} &\leq C \{|x_N^{\alpha-\beta} D^2u(x', x_N)| + |\bar{x}_N^{\alpha-\beta} D^2u(x', \bar{x}_N)|\} \\ &\equiv C\{A_1 + A_2\}. \end{aligned}$$

В силу (2.3)

$$A_1 \leq C |\varphi|_{\mathbb{R}^{N-1}}^{(2+\beta-\alpha)} x_N^{\alpha-\beta} x_N^{-2+(2+\beta-\alpha)} = C |\varphi|_{\mathbb{R}^{N-1}}^{(2+\beta-\alpha)}.$$

Оценка A_2 полностью аналогична.

Пусть теперь $|x_N - \bar{x}_N| < x_N/2$. Обозначим $\Pi(x_N) = \{y \in \mathbb{R}_+^N : |y_N - x_N| \leq x_N/2\}$. Тогда в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} \frac{|x_N^\alpha D^2u(x) - \bar{x}_N^\alpha D^2u(\bar{x})|}{|x_N - \bar{x}_N|^\beta} &\leq C \langle y_N^\alpha D^2u \rangle_{y, \Pi(x_N)}^{(\beta)} \\ &\leq C \{|y_N^{\alpha-\beta} D^2u|_{\Pi(x_N)}^{(0)} + x_N^\alpha \langle D^2u \rangle_{y, \Pi(x_N)}^{(\beta)}\} \equiv C\{A_1 + A_2\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

При этом в силу (2.3)

$$A_1 \leq C x_N^{\alpha-\beta} |D^2 u|_{\Pi(x_N)}^{(0)} \leq C |\varphi|_{\mathbb{R}^{N-1}}^{(2+\beta-\alpha)} x_N^{\alpha-\beta} x_N^{-2+(2+\beta-\alpha)} = C |\varphi|_{\mathbb{R}^{N-1}}^{(2+\beta-\alpha)}.$$

Для оценки A_2 применим интерполяционное неравенство (2.5). Тогда в силу (2.3)

$$\begin{aligned} A_2 &\leq C x_N^\alpha (|u|_{\Pi(x_N)}^{(2)})^{1-\beta} (|u|_{\Pi(x_N)}^{(3)})^\beta \\ &\leq C x_N^\alpha |\varphi|_{\mathbb{R}^{N-1}}^{(2+\beta-\alpha)} (x_N^{-2+(2+\beta-\alpha)})^{1-\beta} (x_N^{-3+(2+\beta-\alpha)})^\beta = C |\varphi|_{\mathbb{R}^{N-1}}^{(2+\beta-\alpha)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\langle x_N^\alpha D^2 u \rangle_{x, \mathbb{R}_+^N}^{(\beta)} \leq C |\varphi|_{\mathbb{R}^{N-1}}^{(2+\beta-\alpha)}. \quad (2.8)$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$|x_N^\alpha D^2 u|_{\mathbb{R}_+^N}^{(0)} \leq C |\varphi|_{\mathbb{R}^{N-1}}^{(2-\alpha)} \leq C |\varphi|_{\mathbb{R}^{N-1}}^{(2+\beta-\alpha)}. \quad (2.9)$$

Оценки же младших слагаемых в норме пространства $C_\alpha^{2+\beta}(\overline{\mathbb{R}_+^N})$

$$|u_{x_i}|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)} \leq C |\varphi|_{\mathbb{R}^{N-1}}^{(2+\beta-\alpha)} \quad (2.10)$$

следуют из хорошо известных оценок потенциала двойного слоя либо получаются так же, как и выше, в виде оценки

$$|u|_{\mathbb{R}_+^N}^{(1+\beta)} \leq C |\varphi|_{\mathbb{R}^{N-1}}^{(1+\beta)} \leq C |\varphi|_{\mathbb{R}^{N-1}}^{(2+\beta-\alpha)}$$

с использованием интерполяционного неравенства

$$|u|_{\mathbb{R}_+^N}^{(1+\beta)} \leq C (|u|_{\mathbb{R}_+^N}^{(1)})^{1-\beta} (|u|_{\mathbb{R}_+^N}^{(2)})^\beta.$$

Следовательно,

$$|u|_{\alpha, \mathbb{R}_+^N}^{(2+\beta)} \leq C |\varphi|_{\mathbb{R}^{N-1}}^{(2+\beta-\alpha)}. \quad (2.11)$$

Умножая функцию $u(x)$ на гладкую финитную функцию $\eta(x) = \eta(x', x_N)$, равную единице в окрестности носителя функции $\varphi(x')$, получаем финитное продолжение в область $x_N > 0$ функции $\varphi(x')$ до функции класса $C_\alpha^{2+\beta}(\overline{\mathbb{R}_+^N})$, причем выполнено неравенство (2.11). Отсюда вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi(x) \in C^{2+\beta-\alpha}(\partial\Omega)$. Тогда φ может быть продолжена в область $\overline{\Omega}$ до функции $\Phi(x) \in C_\alpha^{2+\beta}(\overline{\Omega})$, причем

$$|\Phi|_{\alpha, \overline{\Omega}}^{(2+\beta)} \leq C |\varphi|_{\partial\Omega}^{(2+\beta-\alpha)}. \quad (2.12)$$

Отметим, что в силу этой теоремы мы можем в задаче (1.3), (1.4), не ограничивая общности, считать, что $\varphi(x) \equiv 0$.

Покажем теперь, что пространство следов на $\partial\Omega$ функций класса $C_\alpha^{2+\beta}(\overline{\Omega})$ есть в точности пространство $C^{2+\beta-\alpha}(\partial\Omega)$. Как и выше, мы можем использовать локальное распрямление границы области при рассмотрении локально определяемых классов $C_\alpha^{2+\beta}(\overline{\Omega})$. Поэтому достаточно ограничиться случаем полупространства, т.е. рассмотреть финитную функцию $u(x)$ в области $\mathbb{R}_+^N$ класса $C_\alpha^{2+\beta}(\mathbb{R}_+^N)$ и ее след при $x_N = 0$.

ЛЕММА 1. Пусть финитная функция $u(x)$ принадлежит $C_\alpha^{2+\beta}(\overline{\mathbb{R}_+^N})$. Тогда $v(x') = u(x', 0) \in C^{2+\beta-\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})$, причем

$$|v(x')|_{C^{2+\beta-\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})} = |u(x', 0)|_{C^{2+\beta-\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq C|u|_{\alpha, \mathbb{R}_+^N}^{(2+\beta)}. \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно показать, что равномерно по x_N для любой функции $w = u_{x_i}$, $i = \overline{1, N}$, выполнена оценка

$$\langle w \rangle_{x', \mathbb{R}^{N-1}}^{(1+\beta-\alpha)} \leq C|u|_{\alpha, \mathbb{R}_+^N}^{(2+\beta)}. \quad (2.14)$$

Итак, пусть $w = u_{x_i}$, $i = \overline{1, N}$. Чтобы доказать (2.14), достаточно (как следует из [16]) проверить, что для $h > 0$

$$\frac{|\Delta_{h, x'}^2 w(x_N)|}{h^{1+\beta-\alpha}} \leq C|u|_{\alpha, \mathbb{R}_+^N}^{(2+\beta)}, \quad (2.15)$$

где $\Delta_{h, x'}^2 w(x_N) \equiv \Delta_{h, x'}^2 w \equiv \Delta_{h, x'}^2 w(x', x_N)$ – вторая разность от функции w по переменной x_j , $j = \overline{1, N-1}$, с шагом h , т.е.

$$\Delta_{h, x'}^2 w(x_N) = w(x' + \vec{j}h, x_N) - 2w(x', x_N) + w(x' - \vec{j}h, x_N), \quad (2.16)$$

где $\vec{j}$ – единичный вектор в плоскости $\mathbb{R}^{N-1}$.

Рассмотрим два случая. Пусть сначала

$$h \leq x_N. \quad (2.17)$$

Тогда для некоторых $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ по теореме о среднем получаем

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta_{h, x'}^2 w(x_N)|}{h^{1+\beta-\alpha}} &\leq \frac{|x_N^\alpha \Delta_{h, x'}^2 w(x_N)|}{h^{1+\beta}} \\ &= \left| x_N^\alpha \frac{w_{x_j}(x' + \vec{j}\theta_1 h, x_N) - w_{x_j}(x' - \vec{j}\theta_2 h, x_N)}{h^\beta} \right| \\ &= \frac{|x_N^\alpha u_{x_i x_j}(x' + \vec{j}\theta_1 h, x_N) - x_N^\alpha u_{x_i x_j}(x' - \vec{j}\theta_2 h, x_N)|}{h^\beta} \\ &\leq C \langle x_N^\alpha u_{x_i x_j} \rangle_{x', \mathbb{R}_+^N}^{(\beta)} \leq C|u|_{\alpha, \mathbb{R}_+^N}^{(2+\beta)}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Пусть теперь $h \geq x_N$. Представим разность $\Delta_{h, x'}^2 w(x_N)$ в виде

$$\begin{aligned} \Delta_{h, x'}^2 w(x_N) &= -\Delta_{h, x'}^2 (w(x', x_N + h) - w(x', x_N)) + \Delta_{h, x'}^2 w(x', x_N + h) \\ &\equiv A_1 + A_2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

В силу того, что для A_2 выполнено условие (2.17), т.е. $h \leq x_N + h$, аналогично (2.18) получаем

$$\frac{|A_2|}{h^{1+\beta-\alpha}} \leq C|u|_{\alpha, \mathbb{R}_+^N}^{(2+\beta)}. \quad (2.20)$$

Для оценки величины $|A_1|/h^{1+\beta-\alpha}$ воспользуемся соотношением

$$w(x', x_N + h) - w(x', x_N) = h \int_0^1 w_{x_N}(x', x_N + \theta h) d\theta,$$

и поскольку $w_{x_N} = u_{x_i x_N}$, то

$$\begin{aligned} \frac{|A_1|}{h^{1+\beta-\alpha}} &\leq \int_0^1 \frac{h^\alpha}{(x_N + \theta h)^\alpha} \left| \frac{\Delta_{h,x'}^2 (x_N + \theta h)^\alpha u_{x_i x_N}(x', x_N + \theta h)}{h^\beta} \right| d\theta \\ &\leq C \langle x_N^\alpha u_{x_i x_N} \rangle_{x', \mathbb{R}_+^N}^{(\beta)} \int_0^1 \left(\frac{x_N}{h} + \theta \right)^{-\alpha} d\theta \leq C |u|_{\alpha, \overline{\mathbb{R}_+^N}}^{(2+\beta)}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Из (2.18), (2.20) и (2.21) следует (2.15), а следовательно, и (2.13).

Следствием этой леммы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $u(x) \in C_{\alpha}^{2+\beta}(\overline{\Omega})$. Тогда $\varphi \equiv u|_{\partial\Omega} \in C^{2+\beta-\alpha}(\partial\Omega)$, причем

$$|\varphi|_{\partial\Omega}^{(2+\beta-\alpha)} \leq |u|_{\alpha, \overline{\Omega}}^{(2+\beta)}.$$

§ 3. Модельная задача в полупространстве: оценки объемного потенциала

Пусть функция $u(x)$ в области $\mathbb{R}_+^N = \{(x', x_N) : x_N > 0\}$ есть решение следующей модельной задачи:

$$x_N^\alpha \Delta u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^N, \quad (3.1)$$

$$u(x', 0) = 0, \quad (3.2)$$

где заданная функция $f(x)$ принадлежит пространству $C^\beta(\overline{\mathbb{R}_+^N})$, $\text{supp } f \subset B_R^+ = \overline{\mathbb{R}_+^N} \cap \{|x| \leq R\}$. Как хорошо известно, функция $u(x)$ может быть представлена в виде

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}_+^N} G(x, \xi) \xi_N^{-\alpha} f(\xi) d\xi, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= C \{ [(x' - \xi')^2 + (x_N - \xi_N)^2]^{-(N-2)/2} \\ &\quad - [(x' - \xi')^2 + (x_N + \xi_N)^2]^{-(N-2)/2} \}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

причем для $G(x, \xi)$ справедлива оценка

$$|D_x^{\overline{k}_1} D_\xi^{\overline{k}_2} G(x, \xi)| \leq C_{\overline{k}} |x - \xi|^{-N+2-|\overline{k}_1| - |\overline{k}_2|}. \quad (3.5)$$

Цель этого параграфа – получить оценку нормы функции $u(x)$ в пространстве $C_{\alpha}^{2+\beta}(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ в терминах нормы правой части $|f|_{\alpha, \overline{\mathbb{R}_+^N}}^{(\beta)}$.

Пусть $i, j = \overline{1, N}$ и i, j не равны N одновременно. Из оценки (3.5) и того, что $\alpha \in (0, 1)$, следует, что потенциал (3.3) можно один раз дифференцировать по x_i , т.е.

$$u_{x_i} = \int_{\mathbb{R}_+^N} G_{x_i}(x, \xi) \xi_N^{-\alpha} f(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}_+^N \cap \{|\xi| < 2R\}} G_{x_i}(x, \xi) \xi_N^{-\alpha} f(\xi) d\xi, \quad (3.6)$$

так как f финитна. Получим представление для второй производной $u_{x_i x_j}$, считая, что $x_N > 0$, $j \neq N$. Обозначим для $0 < \varepsilon < x_N$

$$u_{x_i \varepsilon} = \int_{\mathbb{R}_+^N \cap \{|\xi| < 2R\} \cap \{|x - \xi| > \varepsilon\}} G_{x_i}(x, \xi) \xi_N^{-\alpha} f(\xi) d\xi.$$

Отметим, что $u_{x_i \varepsilon}$ равномерно на компактах сходится к u_{x_i} при $\varepsilon \rightarrow 0$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} (u_{x_i \varepsilon})_{x_j} &= \int_{\mathbb{R}_+^N \cap \{|\xi| < 2R\} \cap \{|x - \xi| > \varepsilon\}} G_{x_i x_j}(x, \xi) \xi_N^{-\alpha} f(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_{|x - \xi| = \varepsilon} G_{x_i}(x, \xi) n_j \xi_N^{-\alpha} f(\xi) dS_\xi \equiv A_1 + A_2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где n_j — j -я компонента внешней нормали к сфере $\{|x - \xi| = \varepsilon\}$. Найдем предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ величины A_2 . Имеем

$$\begin{aligned} A_2 &= x_N^{-\alpha} f(x) \int_{|x - \xi| = \varepsilon} G_{x_i}(x, \xi) n_j dS_\xi \\ &\quad + \int_{|x - \xi| = \varepsilon} G_{x_i}(x, \xi) n_j [\xi_N^{-\alpha} f(\xi) - x_N^{-\alpha} f(x)] dS_\xi \equiv A_{21} + A_{22}, \end{aligned}$$

причем в силу (3.5) $A_{22} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для вычисления предела A_{21} при $\varepsilon \rightarrow 0$ отметим, что

$$G_{x_i}(x, \xi) = C \frac{x_i - \xi_i}{|x - \xi|^N} + F(x, \xi),$$

где $F(x, \xi)$ ограничена при фиксированном $x_N > 0$ и в то же время $n_j = (x_j - \xi_j)/|x - \xi|$. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_{21} = C \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_N^{-\alpha} f(x) \int_{|x - \xi| = \varepsilon} \frac{(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{|x - \xi|^{N+1}} dS_\xi = C \delta_{ij} x_N^{-\alpha} f(x), \quad (3.8)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Обратимся теперь к слагаемому A_1 . Имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{\mathbb{R}_+^N \cap \{|\xi| < 2R\} \cap \{|x - \xi| > \varepsilon\}} G_{x_i x_j}(x, \xi) \xi_N^{-\alpha} [f(\xi) - f(x)] d\xi \\ &\quad + f(x) \int_{\mathbb{R}_+^N \cap \{|\xi| < 2R\} \cap \{|x - \xi| > \varepsilon\}} G_{x_i x_j}(x, \xi) \xi_N^{-\alpha} d\xi \equiv A_{11} + A_{12}. \end{aligned}$$

Рассмотрим величину A_{12} . Так как $j \neq N$, то

$$G_{x_i x_j}(x, \xi) = -G_{x_i \xi_j}(x, \xi).$$

Поэтому интегрирование по ξ_j дает

$$A_{12} = f(x) \left[\int_{\mathbb{R}_+^N \cap \{|\xi|=2R\}} G_{x_i}(x, \xi) n_j \xi_N^{-\alpha} dS_\xi + \int_{|x-\xi|=\varepsilon} G_{x_i}(x, \xi) n_j \xi_N^{-\alpha} dS_\xi \right], \quad (3.9)$$

где мы учли, что на поверхности $\{\xi_N = 0\}$ выполнено $n_j = 0$, так как $j \neq N$.

Переходя в (3.9) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, как и в случае выражения A_{21} , получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_{12} = f(x) \int_{\mathbb{R}_+^N \cap \{|\xi|=2R\}} G_{x_i}(x, \xi) n_j \xi_N^{-\alpha} dS_\xi + C \delta_{ij} x_N^{-\alpha} f(x). \quad (3.10)$$

Так как подынтегральное выражение в A_{11} интегрируемо при $\varepsilon = 0$ в силу гёльдеровости функции $f(\xi)$, то, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_{11} = \int_{\mathbb{R}_+^N \cap \{|\xi| < 2R\}} G_{x_i x_j}(x, \xi) \xi_N^{-\alpha} [f(\xi) - f(x)] d\xi. \quad (3.11)$$

Объединяя (3.8)–(3.11), окончательно получаем

$$\begin{aligned} u_{x_i x_j} &= \int_{\mathbb{R}_+^N \cap \{|\xi| < 2R\}} G_{x_i x_j}(x, \xi) \xi_N^{-\alpha} [f(\xi) - f(x)] d\xi \\ &\quad + C \delta_{ij} x_N^{-\alpha} f(x) + f(x) \int_{\mathbb{R}_+^N \cap \{|\xi|=2R\}} G_{x_i}(x, \xi) n_j \xi_N^{-\alpha} dS_\xi \\ &\equiv B_1(x) + B_2(x) + B_3(x). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Рассмотрим для переменных x только область $B_R^+ = \overline{\mathbb{R}_+^N} \cap \{|x| \leq R\}$. На этом множестве при $|\xi| = 2R$ функция $G_{x_i}(x, \xi)$ принадлежит $C_{x, \xi}^\infty$, и поскольку $\beta < \alpha$, то

$$|x_N^\alpha B_3(x)|_{B_R^+}^{(\beta)} \leq C_R |f|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)}. \quad (3.13)$$

Очевидно также, что

$$|x_N^\alpha B_2(x)|_{B_R^+}^{(\beta)} \leq C_R |f|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)}. \quad (3.14)$$

Поэтому достаточно рассмотреть выражение

$$v(x) = x_N^\alpha B_1(x) = x_N^\alpha \int_{\mathbb{R}_+^N \cap \{|\xi| < 2R\}} G_{x_i x_j}(x, \xi) \xi_N^{-\alpha} [f(\xi) - f(x)] d\xi. \quad (3.15)$$

Оценим сначала $|v(x)|_{B_R^+}^{(0)}$. Так как $|f(\xi) - f(x)| \leq |f|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)} |x - \xi|^\beta$, то

$$|v(x)| \leq C |f|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)} x_N^\alpha \int_{B_{2R}^+} [(x' - \xi')^2 + (x_N - \xi_N)^2]^{-(N-\beta)/2} \xi_N^{-\alpha} d\xi.$$

Совершая в интеграле замену $x' - \xi' = \eta |x_N - \xi_N|$, получаем

$$\begin{aligned} |v(x)| &\leq C |f|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)} x_N^\alpha \int_0^{2R} \xi_N^{-\alpha} |x_N - \xi_N|^{-1+\beta} d\xi_N \int_{|\eta| < 2R/|x_N - \xi_N|} (\eta^2 + 1)^{-(N+\beta)/2} d\eta \\ &\leq C |f|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)} x_N^\alpha \int_0^{2R} \xi_N^{-\alpha} |x_N - \xi_N|^{-1+\beta} d\xi_N. \end{aligned}$$

Оценка последнего интеграла с помощью замены $\xi_N = z x_N$ с учетом $0 < \beta < \alpha < 1$ дает

$$|v(x)| \leq C |f|_{\frac{\mathbb{R}_+^N}{\mathbb{R}_+}^{(\beta)}} x_N^\alpha x_N^{-\alpha-1+\beta+1} \int_0^{2R/x_N} z^{-\alpha} |1-z|^{-1+\beta} dz \leq C |f|_{\frac{\mathbb{R}_+^N}{\mathbb{R}_+}^{(\beta)}} x_N^\beta. \quad (3.16)$$

Перейдем теперь к оценке константы Гёльдера функции $v(x)$. При этом рассмотрим отдельно гёльдеровость $v(x)$ по переменной x_N и по переменным x' . Начнем с переменной x_N . Пусть $\varepsilon_0 \in (0, 1/4)$ фиксировано, и пусть $0 < \bar{x}_N < x_N$. Мы можем считать, не ограничивая общности, что

$$\Delta x \equiv (x_N - \bar{x}_N) \leq \varepsilon_0 x_N. \quad (3.17)$$

Действительно, в противном случае

$$\frac{|v(x', x_N) - v(x', \bar{x}_N)|}{|x_N - \bar{x}_N|^\beta} \leq \varepsilon_0^{-\beta} \left(\frac{|v(x', x_N)|}{|x_N|^\beta} + \frac{|v(x', \bar{x}_N)|}{|\bar{x}_N|^\beta} \right) \leq 2\varepsilon_0^{-\beta} C |f|_{\frac{\mathbb{R}_+^N}{\mathbb{R}_+}^{(\beta)}},$$

как это следует из оценки (3.16). Отметим также, что при условии $(x_N - \bar{x}_N) \leq \varepsilon_0 x_N$ величины x_N и $\bar{x}_N$ эквивалентны, так как $1 - \varepsilon_0 < \bar{x}_N/x_N < 1$.

Пусть $x = (x', x_N)$, $\bar{x} = (x', \bar{x}_N)$. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} v(\bar{x}) - v(x) &= (\bar{x}_N^\alpha - x_N^\alpha) \int_{\mathbb{R}_+^N \cap \{|\xi| < 2R\}} G_{x_i x_j}(\bar{x}, \xi) \xi_N^{-\alpha} [f(\xi) - f(\bar{x})] d\xi \\ &+ x_N^\alpha \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^N \cap \{|\xi| < 2R\}} G_{x_i x_j}(\bar{x}, \xi) \xi_N^{-\alpha} [f(\xi) - f(\bar{x})] d\xi \right. \\ &\left. - \int_{\mathbb{R}_+^N \cap \{|\xi| < 2R\}} G_{x_i x_j}(x, \xi) \xi_N^{-\alpha} [f(\xi) - f(x)] d\xi \right\} \equiv \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Поскольку

$$|\bar{x}_N^\alpha - x_N^\alpha| \leq C \bar{x}_N^{\alpha-\beta} |\bar{x}_N - x_N|^\beta,$$

то из ранее полученной оценки (3.16) следует

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_1| &\leq C (\Delta x)^\beta \bar{x}_N^{-\beta} \left| \bar{x}_N^\alpha \int_{\mathbb{R}_+^N \cap \{|\xi| < 2R\}} G_{x_i x_j}(\bar{x}, \xi) \xi_N^{-\alpha} [f(\xi) - f(\bar{x})] d\xi \right| \\ &\leq C |f|_{\frac{\mathbb{R}_+^N}{\mathbb{R}_+}^{(\beta)}} (\Delta x)^\beta. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Величину $\mathcal{A}_2$ представим в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= x_N^\alpha \int_{B_{2R}^+ \cap \{|x-\xi| < 2\Delta x\}} G_{x_i x_j}(\bar{x}, \xi) \xi_N^{-\alpha} [f(\xi) - f(\bar{x})] d\xi \\ &- x_N^\alpha \int_{B_{2R}^+ \cap \{|x-\xi| < 2\Delta x\}} G_{x_i x_j}(x, \xi) \xi_N^{-\alpha} [f(\xi) - f(x)] d\xi \\ &+ x_N^\alpha \int_{B_{2R}^+ \cap \{|x-\xi| > 2\Delta x\}} G_{x_i x_j}(\bar{x}, \xi) \xi_N^{-\alpha} \{ [f(\xi) - f(\bar{x})] - [f(\xi) - f(x)] \} d\xi \\ &+ x_N^\alpha \int_{B_{2R}^+ \cap \{|x-\xi| > 2\Delta x\}} [G_{x_i x_j}(\bar{x}, \xi) - G_{x_i x_j}(x, \xi)] \xi_N^{-\alpha} [f(\xi) - f(x)] d\xi \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned} \quad (3.20)$$

При оценке I_1 заметим, что на множестве интегрирования величины x_N и ξ_N эквивалентны. Действительно,

$$(1 - 2\varepsilon_0)x_N \leq x_N - 2\Delta x \leq \xi_N \leq x_N + 2\Delta x \leq (1 + 2\varepsilon_0)x_N.$$

Кроме того, $(B_{2R}^+ \cap \{|x - \xi| < 2\Delta x\}) \subset (B_{2R}^+ \cap \{|\bar{x} - \xi| < 3\Delta x\})$, так что для I_1 в силу (3.5) имеем

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq C |f|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)} x_N^\alpha \int_{|\bar{x} - \xi| < 3\Delta x} |\bar{x} - \xi|^{-N} x_N^{-\alpha} |\bar{x} - \xi|^\beta d\xi \\ &\leq C |f|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)} \int_{|\bar{x} - \xi| < 3\Delta x} |\bar{x} - \xi|^{-N+\beta} d\xi = C |f|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)} (\Delta x)^\beta. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Интеграл I_2 оценивается аналогично:

$$|I_2| \leq C |f|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)} (\Delta x)^\beta. \quad (3.22)$$

Интеграл I_3 перепишем в виде

$$I_3 = [f(x) - f(\bar{x})] x_N^\alpha \int_{B_{2R}^+ \cap \{|x - \xi| > 2\Delta x\}} G_{x_i x_j}(\bar{x}, \xi) \xi_N^{-\alpha} d\xi \equiv [f(x) - f(\bar{x})] A_3.$$

Так как $j \neq N$, то $G_{x_i x_j}(\bar{x}, \xi) = -G_{x_i \xi_j}(\bar{x}, \xi)$, и, следовательно, A_3 можно представить в форме

$$\begin{aligned} A_3 &= x_N^\alpha \int_{B_{2R}^+ \cap \{|\xi| = 2R\}} G_{x_i}(\bar{x}, \xi) n_j \xi_N^{-\alpha} dS_\xi \\ &\quad + x_N^\alpha \int_{B_{2R}^+ \cap \{|x - \xi| = 2\Delta x\}} G_{x_i}(\bar{x}, \xi) n_j \xi_N^{-\alpha} dS_\xi \equiv A_{31} + A_{32}, \end{aligned}$$

где мы учли, что компонента нормали n_j тождественно равна нулю при $\xi_N = 0$, так как $j \neq N$. Для оценки A_{31} заметим, что так как мы рассматриваем случай $|x| \leq R$, то $|G_{x_i}(\bar{x}, \xi)| \leq C_R$ на множестве интегрирования в A_{31} . Поэтому

$$|A_{31}| \leq C_R \int_{B_{2R}^+ \cap \{|\xi| = 2R\}} \xi_N^{-\alpha} dS_\xi \leq C_R. \quad (3.23)$$

Что же касается A_{32} , то в силу эквивалентности x_N и ξ_N на множестве интегрирования имеем

$$|A_{32}| \leq C \int_{|x - \xi| = 2\Delta x} |\bar{x} - \xi|^{-(N-1)} dS_\xi.$$

Заметим, что на множестве $|x - \xi| \geq 2\Delta x$ величины $|\bar{x} - \xi|$ и $|x - \xi|$ эквивалентны вследствие неравенств

$$\begin{aligned} |\bar{x} - \xi| &\leq |x - \xi| + \Delta x \leq |x - \xi| + \frac{1}{2}|x - \xi| = \frac{3}{2}|x - \xi|, \\ |x - \xi| &\leq |\bar{x} - \xi| + \Delta x \leq |\bar{x} - \xi| + \frac{1}{2}|\bar{x} - \xi|, \end{aligned}$$

так что

$$|x - \xi| \leq 2|\bar{x} - \xi|.$$

Поэтому

$$|A_{32}| \leq C \int_{|x-\xi|=2\Delta x} |x-\xi|^{-(N-1)} dS_\xi = C. \quad (3.24)$$

Из (3.23) и (3.24) следует оценка

$$|I_3| \leq C_R |f(x) - f(\bar{x})| \leq C_R |f|_{\frac{\mathbb{R}^N}{+}}^{(\beta)} (\Delta x)^\beta. \quad (3.25)$$

Для оценки I_4 воспользуемся теоремой о среднем, что дает

$$|I_4| \leq C |f|_{\frac{\mathbb{R}^N}{+}}^{(\beta)} x_N^\alpha |\Delta x| \int_{B_{2R}^+ \cap \{|x-\xi|>2\Delta x\}} G_{x_i x_j x_N}(x_\theta, \xi) \xi_N^{-\alpha} |x-\xi|^\beta d\xi,$$

где x_θ принадлежит отрезку $[x, \bar{x}]$. Так как на множестве $|x-\xi| > 2\Delta x$ величины $|x-\xi|$, $|\bar{x}-\xi|$ и $|x_\theta-\xi|$ эквивалентны, то

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq C |f|_{\frac{\mathbb{R}^N}{+}}^{(\beta)} x_N^\alpha |\Delta x| \int_{B_{2R}^+ \cap \{|x-\xi|>2\Delta x\}} \xi_N^{-\alpha} |x-\xi|^{-N-1+\beta} d\xi \\ &= C |f|_{\frac{\mathbb{R}^N}{+}}^{(\beta)} x_N^\alpha |\Delta x| \left\{ \int_{B_{2R}^+ \cap \{|x-\xi|>2\Delta x\} \cap \{\xi_N > \varepsilon_0 x_N\}} \xi_N^{-\alpha} |x-\xi|^{-N-1+\beta} d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_{B_{2R}^+ \cap \{|x-\xi|>2\Delta x\} \cap \{\xi_N < \varepsilon_0 x_N\}} \xi_N^{-\alpha} |x-\xi|^{-N-1+\beta} d\xi \right\} \equiv I_{41} + I_{42}. \end{aligned}$$

Для оценки I_{41} мы используем неравенство $\{\xi_N > \varepsilon_0 x_N\}$, так что $\xi_N^{-\alpha} \leq C x_N^{-\alpha}$. Поэтому справедлива оценка

$$|I_{41}| \leq C |f|_{\frac{\mathbb{R}^N}{+}}^{(\beta)} |\Delta x| \int_{|x-\xi|>2\Delta x} |x-\xi|^{-N-1+\beta} d\xi = C |f|_{\frac{\mathbb{R}^N}{+}}^{(\beta)} |\Delta x|^\beta. \quad (3.26)$$

В силу (3.17) на множестве интегрирования в I_{42} выполнено

$$|x-\xi| \geq |x_N - \xi_N| \geq (1 - \varepsilon_0) x_N > \frac{1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \Delta x > 2\Delta x, \quad (3.27)$$

т.е. множество интегрирования

$$B_{2R}^+ \cap \{|x-\xi| > 2\Delta x\} \cap \{\xi_N < \varepsilon_0 x_N\} = B_{2R}^+ \cap \{\xi_N < \varepsilon_0 x_N\}.$$

Кроме того, так как на этом множестве $|x_N - \xi_N| \geq (1 - \varepsilon_0) x_N$, то в I_{42}

$$|x-\xi| \geq \nu[(x' - \xi')^2 + x_N^2]^{1/2}.$$

Поэтому

$$|I_{42}| \leq C |f|_{\frac{\mathbb{R}^N}{+}}^{(\beta)} x_N^\alpha |\Delta x| \int_0^{\varepsilon_0 x_N} \xi_N^{-\alpha} d\xi_N \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{d\xi'}{[(x' - \xi')^2 + x_N^2]^{(N+1-\beta)/2}}.$$

Совершая в последнем интеграле замену $x' - \xi' = \eta x_N$, имеем

$$\begin{aligned} |I_{42}| &\leq C |f|_{\frac{\mathbb{R}^N}{+}}^{(\beta)} x_N^\alpha |\Delta x| x_N^{-N-1+\beta+N-1} \int_0^{\varepsilon_0 x_N} \xi_N^{-\alpha} d\xi_N \\ &= C |f|_{\frac{\mathbb{R}^N}{+}}^{(\beta)} |\Delta x| x_N^{-1+\beta} = C |f|_{\frac{\mathbb{R}^N}{+}}^{(\beta)} \left(\frac{\Delta x}{x_N} \right)^{1-\beta} (\Delta x)^\beta \leq C |f|_{\frac{\mathbb{R}^N}{+}}^{(\beta)} (\Delta x)^\beta. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Из (3.26) и (3.28) следует, что

$$|I_4| \leq C|f|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)} (\Delta x)^\beta.$$

Собирая теперь оценки интегралов I_i , $i = \overline{1, 4}$, получаем

$$|\mathcal{A}_2| \leq C|f|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)} (\Delta x)^\beta.$$

Таким образом,

$$|v(x', x_N) - v(x', \bar{x}_N)| \leq C|f|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)} (\Delta x)^\beta, \quad (3.29)$$

что дает оценку константы Гёльдера функции $v(x)$ по переменной x_N .

Оценки гладкости функции $v(x)$ по переменным x' проходят по аналогичной схеме, причем в силу (3.16) мы, как и выше, не ограничивая общности, можем считать, что $|x' - \bar{x}'| \leq \varepsilon_0 x_N$. Итак, для функции $u(x)$ в (3.3) доказано, что

$$\langle x_N^\alpha u_{x_i x_j} \rangle_{B_R^+}^{(\beta)} \leq C_R |f|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)}. \quad (3.30)$$

Мы доказали эту оценку для случая, когда i и j не равны N одновременно. Оценка же (3.30) для случая $i = j = N$ следует из уравнения (3.1).

Из соотношения (3.12) и оценки (3.16) следует также, что

$$|x_N^\alpha u_{x_i x_j}|_{B_R^+}^{(0)} \leq C_R |f|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)}. \quad (3.31)$$

Кроме того, в силу ограничения $0 < \beta < \min\{\alpha, 1 - \alpha\}$ нормы $|Du|_{B_R^+}^{(\beta)}$ являются младшими и их оценка следует из (3.31). Действительно, покажем гёльдеровость u_{x_i} , $i = \overline{1, N}$, по переменной x_N с показателем $1 - \alpha$. Пусть $0 < \bar{x}_N < x_N$. Тогда

$$u_{x_i}(x', x_N) - u_{x_i}(x', \bar{x}_N) = \int_{\bar{x}_N}^{x_N} u_{x_i \xi_N}(x', \xi_N) d\xi_N.$$

Отсюда и из (3.31) получаем

$$|u_{x_i}(x', x_N) - u_{x_i}(x', \bar{x}_N)| \leq C|f|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)} \int_{\bar{x}_N}^{x_N} \xi_N^{-\alpha} d\xi_N \leq C|f|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)} |x_N - \bar{x}_N|^{1-\alpha}. \quad (3.32)$$

Теперь получим оценку константы Гёльдера u_{x_i} по переменным x' с показателем $1 - \alpha$. Пусть

$$A \equiv \frac{|u_{x_i}(x', x_N) - u_{x_i}(\bar{x}', x_N)|}{|x' - \bar{x}'|^{1-\alpha}}.$$

Если $|x' - \bar{x}'| \leq x_N$, то для некоторого $x'_\theta \in [x', \bar{x}']$ из теоремы о среднем и (3.31) следует

$$A \leq |\nabla u_{x_i}(x'_\theta, x_N)| |x' - \bar{x}'|^\alpha \leq |x_N^\alpha \nabla u_{x_i}(x'_\theta, x_N)| \leq C|f|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)}.$$

Если же $|x' - \bar{x}'| > x_N$, то оценим величину A так ($\Delta x = |x' - \bar{x}'|$):

$$A \leq \frac{|u_{x_i}(x', x_N + \Delta x) - u_{x_i}(x', x_N)|}{(\Delta x)^{1-\alpha}} + \frac{|u_{x_i}(x', x_N + \Delta x) - u_{x_i}(\bar{x}', x_N + \Delta x)|}{(\Delta x)^{1-\alpha}} + \frac{|u_{x_i}(\bar{x}', x_N + \Delta x) - u_{x_i}(\bar{x}', x_N)|}{(\Delta x)^{1-\alpha}} \equiv I_1 + I_2 + I_3.$$

При этом

$$I_1 + I_3 \leq C|f|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)}$$

на основании (3.32), а для I_2 выполнено условие $|x' - \bar{x}'| \leq x_N + \Delta x$, так что по доказанному

$$I_2 \leq C|f|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)}.$$

Таким образом,

$$\langle u_{x_i} \rangle_{B_R^+}^{(1-\alpha)} \leq C|f|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)}. \quad (3.33)$$

Следовательно, нами доказано следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть в задаче (3.1), (3.2) функция $f(x)$ финитна с носителем B_R^+ , причем $f(x) \in C^\beta(\mathbb{R}_+^N)$. Тогда $u(x) \in C_\alpha^{2+\beta}(\mathbb{R}_+^N)$ и справедлива оценка

$$|u(x)|_{\alpha, B_R^+}^{(2+\beta)} \leq C_R |f|_{\mathbb{R}_+^N}^{(\beta)}. \quad (3.34)$$

§ 4. Априорная оценка Шаудера для задачи (1.3), (1.4)

Применяя стандартную технику оценок Шаудера (см., например, [17], [18]) и опираясь на результаты § 2 и § 3, для решения задачи (1.3), (1.4) из класса $C_\alpha^{2+\beta}(\bar{\Omega})$ получаем следующую априорную оценку:

$$|u(x)|_{\alpha, \bar{\Omega}}^{(2+\beta)} \leq C(|f|_{\bar{\Omega}}^{(\beta)} + |\varphi|_{\partial\Omega}^{(2+\beta-\alpha)} + |u|_{\bar{\Omega}}^{(0)}). \quad (4.1)$$

При этом используется доказанный в § 3 факт, что для $u(x) \in C_\alpha^{2+\beta}(\bar{\Omega})$ справедлива оценка

$$|\nabla u|_{\bar{\Omega}}^{(1-\alpha)} \leq C|u|_{\alpha, \bar{\Omega}}^{(2+\beta)}.$$

Так как $\beta < 1 - \alpha$, то отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$|u|_{\bar{\Omega}}^{(1+\beta)} \leq \varepsilon |u|_{\alpha, \bar{\Omega}}^{(2+\beta)} + C_\varepsilon |u|_{\bar{\Omega}}^{(0)}.$$

Кроме того, из классического принципа максимума следует, что если $a(x) \leq 0$, то решение задачи (1.3), (1.4) единственно (см., например, [18], [17]). Более того, как мы покажем ниже при доказательстве оценки (4.8), в этом случае справедлива оценка

$$|u(x)|_{\alpha, \bar{\Omega}}^{(2+\beta)} \leq C(|f|_{\bar{\Omega}}^{(\beta)} + |\varphi|_{\partial\Omega}^{(2+\beta-\alpha)}). \quad (4.2)$$

Поскольку возможно продолжение функции $\varphi(x)$ с границы $\partial\Omega$ на всю область $\bar{\Omega}$ до функции класса $C_{\alpha}^{2+\beta}(\bar{\Omega})$ с сохранением нормы, мы будем, как отмечено выше, не ограничивая общности, считать, что $\varphi(x) \equiv 0$. Кроме того, в дальнейшем мы считаем в (1.3) выполненным условие

$$a(x) \leq 0. \quad (4.3)$$

Имея в виду доказательство разрешимости задачи (1.3), (1.4) методом продолжения по параметру, мы рассмотрим для $\omega \in [0, 1]$ семейство задач

$$d(x)^{\alpha} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} u_{x_i x_j}^{(\omega)} + \omega \left[\sum_{i=1}^N a_i u_{x_i}^{(\omega)} + a u^{(\omega)} \right] = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.4)$$

$$u^{(\omega)}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.5)$$

Отметим, что при $\omega = 1$ мы получаем задачу (1.3), (1.4), а при $\omega = 0$ – задачу

$$d(x)^{\alpha} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} u_{x_i x_j} = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.6)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.7)$$

Так как нормы коэффициентов уравнений (4.4) равномерно по ω ограничены, то равномерно по ω справедлива оценка (4.1). При этом, так как коэффициент при $u^{(\omega)}(x)$ в (4.4) равен $\omega a(x) \leq 0$ и, следовательно, решение соответствующей задачи единственно, то равномерно по ω выполнено

$$|u^{(\omega)}(x)|_{\alpha, \bar{\Omega}}^{(2+\beta)} \leq C |f|_{\bar{\Omega}}^{(\beta)}. \quad (4.8)$$

Рассуждения для получения (4.8) из (4.1) стандартны и опираются на факт единственности задачи (4.4), (4.5) (см., например, [10]). Мы приведем эти рассуждения для полноты изложения.

Итак, предположим противное, а именно, что член $|u|_{\bar{\Omega}}^{(0)}$ в оценке (4.1) не может быть отброшен. Тогда существуют последовательности $\omega_n \in [0, 1]$ и f_n , $|f_n|_{\bar{\Omega}}^{(\beta)} = 1$, такие, что

$$|u_n|_{\bar{\Omega}}^{(0)} \geq n, \quad (4.9)$$

где $u_n = u^{(\omega_n)}$ – решение соответствующей задачи (4.4), (4.5). При этом, не ограничивая общности, можно считать, что $\omega_n \rightarrow \omega_0 \in [0, 1]$. Рассмотрим последовательность

$$v_n = \frac{u_n}{|u_n|_{\bar{\Omega}}^{(0)}}.$$

Очевидно, что

$$|v_n(x)|_{\alpha, \bar{\Omega}}^{(2+\beta)} \geq 1, \quad (4.10)$$

и в то же время в силу (4.1)

$$|v_n(x)|_{\alpha, \bar{\Omega}}^{(2+\beta)} \leq C, \quad (4.11)$$

так как

$$|v_n|_{\bar{\Omega}}^{(0)} = 1. \quad (4.12)$$

Функции v_n удовлетворяют задаче (4.4), (4.5) с $\omega = \omega_n$ и с правыми частями

$$f \equiv g_n \equiv \frac{f_n}{|u_n|_{\Omega}^{(0)}}.$$

В силу (4.9) получаем

$$|g_n|_{\Omega}^{(\beta)} = \frac{|f_n|_{\Omega}^{(\beta)}}{|u_n|_{\Omega}^{(0)}} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.13)$$

Из (4.11) следует, что из последовательности v_n можно выделить подпоследовательность (обозначим ее снова v_n), которая сходится к некоторой функции v_0 в пространстве $C_{\alpha}^{2+\beta'}(\bar{\Omega})$ с $\beta' < \beta$. При этом в силу (4.10), (4.12) функция $v_0(x)$ не равна тождественно нулю и $v_0(x)$ удовлетворяет задаче (4.4), (4.5) с $f \equiv 0$ (как следует из (4.13)) и с $\omega = \omega_0$. Последнее же противоречит единственности решения задачи (4.4), (4.5), что доказывает оценки (4.8) и (4.2).

Ввиду применимости (в силу (4.8)) рассуждений о разрешимости методом продолжения по параметру (см., например, [17]) достаточно доказать разрешимость в $C_{\alpha}^{2+\beta}(\bar{\Omega})$ задачи (4.6), (4.7). Запишем уравнение (4.6) в виде

$$a_{ij}u_{x_i x_j} = \frac{f(x)}{d(x)^{\alpha}} \equiv g(x), \quad x \in \Omega. \quad (4.14)$$

Поскольку $g(x)$ в (4.14) принадлежит пространству $L_p(\Omega)$, $1 < p < 1/\alpha$, то из результатов [18] следует, что задача (4.14), (4.7) (и, тем самым, задача (4.6), (4.7)) имеет единственное решение $u(x)$ из пространства $W_p^2(\Omega)$. Нашей задачей теперь будет показать, что это решение на самом деле принадлежит пространству $C_{\alpha}^{2+\beta}(\bar{\Omega})$.

§ 5. Разрешимость и оценки решений задач в областях специального вида

5.1. Простейшее уравнение в области специального вида. Пусть $\Omega_d = \{x \in \mathbb{R}^N : |x_i| \leq d, i = \overline{1, N-1}, 0 < x_N < d\}$, $d \geq d_0 > 0$. Рассмотрим в области Ω_d задачу

$$x_N^{\alpha} \Delta u = f(x), \quad x \in \Omega_d, \quad (5.1)$$

$$u|_{x_N=0, d} = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x_i=\pm d} = 0, \quad (5.3)$$

где $\partial u / \partial n$ – производная по внешней нормали к границе Ω_d , $f(x) \in C^{\beta}(\bar{\Omega})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Область Ω_d имеет ребра и угловые точки на своей границе. Однако это обстоятельство несущественно, так как в силу условия (5.3) решение может быть продолжено четным образом через каждую грань $x_i = \pm d$, $i = \overline{1, N-1}$, области Ω_d . Поэтому в дальнейшем мы будем проводить локальные

оценки только вблизи регулярных точек границы области Ω_d , считая условие (5.3) по существу условием периодичности по каждой из переменных x_i , $i = \overline{1, N-1}$.

Запишем уравнение (5.1) в виде

$$\Delta u = g(x) \equiv \frac{f(x)}{x_N^\alpha}, \quad (5.4)$$

где $g(x) \in L_p(\Omega_d)$ с $1 < p < 1/\alpha$. Из результатов [18] с учетом приведенного замечания следует, что задача (5.1)–(5.3) имеет единственное решение из пространства $W_p^2(\Omega_d)$.

Действительно, решение задачи (5.1)–(5.3) из $W_p^2(\Omega_d)$ можно получить следующим образом. Пусть $g_\varepsilon(x)$, $\varepsilon > 0$, есть последовательность функций класса $C^\infty(\Omega_d)$, полученных сглаживанием функции $f(x)/x_N^\alpha$, таких, что $g_\varepsilon(x) \equiv 0$ в окрестности границы Ω_d и

$$\left\| g_\varepsilon(x) - \frac{f(x)}{x_N^\alpha} \right\|_{L_p(\Omega_d)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Тогда задача (5.1)–(5.3) с правой частью $g_\varepsilon(x)$ может быть решена методом разделения переменных, так как коэффициенты Фурье $g_\varepsilon^{(n)}$ функции $g_\varepsilon(x)$ убывают быстрее любой степени номера n . Это дает решение $u_\varepsilon(x)$ задачи (5.1)–(5.3) из класса $C^\infty(\overline{\Omega_d})$. В то же время в силу приведенного замечания для решений $u_\varepsilon(x)$ (как следует из [18; гл. 9]) справедлива априорная оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{W_p^2(\Omega_d)} \leq C \|g_\varepsilon(x)\|_{L_p(\Omega_d)} \leq C \left\| \frac{f(x)}{x_N^\alpha} \right\|_{L_p(\Omega_d)}.$$

Требуемое решение из $W_p^2(\Omega_d)$ исходной задачи получается предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Покажем, что на самом деле это решение принадлежит $C_\alpha^{2+\beta}(\overline{\Omega_d})$. При этом достаточно рассмотреть только окрестность границы $\{x_N = 0\}$, так как вне этой окрестности уравнение не вырождается, и в силу хорошо известных локальных оценок (см., например, [18], [17]) решение вне окрестности $\{x_N = 0\}$ принадлежит классу $C^{2+\beta}$.

Пусть $x_0 \in \{x_N = 0\}$, $|x_{0i}| < d$, $i = \overline{1, N-1}$. Пусть $\eta_r(x)$ – гладкая срезающая функция такая, что $\eta_r(x) \equiv 1$ на $B_r = B_r(x_0) = \{|x - x_0| \leq r\}$ и $\eta_r(x) \equiv 0$ вне $B_{2r} = B_{2r}(x_0)$, $2r < \min_i \{d - |x_{0i}|\}$.

Умножим уравнение (5.1) на $\eta_r(x)$. Получим

$$x_N^\alpha \Delta v_r = [\eta_r f(x)] + x_N^\alpha [2\nabla \eta_r \nabla u(x) + u(x) \Delta \eta_r] \equiv g_1(x) + x_N^\alpha g_2(x), \quad (5.5)$$

где $v_r(x) = u(x)\eta_r(x)$ – финитная функция. В соответствии с разбиением правой части в (5.5) представим v_r в виде суммы функций v_{r1} и v_{r2} , т.е. $v_r = v_{r1} + v_{r2}$, где v_{r1} и v_{r2} удовлетворяют условиям

$$x_N^\alpha \Delta v_{r1} = g_1(x), \quad x \in \{x_N > 0\}, \quad v_{r1}|_{x_N=0} = 0, \quad (5.6)$$

$$\Delta v_{r2} = g_2(x), \quad x \in \{x_N > 0\}, \quad v_{r2}|_{x_N=0} = 0, \quad (5.7)$$

причем g_1, g_2 финитны. А поскольку $u(x) \in W_p^2(\Omega_d)$, то в силу теорем вложения $g_2(x) \in L_{p_1}(\mathbb{R}_+^N)$, если $p < N$, где $p_1 = Np/(N-p)$ (так как $\nabla u \in L_{p_1}(\mathbb{R}_+^N)$); если же $p > N$, то из теорем вложения следует, что $g_2 \in C^\delta(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ с некоторым $\delta > 0$.

Применение результатов §3 дает $v_{r1} \in C_\alpha^{2+\beta}(B_{2r}^+)$, а из [18; гл. 9] следует $v_{r2} \in W_{p_1}^2(B_{2r}^+)$. Если $p_1 > N$, то $\nabla v_{r2} \in C^\delta(B_{2r}^+)$ с некоторым $\delta > 0$, если же $p_1 < N$, то $\nabla v_{r2} \in L_{p_2}(B_{2r}^+)$, $p_2 = Np_1/(N-p_1)$. Таким образом, если $p_1 < N$, то $\nabla v_r = \nabla v_{r1} + \nabla v_{r2} \in L_{p_2}(B_{2r}^+)$. То есть ∇u на множестве B_r^+ принадлежит пространству $L_{p_2}(B_r^+)$ или даже $C^\delta(B_r^+)$ (если $p_1 > N$).

Умножая уравнение (5.1) на функцию $\eta_{r/2}(x)$ и повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что $u(x) \in W_{p_2}^2(B_{r/2}^+)$, и либо $\nabla u \in C^\delta(B_{r/2}^+)$, если $p_2 > N$, либо $\nabla u \in L_{p_3}(B_{r/2}^+)$, где $p_3 = Np_2/(N-p_2)$. Продолжая этот процесс, мы через конечное число шагов получим, что $p_k > N$, и, следовательно, решение $u(x)$ принадлежит пространству $W_{p_k}^2(B_{r/2^k}^+)$ и по вложению имеет гладкий градиент $\nabla u \in C^\delta(B_{r/2^k}^+)$, $\delta > 0$. Срезая $u(x)$ внутри $B_{r/2^k}^+$ срезкой $\eta_{r/2^{k+1}}$, приходим к соотношению вида (5.5), в котором $g_2 \in C^\delta(B_{r/2^{k+1}}^+)$. Следовательно, на $B_{r/2^{k+1}}^+$ решение $u(x)$ представимо в виде $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in C_\alpha^{2+\beta}(B_{r/2^{k+1}}^+)$, $u_2 \in C^{2+\delta}(B_{r/2^{k+1}}^+)$. Поэтому на этом множестве $\nabla u = \nabla u_1 + \nabla u_2 \in C^{1-\alpha}(B_{r/2^{k+1}}^+)$. Наконец, производя последнюю срезку внутри $B_{r/2^{k+1}}^+$, из соотношения вида (5.5) получаем, что $u(x) \in C_\alpha^{2+\beta}(B_{r/2^{k+2}}^+)$, так как $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in C_\alpha^{2+\beta}(B_{r/2^{k+2}}^+)$, а $u_2 \in C^{2+\beta}(B_{r/2^{k+2}}^+)$.

Следовательно, полученное решение из $W_p^2(\Omega_d)$ задачи (5.1)–(5.3) на самом деле принадлежит пространству $C_\alpha^{2+\beta}(\overline{\Omega_d})$, что доказывает следующую лемму.

ЛЕММА 3. *Задача (5.1)–(5.3) имеет единственное решение $u(x)$ из класса $C_\alpha^{2+\beta}(\overline{\Omega_d})$, причем*

$$|u(x)|_{\alpha, \overline{\Omega_d}}^{(2+\beta)} \leq C |f(x)|_{\overline{\Omega_d}}^{(\beta)}. \quad (5.8)$$

5.2. Более общее уравнение в специальной области. Пусть $F(x') \in C^{2+\beta}(\overline{\Pi_d})$, где $\Pi_d = \{x' : |x_i| < d, i = \overline{1, N-1}\}$, $|F(x')| \leq d/2$, и при каждом $i = \overline{1, N-1}$ выполнено $\nabla F(x') = 0$ при $|x_i| = d$. Обозначим $\Omega_F = \{x \in \mathbb{R}^N : x' \in \Pi_d, F(x') < x_N < d + F(x')\}$, $\Gamma_F = \{x : x_N = F(x'), x' \in \Pi_d\}$. Рассмотрим в области Ω_F задачу определения функции $u(x)$ по условиям

$$d(x)^\alpha Lu \equiv d(x)^\alpha \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) = f(x), \quad x \in \Omega_F, \quad (5.9)$$

$$u(x) = 0 \quad \text{при } x_N = F(x') \quad \text{и при } x_N = d + F(x'), \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{при каждом } i = \overline{1, N-1} \quad \text{при } |x_i| = d, \quad (5.11)$$

где свойства $d(x)$ и $a_{ij}(x)$ такие же, как в задаче (1.2)–(1.6), в частности

$$\nu \operatorname{dist}(x, \Gamma_F) \leq d(x) \leq C \operatorname{dist}(x, \Gamma_F). \quad (5.12)$$

Наряду с уравнением (5.9) рассмотрим также уравнение специального вида

$$\begin{aligned} (x_N - F(x'))^\alpha L^* u \equiv (x_N - F(x'))^\alpha \left[\Delta u + 2 \sum_{i,j=1}^{N-1} F_{x_i}(x') \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_N} \right. \\ \left. + (\nabla_{x'} F)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} + \Delta_{x'} F(x') \frac{\partial u}{\partial x_N} \right] = f(x). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Оператор уравнения (5.13) подобран таким образом, что при замене

$$y_N = x_N - F(x'), \quad y' = x' \quad (5.14)$$

уравнение (5.13) в области Ω_F переходит в точности в уравнение (5.1) в области Ω_d , причем функция $\hat{d}(x) = x_N - F(x')$ удовлетворяет (5.12). Граничные же условия сохраняются в силу свойства $\nabla_{x'} F = 0$ при $|x_i| = d$ функции $F(x')$.

Таким образом, задача (5.13), (5.10), (5.11) имеет единственное решение, для которого справедлива оценка (5.8) (где константа C зависит от F).

Рассмотрим семейство уравнений (т.е. применим метод продолжения по параметру)

$$L_\omega u \equiv [(1 - \omega)(x_N - F(x')) + \omega d(x)]^\alpha [(1 - \omega)L^* + \omega L] u_\omega(x) = f(x) \quad (5.15)$$

с граничными условиями (5.10), (5.11).

Точно так же, как была получена оценка (4.8), для задачи (5.15), (5.10), (5.11) справедлива равномерная по ω априорная оценка

$$|u_\omega(x)|_{\alpha, \Omega_F}^{(2+\beta)} \leq C |f(x)|_{\Omega_F}^{(\beta)}. \quad (5.16)$$

Поскольку при $\omega = 0$ задача (5.15), (5.10), (5.11) имеет единственное решение и равномерно по ω выполнена оценка (5.16), то стандартные рассуждения метода продолжения по параметру показывают, что справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 4. *Задача (5.9)–(5.11) имеет единственное решение $u(x)$ из пространства $C_\alpha^{2+\beta}(\bar{\Omega}_F)$, для которого справедлива оценка*

$$|u(x)|_{\alpha, \bar{\Omega}_F}^{(2+\beta)} \leq C |f(x)|_{\Omega_F}^{(\beta)}. \quad (5.17)$$

§ 6. Завершение доказательства теоремы 1

Как было отмечено в конце § 4, задача (4.6), (4.7) имеет единственное решение из пространства $W_p^2(\Omega)$. Покажем, что на самом деле это решение принадлежит пространству $C_\alpha^{2+\beta}(\bar{\Omega})$. При этом достаточно рассмотреть только окрестность границы $\partial\Omega$.

Пусть $x_0 \in \partial\Omega$, и пусть $\lambda > 0$ настолько мало, что участок границы $\partial\Omega \cap B_{5\lambda}(x_0)$ в местных координатах, связанных с точкой x_0 (см. [13]), представим в виде

$$y_N = \Phi(y'), \quad \Phi(y') \in C^{2+\beta}(\{|y'| \leq 5\lambda\}). \quad (6.1)$$

Пусть $\eta_\lambda(x) \equiv 1$ в $B_\lambda(x_0)$ и $\eta_\lambda(x) \equiv 0$ вне $B_{2\lambda}(x_0)$ – гладкая срезающая функция. Умножая уравнение (4.6) на $\eta_\lambda(x)$, получим

$$\begin{aligned} d(x)^\alpha \sum_{i,j=1}^N a_{ij} v_{x_i x_j} &= f \eta_\lambda + d(x)^\alpha \sum_{i,j=1}^N [a_{ij} u_{x_i} \eta_{x_j} + a_{ij} \eta_{x_i} x_j u] \\ &\equiv g_1(x) + d(x)^\alpha g_2(x), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $v(x) = u(x)\eta_\lambda(x)$ и $v(x)$ вместе с g_1, g_2 отличны от нуля только на множестве $\Omega_{2\lambda} = \Omega \cap B_{2\lambda}(x_0)$.

Пусть $\zeta(y')$ – гладкая срезающая функция на $\{|y'| \leq 5\lambda\}$ такая, что $\zeta(y') \equiv 1$ при $|y'| \leq 3\lambda$ и $\zeta(y') \equiv 0$ при $|y'| \geq 4\lambda$. Обозначим

$$F(y') = \Phi(y')\zeta(y'). \quad (6.3)$$

Пусть еще $\theta(y')$ – гладкая функция такая, что $\theta(y') \equiv 1$ при $|y'| \leq 2\lambda$ и $\theta(y') \equiv 0$ при $|y'| \geq 3\lambda$. Обозначим в местных координатах

$$\tilde{d}(y) = \theta(y')d(x(y)) + [1 - \theta(y')][y_N - F(y')], \quad \tilde{d}(x) \equiv \tilde{d}(y(x)), \quad (6.4)$$

$$\tilde{a}_{ij}(y) = \theta(y')a_{ij}(x(y)) + [1 - \theta(y')]\delta_{ij}, \quad \tilde{a}_{ij}(x) \equiv \tilde{a}_{ij}(y(x)). \quad (6.5)$$

Тогда функция $v(x)$ удовлетворяет в области $\Omega_F = \{y : |y_i| < 5\lambda, i = 1, N-1, F(y') < y_N < 5\lambda + F(y')\}$ уравнению

$$\tilde{d}(x)^\alpha \tilde{a}_{ij} v_{x_i x_j} = g_1(x) + \tilde{d}(x)^\alpha g_2(x),$$

где $g_1(x) \in C^\beta(\overline{\Omega}_F)$, $g_2(x) \in L_{p_1}(\Omega_F)$, $p_1 = Np/(N-p)$.

Опираясь теперь на результаты § 5 и повторяя рассуждения из п. 5.1 при доказательстве леммы 3, мы через конечное число шагов получим, что $u(x) \in C_\alpha^{2+\beta}(\overline{\Omega} \cap B_r(x_0))$ с достаточно малым $r > 0$. Таким образом, задача (4.6), (4.7), а тем самым, и задача (1.3), (1.4) при условии (4.3) имеет единственное решение $u(x)$ из класса $C_\alpha^{2+\beta}(\overline{\Omega})$, для которого справедлива оценка (1.10).

Пусть теперь коэффициент $a(x)$ в уравнении (1.3) имеет произвольный знак. Запишем уравнение (1.9) в виде

$$(Lu - \lambda_0 u) - (\lambda - \lambda_0)u = f, \quad (6.6)$$

где λ_0 вещественно и настолько велико, что $a(x) - \lambda_0 \leq 0$ в $\overline{\Omega}$. Тогда уравнению (6.6) можно придать вид

$$[I - (\lambda - \lambda_0)(L - \lambda_0)^{-1}]u = (L - \lambda_0)^{-1}f \equiv g, \quad (6.7)$$

где $g \in C_\alpha^{2+\beta}(\overline{\Omega})$, а оператор $(L - \lambda_0 I)^{-1}$ вполне непрерывен на $C^\beta(\overline{\Omega})$.

Поскольку для уравнения (6.7) справедлива теория Фредгольма, это завершает доказательство теоремы 1.

Список литературы

- [1] О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, “Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой”, Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анализ. 1969, ВИНТИ, М., 1971, 7–252.

- [2] М. В. Келдыш, “О некоторых случаях вырождения уравнения эллиптического типа на границе области”, *ДАН СССР*, **77**:2 (1951), 181–183.
- [3] G. Fickera, “Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine”, *Atti Accad. Naz. Lincei. Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. Sez. I* (8), **5**:1 (1956), 3–30.
- [4] М. И. Вишик, “Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области”, *Матем. сб.*, **35(77)**:3 (1954), 513–568; англ. пер.: M. Visik, “Boundary-value problems for elliptic equations degenerating on the boundary of a region”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **35** (1964), 15–78.
- [5] М. И. Вишик, О. А. Ладыженская, “Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений”, *УМН*, **11**:6 (1956), 41–97; англ. пер.: M. I. Vishik, O. A. Ladyzhenskaya, “Boundary value problems for partial differential equations and certain classes of operator equations”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **10** (1958), 223–281.
- [6] О. А. Олейник, “О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой”, *Матем. сб.*, **69(111)**:1 (1966), 111–140.
- [7] М. И. Вишик, В. В. Грушин, “Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области”, *Матем. сб.*, **80(122)**:4(12) (1969), 455–491; англ. пер.: M. I. Višik, V. V. Grušin, “Boundary value problems for partial differential equations and certain classes of operator equations jour Math. USSR-Sb.”, **9**:4 (1969), 423–454.
- [8] О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, *Уравнения с неотрицательной характеристической формой*, Изд-во Моск. ун-та, М., 2010.
- [9] S. Levendorskii, *Degenerate elliptic equations*, Math. Appl., **258**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.
- [10] C. Goulaouic, N. Shimakura, “Regularité hölderienne de certains problèmes aux limites elliptiques dégénérés”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **10**:1 (1983), 79–108.
- [11] Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев, “Об одной граничной задаче для сильно вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка в угловой области”, *Укр. матем. журн.*, **59**:7 (2007), 867–883; англ. пер.: B. V. Bazalii, S. P. Degtyarev, “On a boundary value problem for a strongly degenerate second order elliptic equation in an angular domain”, *Ukrainian Math. J.*, **59**:7 (2007), 955–975.
- [12] С. П. Дегтярев, “Об оптимальной регулярности решений первой краевой задачи для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений”, *Укр. матем. вісник*, **3**:4 (2006), 443–466; англ. пер.: S. P. Degtyarev, “On the optimal regularity of solutions of the first boundary value problem for a class of degenerate elliptic equations”, *Ukr. Math. Bull.*, **3**:4 (2006), 423–446.
- [13] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралъцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Transl. Math. Monogr., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
- [14] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Math. Ser., **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.
- [15] A. Lunardi, *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **16**, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [16] К. К. Головкин, “Об эквивалентных нормировках дробных пространств”, *Работы по автоматическому программированию, численным методам и функциональному анализу*, Тр. МИАН СССР, **66**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1962, 364–383.

- [17] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралъцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, 2-е изд., Наука, М., 1973; англ. пер. 1-го изд.: О. А. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Math. Sci. Engrg., **46**, Academic Press, New York–London, 1968.
- [18] Д. Гилбарг, Н. С. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989; пер. с англ.: D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehren Math. Wiss., **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

Б. В. Базалий (B. V. Bazaliy)

Институт прикладной математики и механики

НАН Украины, г. Донецк

E-mail: bazaliy@iamm.ac.donetsk.ua

Поступила в редакцию

18.10.2011 и 15.07.2012

С. П. Дегтярев (S. P. Degtyarev)

Институт прикладной математики и механики

НАН Украины, г. Донецк

E-mail: degtyar@i.ua